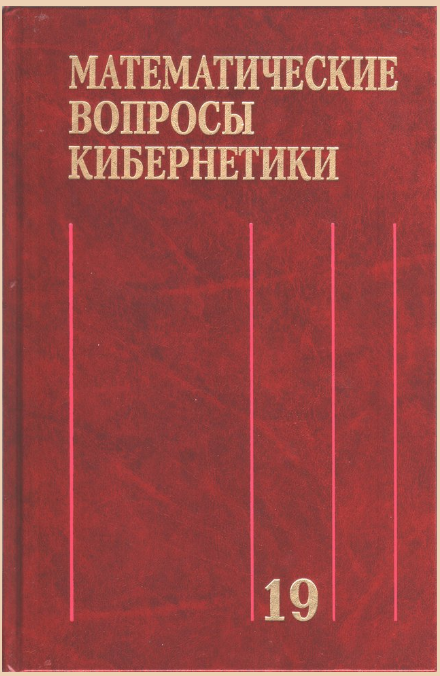

Е. Г. Красулина

О нижней оценке сложности реализации системы всех элементарных симметрических функций контактными схемами

О НИЖНЕЙ ОЦЕНКЕ СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ВСЕХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОНТАКТНЫМИ СХЕМАМИ

Е. Г. КРАСУЛИНА

(МОСКВА)

В теории синтеза управляющих систем одной из основных задач является построение минимальных, т. е. наиболее простых схем. Известно, что наибольшие трудности при этом вызывает доказательство минимальности построенных схем, а также и несколько более широко поставленная задача — получение нижних оценок сложности. Если для «достаточно широких» классов функций есть возможность извлечения практически окончательных нижних оценок из мощностных соображений, то в случае «узких» классов или тем более конкретных функций, ситуация значительно усложняется.

Одним из самых простых и естественных классов булевых функций является класс симметрических функций. Первые результаты о сложности их реализации были получены еще Шенноном [4, 5]. В работе [4] построена контактная схема, реализующая систему всех элементарных симметрических функций от n переменных, и число контактов в этой схеме не более $n(n+1)$.

В настоящей работе показано, что если контактная схема является разделительным $(1, n+1)$-полюсником и реализует систему всех элементарных симметрических функций от n переменных, то число контактов в такой схеме равно по крайней мере $n(n+3)/2$.

Контактные схемы

Напомним определение контактной схемы (см., например, [1]).

Контактной схемой называется неориентированная сеть (т. е. неориентированный граф с выделенными вершинами — полюсами), каждому ребру которой приписана некоторая булева переменная с отрицанием или без него. Ребро вместе с приписанной буквой x^σ $(\sigma = 0, 1)$ называется контактом переменной x, а точнее, замыкающим контактом, если $\sigma = 1$, и размыкающим контактом, если $\sigma = 0$. Контакт x^σ считается замкнутым, когда $x^\sigma = 1$, и разомкнутым, когда $x^\sigma = 0$.

В любой данный момент времени контакт x^σ находится в замкнутом или разомкнутом состоянии.

Состояние контактной схемы — это состояние всех контактов, которые входят в эту схему. Если контактам схемы приписаны переменные из множества $\{x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$, то эта схема имеет 2^n состояний.

Пусть даны два узла a_{i_0} и a_{i_m} контактной схемы. Цепью между a_{i_0} и a_{i_m} называется последовательность ребер

$$(a_{i_0}, a_{i_1}), (a_{i_1}, a_{i_2}), \ldots, (a_{i_{m-1}}, a_{i_m}),$$

где $a_{i_k} \neq a_{i_l}$ при $k \neq l$, $0 \leqslant k, l \leqslant m$.

Будем говорить, что такая цепь имеет длину m, а узлы a_{i_0} и a_{i_m} будем называть концами цепи.

Каждой паре полюсов (a, b) сопоставим функцию f_{ab} (проводимость между полюсами a и b) следующим образом:

1) если $a = b$, то положим $f_{ab}(x_1, \ldots, x_n) = 1$;

2) если $a \neq b$ и не существует в схеме цепей между a и b, то положим $f_{ab}(x_1, \ldots, x_n) = 0$;

3) если $a \neq b$ и множество цепей между a и b не пусто, то, сопоставив каждой цепи $(a, a_{i_1}), (a_{i_1}, a_{i_2}), \ldots, (a_{i_{m-1}}, b)$ конъюнкцию $x_{r_1}^{\sigma_1} x_{r_2}^{\sigma_2} \cdots x_{r_m}^{\sigma_m}$ (проводимость цепи), где $x_{r_t}^{\sigma_t}$ — буква, приписанная ребру $(a_{i_{t-1}}, a_{i_t})$ (здесь $a_{i_0} = a$, $a_{i_m} = b$), положим $f_{ab}(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{\text{по всем цепям}} x_{r_1}^{\sigma_1} \cdots x_{r_m}^{\sigma_m}$.

Будем говорить также, что схема реализует сопоставленные ей функции.

Цепь будем называть замкнутой в состоянии W, если все контакты этой цепи замкнуты, когда схема находится в состоянии W. Узел a будем называть соединенным с b в состоянии w, если существует цепь между a и b, замкнутая в состоянии W. Цепь назовем иногда замкнутой, если существует состояние W схемы такое, что эта цепь замкнута в состоянии W. Если даны два узла схемы a и b, то расстоянием между a и b называется длина кратчайшей иногда замкнутой цепи между a и b.

Разделительный $(1, k)$-полюсник

Контактную схему назовем $(1, k)$-полюсником, если в ней некоторый полюс считается входным, а остальные k полюсов — выходными. Обычно с $(1, k)$-полюсником связывают систему из k функций, каждая из которых реализуется между входом и некоторым выходом.

$(1, k)$-полюсник называется разделительным, если проводимость между любыми двумя его выходами тождественно равна 0.

Заметим, что функции, реализуемые разделительным $(1, k)$-полюсником, попарно ортогональны (т. е. конъюнкция любых двух из них тождественно равна 0).

Элементарные симметрические функции

Функция алгебры логики называется симметрической, если она не изменяется ни при какой перестановке своих переменных. Из этого определения следует, что симметрическая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, равная единице на наборе $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, равна единице и на всяком наборе, имеющем столько же единиц, сколько их содержится в $\widetilde{\sigma}$.

Число a называется рабочим числом симметрической функции f, если f равна единице на (всяком) наборе, имеющем a единиц. Симметрическая функция с одним рабочим числом называется элементарной симметрической функцией. Элементарную симметрическую функцию от n переменных с рабочим числом a обозначим символом S_n^a.

Будем рассматривать реализацию системы всех элементарных симметрических функций $S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^n$ в классе контактных схем. Для этой системы функций описана контактная схема еще в работе Шеннона [4]. Она имеет один специальный узел («корень») и другие специальные узлы («листья») $S_n^0, \ldots, S_n^n$ (см. рис. 1). Легко видеть, что в схеме $n(n+1)/2$ вершин и $n(n+1)$ ребер.

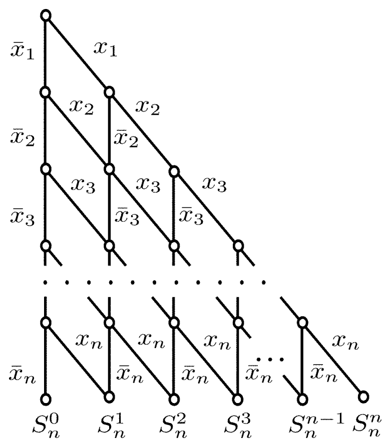

Рис. 1

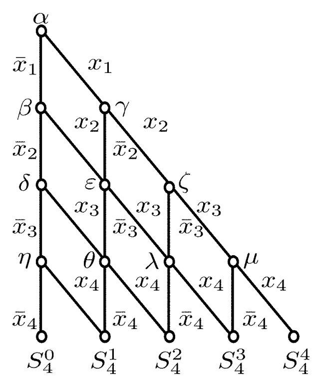

Рис. 2

В качестве примера можно рассмотреть контактную схему, которая реализует пять элементарных симметрических функций от четырех переменных $S_4^0, S_4^1, S_4^2, S_4^3, S_4^4$ (см. рис. 2).

Построение матрицы C_n

Пусть дан некоторый разделительный $(1, n+1)$-полюсник, который реализует систему всех элементарных симметрических функций $S_n^0, \ldots, S_n^n$ от n переменных. Рассмотрим матрицу C_n, которая имеет одну строку для каждой вершины схемы, не являющейся листом. Пусть каждый элемент матрицы c_{jk} представляет собой название листа, который соединен с листом k, когда схема находится в состоянии j, если такой лист имеется, и прочерк в противном случае. Условие разделительности $(1, n+1)$-полюсника используется при построении матрицы, так как это условие обеспечивает, что матрица C_n имеет самое большее один лист, имя которого оказывается записанным на месте данного элемента матрицы.

В таблице приведена матрица C_4, построенная для контактной схемы, изображенной на рис. 2. Листья схемы рис. 2 помечены символами S_4^a $(a = 0, \ldots, 4)$, а вершины, отличные от листьев, обозначены малыми греческими буквами. Кроме того, в самой матрице отмечены индекс (т. е. состояние), соответствующий каждой строке, и индекс (т. е. малая греческая

Таблица

$$
\begin{array}{c c}
1234 & \begin{array}{cccccccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta & \lambda & \mu \end{array} \\
\begin{array}{c} 0000 \\ 0001 \\ 0010 \\ 0011 \\ 0100 \\ 0101 \\ 0110 \\ 0111 \\ 1000 \\ 1001 \\ 1010 \\ 1011 \\ 1100 \\ 1101 \\ 1110 \\ 1111 \end{array} &
\begin{pmatrix}
S_4^0 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 \\
S_4^1 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4 \\
S_4^1 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 \\
S_4^2 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4 \\
S_4^1 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 \\
S_4^2 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4 \\
S_4^2 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 \\
S_4^3 & S_4^3 & S_4^4 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4 \\
S_4^1 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 \\
S_4^2 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4 \\
S_4^2 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 \\
S_4^3 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4 \\
S_4^2 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 \\
S_4^3 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4 \\
S_4^3 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^0 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 \\
S_4^4 & S_4^3 & S_4^4 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4 & S_4^1 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Матрица C_4, соответствующая схеме на рис. 2. Четверки двоичных цифр — состояния схемы, малые греческие буквы — вершины, не являющиеся листьями

буква для вершины, не являющейся листом), соответствующий каждому столбцу. Следует отметить, что каждый элемент матрицы в этом примере есть название листа, а не прочерк.

Лемма о покрытии

Пусть $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\widetilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$ — двоичные наборы, $(i_1, \ldots, i_l)$ — номера мест в наборе $\widetilde{\sigma}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leqslant n$. Будем говорить, что набор $\widetilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$ является $(i_1, \ldots, i_l)$-поднабором набора $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, если $\sigma_{i_j} = \tau_j$. Символом $A_{n,k}$ обозначим $(0, 1)$-матрицу, состоящую из C_n^k строк и n столбцов, в которой все строки различны, и в каждой строке содержится k единиц и $n - k$ нулей. Каждую строку матрицы $A_{n,k}$ будем рассматривать как набор из нулей и единиц длины n.

Пусть $s = 1, \ldots, n$. Тогда символом $T_{n,k}^s$ обозначим множество наборов $\widetilde{\tau}^l = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$ длины не более s:

$$T_{n,k}^s = \bigcup_{l \leqslant s} \bigcup_{\widetilde{\tau}^l} (\tau_1, \ldots, \tau_l),$$

эти наборы $\widetilde{\tau}^l$ являются $(i_1, \ldots, i_l)$-поднаборами, $1 \leqslant i_1 < \ldots, < i_l \leqslant n$, некоторых строк матрицы $A_{n,k}$. Если множество $T_{n,k}^s$ обладает тем свойством, что для любой строки $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ матрицы $A_{n,k}$ в множестве $T_{n,k}^s$ существует хотя бы один набор $\widetilde{\tau^l} = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$, $1 \leqslant l \leqslant s$, который является $(i_1, \ldots, i_l)$-поднабором строки $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant s)$ матрицы $A_{n,k}$, то это множество назовем $T^s_{n,k}$-покрытием матрицы $A_{n,k}$. Каждому $T^s_{n,k}$-покрытию матрицы $A_{n,k}$ поставим в соответствие величину $p^s_{n,k}$:

$$p^s_{n,k} = p_1 2^{s-1} + p_2 2^{s-2} + \ldots + p_{s-1} 2 + p_s,$$

где p_l $(l = 1, \ldots, s)$ — число наборов длины l вида $\widetilde{\tau}^l = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$, являющихся $(i_1, \ldots, i_l)$-поднаборами, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n$, некоторых строк матрицы $A_{n,k}$. Символом $\bar{T}^s_{n,k}$ обозначим покрытие матрицы $A_{n,k}$, состоящее из наборов $\widetilde{\tau}^s = (\tau_1, \ldots, \tau_s)$ длины s, каждый из которых содержит m единиц, где $\max(0, s+k-n) \leqslant m \leqslant \min(k, s)$. т. е. покрытие $\bar{T}^s_{n,k}$ состоит из $\sum\limits_{m=\max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C_s^m$ наборов:

$$\bar{T}^s_{n,k} = \bigcup_{\widetilde{\tau}^s} (\tau_1, \ldots, \tau_s),$$

где наборы $(\tau_1, \ldots, \tau_s)$ являются $(i_1, \ldots, i_s)$-поднаборами, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$, некоторых строк матрицы $A_{n,k}$. Легко видеть, что

$$\bar{p}^s_{n,k} = p_s = \sum_{m=\max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C_s^m.$$

Лемма 1. *Для любого покрытия $T^s_{n,k}$, $1 \leqslant s \leqslant n$, матрицы $A_{n,k}$ справедливо неравенство*

$$p^s_{n,k} \geqslant \bar{p}^s_{n,k},$$

причем

$$\min_{T^s_{n,k}} p^s_{n,k} = \bar{p}^s_{n,k} = \sum_{m=\max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C_s^m,$$

т. е. минимум достигается на покрытии вида $\bar{T}^s_{n,k}$.

Доказательство. Рассмотрим покрытия $\widehat{T}^s_{n,k}$ матрицы $A_{n,k}$, состоящее только из наборов $\widetilde{\tau}^s = (\tau_1, \ldots, \tau_s)$ длины s. Для них

$$\widehat{p}^s_{n,k} = p_s.$$

Легко видеть, что для покрытий $\widehat{T}^s_{n,k}$ справедливо соотношение

$$\min_{T^s_{n,k}} \widehat{p}^s_{n,k} = \bar{p}^s_{n,k}.$$

Потому для покрытий вида $\widehat{T}^s_{n,k}$

$$\widehat{p}^s_{n,k} \geqslant \bar{p}^s_{n,k} = \sum_{m=\max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C_s^m.$$

Предположим, что покрытие $T^s_{n,k}$ матрицы $A_{n,k}$ содержит хотя бы один набор $\widetilde{\tau}^l = (\tau_1, \ldots, \tau_l)$ длины $1 \leqslant l < s$. Покажем, как это покрытие $T^s_{n,k}$ можно заменить на покрытие $\widehat{T}^s_{n,k}$, состоящее только из наборов $\widetilde{\tau}^s = (\tau_1, \ldots, \tau_s)$ длины s, и для величин $p^s_{n,k}$ и $\widehat{p}^s_{n,k}$ будет справедливо соотношение

$$\widehat{p}^s_{n,k} \leqslant p^s_{n,k}.$$

Пусть в покрытии $T^s_{n,k}$ есть набор $\widetilde{\tau}^l=(\tau_1,\ldots,\tau_l)$ длины l, $1\leqslant l<s$, который является $(i_1,\ldots,i_l)$-поднабором, $1\leqslant i_1<\ldots<i_l\leqslant n$, множества $B_{\widetilde{\tau}^l}$ некоторых строк матрицы $A_{n,k}$. Для этого множества $B_{\widetilde{\tau}^l}$ строк рассмотрим множество наборов длины s вида $(\tau_1,\ldots,\tau_l,\tau_{l+1},\ldots,\tau_s)$, которые являются $(i_1,\ldots,i_l,i_{l+1},\ldots,i_s)$-поднаборами, $1\leqslant i_1<\ldots<i_s\leqslant n$, строк $B_{\widetilde{\tau}^l}$, и подсчитаем их количество q_s.

Если значения $\tau_1,\ldots,\tau_l$ фиксированы и $\sum\limits_{i=1}^{l}\tau_i=m$, то $\sum\limits_{i=l+1}^{s}\tau_i=r$, где $\max(0,s-m-n+k)\leqslant r\leqslant\min(s-l,k-m)$. Тогда

$$q_s=\sum_{r=\max(0,s+k-n-m)}^{\min(s-l,k-m)}C^r_{s-l}\leqslant 2^{s-l}.$$

Рассмотрим покрытие $\widetilde{T}^s_{n,k}$, котрое получается из покрытия $T^s_{n,k}$ заменой одного набора $\widetilde{\tau}^l=(\tau_1,\ldots,\tau_l)$ длины l, $1\leqslant l<s$, являющегося $(i_1,\ldots,i_l)$-поднабором, $1\leqslant i_1<\ldots<i_l\leqslant n$, множества $B_{\widetilde{\tau}^l}$ строк матрицы $A_{n,k}$, на $q_s=\sum\limits_{m=\max(0,s+k-n-m)}^{\min(s-l,k-m)}C^m_{s-l}$ наборов длины s вида $\widetilde{\tau}^s=(\tau_1,\ldots$ $\ldots,\tau_l,\tau_{l+1},\ldots,\tau_s)$, которые являются $(i_1,\ldots,i_l,i_{l+1},\ldots,i_s)$-поднаборами того же множества $B_{\widetilde{\tau}^l}$ строк матрицы $A_{n,k}$. Тогда

$$\begin{aligned}\widetilde{p}^s_{n,k}&=p_1 2^{s-1}+\ldots+p_{l-1}2^{s-l+1}+\\&+(p_l-1)2^{s-l}+p_{l+1}2^{s-l-1}+\ldots+p_{s-1}2+p_s+p_q\leqslant\\&\leqslant p_1 2^{s-1}+\ldots+p_{l-1}2^{s-l+1}+\\&+(p_l-1)2^{s-l}+p_{l+1}2^{s-l-1}+\ldots+p_{s-1}2+p_s+2^{s-l}=\\&=p_1 2^{s-1}+\ldots+p_{l-1}2^{s-l+1}+p_l 2^{s-l}+p_{l+1}2^{s-l-1}+\ldots+p_{s-1}2+p_s=p^s_{n,k},\end{aligned}$$

т. е. покрытие $T^s_{n,k}$ можно заменить на покрытие $\widetilde{T}^s_{n,k}$ и будет справедливо неравенство

$$\widetilde{p}^s_{n,k}\leqslant p^s_{n,k}.$$

Если в покрытии $\widetilde{T}^s_{n,k}$ будут существовать наборы $\widetilde{\tau}^l=(\tau_1,\ldots,\tau_l)$ длины l, $1\leqslant l<s$, являющиеся $(i_1,\ldots,i_l)$-поднаборами некоторых строк матрицы $A_{n,k}$, то для каждого из этих наборов $\widetilde{\tau}^l$ выполним преобразования, аналогичные вышеприведеным, и в результате будет получено покрытие $\widehat{T}^s_{n,k}$, для которого будет справедливо неравенство

$$\widehat{p}^s_{n,k}\leqslant p^s_{n,k}.$$

Покрытие $\widehat{T}^s_{n,k}$ будет содержать только наборы длины s, поэтому согласно последним соотношениям

$$p^s_{n,k}\geqslant\widehat{p}^s_{n,k}\geqslant\bar{p}^s_{n,k}=\sum_{m=\max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)}C^m_s.$$

Таким образом для любого покрытия $T^s_{n,k}$ матрицы $A_{n,k}$ справедливо неравенство

$$p^s_{n,k}\geqslant\bar{p}^s_{n,k}.$$

Оценка некоторой величины

Лемма 2. *Для любого* s, $1 \leqslant s \leqslant n$, *справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=\max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C_s^m = (n-s+1)2^s.$$

Доказательство. Так как $C_s^m = 0$ при $m > s$, то

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=\max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C_s^m = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=\max(0,s+k-n)}^{k} C_s^m.$$

Поскольку $s+k-n \leqslant m \leqslant k$ или $m \leqslant k \leqslant n-s+m$, то изменяя в последнем выражении порядок суммирования, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=\max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C_s^m = \sum_{m=0}^{s} C_s^m \sum_{k=m}^{n-s+m} 1 = (n-s+1)2^s.$$

Минимальность

Рассмотрим контактный $(1, n+1)$-полюсник Σ_n, являющийся разделительным и реализующий все элементарные симметрические функции $S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^n$ от n переменных.

В $(1, n+1)$-полюснике Σ_n рассмотрим все C_n^k цепей между входом и листом S_n^k, $k=0, \ldots, n$, занумеруем их и обозначим ν_i^k, $i=1, \ldots, C_n^k$. Каждая цепь ν_i^k, $i=1, \ldots, C_n^k$, соответствует набору $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ длины n, состоящему из k единиц и $n-k$ нулей.

Рассмотрим матрицу $A_{n,k}$, состоящую из C_n^k строк и n столбцов, в каждой строке которой содержится k единиц и $n-k$ нулей.

Каждой цепи ν_i^k, $i=1, \ldots, C_n^k$, $(1, n+1)$-полюсника Σ_n между входом и листом S_n^k поставим в соответствие строку матрицы $A_{n,k}$.

Нетрудно видеть, что существует взаимно-однозначное соответствие между наборами длины n, содержащими k единиц и $n-k$ нулей, цепями ν_i^k, $i=1, \ldots, C_n^k$, между входом и листом S_n^k и строками матрицы $A_{n,k}$.

Пусть $d_{\nu_t^k}(S_n^k)$ для любого $t=1, \ldots, C_n^k$ — расстояние по кратчайшей иногда замкнутой цепи ν_t^k от S_n^k до корня. Для каждой цепи ν_t^k, $t=1, \ldots, C_n^k$, между S_n^k и корнем и каждого целого положительного числа s, $1 \leqslant s \leqslant d_{\nu_t^k(S_n^k)}$, пусть $f_{\nu_t^k}(S_n^k, s)$ — вершина на расстоянии s вдоль некоторой иногда замкнутой цепи длины $d_{\nu_t^k}(S_n^k)$ между S_n^k и корнем.

Рассмотрим вершину $f_{\nu_t^k}(S_n^k, s)$, $t=1, \ldots, C_n^k$, $s=1, \ldots, d_{\nu_t^k}(S_n^k)$, на расстоянии s вдоль иногда замкнутой цепи ν_t^k длины $d_{\nu_t^k(S_n^k)}$ между S_n^k и корнем. Пусть эта цепь ν_t^k проходит от листа S_n^k до вершины $f_{\nu_t^k}(S_n^k, s)$ через контакты $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \ldots, x_{i_s}^{\sigma_{i_s}}$. Среди этих s контактов выберем различные, пусть их будет m $(m \leqslant s)$ штук: $x_{j_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{j_m}^{\sigma_m}$.

Это означает, что в строке матрицы $A_{n,k}$, соответствующей цепи ν_t^k, на местах с номерами $j_1, \ldots, j_m$ стоят $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, т.е. набор $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ является $(j_1, \ldots, j_m)$-поднабором строки матрицы $A_{n,k}$, соответствующей цепи ν_t^k.

Для каждой цепи ν_t^k, $t=1,\ldots,C_n^k$, и вершины $f_{\nu_t^k}(S_n^k,s)$, $1\leqslant s\leqslant d_{\nu_t^k}(S_n^k)$, построим свой набор $(\tau_1,\ldots,\tau_l)$, $1\leqslant l\leqslant s$, который будет являться $(i_1,\ldots,i_l)$-поднабором, $1\leqslant i_1<\ldots<i_l\leqslant n$, строки матрицы $A_{n,k}$, соответствующей цепи ν_t^k.

Эти наборы вида $(\tau_1,\ldots,\tau_l)$, $1\leqslant l\leqslant s$, являющиеся $(i_1,\ldots,i_l)$-поднаборами, $1\leqslant i_1<\ldots<i_l\leqslant n$, строк матрицы $A_{n,k}$, образуют покрытие $T_{n,k}^s$ этой матрицы. Пусть в этом покрытии будет p_l, $l=1,\ldots,s$, наборов $\widetilde{\tau}^l=(\tau_1,\ldots,\tau_l)$ длины l.

Сформулируем теорему 1, которая потребуется в дальнейшем. Ее доказательство можно найти в [3].

Теорема 1. *Если в контактной схеме, контактам которой приписаны переменные из множества $\{x_1,\ldots,x_n,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n\}$, имеется иногда замкнутая цепь длины K между двумя узлами, то число R состояний, в которых эта цепь замкнута, удовлетворяет неравенству $R\geqslant 2^{n-K}$. Кроме того, $R=2^{n-K}$ тогда и только тогда, когда всем контактам цепи приписаны различные переменные.*

Пусть $1\leqslant s\leqslant n$ и среди вершин $f_{\nu_1^k}(S_n^k,s),\ldots,f_{\nu_{C_n^k}^k}(S_n^k,s)$ различными будут $f_{\nu_{i_1}^k}(S_n^k,s),\ldots,f_{\nu_{i_p}^k}(S_n^k,s)$.

Символом $L_{n,k}^s$ обозначим число вхождений в столбцы $f_{\nu_{i_1}^k}(S_n^k,s),\ldots$ $\ldots,f_{\nu_{i_p}^k}(S_n^k,s)$ матрицы C_n листа S_n^k.

Лемма 3. *Для величины $L_{n,k}^s$ справедливо соотношение*

$$L_{n,k}^s\geqslant 2^{n-s}\sum_{m=\max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)}C_s^m.$$

Доказательство. Рассмотрим вершину $f_{\nu_t^k}(S_n^k,s)$, $t=1,\ldots,C_n^k$, $1\leqslant s\leqslant d_{\nu_t^k}(S_n^k)$, на расстоянии s вдоль иногда замкнутой цепи ν_t^k длины $d_{\nu_t^k}(S_n^k)$ между S_n^k и корнем. Пусть в цепи ν_t^k между S_n^k и корнем встречается r_t различных переменных $x_{j_1}^{\sigma_1},\ldots,x_{j_{r_t}}^{\sigma_{r_t}}$. Тогда по теореме 1 вершина $f_{\nu_t^k}(S_n^k,s)$ соединена с S_n^k по крайней мере в $2^{s-r_t}2^{n-s}$ состояниях схемы Σ_n. Значит в столбце $f_{\nu_t^k}(S_n^k,s)$ матрицы C_n лист S_n^k встретится по крайней мере $2^{s-r_t}2^{n-s}$ раз.

Тогда

$$L_{n,k}^s\geqslant\sum_{t=1}^{p}2^{s-r_t}2^{n-s}=2^{n-s}\sum_{t=1}^{p}2^{s-r_t},$$

где p — число различных вершин вида $f_{\nu_t^k}(S_n^k,s)$, $t=1,\ldots,C_n^k$.

Обозначим

$$\bar{L}_{n,k}^s=\sum_{t=1}^{p}2^{s-r_t}.$$

Оценим снизу величину $\bar{L}_{n,k}^s$, т.е. найдем $\min\limits_{\Sigma_n}\bar{L}_{n,k}^s$, где минимум берется по всем $(1,n+1)$-полюсникам Σ_n, реализующим все элементарные симметрические функции от n переменных.

Для того, чтобы найти $\min\limits_{\Sigma_n}\bar{L}_{n,k}^s$, надо построить покрытие $T_{n,k}^s$ для строк матрицы $A_{n,k}$, которое состоит из наборов $\widetilde{\tau}^l=(\tau_1,\ldots,\tau_l)$ длины l, $1\leqslant l\leqslant s$, являющихся $(i_1,\ldots,i_l)$-поднаборами строк матрицы $A_{n,k}$ и для этого покрытия $T_{n,k}^s$ величина $p_{n,k}^s$ должна быть минимальной, т. е.

$$\min_{\Sigma_n}L_{n,k}^s=\min_{T_{n,k}^s}p_{n,k}^s.$$

По лемме 1

$$\min_{T^s_{n,k}} p^s_{n,k} = \bar{p}^s_{n,k} = \sum_{m=\max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C^m_s.$$

Тогда, учитывая последние два соотношения, получим, что

$$L^s_{n,k} \geqslant 2^{n-s} \bar{L}^s_{n,k} \geqslant 2^{n-s} \min_{\Sigma_n} \bar{L}^s_{n,k} = 2^{n-s} \sum_{m=max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C^m_s.$$

Таким образом,

$$L^s_{n,k} \geqslant 2^{n-s} \sum_{m=max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C^m_s$$

и лемма 3 доказана.

Обозначим через L_n число элементов в матрице C_n, не являющихся прочерками.

Лемма 4. *Для величины L_n справедливо неравенство*

$$L_n \geqslant \frac{n(n+1)}{2} 2^n.$$

Доказательство. Обозначим символом $L_{n,k}$ число вхождений листа S^k_n в матрицу C_n. Так как расстояние $d_{\nu^k_t}(S^k_n)$ для любого t, $1 \leqslant t \leqslant C^k_n$, по кратчайшей иногда замкнутой цепи ν^k_t от листа S^k_n до корня есть по крайней мере n, то

$$L_{n,k} \geqslant \sum_{s=1}^{n} L^s_{n,k}.$$

По лемме 3

$$L_{n,k} \geqslant \sum_{s=1}^{n} 2^{n-k} \sum_{m=max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C^m_s.$$

В контактной схеме Σ_n есть $n+1$ листьев $S^0_n, \ldots, S^n_n$, поэтому

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}.$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=1}^{n} 2^{n-s} \sum_{m=max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C^m_s.$$

Изменяя порядок суммирования, получаем

$$L_n \geqslant \sum_{s=1}^{n} 2^{n-s} \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=\max(0,s+k-n)}^{\min(s,k)} C^m_s$$

Из последнего соотношения и леммы 2 имеем

$$L_n \geqslant \sum_{s=1}^{n} 2^{n-s} 2^s (n-s+1) = 2^n \sum_{s=1}^{n} (n-s+1) = \frac{n(n+1)}{2} 2^n.$$

Таким образом,

$$L_n \geqslant \frac{n(n+1)}{2} 2^n.$$

Теорема 2. *Если контактный* $(1, n+1)$*-полюсник является разделительным и реализует все элементарные симметрические функции* $S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^n$ *от* n *переменных, то число вершин в нем должно быть по крайней мере* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *и число контактов равно по крайней мере* $\frac{n(n+3)}{2}$.

Доказательство. В контактном $(1, n+1)$-полюснике Σ_n имеется $n+1$ различных листьев $S_n^0, \ldots, S_n^n$, и название каждого из них имеет по крайней мере $L_{n,k}$ вхождений в матрицу C_n. Поэтому общее число элементов матрицы C_n, не являющихся прочерками, должно быть по крайней мере $L_n = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k}$. По лемме 4 имеем $L_n \geqslant \frac{n(n+1)}{2} 2^n$. Число строк в матрице C_n равно 2^n — числу состояний схемы. Следовательно, для того чтобы иметь столько элементов, матрица C_n должна иметь по крайней мере $\frac{n(n+1)}{2}$ столбцов, из чего можно заключить, что имеется по крайней мере $\frac{n(n+1)}{2}$ вершин, не являющихся листьями. Так как имеется $n+1$ лист, должно быть по крайней мере $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ элементов в множестве V_n всех листьев и вершин, иногда соединенных с листьями. Всякий лист иногда соединен с корнем, следовательно, подсхема, состоящая из всех ребер, которые имеют обе свои вершины в V_n, должна быть связана в топологическом смысле. Тогда в силу теорем 14 и 15 из [2, с. 53–54] число ребер в этой подсхеме есть по крайней мере $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. — М.: Физматгиз, 1963. — С. 63–97.
2. König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. — New York: Chelsea Publishing Company, 1950.
3. Moore E. F. Minimal complete relay decoding networks // IBM J. Res. Dev. — 1960. — V. 4, No. 5. — P. 525–531. [Имеется перевод: Мур Э. Минимальные полностью декодирующие контактные схемы // Кибернетич. сб. Вып. 6. — М.: ИЛ, 1963. — С. 139–152.]
4. Shannon C. E. A symbolic analysis of relay and switching circuits // Trans. AIEE. — 1938. — V. 57. — P. 713–722. [Имеется перевод: Шеннон К. Символический анализ релейных и переключательных схем // Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963. — С. 9–45.]
5. Shannon C. E. The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell. Syst. Techn. J. — 1949. — V. 28, No 1. — P. 59–98. [Имеется перевод: Шеннон К. Синтез двухполюсных переключательных схем // Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963. — С. 59–101.]

Поступило в редакцию: первый вариант 1 IV 2005,
окончательный вариант 11 II 2015.