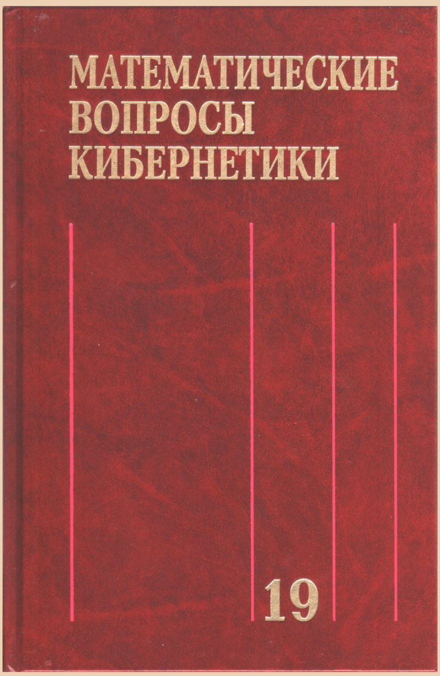

Я. В. Акулов

О классах булевых функций, выразимых относительно расширенной суперпозиции

О КЛАССАХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ, ВЫРАЗИМЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО РАСШИРЕННОЙ СУПЕРПОЗИЦИИ

Я. В. АКУЛОВ

(МОСКВА)

Оглавление

Введение

Данная работа относится к математической теории функциональных систем — одному из основных разделов дискретной математики и математической кибернетики. В ней рассматривается задача о реализации булевых функций формулами специального вида. Вводится понятие операции расширенной суперпозиции. Исследуются вопросы выразимости и полноты в терминах рассматриваемой операции.

В теории функциональных систем важное место занимают задачи классификации функций в соответствии с различными свойствами этих функций. Исследование свойств функций позволяет объединить эти функции в отдельные классы и зачастую помогает получить более полное понимание структуры функциональных множеств и на основе полученной классификации выделить некоторый более общий подход, применимый к другим задачам теории дискретных функций.

Описание и изучение множеств функций, замкнутых относительно операции суперпозиции, является одним из наиболее известных подходов к решению задач классификационного характера. Классический результат в этой области — описание множества всех классов булевых функций, замкнутых относительно операции суперпозиции. Это описание было получено Э. Постом [46,47] в 1920 году. Как показал Пост, мощность множества классов булевых функций, замкнутых относительно операции суперпозиции, является счетной. Ю. И. Янов и А. А. Мучник [43] установили, что в k-значной логике при $k \geqslant 3$ существуют примеры замкнутых классов, не имеющих базиса, а также классов со счетным базисом. Отсюда, в частности, следует, что множество всех замкнутых классов k-значной логики при $k \geqslant 3$ имеет континуальную мощность, что значительно затрудняет исследование.

В связи с указанными трудностями в изучении классов функций k-значной логики в научной литературе были предложены несколько подходов, позволяющих в некоторой степени избегать эти трудности. Один из таких подходов заключается в рассмотрении различных усилений операции суперпозиции, позволяющих получить более просто устроенную решетку классов функций k-значной логики, замкнутых относительно данных усилений.

Другой подход состоит в изучении различных фрагментов решетки замкнутых классов в P_k, в частности фрагментов, состоящих из всех замкнутых классов, содержащих в качестве подмножества некоторый заданный замкнутый класс (такой фрагмент обычно называют надрешеткой этого класса).

Перечислим работы, относящиеся к первому направлению исследований.

В работах С. С. Марченкова [16–18] и Нгуен Ван Хоа [26–28] исследуется S-замыкание, в котором наряду с операцией суперпозиции применяется операция перехода к двойственным функциям относительно фиксированной группы подстановок. Другими словами, S-замкнутый класс для каждой принадлежащей ему функции содержит также всякую двойственную ей относительно указанной группы подстановок функцию. Таким образом, авторами изучается структура решетки замкнутых классов функций k-значной логики при отождествлении похожих, в определенном смысле, функций. В частности, для симметрической группы множества E_k в этих работах установлено, что множество S-замкнутых классов функций k-значной логики для любого $k \geqslant 3$ конечно.

В работе А. В. Кузнецова [11] вводятся понятия параметрической выразимости и параметрического замыкания. В этой работе получено описание параметрически замкнутых классов булевых функций. В работе А. Ф. Данильченко [5] показано, что при $k = 3$ множество параметрически замкнутых классов функций k-значной логики конечно, а в работе С. Барриса и Р. Уилларда [45] аналогичное утверждение доказано для $k > 3$.

В работах Ю. В. Голункова и О. В. Андреевой [2, 4], В. Д. Соловьева [31] и В. А. Тайманова [32, 33] изучаются вопросы полноты функционально-предикатных систем с операциями замыкания программного типа. Каждая операция программного типа определяется своим множеством предикатов. В работах В. А. Тайманова показано, что в зависимости от свойств указанных множеств предикатов мощность множества замкнутых классов может быть конечной, счетной или равняться мощности континуума.

В работах А. В. Кузнецова [11], О. М. Касим-Заде [6, 8, 10], Е. А. Ореховой [30] и Е. В. Михайлец [21, 22] рассматриваются классы функций, допускающих неявное представление над некоторой системой функций.

В работах О. С. Тарасовой [34–36] исследуются классы k-значной логики, $k \geqslant 2$, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановки с множеством наборов специального вида.

В ряде работ рассматривается классификация функций многозначной логики, не связанная с замыканием относительно суперпозиции, посредством введения классов функций, инвариантных относительно иных операций.

В частности, в работах С. В. Яблонского [39, 40], О. М. Касим-Заде [7, 9] и Г. Г. Аманжаева [1] рассматриваются классы, инвариантные относительно подстановки некоторого множества функций одной переменной. В работах Ю. В. Кузнецова [12, 13] рассматриваются классы, инвариантные относительно отождествления переменных.

Необходимо отметить, что существуют также подходы к классификации функций k-значной логики на основе их свойств. Так, например, работах Нгуена Ван Хоа [23–25] изучается подход, состоящий в разбиении множества замкнутых классов функций k-значной логики на классы эквивалентности, где отношения эквивалентности определяются свойствами входящих в них функций.

Дополнительный обзор результатов, полученных в этом направлении, содержится, например, в [35].

Теперь отметим работы, относящиеся ко второму направлению исследований.

В работе Г. А. Бурле [3] описана надрешетка класса U_k всех функций k-значной логики от одной переменной, и показано, что эта надрешетка содержит конечное число замкнутых классов. В работе И. Розенберга [48] описаны все минимальные классы в P_k, содержащие все селекторные функции, и показано, что при фиксированном k их конечное число. В работе А. А. Нечаева [29] описаны все предполные классы, содержащие класс полиномов. В работе С. С. Марченкова [19] были описаны все классы в P_k, содержащие дуальный дискриминатор, т. е. функцию вида

$$d(x,y,z)=\begin{cases} x, \text{если } x=y, \\ z, \text{если } x\neq y. \end{cases}$$

В работе К. Бейкера и А. Пиксли [44] показано, что множество таких классов при фиксированном k конечно. В работе В. Б. Ларионова [14] исследуются надрешетки замкнутых классов, состоящих из самодвойственных или монотонных функций k-значной логики.

Отметим, что даже в случае такого узкого класса, как U_k, надрешетка этого класса является конечной и очень просто устроенной. Тем самым рассмотрение надрешеток замкнутых классов в значительной части случаев представляет собой чрезмерное упрощение задачи описания структуры решетки замкнутых классов в P_k. Поэтому представляет интерес выработка новых подходов к изучению решетки классов в P_k, являющихся в некотором смысле промежуточными между подходом, связанным с изучением отдельных надрешеток в P_k, и непосредственным изучением всей решетки замкнутых классов функций k-значной логики.

В качестве одного из таких подходов в настоящей работе предлагается некоторое обобщение операции суперпозиции. Для корректного обоснования данного обобщения заметим, что задачу описания надрешетки некоторого фиксированного класса F функций k-значной логики можно переформулировать следующим образом. Вместо стандартной операции суперпозиции для функций k-значной логики мы можем рассмотреть модифицированную операцию суперпозиции, в которой при реализации функций формулами допускаются помимо функциональных символов функций из исходного порождающего функционального множества функциональные символы любых функций из F. Тогда надрешетка класса F в точности совпадает с решеткой функциональных классов, замкнутых относительно данной модифицированной операции суперпозиции. Естественным ослаблением рассмотренной модифицированной операции суперпозиции является реализация функций формулами, в которых любые функции из F могут применяться только к содержащимся в формуле переменных.

Настоящая работа посвящена исследованию различных вопросов, связанных с реализацией функций такими формулами. Таким образом, в данной работе исследуется подход, представляющий из себя комбинацию описанных выше методов изучения усилений операции суперпозиции и методов изучения надрешеток замкнутых классов функций k-значной логики. Исследуется операция суперпозиции, состоящая в реализации функций формулами над некоторым исходным функциональным множеством $\mathfrak{A}$, в которых в качестве исходных элементарных подформул рассматриваются не символы переменных, а формулы, реализующие любые функции из некоторого функционального множества F. Такая операция называется в работе операцией расширенной суперпозиции, а множество всех функций, реализуемых данными формулами, называется пополнением $\mathfrak{A}$ относительно F. Отметим, что при фиксированном F такой оператор пополнения не всегда обладает всеми свойствами замыкания. В работе изучаются пополнения замкнутых классов булевых функций относительно функциональных множеств определенного типа. Для рассматриваемых функциональных систем исследуются вопросы выразимости и полноты.

Текст статьи состоит из введения, пяти параграфов и списка литературы. Утверждения нумеруются тройками чисел, где первое число обозначает номер параграфа, второе — номер пункта внутри параграфа, а третье — номер утверждения внутри пункта. Во введении принята отдельная нумерация теорем, после номера каждой теоремы в скобках указан номер, который соответствующее утверждение имеет в тексте статьи.

В § 1 даются необходимые определения, вводится операция расширенной суперпозиции и доказывается ряд свойств этой операции. В частности, даны следующие определения.

Пусть F — множество булевых функций, содержащее все селекторные функции и замкнутое относительно операций введения несущественных переменных и переименования переменных (включая отождествление). Будем называть такие множества *инвариантными классами.* Пусть F — инвариантный класс булевых функций, $\mathfrak{A}$ — некоторое множество булевых функций. Пару таких множеств $(F, \mathfrak{A})$ будем называть *типом* булевых функций. Определим понятие *формулы над типом* $U = (F, \mathfrak{A})$ индуктивно.

1. Выражение $g(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, где $g \in F$; $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — символы переменных, $n \geqslant 1$, является формулой над U. Такие формулы будем называть *тривиальными.*

2. Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над U, $n \geqslant 1$, а $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}$. Выражение Φ вида $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ является формулой над U. Будем называть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ подформулами формулы Φ. Формулу Φ и все подформулы формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ будем также называть подформулами формулы Φ.

Пусть $(F, \mathfrak{A})$ — произвольный тип булевых функций. *Пополнением* системы $\mathfrak{A}$ относительно класса F назовем множество всех булевых функций, реализуемых нетривиальными формулами над типом $(F, \mathfrak{A})$ (обозначение $[\mathfrak{A}]_F$). Пусть B — замкнутый класс булевых функций. Тип $(F, \mathfrak{A})$ называется *полным* в B, если $[\mathfrak{A}]_F = B$.

В § 2 исследуется вопрос выразимости булевых функций в терминах расширенной суперпозиции. Для заданной булевой функции f и заданного инвариантного класса F вводится понятие декомпозиции функции f относительно класса F. Вводится также понятие частичной функции, согласованной с заданным замкнутым классом булевых функций. Для замкнутого класса A и инвариантного класса F показывается, что булева функция принадлежит пополнению $[A]_F$ тогда и только тогда, когда ее декомпозиция относительно инвариантного класса F является согласованной с классом A. Приводятся критерии согласованности частичных функций с замкнутыми классами булевых функций. Рассматриваемые в параграфе понятия вводятся следующим образом.

Пусть $R \subseteq E^n$, где $E = \{0, 1\}$, $n \geqslant 1$. Пусть $r^{(n)}$ — отображение из множества R в E, которое задается функцией $r^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — набор переменных. Функцию $r^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *n-местной частичной булевой функцией*, определенной на множестве R. Если $\widetilde{\alpha} \in E^n \setminus R$, то будем говорить, что функция не определена на наборе $\widetilde{\alpha}$.

Пусть $n \geqslant 1$, $R \subseteq E^n$, $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная булева функция, определенная на множестве R. Будем говорить, что булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *доопределяет* частичную функцию $r(x_1, \ldots, x_n)$, если для любого набора $\widetilde{\alpha} \in R$ выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = r(\widetilde{\alpha})$. Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *доопределением* частичной функции $r(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть A — замкнутый класс булевых функций, $n, k \geqslant 1$. Рассмотрим множество $R \subseteq E^n$ и частичную функцию $r(x_1, \ldots, x_n)$, определенную на множестве R. Функцию $r(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *согласованной* с замкнутым классом A, если существует такое доопределение $f(x_1, \ldots, x_n)$ функции $r(x_1, \ldots, x_n)$, что $f \in A$.

Пусть $n \geqslant 1$, $h(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, F — инвариантный класс булевых функций, $F(n) = \{f_1, \ldots, f_l\}$, $l \geqslant 1$. Рассмотрим множества $E^n = \{\widetilde{\gamma}^1, \widetilde{\gamma}^2, \ldots, \widetilde{\gamma}^{2^n}\}$, $R = \{\widetilde{\delta}^1, \ldots, \widetilde{\delta}^{2^n}\}$, где $\widetilde{\delta}^i = (f_1(\widetilde{\gamma}^i), \ldots, f_l(\widetilde{\gamma}^i)) \in E^l$, $i = 1, \ldots, 2^n$, и частичную функцию $r(x_1, \ldots, x_l)$, определенную на множестве R, и такую, что $r(\widetilde{\delta}^i) = h(\widetilde{\gamma}^i)$ для всех $i = 1, \ldots, 2^n$. Назовем функцию $r(x_1, \ldots, x_l)$ *декомпозицией* функции h относительно инвариантного класса F.

Основным результатом параграфа 2 является

Теорема 1 (2.1.1). *Пусть A — замкнутый класс булевых функций, F — инвариантный класс, $h(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, $n \geqslant 1$. Тогда $h \in [A]_F$, если и только если декомпозиция функции h относительно F является согласованной с классом A.*

В § 3 исследуется вопрос о представлении пополнений замкнутых классов в виде пересечения конечного числа других пополнений. Пусть A — замкнутый класс булевых функций. Будем называть A *разложимым*, если существуют такие отличные от A замкнутые классы $B_1, \ldots, B_k$, $k \geqslant 2$, что $A = B_1 \cap \ldots \cap B_k$. Будем называть A *универсально разложимым*, если существуют такие отличные от A замкнутые классы $C_1, \ldots, C_m$, $m \geqslant 2$, что для произвольного инвариантного класса F выполняется соотношение

$$[A]_F = [C_1]_F \cap \ldots \cap [C_m]_F.$$

Обозначим через MU класс монотонных булевых функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной. Основным результатом параграфа 3 является

Теорема 2 (3.2.1). *Произвольный замкнутый класс булевых функций, отличный от класса MU, универсально разложим тогда и только тогда, когда он разложим. Класс MU является разложимым, но не является универсально разложимым.*

Эта теорема используется в дальнейшем в других параграфах статьи. Она позволяет сводить исследование пополнений всех замкнутых классов булевых функций к исследованию пополнений сравнительно небольшого подмножества замкнутых классов.

В § 4 исследуются пополнения замкнутых классов булевых функций относительно других замкнутых классов. Вводится понятие *$\mathscr{P}$-пополнения*: пополнение $[A]_F$ называется $\mathscr{P}$-пополнением, если A и F являются замкнутыми классами, содержащими неконстантные функции. Приводится полное описание множества всех $\mathscr{P}$-пополнений. Здесь и далее обозначения для замкнутых классов взяты согласно работам А. Б. Угольникова [37,38].

Положим

$$\mathscr{A} = \{M_{01}, L, K_{01}, T_0, O^m, S, SU, U_{01}\},$$

$$\mathscr{F} = \{M_{01}, L, L_0, L_1, L_{01}, SL, K_{01}, D_{01}, SU, T_0, T_1, T_{01}, O^m,$$
$$O_0^m, MO_0^m, I^m, I_1^m, MI_1^m, S, SM, S_{01}\},$$

где $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Рассмотрим всевозможные типы (F, A) такие, что $A \in \mathscr{A}, F \in \mathscr{F}$. Соответствующие им пополнения $[A]_F$ будем называть *базовыми $\mathscr{P}$-пополнениями.*

Пусть $A \subseteq P_2$. Обозначим через A^* множество всех функций $g \in P_2$ таких, что $g^* \in A$, а через $\overline{A}$ множество всех функций $g \in P_2$ таких, что $\overline{g} \in A$. Обозначим через $A(n)$, где $n \geqslant 1$, множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных, содержащихся в множестве A.

Положим $\widehat{\mathfrak{P}_2} = \mathscr{F}$ и $\widehat{\overline{\mathfrak{P}}_2} = \bigcup\limits_{A \in I} \{A \cup \overline{A}\}$, где

$$I = \{T_{01}, K_{01}, D_{01}, L_{01}, M_{01}, O^m, I^m, O_0^m, I_1^m, MO_0^m, I_1^m, SM\},$$

$m = 2, 3, \ldots, \infty$.

Пусть F — замкнутый класс булевых функций. Обозначим через G_F^m $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$ множество всех булевых функций $g(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, удовлетворяющих следующему условию: для любого q, $1 \leqslant q \leqslant m$, и для любых q наборов, на которых функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ принимает нулевое значение, существует функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$, также принимающая на этих наборах нулевое значение. Обозначим через $\widehat{\mathfrak{G}}$ множество, состоящее из классов $G_{L_{01}}^m$, $G_{L_1}^m$, G_{SL}^m, G_{SU}^m, $m = 2, 3, \ldots, \infty$.

Пусть A — замкнутый класс булевых функций. Будем обозначать через $l(A)$ множество всех булевых функций $h(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что существует функция $g(x_1, \ldots, x_n) \in A$ такая, что $h \leqslant g$. Будем обозначать через $b(A)$ множество всех булевых функций $h(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что существует функция $g(x_1, \ldots, x_n) \in A$ такая, что $h \geqslant g$. Несложно видеть, что $b(A) = l(A)^*$. Обозначим через $\widehat{\mathfrak{S}}$ множество, состоящее из классов $l(S)$, $l(S_{01})$, $l(SM)$, $b(S)$, $b(S_{01})$, $b(SM)$.

Обозначим через AS множество всех таких функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, что для любых двух противоположных наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\overline{\widetilde{\alpha}}$ длины n выполняется соотношение $f(\widetilde{\alpha}) = f(\overline{\widetilde{\alpha}})$. Положим $\widehat{\mathfrak{Z}} = \{S \cup AS\}$.

Пусть A — замкнутый класс. Обозначим через $K(A)$ множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, представимых в виде $f(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1, \ldots, x_n) \& \ldots \& g_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k \geqslant 1$, где $g_i(x_1, \ldots, x_n) \in A$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Положим

$$\widehat{\mathfrak{L}} = \{K(SU), K(L), K(L_0), K(L_1), K(L_{01}), K(SL)\}.$$

Теорема 3 (4.8.1). *Множество G булевых функций является базовым $\mathscr{P}$-пополнением тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$G \in \widehat{\mathfrak{S}} \cup \widehat{\mathfrak{Z}} \cup \widehat{\mathfrak{G}} \cup \widehat{\mathfrak{L}} \cup \widehat{\mathfrak{P}_2} \cup \widehat{\overline{\mathfrak{P}}_2}.$$

В этом параграфе также показывается, что всякое $\mathscr{P}$-пополнение можно получить из базовых $\mathscr{P}$-пополнений при помощи операций пересечения, добавления констант и двойственности. На основе этих соображений приводится полное описание $\mathscr{P}$-пополнений.

Обозначим через $\mathfrak{P}_2$ множество всех неконстантных замкнутых классов, а также классов получающихся из них добавлением констант. Обозначим через $\overline{\mathfrak{P}}_2$ множество всех таких классов булевых функций A, что существует замкнутый класс булевых функций B такой, что $A = B \cup \overline{B}$, а также классов, получающихся из этих классов одновременным добавлением обеих констант. Обозначим через $\mathfrak{G}$ множество, состоящее из классов, содержащихся в $\widehat{\mathfrak{G}}$, а также классов

$$T_0 \cap G^m_{L_{01}}, (T_0 \cap G^m_{L_{01}}) \cup \{1\}, T_{01} \cap G^2_{L_{01}} \cap H^2_{L_{01}}, G^2_{SL} \cap H^2_{SL}, G^2_{SU} \cap H^2_{SU},$$

$m = 2, 3, \ldots, \infty$, и двойственных к перечисленным. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество, состоящее из классов, содержащихся в классе $\widehat{\mathfrak{S}}$, классов $T_1 \cap l(S_{01})$, $T_1 \cap l(SM)$, $M_{01} \cap l(SM)$, классов, получающихся из них добавлением констант, а также классов, двойственных перечисленным. Обозначим через $\mathfrak{Z}$ множество, состоящее из классов $S \cup AS$, $T_0 \cap (S \cup AS)$, $T_1 \cap (S \cup AS)$, а также двойственных к перечисленным. Обозначим через $\mathfrak{L}$ множество, состоящее из классов, содержащихся в множестве $\widehat{\mathfrak{L}}$, классов, получающихся из них добавлением констант, а также классов, двойственных к перечисленным.

Основным результатом параграфа 4 является следующая теорема.

Теорема 4 (4.9.15). *Множество G булевых функций является $\mathscr{P}$-пополнением тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$G \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{P}_2 \cup \overline{\mathfrak{P}}_2.$$

В § 5 рассматриваются вопросы полноты операции расширенной суперпозиции. Рассматриваемая задача состоит в том, что для данных замкнутых классов A и B, где $A \subseteq B$ необходимо найти семейство всех таких инвариантных классов $F \subseteq B$, что $[A]_F = B$. Данное семейство инвариантных классов обозначается через $\mathfrak{R}(A, B)$. В параграфе 5 описаны все семейства $\mathfrak{R}(A, B)$ такие, что $B = P_2$, L, T_0, T_1, S, M, а A — замкнутый класс такой, что $A \subseteq B$.

Основные результаты работы получены под руководством А. Б. Угольникова.

§ 1. Определения и основные свойства операции расширенной суперпозиции

1.1. Основные определения и обозначения. Обозначим через P_2 множество всех булевых функций. Пусть $F \subseteq P_2$. Обозначим через $F(n)$ множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из множества F, где $n \geqslant 1$. Положим $E = \{0, 1\}$. Обозначим через E^n множество всех наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ таких, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$, $n \geqslant 1$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, — булева функция. Переменную x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, будем называть *существенной для функции* f, если найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in E$ такие, что

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

В этом случае будем говорить, что функция f *существенно зависит* от переменной x_i. В противном случае переменную x_i будем называть *несущественной* и будем говорить, что функция f *не зависит существенно* от переменной x_i. Функции будем называть *равными*, если одну из них можно получить из другой путем добавления и удаления несущественных переменных. Пусть $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in E^n$, $\widetilde{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in E^n$, $n\geqslant 1$. Набор $\widetilde{\beta}$ не превосходит набора $\widetilde{\alpha}$ (обозначение $\widetilde{\alpha}\geqslant\widetilde{\beta}$), если для любого i, $1\leqslant i\leqslant n$, выполнено неравенство $\alpha_i\geqslant\beta_i$. Функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, $n\geqslant 1$, будем называть *монотонной*, если для любых двух наборов $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\in E^n$ таких, что $\widetilde{\alpha}\geqslant\widetilde{\beta}$, выполняется соотношение $f(\widetilde{\alpha})\geqslant f(\widetilde{\beta})$. Функцию $f(x_1,\ldots,x_n)\in P_2$ будем называть *селекторной*, если существует такой номер i, $1\leqslant i\leqslant n$, что для любого набора $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ из E^n выполняется равенство $f(\widetilde{\alpha})=\alpha_i$. Будем обозначать эту функцию через $e_i^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)$ или через x_i. Будем называть функцию $f(x_1,\ldots,x_n)\in P_2$ *константой* 0 (соответственно *константой* 1), если она принимает значение 0 (соответственно 1) на всех наборах из E^n, $n\geqslant 1$, и обозначать через 0 (соответственно через 1).

Функцию $\overline{f}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n)$ будем называть *двойственной* к функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ (обозначение $f^*(x_1,\ldots,x_n)$). Функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ будем называть самодвойственной, если $f=f^*$. Пусть $B\subseteq P_2$. Обозначим через B^* множество всех функций $g\in P_2$ таких, что $g^*\in B$, а через $\overline{B}$ — множество всех функций $g\in P_2$ таких, что $\overline{g}\in B$. Будем называть отображение $\varphi: B\to B^*$ операцией двойственности.

Пусть A — множество булевых функций. Дадим индуктивное определение *формулы над* A.

1. Выражение x_i, где x_i — символ переменной, является формулой над A. Такие формулы будем называть *тривиальными*.

2. Пусть $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ — формулы над A, $n\geqslant 1$, а $f(x_1,\ldots,x_n)\in A$. Выражение Φ вида $f(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ является формулой над A. Будем называть $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ подформулами формулы Φ. Формулу Φ и все подформулы формул $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ будем также называть подформулами формулы Φ.

Произвольная формула естественным образом задает некоторую булеву функцию. Будем говорить, что формула *реализует* эту функцию. Формулу Θ, реализующую некоторую функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ $n\geqslant 1$, будем также обозначать через $\Theta(x_1,\ldots,x_n)$. Способ реализации булевых функций нетривиальными формулами указанного вида будем называть *операцией суперпозиции*. Формулы называются эквивалентными, если они реализуют равные функции. Множество всех булевых функций, реализуемых с помощью операции суперпозиции над множеством A, будем называть *замыканием A относительно операции суперпозиции* и обозначать через $[A]$. Множество A называется *замкнутым относительно операции суперпозиции*, если $A=[A]$.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in P_2$, $n\geqslant 1$. Согласно теореме Жегалкина, функция f может быть представлена в виде $K_1+\ldots+K_r$, где $K_1,\ldots,K_r$, — различные выражения вида $x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_l}$, 0 или 1, $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_l\leqslant n$, $1\leqslant l\leqslant n$. Такую формулу будем называть *полиномом Жегалкина* функции f, а выражения $K_1,\ldots,K_r$ — *мономами*. Из соображений двойственности следует также, что f может быть представлена в виде $D_1+\ldots+D_r$, где $D_1,\ldots,D_r$, — различные выражения вида $x_{j_1}\vee x_{j_2}\vee\ldots\vee x_{j_l}$, 0 или 1, $1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_l\leqslant n$, $1\leqslant l\leqslant n$. Такую формулу будем называть *дизъюнктивным полиномом Жегалкина* функции f, а выражения $D_1,\ldots,D_r$ *дизъюнктивными мономами*.

Будем называть количество различных переменных в произвольном мономе *рангом* этого монома. Будем называть наибольший ранг мономов, входящих в полином Жегалкина произвольной булевой функции, *рангом* этой функции.

Пусть $m \geqslant 2$. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию $< 0^m >$ (соответственно $< 1^m >$), если любые m наборов, на которых f равна 0 (соответственно 1), имеют общую нулевую (соответственно единичную) компоненту. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию $< 0^\infty >$ (соответственно $< 1^\infty >$), если все наборы, на которых f равна 0 (соответственно 1), имеют общую нулевую (соответственно единичную) компоненту.

Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть линейной, если выполняется равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n,$$

конъюнкцией, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_0 \& (c_1 \vee x_1) \& \ldots \& (c_n \vee x_n),$$

и дизъюнкцией, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 \vee c_1 x_1 \vee \ldots \vee c_n x_n,$$

где $c_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n$.

Следуя работам [37, 38], перечислим некоторые множества булевых функций: T_1 — множество всех функций, сохраняющих константу 1; T_0 — множество всех функций, сохраняющих константу 0; S — множество всех самодвойственных функций; M — множество всех монотонных функций; L — множество всех линейных функций; K — множество всех конъюнкций; D — множество всех дизъюнкций; O^m — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 0^m >$, $m = 2, \ldots, \infty$; I^m — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 1^m >$, $m = 2, \ldots, \infty$; U — множество всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной; C — множество всех функций, не имеющих существенных переменных. Нетрудно показать, что все перечисленные множества булевых функций являются замкнутыми классами относительно операций суперпозиции и введения несущественных переменных (см, например, [38, 41, 42]). Будем называеть замкнутый класс A *неконстантным*, если $A \nsubseteq C$.

Положим $T_{01} = T_0 \cap T_1$. Обозначим через M_1, L_1, K_1, D_1, U_1, C_1, I_1^m пересечения T_1 с классами M, L, K, D, U, C, I^m соответственно, через M_0, L_0, K_0, D_0, U_0, C_0, O_0^m пересечения T_0 с классами M, L, K, D, U, C, O^m соответственно, через S_{01}, M_{01}, L_{01}, K_{01}, D_{01}, U_{01} пересечения T_{01} с классами S, M, L, K, D, U соответственно, через MO^m, MI^m, MO_0^m, MI_1^m, MU пересечения M с классами O^m, I^m, O_0^m, I_1^m, U соответственно, $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Положим $SM = S \cap M$, $SL = S \cap L$, $SU = S \cap U$.

Диаграмму вложенности замкнутых классов см. на рисунке.

1.2. Операция расширенной суперпозиции. Пусть F — множество булевых функций, содержащее все селекторные функции и замкнутое относительно операций введения несущественных переменных и переименования переменных (включая отождествление). Будем называть такие множества *инвариантными классами*. Поскольку равенство функций полагается с точностью до добавления и удаления фиктивных переменных, то операцию введения несущественных переменных в определении инвариантного класса можно опустить. Очевидно, что всякий замкнутый класс булевых функций, отличный от классов C, C_0 и C_1, является инвариантным.

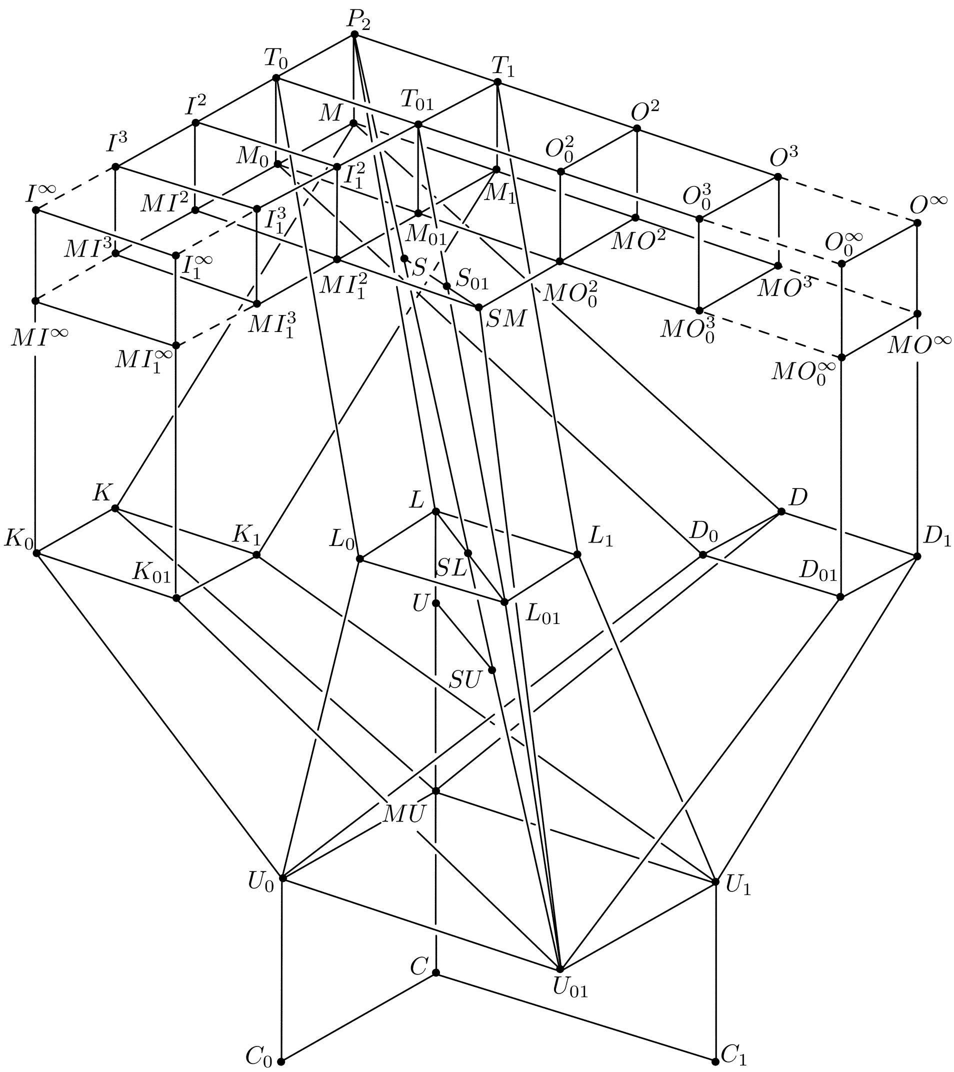

Диаграмма Поста

Необходимо подчеркнуть, что данное понятие инвариантного класса отличается от понятия инвариантного класса, введенного С. В. Яблонским (см., например, [39, 40]). Отметим также, что инвариантный класс в описанном выше смысле является инвариантным классом в терминах, введенных в работах [12, 13].

Пусть F — инвариантный класс булевых функций, $\mathfrak{A}$ — некоторое множество булевых функций. Пару таких множеств $(F, \mathfrak{A})$ будем называть *типом* булевых функций. Определим понятие *формулы над типом* $U = (F, \mathfrak{A})$ индуктивно.

1. Выражение $g(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, где $g \in F$; $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ — символы переменных, $n \geqslant 1$, является формулой над U. Такие формулы будем называть *тривиальными*.

2. Пусть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над U, $n \geqslant 1$, а $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{A}$. Выражение Φ вида $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ является формулой над U. Будем называть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ подформулами формулы Φ. Формулу Φ и все подформулы формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ будем также называть подформулами формулы Φ.

Заметим, что всякая формула над типом $(F, \mathfrak{A})$ является формулой над множеством $F \cup \mathfrak{A}$ и поэтому реализует некоторую булеву функцию. Способ реализации булевых функций нетривиальными формулами указанного вида будем называть *операцией расширенной суперпозиции.*

Пусть $(F, \mathfrak{A})$ — произвольный тип булевых функций. *Пополнением* системы $\mathfrak{A}$ относительно класса F назовем множество всех булевых функций, реализуемых нетривиальными формулами над типом $(F, \mathfrak{A})$ (обозначение $[\mathfrak{A}]_F$). Отметим, что если F состоит только из селекторных функций, то $[\mathfrak{A}]_F = [\mathfrak{A}]$, поскольку в этом случае операция расширенной суперпозиции совпадает с операцией суперпозиции. Таким образом, операция расширенной суперпозиции является обобщением операции суперпозиции. Пусть B — замкнутый класс булевых функций. Будем называть тип (F, A) *полным* в B, если $[A]_F = B$.

1.3. Свойства операции расширенной суперпозиции. Отметим следующие свойства расширенной суперпозиции.

Лемма 1.3.1. *Для любого типа* $(F, \mathfrak{A})$ *выполнено равенство* $[\mathfrak{A}]_F = [A]_F$, *где* $A = [\mathfrak{A}]$.

Доказательство. Соотношение $[\mathfrak{A}]_F \subseteq [A]_F$ очевидно. Докажем обратное включение $[\mathfrak{A}]_F \supseteq [A]_F$. Рассмотрим некоторую формулу Θ над типом (F, A). Построим формулу над типом $(F, \mathfrak{A})$, эквивалентную формуле Θ. Будем преобразовывать формулу Θ следующим образом. Тривиальные формулы над (F, A) являются также тривиальными формулами над $(F, \mathfrak{A})$. Пусть в Θ есть подформула вида $g(\Phi_1, \ldots, \Phi_n), n \geqslant 1$, такая, что $g \in A$, $g \notin \mathfrak{A}$ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над $(F, \mathfrak{A})$. Докажем, что можно заменить эту подформулу на эквивалентную ей формулу над типом $(F, \mathfrak{A})$. Пусть $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула над $\mathfrak{A}$, реализующая функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$. Заметим, что формула $g(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ эквивалентна формуле $\Psi(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, причем формула $\Psi(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ является формулой над типом $(F, \mathfrak{A})$. Таким образом, начиная от тривиальных формул, будем заменять в формуле Θ подформулы над типом (F, A) на эквивалентные им подформулы над типом $(F, \mathfrak{A})$. В конце этого процесса получим некоторую формулу Θ' над $(F, \mathfrak{A})$, эквивалентную формуле Θ. Следовательно, любая функция из $[A]_F$ может быть реализована формулой над типом $(F, \mathfrak{A})$. Значит, $[\mathfrak{A}]_F \supseteq [A]_F$. Лемма доказана.

Из леммы 1.3.1 следует, что, при исследовании пополнений систем булевых функций достаточно рассматривать только пополнения замкнутых классов. В дальнейшем при рассмотрении какого-либо типа (F, A) будем подразумевать, что A — замкнутый класс.

Лемма 1.3.2. *Пусть* $(F, \mathfrak{A})$ — *произвольный тип булевых функций,* $A = [\mathfrak{A}]$. *Пусть* $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [\mathfrak{A}]_F, n \geqslant 1$. *Тогда существуют функция* $g(y_1, \ldots, y_k)$, $k \geqslant 1$, *принадлежащая замкнутому классу* A, *и попарно различные функции* $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *принадлежащие классу* F *такие, что выполняется равенство*

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Доказательство. Рассмотрим формулу $\Theta(x_1, \ldots, x_n)$ над типом $(F, \mathfrak{A})$, реализующую функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ — некоторая тривиальная подформула формулы $\Theta(x_1, \ldots, x_n)$, где $i_1, \ldots, i_k \in \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть она реализует некоторую функцию $f'(x_1, \ldots, x_n)$ из $F(n)$ (с точностью до несущественных переменных). Обозначим через T множество всех функций, реализуемых тривиальными подформулами формулы Θ. Пусть

$$T = \{f'_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f'_k(x_1, \ldots, x_n)\},$$

где $k \geqslant 1$. Сопоставим каждой функции $f'_i(x_1, \ldots, x_n) \in T$ переменную y_i, где $i = 1, \ldots, k$. Получим набор переменных $y_1, \ldots, y_k$. Заменим в формуле Θ каждое вхождение тривиальной подформулы, реализующей функцию f'_i, на переменную y_i для всех $1 \leqslant i \leqslant k$. Обозначим полученную формулу через $\Theta'(y_1, \ldots, y_k)$. Очевидно, что Θ' — формула над $\mathfrak{A}$, реализующую некоторую функцию $g(y_1, \ldots, y_k)$ из A. Подставим в эту функцию вместо каждой переменной y_i соответствующую ей функцию $f'_i(x_1, \ldots, x_n)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Получим формулу

$$g(f'_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f'_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Очевидно, что эта формула эквивалентна формуле Θ. Поэтому она реализует функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$. Лемма доказана.

Лемма 1.3.3. *Для произвольного типа* $(F, \mathfrak{A})$ *выполняется равенство* $[\mathfrak{A}]_F = ([\mathfrak{A}^*]_{F^*})^*$.

Доказательство. Пусть F — инвариантный класс, $\mathfrak{A}$ — множество булевых функций. Заметим, что тогда F^* является инвариантным классом. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n) \in [\mathfrak{A}]_F$. Согласно лемме 1.3.2 функция $h(x_1, \ldots, x_n)$ реализуется некоторой формулой над типом $(F, \mathfrak{A})$ вида

$$g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)),$$

$k \geqslant 1$. Тогда формула

$$g^*(f^*_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f^*_k(x_1, \ldots, x_n)) = \overline{g}(f_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n), \ldots, f_k(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)),$$

над типом $(F^*, \mathfrak{A}^*)$ реализует функцию, двойственную к $h(x_1, \ldots, x_n)$. Следовательно,

$$[\mathfrak{A}]_F \subseteq ([\mathfrak{A}^*]_{F^*})^*.$$

Обратное включение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 1.3.4. *Пусть A и B — замкнутые классы такие, что $A = = B \cup \widetilde{C}$, где $\widetilde{C} \in \{C, C_0, C_1\}$, а F — инвариантный класс. Тогда выполняется равенство* $[A]_F = [B]_F \cup \widetilde{C}$.

Доказательство. Пусть $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [A]_F$, $n \geqslant 1$. Тогда из леммы 1.3.2 следует, что существуют функция $g(y_1, \ldots, y_k) \in A$, $k \geqslant 1$, и попарно различные функции $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F$ такие, что

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Тогда либо $g \in B$, либо $g \in \widetilde{C}$. Если $g \in B$, то несложно видеть, что $h \in [B]_F$. Если g — константная функция, то h также является константной функцией, равной g, т.е. $h \in \widetilde{C}$. Таким образом, выполняется соотношение $[A]_F \subseteq [B]_F \cup \widetilde{C}$. С другой стороны, несложно видеть, что $[B]_F \subseteq [A]_F$ и $\widetilde{C} \subseteq [A]_F$, т. е. $[B]_F \cup \widetilde{C} \subseteq [A]_F$. Лемма доказана.

Лемма 1.3.5. *Пусть A — замкнутый класс, F — инвариантный класс. Пусть $\widetilde{C} \in \{C, C_0, C_1\}$. Тогда выполняются равенства*

$$[A]_{F \cup \widetilde{C}} = [A \cup \widetilde{C}]_{F \cup \widetilde{C}} = [A \cup \widetilde{C}]_F.$$

Доказательство. Заметим, что $F \cup \widetilde{C}$ является инвариантным классом. Очевидно, что любая формула над типом $(F \cup \widetilde{C}, A)$ эквивалентна некоторой формуле над типом $(F, A \cup \widetilde{C})$, и наоборот. Отсюда следует утверждение леммы.

Следующие три леммы очевидны.

Лемма 1.3.6. *Пусть A — неконстантный замкнутый класс, F — замкнутый класс такой, что $A \subseteq F$. Тогда выполняется равенство $[A]_F = F$.*

Лемма 1.3.7. *Пусть A — замкнутый класс, F — инвариантный класс такой, что $F \subseteq A$. Тогда выполняется равенство $[A]_F = A$.*

Лемма 1.3.8. *Пусть A — замкнутый класс, F — инвариантный класс. Тогда пополнение $[A]_F$ является инвариантным классом.*

§ 2. Критерий выразимости функций в терминах расширенной суперпозиции

2.1. Формулировка и доказательство критерия выразимости. Для изучения расширенной суперпозиции полезен критерий, согласно которому можно определить принадлежит ли та или иная функция некоторому пополнению. В этом параграфе рассматривается и доказывается такой критерий.

Пусть $R \subseteq E^n, n \geqslant 1$, $r^{(n)}$ — отображение из множества R в E. Пусть $r^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ — функция от переменных $x_1, \ldots, x_n$, задающая это отображение. Отметим, что R — область определения, E — область значений функции $r^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$. Функцию $r^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *n-местной частичной булевой функцией*, определенной на множестве R. Если набор $\widetilde{\alpha}$ таков, что $\widetilde{\alpha} \in E^n$ и $\widetilde{\alpha} \notin R$, то будем говорить, что функция не определена на наборе $\widetilde{\alpha}$.

Пусть $n \geqslant 1$, $R \subseteq E^n$, $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная булева функция, определенная на множестве R. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция такая, что для любого набора $\widetilde{\alpha} \in R$ выполнено равенство $f(\widetilde{\alpha}) = r(\widetilde{\alpha})$. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *доопределяет* частичную функцию $r(x_1, \ldots, x_n)$. Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *доопределяющей функцией* или *доопределением* частичной функции $r(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть A — замкнутый класс булевых функций, $n, k \geqslant 1$. Пусть R — некоторое подмножество множества E^n. Пусть $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная булева функция, определенная на множестве R. Функцию $r(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *согласованной* с замкнутым классом A, если существует такое доопределение $f(x_1, \ldots, x_n)$ функции $r(x_1, \ldots, x_n)$, что $f \in A$. Такую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *доопределением* $r(x_1, \ldots, x_n)$ в классе A.

Пусть F — инвариантный класс. Рассмотрим множество $F(n) = \{f'_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f'_l(x_1, \ldots, x_n)\}$, $l \geqslant 1$. Упорядочим функции из этого множества следующим образом. Пусть $f_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1, \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n) = x_n$. Если $\overline{x} \in F$, то положим $m = 2n$ и $f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{x}_1, \ldots \ldots, f_{2n}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{x}_n$. Иначе положим $m = n$. Пусть $f_{m+1}, \ldots, f_l$ — все остальные функции из множества $F(n)$, упорядоченные в лексикографическом порядке наборов значений этих функций на всевозможных наборах значений их переменных, также взятых в лексикографическом порядке. Обозначим через $\widehat{F}(n)$ упорядоченный набор $(f_1, \ldots, f_l)$.

Пусть $n \geqslant 1$, $h(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, F — инвариантный класс булевых функций, $\widehat{F}(n) = (f_1, \ldots, f_l)$, $l \geqslant 1$. Пусть $E^n = \{\widetilde{\gamma}^1, \widetilde{\gamma}^2, \ldots, \widetilde{\gamma}^{2^n}\}$. Рассмотрим множество $R = \{\widetilde{\delta}^1, \ldots, \widetilde{\delta}^{2^n}\}$, где $\widetilde{\delta}^i = (f_1(\widetilde{\gamma}^i), \ldots, f_l(\widetilde{\gamma}^i)) \in E^l$, $i = 1, \ldots, 2^n$, и частичную функцию $r(x_1, \ldots, x_l)$, определенную на множестве R, и такую, что $r(\widetilde{\delta}^i) = h(\widetilde{\gamma}^i)$ для всех $i = 1, \ldots, 2^n$. Назовем функцию $r(x_1, \ldots, x_l)$ *декомпозицией* функции h относительно инвариантного класса F и будем обозначать ее через $r_F(h)(x_1, \ldots, x_l)$. Будем обозначать область определения функции $r_F(h)$ через $R_F(h)$.

Докажем следующую теорему, в которой формулируется критерий выразимости функций в терминах расширенной суперпозиции.

Теорема 2.1.1. *Пусть A — замкнутый класс, F — инвариантный класс булевых функций, $h(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, $n \geqslant 1$. Тогда $h \in [A]_F$, если и только если декомпозиция функции h относительно F является согласованной с классом A.*

Доказательство. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n) \in [A]_F$, $\widehat{F}(n) = (f_1, \ldots, f_l)$, $l \geqslant 1$. Согласно лемме 1.3.2 существует функция $g(y_1, \ldots, y_k) \in A, k \geqslant 1$ и различные функции $f_{i_1}, \ldots, f_{i_k} \in \widehat{F}(n)$ такие, что формула

$$g(f_{i_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{i_k}(x_1, \ldots, x_n)),$$

реализует функцию h. Очевидно, $k \leqslant l$. Рассмотрим булеву функцию $\lambda(z_1, \ldots, z_l)$, которая получается из g переименованием переменных $y_1, \ldots, y_k$ в $z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}$ и, если $k < l$, введением $l - k$ оставшихся фиктивных переменных. Очевидно, что $\lambda \in A$. Заметим, что для любых наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in E$ и $\beta_1 \ldots \beta_k \in E$ таких, что $\alpha_{i_1} = \beta_1, \ldots, \alpha_{i_k} = \beta_k$, выполнено равенство $\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = g(\beta_1, \ldots, \beta_k)$. Рассмотрим формулу

$$\lambda(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)).$$

Она также реализует функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$ и является формулой над типом (F, A). Пусть $\widetilde{\delta} = (f_1(\widetilde{\gamma}), \ldots, f_l(\widetilde{\gamma}))$ — произвольный набор из области определения функции $r(x_1, \ldots, x_l)$, где $\widetilde{\gamma} \in E^n$. Согласно определению декомпозиции функции h относительно F выполняются следующие равенства:

$$\lambda(\widetilde{\delta}) = \lambda(f_1(\widetilde{\gamma}), \ldots, f_l(\widetilde{\gamma})) = h(\widetilde{\gamma}) = r_F(h)(\widetilde{\delta}).$$

Следовательно, функция λ является доопределением частичной функции $r_F(h)(x_1, \ldots, x_l)$ в классе A, и, таким образом, функция $r_F(h)$ согласована с классом A.

Докажем утверждение леммы в другую сторону. Пусть функция $r_F(h)(x_1, \ldots, x_n)$ согласована с классом A. Пусть $g(x_1, \ldots, x_l)$ — доопределение функции $r_F(h)$ в классе A. Согласно определению декомпозиции формула над типом (F, A)

$$g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n))$$

реализует функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$. Лемма доказана.

Лемма 2.1.2. *Пусть A и B — замкнутые классы, $C = A \cap B$. Пусть $n \geqslant 1$. Если частичная функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ согласована с классом C, то она согласована с классами A и B.*

Доказательство. Рассмотрим доопределение $f(x_1, \ldots, x_n)$ частичной функции $r(x_1, \ldots, x_n)$ в классе C. Поскольку $C = A \cap B$, то $f \in A$ и $f \in B$. Отсюда следует, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ также является доопределением функции r в классах A и B, что и требовалось доказать.

2.2. Критерии согласованности. Как следует из теоремы 2.1.1, принадлежность функции некоторому пополнению можно свести к вопросу о согласованности частичной функции с некоторым замкнутым классом. Поэтому полезно рассмотреть следующие критерии согласованности частичных функций с замкнутыми классами булевых функций.

Утверждение 2.2.1. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом M тогда и только тогда, когда для любых наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ таких, что $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\beta}$, выполняется неравенство $r(\widetilde{\alpha}) \geqslant r(\widetilde{\beta})$.*

Доказательство. Пусть частичная функция r удовлетворяет данному условию, т. е. для любых наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ таких, что $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\beta}$, выполняется неравенство $r(\widetilde{\alpha}) \geqslant r(\widetilde{\beta})$. Построим функцию, доопределяющую функции r в классе M. Пусть $\widetilde{\alpha} \in R$, $\widetilde{\alpha} \neq (0, \ldots, 0)$, и $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_p}$ — все единичные компоненты набора $\widetilde{\alpha}$, где $p \geqslant 1$. Рассмотрим функцию $g^{\widetilde{\alpha}}(x_1, \ldots, x_n) = x_{j_1} \& \ldots \& x_{j_p}$. Сопоставим каждому ненулевому набору $\widetilde{\alpha} \in R$ функцию $g^{\widetilde{\alpha}}$. Кроме того, сопоставим нулевому набору $\widetilde{0} = (0, \ldots, 0)$ длины n функцию $g^{\widetilde{0}} = 1$. Рассмотрим следующую функцию:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\widetilde{\alpha} \in R \mid r(\widetilde{\alpha}) = 1} g^{\widetilde{\alpha}}.$$

Очевидно, что функция h монотонна. На каждом наборе $\widetilde{\alpha} \in R$ таком, что $r(\widetilde{\alpha}) = 1$, функция h принимает единичное значение, так как $g^{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{\alpha}) = 1$. Предположим, что на некотором наборе $\widetilde{\alpha} \in R$ таком, что $r(\widetilde{\alpha}) = 0$, функция h принимает единичное значение. Тогда найдется набор $\widetilde{\beta} \in R$ такой, что $g^{\widetilde{\beta}}(\widetilde{\alpha}) = 1$. Очевидно, что тогда $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\beta}$. Это неравенство противоречит условию утверждения. Следовательно, функция h является доопределением частичной функции r в классе M. Поэтому функция r согласована с классом M.

Пусть частичная функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ согласована с классом M. Предположим, что r не удовлетворяет условию утверждения, т. е. существуют наборы $\widetilde{\alpha}^i$ и $\widetilde{\alpha}^j$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, такие, что $\widetilde{\alpha}^i \geqslant \widetilde{\alpha}^j$ и $r(\widetilde{\alpha}^i) < r(\widetilde{\alpha}^j)$. Тогда по определению монотонной функции любое доопределение частной функции r не будет являться монотонным, откуда следует, что не существует доопределения r в классе M. Получено противоречие. Следовательно, предположение неверно. Утверждение доказано.

Утверждение 2.2.2. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом S тогда и только тогда, когда для любых наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ таких, что $\widetilde{\alpha} = \overline{\widetilde{\beta}}$, выполняется равенство $r(\widetilde{\alpha}) = \overline{r}(\widetilde{\beta})$.*

Доказательство. Пусть частичная функция r удовлетворяет условию утверждения, т. е. для любых наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ таких, что $\widetilde{\alpha} = \overline{\widetilde{\beta}}$, выполняется равенство $r(\widetilde{\alpha}) = \overline{r}(\widetilde{\beta})$. Построим доопределение функции r в классе S. Рассмотрим множество доопределяющих функций частичной функции r. Обозначим это множество через F_1. Рассмотрим подмножество множества F_1, содержащее все функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_1$, удовлетворяющие условию: если для некоторого набора $\widetilde{\alpha}^i \in R$ набор $\overline{\widetilde{\alpha}^i}$ не принадлежит R, то функция f удовлетворяет соотношению $f(\overline{\widetilde{\alpha}^i}) = \overline{r}(\widetilde{\alpha}^i)$. Обозначим это множество через F_2. Очевидно, что $F_2 \neq \varnothing$. Рассмотрим подмножество множества F_2, содержащее все функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_2$, удовлетворяющие следующему условию: для любой пары наборов $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\delta}$ таких, что выполняется соотношение $\widetilde{\gamma} = \overline{\widetilde{\delta}}$, и ни один из них не лежит в множестве R, функция f удовлетворяет соотношению $f(\widetilde{\gamma}) = \overline{f}(\widetilde{\delta})$. Обозначим это множество через F_3. Заметим, что $F_3 \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольную функцию из множества F_3. Эта функция, очевидно, будет самодвойственной и, следовательно, искомым доопределением функции r в классе S.

Пусть частичная функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ согласована с S. Предположим, что она не удовлетворяет условию утверждения, т. е. существуют такие наборы $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$, что $\widetilde{\alpha} = \overline{\widetilde{\beta}}$, и выполняется равенство $r(\widetilde{\alpha}) = r(\widetilde{\beta})$. Тогда любое доопределение частной функции r не является самодвойственной функцией, что противоречит согласованности r с классом S. Утверждение доказано.

Лемма 2.2.3. *Пусть F — инвариантный класс и $1 \in [S]_F$. Тогда F содержит по крайней мере одну из функций* 0, 1.

Доказательство. Рассмотрим множество $F(1) = \{f_1(x), \ldots, f_l(x)\}$, $l \geqslant 1$. Рассмотрим функцию $h(x)$, тождественно равную единице. Тогда $h \in [S]_F$. Рассмотрим декомпозицию функции h относительно F, обозначим ее через $r(y_1, \ldots, y_l)$. Согласно теореме 2.1.1 частичная функция r согласована с классом S. Рассмотрим наборы $\widetilde{\alpha} = (f_1(0), f_2(0), \ldots, f_l(0))$ и $\widetilde{\beta} = (f_1(1), f_2(1), \ldots, f_l(1))$ из области определения функции r. Тогда выполняются равенства $r(\widetilde{\alpha}) = h(0) = 1$ и $r(\widetilde{\beta}) = h(1) = 1$. Следовательно, согласно утверждению 2.2.2 наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ не являются противоположными. Отсюда следует, что существует такое k, $1 \leqslant k \leqslant l$, что $f_k(0) = f_k(1)$. Следовательно, выполняется одно из двух равенств $f_k(x) = 1$ и $f_k(x) = 0$, откуда следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Утверждение 2.2.4. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, $2 \leqslant m \leqslant \infty$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом O^m тогда и только тогда, когда для любого q, $1 \leqslant q \leqslant m$, и любых q наборов $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^q \in R$ таких, что $r(\widetilde{\alpha}^1) = \ldots = r(\widetilde{\alpha}^q) = 0$, найдется такое j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $\alpha_j^1 = \ldots = \alpha_j^q = 0$.*

Доказательство. Пусть для любого $q \leqslant m$ и любых q наборов $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^q \in R$ таких, что $r(\widetilde{\alpha}^1) = \ldots = r(\widetilde{\alpha}^q) = 0$, найдется такое j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, что $\alpha_j^1 = \ldots = \alpha_j^q = 0$. Построим доопределение функции r в классе O^m. Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, доопределяющую функцию r таким образом, что для любого набора $\widetilde{\gamma} \notin R$ выполняется соотношение $f(\widetilde{\gamma}) = 1$. Согласно определению класса O^m функция f принадлежит этому классу и, следовательно, является искомым доопределением в классе O^m.

Пусть функция r является согласованной с классом O^m. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — доопределение функции r в этом классе. Тогда $f \in O^m$. Поэтому для любого $q \leqslant m$ и любых q наборов $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^q \in R$ таких, что $r(\widetilde{\alpha}^1) = \ldots = r(\widetilde{\alpha}^q) = 0$, найдется такое j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $\alpha_j^1 = \ldots = \alpha_j^q = 0$. Утверждение доказано.

Аналогично доказываются следующие утверждения.

Утверждение 2.2.5. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, $2 \leqslant m \leqslant \infty$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом I^m тогда и только тогда, когда для любого $q \leqslant m$ и любых q наборов $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^q \in R$ таких, что $r(\widetilde{\alpha}^1) = \ldots = r(\widetilde{\alpha}^q) = 1$, найдется такое j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $\alpha_j^1 = \ldots = \alpha_j^q = 1$.*

Утверждение 2.2.6. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом T_0 тогда и только тогда, когда выполняется условие: если $\widetilde{\alpha} \in R$ и $\widetilde{\alpha}$ является нулевым набором, то $r(\widetilde{\alpha}) = 0$.*

Утверждение 2.2.7. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом T_1 тогда и только тогда, когда выполняется условие: если $\widetilde{\alpha} \in R$ и $\widetilde{\alpha}$ является единичным набором, то $r(\widetilde{\alpha}) = 1$.*

Утверждение 2.2.8. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом T_{01} тогда и только тогда, когда выполняется условие: если $\widetilde{\alpha} \in R$ и $\widetilde{\alpha} = (c, c, \ldots, c)$, где $c \in \{0, 1\}$, то $r(\widetilde{\alpha}) = c$.*

Следствие 2.2.9. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство*

$$[T_{01}]_F = [T_1]_F \cap [T_0]_F.$$

Доказательство. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, $n \geqslant 1$. Из утверждений 2.2.6, 2.2.7, 2.2.8 следует, что условие согласованности декомпозиции функции h относительно F с классом T_{01} эквивалентно одновременному выполнению услов ий согласованности с классами T_0 и T_1. Применяя теорему 2.1.1, получаем, что булева функция принадлежит $[T_{01}]_F$ тогда и только тогда, когда она принадлежит одновременно классам $[T_1]_F$ и $[T_0]_F$. Следствие доказано.

Лемма 2.2.10. *Пусть F — инвариантный класс такой, что $1 \in [T_0]_F$. Тогда F содержит по крайней мере одну из функций $1, \overline{x}$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\widehat{F}(1)=\{f_1(x), \ldots, f_l(x)\}$, $l \geqslant 1$. Рассмотрим функцию $h(x)=1$. Согласно условию леммы выполняется соотношение $h \in [T_0]_F$. Пусть $r(y_1, \ldots, y_l)$ — декомпозиция функции h относительно F. Согласно теореме 2.1.1 частичная функция r согласована с классом T_0. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha}=(f_1(0), f_2(0), \ldots, f_l(0))$ из области определения функции r. Тогда выполняется соотношение $r(\widetilde{\alpha})=h(0)=1$. Следовательно, согласно утверждению 2.2.6 набор $\widetilde{\alpha}$ отличен от нулевого. Поэтому существует такое k, $1 \leqslant k \leqslant l$, что $f_k(0)=1$. Следовательно, выполняется одно из двух равенств $f_k(x)=1$, $f_k(x)=\overline{x}$, откуда следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 2.2.11. *Пусть F — инвариантный класс, $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Пусть выполняется соотношение $0 \in [O^m]_F$. Тогда $0 \in F$.*

Доказательство. Пусть $\widehat{F}(1)=\{f_1(x_1), \ldots, f_l(x_1)\}$, $l \geqslant 1$. Рассмотрим функцию $h(x)$, тождественно равную нулю. Тогда $h \in [O^m]_F$. Рассмотрим декомпозицию $r(y_1, \ldots, y_l)$ функции h относительно F. Согласно теореме 2.1.1 частичная функция r согласована с классом O^m. Рассмотрим наборы $\widetilde{\alpha}=(f_1(0), f_2(0), \ldots, f_l(0))$ и $\widetilde{\beta}=(f_1(1), f_2(1), \ldots, f_l(1))$ из области определения функции r. Тогда $r(\widetilde{\alpha})=h(0)=0$, $r(\widetilde{\beta})=h(1)=0$. Согласно утверждению 2.2.4 наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ имеют общую нулевую компоненту. Поэтому существует такое k, $1 \leqslant k \leqslant l$, что $f_k(0)=f_k(1)=0$. Лемма доказана.

Утверждение 2.2.12. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом M_1 тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами M и T_1.*

Доказательство. Пусть функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ согласована с классами M и T_1, и выполняются соответствующие условия согласованности. Построим доопределение функции r в классе M_1. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$ — доопределение функции r в классе M. Если выполняется равенство $h(1, \ldots, 1)=1$, то h является искомым доопределением в классе T_1. Пусть выполняется равенство $h(1, \ldots, 1)=0$. Согласно утверждению 2.2.7 единичный набор не входит в область определения функции r. Поскольку функция h монотонна, то она является нулевой. Рассмотрим функцию $g(x_1, \ldots, x_n)=x_1 \& \ldots \& x_n$. Она принимает те же значения, что функция h, на всех наборах, кроме единичного. Поскольку единичный набор не входит в область определения функции r, то функция g является ее доопределением в классе M_1. Следовательно, функция r согласована с классом M_1.

В обратную сторону утверждение следует из леммы 2.1.2. Утверждение доказано.

Аналогично доказываются следующие утверждения.

Утверждение 2.2.13. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом M_0 тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами M и T_0.*

Утверждение 2.2.14. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом M_{01} тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами M, T_0 и T_1.*

Следствие 2.2.15. *Для любого инвариантного класса F выполнены равенства*

$$[M_1]_F = [M]_F \cap [T_1]_F,$$

$$[M_0]_F = [M]_F \cap [T_0]_F,$$

$$[M_{01}]_F = [M]_F \cap [T_1]_F \cap [T_0]_F.$$

Утверждение 2.2.16. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, $2 \leqslant m \leqslant \infty$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом O_0^m тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами O^m и T_0.*

Доказательство. Пусть частичная функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ согласована с классами O^m и T_0, и выполняются соответствующие условия согласованности. Построим доопределение функции r в классе O_0^m. Рассмотрим множество доопределяющих функций частичной функции r. Обозначим это множество через F_1. Рассмотрим подмножество множества F_1, содержащее все функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_1$ такие, что $f(0, \ldots, 0) = 0$. Обозначим это множество через F_2. Из утверждения 2.2.6 следует, что если существует набор $\widetilde{\alpha} \in R$ такой, что $\widetilde{\alpha} = (0, \ldots, 0)$, то $r(\widetilde{\alpha}) = 0$. Следовательно, множество F_2 не пусто. Рассмотрим подмножество множества F_2, содержащее все функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_2$, принимающие на всех наборах, отличных от нулевого и не принадлежащих множеству R, единичное значение. Обозначим это множество через F_3. Заметим, что существует ровно одно доопределение, удовлетворяющее этим свойствам, т. е. множество F_3 состоит из одной функции. Обозначим эту функцию через $f(x_1, \ldots, x_n)$. Согласно утверждению 2.2.4 любые q наборов, где $q \leqslant m$, на которых функция f принимает нулевое значение, имеют общую нулевую компоненту. Следовательно, функция $f \in O_0^m$, т. е. f является искомым доопределением в классе O_0^m, откуда следует требуемое утверждение.

В обратную сторону утверждение следует из леммы 2.1.2. Утверждение доказано.

Следствие 2.2.17. *Пусть $2 \leqslant m \leqslant \infty$. Для любого инвариантного класса F выполнено равенство*

$$[O_0^m]_F = [O^m]_F \cap [T_0]_F.$$

Утверждение 2.2.18. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, $2 \leqslant m \leqslant \infty$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом MO^m тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами O^m и M.*

Доказательство. Пусть частичная функция r является согласованной с классами O^m и M, и выполняются соответствующие условия согласованности. Построим доопределение функции r в классе MO^m. Рассмотрим множество F_1 доопределяющих функций частичной функции r. Рассмотрим множество Γ всех наборов $\widetilde{\gamma}$ длины n, удовлетворяющих условию: существует набор $\widetilde{\alpha} \in R$ такой, что $r(\widetilde{\alpha}) = 0$ и $\widetilde{\gamma} \leqslant \widetilde{\alpha}$. Рассмотрим подмножество F_2 множества F_1, содержащее все функции $f \in F_1$ такие, что $f(\widetilde{\gamma}) = 0$

для всех наборов $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$. Согласно условию согласованности с классом M для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ таких, что $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\beta}$, выполняется соотношение $r(\widetilde{\alpha}) \geqslant r(\widetilde{\beta})$. Отсюда следует, что множество Γ не содержит набора $\widetilde{\delta} \in R$, такого, что $r(\widetilde{\delta}) = 1$. Следовательно, $F_2 \neq \varnothing$. Рассмотрим подмножество F_3 множества F_2, содержащее все функции $f \in F_2$, принимающие на всех наборах, не принадлежащих множеству $R \cup \Gamma$, единичное значение. Заметим, что существует ровно одно доопределение, удовлетворяющее этим свойствам, т. е. множество F_3 состоит из одной функции. Обозначим эту функцию через $f(x_1, \ldots, x_n)$. Докажем, что $f \in MO^m$.

Докажем, что $f \in M$. Пусть $\widetilde{\delta}^1$ и $\widetilde{\delta}^2$ — различные наборы длины n такие, что $\widetilde{\delta}^1 > \widetilde{\delta}^2$. Докажем, что $f(\widetilde{\delta}^1) \geqslant f(\widetilde{\delta}^2)$. Предположим противное. Пусть $f(\widetilde{\delta}^1) = 0$, $f(\widetilde{\delta}^2) = 1$. Тогда в силу согласованности функции r с классом M хотя бы один из этих наборов не принадлежит множеству R. Возможны три различных случая.

Пусть $\widetilde{\delta}^1 \in R$, $\widetilde{\delta}^2 \notin R$. Тогда $\widetilde{\delta}^2 \notin \Gamma$, поскольку для любого набора $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ выполнено $f(\widetilde{\gamma}) = 0$. Набор $\widetilde{\delta}^2$ принадлежит множеству Γ по определению этого множества, поскольку $\widetilde{\delta}^1 \in R$, $\widetilde{\delta}^1 > \widetilde{\delta}^2$, $f(\widetilde{\delta}^1) = 0$. Получили противоречие.

Пусть $\widetilde{\delta}^1 \notin R$, $\widetilde{\delta}^2 \in R$. Тогда $\widetilde{\delta}^1 \in \Gamma$, поскольку для любого набора $\widetilde{\gamma} \notin R \cup \Gamma$ выполнено $f(\widetilde{\gamma}) = 1$. Поскольку $\widetilde{\delta}^1 \in \Gamma$, то существует такое $\widetilde{\alpha} \in R$, что $r(\widetilde{\alpha}) = 0$ и $\widetilde{\delta}^1 \leqslant \widetilde{\alpha}$. Заметим, что $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\delta}^1 \geqslant \widetilde{\delta}^2$, $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, $f(\widetilde{\delta}^2) = 1$. Поэтому согласно утверждению 2.2.1 функция r не согласована с классом M, поскольку $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\delta}^2 \in R$. Получили противоречие.

Пусть $\widetilde{\delta}^1 \notin R$, $\widetilde{\delta}^2 \notin R$. Тогда $\widetilde{\delta}^1 \in \Gamma$, поскольку для любого набора $\widetilde{\gamma} \notin R \cup \Gamma$ выполнено $f(\widetilde{\gamma}) = 1$, а $\widetilde{\delta}^2 \notin \Gamma$, поскольку $f(\widetilde{\gamma}) = 0$ для любого набора $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} \in R$ такой, что $r(\widetilde{\alpha}) = 0$ и $\widetilde{\delta}^1 \leqslant \widetilde{\alpha}$. Такой набор существует, поскольку $\delta^1 \in \Gamma$. Тогда $\delta^2 \leqslant \delta^1 \leqslant \alpha$. Поэтому $\delta^2 \in \Gamma$. Получили противоречие.

Следовательно, предположение не верно, и $f \in M$.

Докажем, что $f \in O^m$. Рассмотрим различные наборы $\widetilde{\delta}^1, \ldots, \widetilde{\delta}^q$ длины n такие, что $f(\widetilde{\delta}^1) = \ldots = f(\widetilde{\delta}^q) = 0$, $q \leqslant m$. Заметим, что $\widetilde{\delta}^i \in R \cup \Gamma$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant q$. Тогда по определению множества Γ существуют такие наборы $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^q \in R$, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant q$, выполняются соотношения $\widetilde{\alpha}^i \geqslant \widetilde{\delta}^i$ и $f(\widetilde{\alpha}^i) = r(\widetilde{\alpha}^i) = 0$. Тогда согласно критерию согласованности с классом O^m наборы $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^q$ имеют общую нулевую компоненту. Поскольку для любого i, $1 \leqslant i \leqslant q$ выполнено $\widetilde{\alpha}^i \geqslant \widetilde{\delta}^i$, то наборы $\widetilde{\delta}^1, \ldots, \widetilde{\delta}^q$ также имеют общую нулевую компоненту. Следовательно, $f \in O^m$.

Таким образом, $f \in MO^m$, т. е. f является искомым доопределением.

В обратную сторону утверждение следует из леммы 2.1.2. Утверждение доказано.

С л е д с т в и е 2.2.19. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство*

$$[MO^m]_F = [O^m]_F \cap [M]_F.$$

У т в е р ж д е н и е 2.2.20. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция $r(x_1, \ldots, x_n)$ является согласованной с классом S_{01} тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами S и T_{01}.*

Доказательство. Пусть частичная функция r является согласованной с классами S и T_{01} и выполняются соответствующие условия согласованности. Построим доопределение функции r в классе S_{01}. Рассмотрим множество доопределяющих функций частичной функции r. Обозначим это множество через F_1. Очевидно, что $F_1 \neq \varnothing$. Рассмотрим подмножество множества F_1, содержащее все функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_1$, принимающие на нулевом и единичном наборах нулевое и единичное значение соответственно. Обозначим это множество через F_2. Заметим, что согласно условию согласованности с классом T_{01} (утверждение 2.2.8), если существует такое $\widetilde{\alpha} \in R$, что $\widetilde{\alpha} = (c, \ldots, c) \in R$, $c \in \{0, 1\}$, то $r(\widetilde{\alpha}) = c$. Следовательно, $F_2 \neq \varnothing$. Рассмотрим подмножество множества F_2, содержащее все функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_2$, удовлетворяющие следующему условию: если для набора $\widetilde{\gamma}$ длины n, отличного от нулевого и единичного, выполняются соотношения $\widetilde{\gamma} \in R$ и $\overline{\widetilde{\gamma}} \notin R$, то $f(\overline{\widetilde{\gamma}}) = \overline{f}(\widetilde{\gamma})$, и если для набора $\widetilde{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, отличного от нулевого и единичного, выполняются соотношения $\widetilde{\delta} \notin R$ и $\overline{\widetilde{\delta}} \notin R$, то $f(\widetilde{\delta}) = \delta_1$. Обозначим это множество через F_3. Очевидно, $F_3 \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_3$. Несложно видеть, что функция f принадлежит классу S_{01}, т. е. f является искомым дополнением функции r в классе S_{01}, откуда следует требуемое утверждение.

В обратную сторону утверждение следует из леммы 2.1.2. Утверждение доказано.

Следствие 2.2.21. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство*

$$[S_{01}]_F = [S]_F \cap [T_0]_F \cap [T_1]_F.$$

Утверждение 2.2.22. *Пусть $R \subseteq E^n$, $n \geqslant 1$, а $r(x_1, \ldots, x_n)$ — частичная функция, определенная на множестве R. Функция r является согласованной с классом SM тогда и только тогда, когда она является согласованной с классами M, O^2 и I^2.*

Доказательство. Пусть частичная функция r является согласованной с классами M, O^2 и I^2 и выполняются соответствующие условия согласованности. Построим доопределение функции r в классе SM. Рассмотрим множество доопределяющих функций частичной функции r. Обозначим это множество через F_1. Очевидно, что $F_1 \neq \varnothing$. Пусть $\widetilde{\gamma}$ — набор длины n такой, что существует набор $\widetilde{\alpha} \in R$ такой, что $\widetilde{\gamma} \geqslant \widetilde{\alpha}$, $r(\widetilde{\alpha}) = 1$. Множество всех таких наборов обозначим через Γ_1. Заметим, что это множество может быть пустым. Рассмотрим подмножество F_2 множества F_1, содержащее все функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_1$, удовлетворяющие следующему условию: для любого набора $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_1$ выполняется соотношение $f(\widetilde{\gamma}) = 1$. В силу согласованности функции r с классом M для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ таких, что $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\beta}$, для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_1$ выполняется соотношение $f(\widetilde{\alpha}) \geqslant f(\widetilde{\beta})$. Следовательно, $F_2 \neq \varnothing$. Пусть $\widetilde{\gamma}$ — набор длины n такой, что существует набор $\widetilde{\alpha} \in R$ такой, что $\widetilde{\gamma} \leqslant \widetilde{\alpha}$, $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Множество всех таких наборов обозначим через Γ_0. Рассмотрим подмножество множества F_2, содержащее все функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_2$, удовлетворяющие следующему условию: для любого набора $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_0$ выполняется соотношение $f(\widetilde{\gamma}) = 0$. Обозначим это множество через F_3. Аналогично доказывается, что $F_3 \neq \varnothing$. Несложно видеть, что $R \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$.

Докажем, что в множестве Γ_0 нет двух противоположных наборов. Предположим противное. Пусть существует такой набор $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_0$, что $\overline{\overline{\widetilde{\gamma}}} \in \Gamma_0$. Согласно определению множества Γ_0 существуют такие наборы $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$, что $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\beta} \geqslant \overline{\overline{\widetilde{\gamma}}}$, $r(\widetilde{\alpha}) = r(\widetilde{\beta}) = 0$. Несложно видеть, что поскольку наборы $\widetilde{\gamma}$ и $\overline{\overline{\widetilde{\gamma}}}$ не имеют общей нулевой компоненты, то и наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ не имеют общей нулевой компоненты. Следовательно, функция r не согласована с классом O^2. Получили противоречие, следовательно, в множестве Γ_0 нет двух противоположных наборов. Аналогично доказывается, что в множестве Γ_1 нет двух противоположных наборов.

Пусть $\overline{\Gamma}_0$ — множество всех таких наборов $\widetilde{\delta}$, что существует такой набор $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_0$, что $\widetilde{\delta} = \overline{\overline{\widetilde{\gamma}}}$. Аналогично определим множество $\overline{\Gamma}_1$. Из доказанного ранее следует, что $\overline{\Gamma}_0 \cap \Gamma_0 = \varnothing$, $\overline{\Gamma}_1 \cap \Gamma_1 = \varnothing$. Поскольку выполняется соотношение $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, то также верно соотношение $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \varnothing$.

Рассмотрим подмножество множества F_3, содержащее все функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_3$, удовлетворяющие следующему условию: на всех наборах из $\overline{\Gamma}_0$ функция f принимает единичное значение, а на всех наборах из $\overline{\Gamma}_1$ — нулевое значение. Обозначим это множество через F_4. Из соотношений $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \varnothing$, $\overline{\Gamma}_0 \cap \Gamma_0 = \varnothing$, $\overline{\Gamma}_1 \cap \Gamma_1 = \varnothing$ следует, что $F_4 \neq \varnothing$.

Докажем, что для любых наборов $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\delta}$ таких, что выполняются соотношения $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_0$ и $\widetilde{\delta} \geqslant \widetilde{\gamma}$, выполняется соотношение $\widetilde{\delta} \in \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_0$. Действительно, если $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_1$, то это утверждение выполняется согласно определению множества Γ_1. Если $\widetilde{\gamma} \in \overline{\Gamma}_0$, то выполняются соотношения $\overline{\overline{\widetilde{\gamma}}} \in \Gamma_0$, $\overline{\overline{\widetilde{\delta}}} \leqslant \overline{\overline{\widetilde{\gamma}}}$, откуда, согласно определению класса Γ_0, следует, что $\overline{\overline{\widetilde{\delta}}} \in \Gamma_0$, т. е. $\widetilde{\delta} \in \overline{\Gamma}_0$. Аналогично доказывается, что для любых наборов $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\delta}$ таких, что выполняются соотношения $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_0 \cup \overline{\Gamma}_1$ и $\widetilde{\delta} \leqslant \widetilde{\gamma}$, выполняется соотношение $\widetilde{\delta} \in \Gamma_0 \cup \overline{\Gamma}_1$.

Рассмотрим множество $\Lambda = E^n \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_0 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_0)$. Несложно видеть, что для любого набора $\widetilde{\alpha} \in \Lambda$ выполняется соотношение $\overline{\overline{\widetilde{\alpha}}} \in \Lambda$. Обозначим через Λ_1 множество всех наборов из множества Λ, в которых более $\frac{n}{2}$ единичных компонент либо ровно $\frac{n}{2}$ единичных компонент и первая компонента равна 1. Положим $\Lambda_0 = \Lambda \setminus \Lambda_1$. Очевидно, что если $\widetilde{\alpha} \in \Lambda_0$, то $\overline{\overline{\widetilde{\alpha}}} \in \Lambda_1$.

Рассмотрим подмножество множества F_4, содержащее все функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_4$, удовлетворяющие следующему условию: на каждом наборе из Λ_1 функция f принимает единичное значение, а на каждом наборе из Λ_0 — нулевое значение. Обозначим это множество через F_5. Очевидно, что $F_5 \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in F_5$.

Докажем, что функция f является монотонной. Предположим противное. Тогда существуют такие два набора $\widetilde{\gamma}^0$ и $\widetilde{\gamma}^1$, что выполняются соотношения $\widetilde{\gamma}_0 > \widetilde{\gamma}_1$, $f(\widetilde{\gamma}_0) = 0$, $f(\widetilde{\gamma}_1) = 1$. Согласно доказанному ранее выполняется соотношение $\widetilde{\gamma}_1 \notin \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_0$, поскольку иначе бы выполнялось соотношение $\widetilde{\gamma}_0 \in \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_0$, т. е. $f(\widetilde{\gamma}_0) = 1$ (т. к. $f \in F_4$). Аналогично доказывается, что выполняется соотношение $\widetilde{\gamma}_0 \notin \Gamma_0 \cup \overline{\Gamma}_1$. Отсюда следует, что $\widetilde{\gamma}_0 \in \Lambda_0$, $\widetilde{\gamma}_1 \in \Lambda_1$. Но тогда либо $\widetilde{\gamma}_1$ содержит больше единичных компонент, чем $\widetilde{\gamma}_0$, либо первая компонента $\widetilde{\gamma}_1$ является единичной, а первая компонента $\widetilde{\gamma}_0$ является нулевой. Следовательно, соотношение $\widetilde{\gamma}_0 > \widetilde{\gamma}_1$ не верно. Получили противоречие. Следовательно, предположение неверно и функция f является монотонной.

Докажем, что функция f является самодвойственной. Предположим противное. Тогда существуют такие два набора $\widetilde{\gamma}^0$ и $\widetilde{\gamma}^1$, что выполняются соотношения $\widetilde{\gamma}^0 = \overline{\widetilde{\gamma}^1}$, $f(\widetilde{\gamma}^0) = f(\widetilde{\gamma}^1)$. Не умаляя общности, будем полагать, что $f(\widetilde{\gamma}^0) = f(\widetilde{\gamma}^1) = 1$. Тогда заметим, что либо $\widetilde{\gamma}^1 \in \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma}_0$, либо $\widetilde{\gamma}^1 \in \Lambda_1$. Отсюда следует, что либо $\widetilde{\gamma}^0 \in \Gamma_0 \cup \overline{\Gamma}_1$, либо $\widetilde{\gamma}^0 \in \Lambda_0$. Следовательно, $f(\widetilde{\gamma}^1) = 0$. Получили противоречие. Следовательно, предположение неверно и функция f является самодвойственной.

Таким образом доказано, что функция f принадлежит классу SM, т. е. функция f является искомым дополнением в этом классе, откуда следует требуемое утверждение.

В обратную сторону утверждение следует из леммы 2.1.2. Утверждение доказано.

Следствие 2.2.23. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство* $[SM]_F = [M]_F \cap [O^2]_F \cap [I^2]_F$.

§ 3. Критерий универсальной разложимости классов булевых функций

3.1. Вспомогательные утверждения. Пусть A — замкнутый класс булевых функций. Будем называть A *разложимым*, если существуют такие отличные от A замкнутые классы $B_1, \ldots, B_k$, $k \geqslant 2$, что $A = B_1 \cap \ldots \cap B_k$. Будем называть A *универсально разложимым*, если существуют такие отличные от A замкнутые классы $C_1, \ldots, C_m$, $m \geqslant 2$, что для произвольного инвариантного класса F выполняется соотношение

$$[A]_F = [C_1]_F \cap \ldots \cap [C_m]_F.$$

В данном параграфе показывается, что произвольный замкнутый класс булевых функций, отличный от класса MU, универсально разложим тогда и только тогда, когда он разложим.

Утверждение 3.1.1. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство*

$$[L_0]_F = [L]_F \cap [T_0]_F.$$

Доказательство. Заметим, что соотношение $[L_0]_F \subseteq [L]_F \cap [T_0]_F$ следует из теоремы 2.1.1 и леммы 2.1.2.

Докажем соотношение $[L]_F \cap [T_0]_F \subseteq [L_0]_F$.

Пусть $F \subseteq T_0$. Тогда имеет место равенство $[T_0]_F = T_0$. Рассмотрим произвольную функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, из множества $[L]_F \cap [T_0]_F$. Заметим, что $h \in [T_0]_F = T_0$. Из соотношения $h \in [L]_F$ следует, что существуют такие функции $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n) \in F$, $k \geqslant 1$, что имеет место равенство

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + f_k(x_1, \ldots, x_n) + c,$$

где $c \in \{0, 1\}$. Поскольку $h, f_1, \ldots, f_k \in T_0$, то очевидно, что $c = 0$. Отсюда следует, что $h \in [L_0]_F$.

Пусть $F \not\subseteq T_0$. Рассмотрим произвольную функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, из множества $[L]_F \cap [T_0]_F$. Докажем соотношение $h \in [L_0]_F$. Предположим противное. Пусть соотношение $h \in [L_0]_F$ не выполняется. Тогда из соотношения $h \in [L]_F$ следует, что существуют такие функции $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n) \in F$, $k \geqslant 1$, что имеет место равенство

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + f_k(x_1, \ldots, x_n) + 1.$$

Из соотношения $F \nsubseteq T_0$ следует, что существует функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$, для которой выполняется равенство $f(0, \ldots, 0) = 1$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x, \ldots, x)$. Заметим, что $g \in F$ и $g(0) = 1$. Отсюда следует, что либо $1 \in F$, либо $\overline{x} \in F$.

Пусть $1 \in F$. Тогда существует функция $f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) \in F$, тождественно равная единице. Тогда имеет место равенство $h = f_1 + \ldots + f_k + f_{k+1}$. Отсюда следует, что $h \in [L_0]_F$. Получено противоречие.

Пусть $\overline{x} \in F$. Тогда существует функция $f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) \in F$ такая, что $f_{k+1} = \overline{x_1}$. Согласно определению инвариантного класса существует функция $f_{k+2}(x_1, \ldots, x_n) \in F$ такая, что $f_{k+2} = x_1$. Тогда имеет место равенство $h = f_1 + \ldots + f_k + f_{k+1} + f_{k+2}$. Отсюда следует, что $h \in [L_0]_F$. Получено противоречие.

Следовательно, предположение неверно и имеет место соотношение $h \in [L_0]_F$. Таким образом, имеет место соотношение $[L]_F \cap [T_0]_F \subseteq [L_0]_F$. Утверждение доказано.

Следующее утверждение очевидным образом следует из утверждения 3.1.1 и соображений двойственности.

Следствие 3.1.2. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство* $[L_1]_F = [L]_F \cap [T_1]_F$.

Утверждение 3.1.3. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство*

$$[L_{01}]_F = [L_0]_F \cap [L_1]_F \cap [S]_F.$$

Доказательство. Соотношение $[L_{01}]_F \subseteq [L_0]_F \cap [L_1]_F \cap [S]_F$ следует из теоремы 2.1.1 и леммы 2.1.2.

Пусть $h(x_1, \ldots, x_n) \in [L_0]_F \cap [L_1]_F \cap [S]_F$, $n \geqslant 1$. Докажем, что $h \in [L_{01}]_F$. Предположим противное. Пусть $h \notin [L_{01}]_F$. Тогда из соотношений $h \in [L_0]_F$ и $h \notin [L_{01}]_F$ следует существование таких функций $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{2k}(x_1, \ldots, x_n) \in F$, $k \geqslant 0$, что

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + f_{2k}(x_1, \ldots, x_n).$$

Из соотношений $h \in [L_1]_F$, $h \notin [L_{01}]_F$ следует существование таких функций $f'_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f'_{2m}(x_1, \ldots, x_n) \in F$, $m \geqslant 0$, что

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f'_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + f'_{2m}(x_1, \ldots, x_n) + 1,$$

Пусть существует такая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$, что верно равенство $f(0, \ldots, 0) = f(1, \ldots, 1)$. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x, \ldots, x)$. Заметим, что $g \in F$ и $g \in \{0, 1\}$. Значит, F содержит либо функцию $f_{2k+1}(x_1, \ldots, x_n)$, тождественно равную нулю, либо функцию $f'_{2m+1}(x_1, \ldots, x_n)$, тождественно равную единице. Поэтому либо $h = f_1 + \ldots + f_{2k} + f_{2k+1}$, либо $h = f'_1 + \ldots + f'_{2m} + f'_{2m+1}$. Следовательно, $h \in [L_{01}]_F$.

Пусть для любой функции $f(x_1,\ldots,x_n)\in F$ выполняется равенство $f(0,\ldots,0)=\overline{f}(1,\ldots,1)$. Тогда

$$\begin{aligned}h(0,\ldots,0)&=f_1(0,\ldots,0)+\ldots+f_{2k}(0,\ldots,0)=\\&=(f_1(1,\ldots,1)+1)+\ldots+(f_{2k}(1,\ldots,1)+1)=\\&=f_1(1,\ldots,1)+\ldots+f_{2k}(1,\ldots,1)=h(1,\ldots,1).\end{aligned}$$

Таким образом, $h(0,\ldots,0)=h(1,\ldots,1)$. Из соотношения $h\in[S]_F$ следует, что существуют такая функция $g(x_1,\ldots,x_m)\in S$, $m\geqslant 1$, и такие функции $r_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,r_m(x_1,\ldots,x_n)\in F$, что $h=g(r_1,\ldots,r_m)$. Тогда

$$\begin{aligned}h(0,\ldots,0)&=g(r_1(0,\ldots,0),\ldots,r_m(0,\ldots,0))=\\&=g(\overline{r}_1(1,\ldots,1),\ldots,\overline{r}_m(1,\ldots,1))=\\&=\overline{g}(r_1(1,\ldots,1),\ldots,r_m(1,\ldots,1))=\overline{h}(1,\ldots,1),\end{aligned}$$

что противоречит доказанному ранее равенству. Следовательно, предположение неверно и выполняется соотношение $h\in[L_{01}]_F$.

Утверждение 3.1.4. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство*

$$[SL]_F=[L]_F\cap[S]_F.$$

Доказательство. Заметим, что соотношение $[SL]_F\subseteq[L]_F\cap[S]_F$ следует из теоремы 2.1.1 и леммы 2.1.2.

Докажем соотношение $[L]_F\cap[S]_F\subseteq[SL]_F$. Рассмотрим произвольную функцию $h(x_1,\ldots,x_n)$, $n\geqslant 1$, из множества $[L]_F\cap[S]_F$. Докажем, что выполняется соотношение $h\in[SL]_F$. Предположим противное. Пусть $h\notin[SL]_F$. Из соотношений $h\in[L]_F$ и $h\notin[SL]_F$ следует, что существуют такие функции $f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_{2k}(x_1,\ldots,x_n)\in F$, $k\geqslant 0$, что имеет место равенство

$$h(x_1,\ldots,x_n)=f_1(x_1,\ldots,x_n)+\ldots+f_{2k}(x_1,\ldots,x_n)+c,$$

где $c\in\{0,1\}$.

Пусть существует такая функция $f(x_1,\ldots,x_n)\in F$, что выполняется равенство $f(0,\ldots,0)=f(1,\ldots,1)$. Рассмотрим функцию $g(x)=f(x,\ldots,x)$. Заметим, что $g\in F$ и $g\in\{0,1\}$. Значит, существует функция $f_{2k+1}(x_1,\ldots,x_n)\in$ $\in F$, тождественно равная нулю или единице. Отсюда следует, что имеет место равенство $h=f_1+\ldots+f_{2k}+f_{2k+1}+(c+c')$. Следовательно, $h\in[SL]_F$.

Пусть для любой функции $f(x_1,\ldots,x_n)\in F$ выполняется равенство $f(0,\ldots,0)=\overline{f}(1,\ldots,1)$. Тогда выполняются равенства

$$\begin{aligned}h(0,\ldots,0)&=f_1(0,\ldots,0)+\ldots+f_{2k}(0,\ldots,0)+c=\\&=(f_1(1,\ldots,1)+1)+\ldots+(f_{2k}(1,\ldots,1)+1)+c=\\&=f_1(1,\ldots,1)+\ldots+f_{2k}(1,\ldots,1)+c=h(1,\ldots,1).\end{aligned}$$

Таким образом, $h(0,\ldots,0)=h(1,\ldots,1)$. Из соотношения $h\in[S]_F$ следует, что существуют такая функция $g(x_1,\ldots,x_m)\in S$, $m\geqslant 1$, и такие функции $r_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,r_m(x_1,\ldots,x_n)\in F$, что выполняется равенство $h=g(r_1,\ldots,r_m)$. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}h(0,\ldots,0)&=g(r_1(0,\ldots,0),\ldots,r_m(0,\ldots,0))=\\&=g(\overline{r}_1(1,\ldots,1),\ldots,\overline{r}_m(1,\ldots,1))=\\&=\overline{g}(r_1(1,\ldots,1),\ldots,r_m(1,\ldots,1))=\overline{h}(1,\ldots,1),\end{aligned}$$

что противоречит доказанному ранее равенству $h(0,\ldots,0)=h(1,\ldots,1)$. Следовательно, предположение неверно и выполняется соотношение $h\in[SL]_F$. Утверждение доказано.

Утверждение 3.1.5. *Для любого инвариантного класса F выполнены равенства $[D_0]_F=[T_0]_F\cap[D]_F$, $[MO_0^m]_F=[T_0]_F\cap[MO^m]_F$.*

Доказательство. Соотношение $[D_0]_F \subseteq [T_0]_F \cap [D]_F$ следует из теоремы 2.1.1 и леммы 2.1.2.

Докажем соотношение $[T_0]_F\cap[D]_F\subseteq[D_0]_F$. Пусть $1\in F$. Тогда, согласно лемме 1.3.5, выполняются равенства $[D_0]_F=[D_0\cup C_1]_F=[D]_F$, откуда следует требуемое соотношение.

Пусть $1\notin F$. Предположим, что $[T_0]_F \cap [D]_F \not\subseteq [D_0]_F$. Следовательно, $[D_0]_F\neq[D]_F$. Из леммы 1.3.4 следует равенство $[D]_F=[D_0]_F\cup C_1$. Поскольку $[D_0]_F\neq[D]_F$, то $C_1\not\subseteq[D_0]_F$. Значит, $C_1\subseteq[T_0]_F$. Отсюда и из соотношения $1\notin F$, согласно лемме 2.2.10, следует, что $\overline{x}\in F$. Несложно видеть, что $x\vee\overline{x}=1\in[D_0]_F$. Получили противоречие. Следовательно, $[T_0]_F \cap [D]_F \subseteq [D_0]_F$.

Равенство $[MO_0^m]_F=[T_0]_F\cap[MO^m]_F$ доказывается аналогично равенству $[D_0]_F=[T_0]_F\cap[D]_F$ заменой классов D_0 и D на классы MO_0^m и MO^m соответственно.

Утверждение 3.1.6. *Для любого инвариантного класса F выполнено равенство $[SU]_F=[S]_F\cap[U]_F$.*

Доказательство. Соотношение $[SU]_F\subseteq[S]_F\cap[U]_F$ следует из теоремы 2.1.1 и леммы 2.1.2.

Докажем соотношение $[S]_F\cap[U]_F\subseteq[SU]_F$. Пусть $\widetilde{C}\in\{C_0,C_1\}$ и $\widetilde{C}\subseteq F$. Заметим, что в этом случае, согласно лемме 1.3.5, выполняются равенства $[SU]_F=[SU\cup\widetilde{C}]_F=[U]_F$, откуда следует требуемое соотношение.

Пусть $1\notin F$ и $0\notin F$. Предположим, что $[S]_F\cap[U]_F\not\subseteq[SU]_F$. Тогда $[SU]_F\neq[U]_F$. Из леммы 1.3.4 следует равенство $[U]_F=[SU]_F\cup C$. Поскольку $[S]_F\cap[U]_F\not\subseteq[SU]_F$, то либо $0\notin[SU]_F$ и $0\in[S]_F\cap[U]_F$, либо $1\notin[SU]_F$ и $1\in[S]_F\cap[U]_F$. Не умаляя общности будем считать, что $1\notin[SU]_F$ и $1\in[S]_F\cap[U]_F$. Значит, $1\in[S]_F$. Отсюда, согласно лемме 2.2.3, следует, что $0\in F$ или $1\in F$. Получили противоречие. Следовательно, $[S]_F\cap[U]_F\subseteq[SU]_F$.

Утверждение 3.1.7. *Пусть A и B — замкнутые классы такие, что $A\neq B$ и для некоторого $m\in\{2,\ldots,\infty\}$ имеет место $A=B\cap O^m$, $B=A\cup C_0$ (такими парами классов, в частности, являются D_1 и D, D_{01} и D_0, U_1 и MU, U_{01} и U_0, C_1 и C). Тогда для любого инвариантного класса F выполнено равенство $[A]_F=[B]_F\cap[O^m]_F$.*

Доказательство. Соотношение $[A]_F\subseteq[O^m]_F\cap[B]_F$ следует из теоремы 2.1.1 и леммы 2.1.2.

Докажем соотношение $[O^m]_F\cap[B]_F\subseteq[A]_F$. Пусть $0\in F$. Тогда согласно лемме 1.3.5 выполняются равенства $[A]_F=[A\cup C_0]_F=[B]_F$, откуда следует требуемое соотношение.

Пусть $0\notin F$. Предположим, что $[O^m]_F\cap[B]_F\not\subseteq[A]_F$. Следовательно, $[A]_F\neq[B]_F$. Из леммы 1.3.4 следует равенство $[B]_F=[A]_F\cup C_0$. Поскольку $[A]_F\neq[B]_F$, то $0\notin[A]_F$. Значит, $0\in[O^m]_F$. Отсюда согласно лемме 2.2.11 следует, что $0\in F$. Получили противоречие. Следовательно, $[O^m]_F\cap[B]_F\subseteq[A]_F$.

Следствие 3.1.8. *Для любого инвариантного класса F выполнены равенства*

$$[D_1]_F=[D]_F\cap[O^2]_F,\quad [D_{01}]_F=[D_0]_F\cap[O^2]_F,$$

$$[U_1]_F=[MU]_F\cap[O^2]_F,\quad [U_{01}]_F=[U_0]_F\cap[O^2]_F,$$

$$[C_1]_F=[C]_F\cap[O^2]_F.$$

Доказательство. Заметим, что имеют место соотношения $D_1 = D\cap O^2$, $D=D_1\cup C_0$. Из утверждения 3.1.7 следует, что $[D_1]_F=[D]_F\cap[O^2]_F$. Остальные равенства доказываются аналогично.

3.2. Формулировка и доказательство критерия универсальной разложимости.

Теорема 3.2.1. *Произвольный замкнутый класс булевых функций, отличный от класса MU, универсально разложим тогда и только тогда, когда он разложим. Класс MU является разложимым, но не является универсально разложимым.*

Доказательство. Пусть A — универсально разложимый замкнутый класс булевых функций. Тогда существуют такие отличные от A замкнутые классы $C_1,\ldots,C_m$, $m\geqslant 2$, что для произвольного инвариантного класса F выполняется соотношение $[A]_F=[C_1]_F\cap\ldots\cap[C_m]_F$. Из этого соотношения для класса F, состоящего только из селекторых функций, следует равенство $A=C_1\cap\ldots\cap C_m$, из которого вытекает, что любой универсально разложимый класс разложим.

Докажем, что любой разложимый класс, отличный от класса MU, является универсально разложимый. Пусть A — разложимый замкнутый класс. Нетрудно показать (см., например, [38,41,46]), что множество разложимых замкнутых классов булевых функций, отличных от класса MU, исчерпывается следующим списком:

1) M_1, M_{01}, T_{01};

2) MO^m, O_0^m, MO_0^m, $m=2,3,\ldots,\infty$;

3) S_{01}, SM;

4) L_0, L_{01}, SL;

5) D_1, D_0, D_{01}, U_1, U_{01}, C_1, SU;

6) M_0, MI^m, I_1^m, MI_1^m, K_1, K_0, K_{01}, L_1, U_0, C_0, $m=2,3,\ldots,\infty$.

Пусть A — один из классов первой группы. Тогда утверждение теоремы следует из следствия 2.2.9, если $A=T_{01}$, и из следствия 2.2.15, если $A=M_1$ или $A=M_{01}$.

Пусть A — один из классов второй группы. Тогда утверждение теоремы следует из следствия 2.2.17, если $A=O_0^m$, из следствия 2.2.19, если $A=MO^m$ и из утверждения 3.1.5, если $A=MO_0^m$ $(2\leqslant m\leqslant\infty)$.

Пусть A — один из классов третьей группы. Тогда утверждение теоремы следует из следствия 2.2.21, если $A=S_{01}$, и из следствия 2.2.23, если $A=SM$.

Пусть A — один из классов четвертой группы. Тогда утверждение теоремы следует из утверждения 3.1.1, если $A = L_0$, из утверждения 3.1.4, если $A = SL$, и из утверждения 3.1.3, если $A = L_{01}$.

Пусть A — один из классов пятой группы. Тогда утверждение теоремы следует из утверждения 3.1.5, если $A = D_0$, из утверждения 3.1.6, если $A = SU$, и из следствия 3.1.8, если $A \in \{D_1, D_{01}, U_1, U_{01}, C_1\}$.

Пусть A — один из классов шестой группы. Тогда утверждение теоремы следует из доказанных ранее случаев и принципа двойственности.

Докажем теперь, что класс MU не является универсально разложимым. Пусть F — множество всех булевых функций, получаемых из функций 0, 1, x, $x+1$, $x \to y$, $x+y$, $x\&y$, $\overline{x}\&\overline{y}$ операциями введения несущественных переменных и переименования переменных (включая отождествление). Очевидно, что F является инвариантным классом. Пусть $h(x,y) = x+y+1$. Заметим, что $[MU]_F = F$. Поэтому $h \notin [MU]_F$. Докажем, что для любого замкнутого класса A такого, что $MU \subset A$, имеет место соотношение $h \in [A]_F$. Докажем это утверждение для классов U, K и D. Заметим, что имеют место соотношения

$$h(x,y) = (x+y)+1 = (x \to y)\&(y \to x) = (x\&y) \vee (\overline{x}\&\overline{y}).$$

Поэтому $h \in [U]_F$, $h \in [K]_F$, $h \in [D]_F$. Заметим, что для любого замкнутого класса A такого, что $MU \subset A$, выполняется одно из соотношений $[U]_F \subseteq [A]_F$, $[K]_F \subseteq [A]_F$, $[D]_F \subseteq [A]_F$, откуда следует, что $h \in [A]_F$. Таким образом, не существует таких отличных от MU замкнутых классов $C_1, \ldots, C_m$, $m \geqslant 2$, что для произвольного инвариантного класса F выполняется соотношение $[MU]_F = [C_1]_F \cap \ldots \cap [C_m]_F$. Следовательно, класс MU не является универсально разложимым. Теорема доказана.

Таким образом, справедлива следующая лемма о пополнениях разложимых замкнутых классов.

Лемма 3.2.2. *Для любого инвариантного класса F выполнены следующие утверждения.*

1. *Для любого замкнутого класса $A \in \{T_1, O^m, MO^m, M, M_1, L, D\}$ выполняется равенство*
$$[A \cap T_0]_F = [A]_F \cap [T_0]_F.$$

2. *Для любого замкнутого класса $A \in \{O^m, T_0, T_{01}\}$ выполняется равенство*
$$[A \cap M]_F = [A]_F \cap [M]_F.$$

3. *Справедливы следующие равенства:*
$$[SM]_F = [MO^2]_F \cap [MI^2]_F,$$
$$[S_{01}]_F = [S]_F \cap [T_0]_F \cap [T_1]_F,$$
$$[L_{01}]_F = [L_0]_F \cap [L_1]_F \cap [S]_F,$$
$$[SL]_F = [S]_F \cap [L]_F, \quad [SU]_F = [S]_F \cap [U]_F,$$
$$[D_1]_F = [D]_F \cap [O^2]_F, \quad [D_{01}]_F = [D_0]_F \cap [O^2]_F,$$
$$[U_1]_F = [MU]_F \cap [O^2]_F, \quad [U_{01}]_F = [U_0]_F \cap [O^2]_F,$$
$$[C_1]_F = [C]_F \cap [O^2]_F.$$

§ 4. $\mathscr{P}$-пополнения замкнутых классов булевых функций

В этом параграфе рассматривается специальный случай операции расширенной суперпозиции относительно инвариантных классов, являющихся замкнутыми классами. Получено полное описание множеств булевых функций, являющихся пополнениями относительно замкнутых классов.

Будем называть тип булевых функций (F, A) *$\mathscr{P}$-типом*, если A — замкнутый класс, содержащий неконстантные функции, а F — замкнутый класс. Для всякого замкнутого класса A, содержащего неконстантные функции, все множества $[A]_F$ такие, что (F, A) является $\mathscr{P}$-типом, будем называть *$\mathscr{P}$-пополнениями класса A* или просто $\mathscr{P}$-пополнениями.

Согласно теореме 3.2.1 для любого замкнутого класса A, отличного от универсально неразложимых классов

$$P_2, K, D, L, M, T_0, T_1, O^m, I^m, S, MU, U,$$

$m = 2, \ldots, \infty$, существуют такие отличные от A замкнутые классы $C_1, \ldots \ldots, C_m$, $m \geqslant 2$, что для произвольного инвариантного класса F выполняется соотношение $[A]_F = [C_1]_F \cap \ldots \cap [C_m]_F$. Таким образом, произвольное $\mathscr{P}$-пополнение можно получить путем пересечения $\mathscr{P}$-пополнений указанных классов. Заметим, что согласно лемме 1.3.3 для любого замкнутого класса A и любого инвариантного класса F выполняется соотношение $[A]_F = ([A^*]_{F^*})^*$. Таким образом, $\mathscr{P}$-пополнения классов D, T_1 и I^m являются двойственными к некоторым $\mathscr{P}$-пополнениям классов K, T_0 и O^m соответственно. Таким образом, произвольное $\mathscr{P}$-пополнение может быть получено путем операций пересечения и двойственности из $\mathscr{P}$-пополнений классов

$$P_2, K, L, M, T_0, O^m, S, MU, U.$$

Согласно лемме 1.3.4 для любого инвариантного класса F выполняются соотношения

$$[K]_F = [K_{01}]_F \cup \{0, 1\}, \quad [M]_F = [M_{01}]_F \cup \{0, 1\},$$
$$[MU]_F = [U_{01}]_F \cup \{0, 1\}, \quad [U]_F = [SU]_F \cup \{0, 1\}.$$

Следовательно, произволное $\mathscr{P}$-пополнение может быть получено путем операций пересечения, двойственности и добавления констант из $\mathscr{P}$-пополнений классов

$$P_2, K_{01}, L, M_{01}, T_0, O^m, S, U_{01}, SU,$$

где $m = 2, \ldots, \infty$. Эти замкнутые классы будем называть *основными*, а множество основных классов будем обозначать через $\mathscr{A}$.

Пусть F_1 — замкнутый класс такой, что существует такой замкнутый класс F_2, что $F_1 = F_2 \cup \widetilde{C}$, где $\widetilde{C} \in \{C, C_0, C_1\}$ (например, K и K_{01}). Множество всех замкнутых классов, не обладающих таким свойством обозначим через $\mathscr{F}$. Согласно лемме 1.3.5 для любого замкнутого класса A выполняется соотношение $[A]_{F_1} = [[A \cup \widetilde{C}]]_{F_2}$. Таким образом, произвольное $\mathscr{P}$-пополнение, являющееся пополнением относительно класса F_1, является пополнением относительно класса F_2. Заметим, что

$$\mathscr{F} = \{P_2, M_{01}, L, L_0, L_1, L_{01}, SL, K_{01}, D_{01}, SU, U_{01}, T_0, T_1, T_{01}, O^m,$$
$$O_0^m, MO_0^m, I^m, I_1^m, MI_1^m, S, SM, S_{01}, \text{где } m = 2, 3, \ldots, \infty\}.$$

Рассмотрим всевозможные $\mathscr{P}$-типы (F, A) такие, что $A \in \mathscr{A}, F \in \mathscr{F}$. Соответствующие им $\mathscr{P}$-пополнения $[A]_F$ будем называть *базовыми $\mathscr{P}$-пополнениями*. Из приведенных выше рассуждений следует, что произвольное $\mathscr{P}$-пополнение можно получить из базовых $\mathscr{P}$-пополнений с помощью операций пересечения, добавления констант и двойственности. В связи с этим основная часть этого параграфа посвящена описанию множества базовых $\mathscr{P}$-пополнений. В пп. 4.2–4.7 для каждого замкнутого класса из множества $\mathscr{A}$ приводится описание множества его базовых $\mathscr{P}$-пополнений. На основе этих пунктов в п. 4.8 приводится полное описание множества всех базовых $\mathscr{P}$-пополнений.

4.1. Вспомогательные определения. Определим следующие семейства множеств булевых функций. В дальнейшем они будут использованы для описания множества всех базовых $\mathscr{P}$-пополнений.

Положим
$$\widehat{\mathfrak{P}}_2 = \mathscr{F}, \quad \widehat{\overline{\mathfrak{P}}}_2 = \bigcup_{A \in I} \{A \cup \overline{A}\},$$
где
$$I = \{T_{01}, K_{01}, D_{01}, L_{01}, M_{01}, O^m, I^m, O_0^m, I_1^m,\\ MO_0^m, I_1^m, SM, \text{где } m = 2, 3, \ldots, \infty\}.$$

Пусть F — замкнутый класс булевых функций. Обозначим через G_F^m $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$ множество всех булевых функций $g(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, удовлетворяющих следующему условию: для любого q, $1 \leqslant q \leqslant m$, и для любых q наборов, на которых функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ принимает нулевое значение, существует функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$, также принимающая на этих наборах нулевое значение. Обозначим через H_F^m $(m = 2, 3, \ldots, \infty)$ множество всех булевых функций $g(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, удовлетворяющих следующему условию: для любого q, $1 \leqslant q \leqslant m$, и для любых q наборов, на которых функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ принимает единичное значение, существует функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$, также принимающая на этих наборах единичное значение. Очевидно, что $H_F^m = (G_{F^*}^m)^*$. Положим
$$\widehat{\mathfrak{G}} = \{G_{L_{01}}^m, G_{L_1}^m, G_{SL}^m, G_{SU}^m, \text{где } m = 2, 3, \ldots, \infty\}.$$

Пусть A — замкнутый класс булевых функций. Будем обозначать через $l(A)$ множество всех булевых функций $h(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что существует функция $g(x_1, \ldots, x_n) \in A$ такая, что $h \leqslant g$. Будем обозначать через $b(A)$ множество всех булевых функций $h(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что существует функция $g(x_1, \ldots, x_n) \in A$ такая, что $h \geqslant g$. Несложно видеть, что $b(A) = l(A^*)^*$. Положим
$$\widehat{\mathfrak{S}} = \{l(S), l(S_{01}), l(SM), b(S), b(S_{01}), b(SM)\}.$$

Обозначим через AS множество всех таких функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, что для любых двух противоположных наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\overline{\widetilde{\alpha}}$ длины n выполняется соотношение $f(\widetilde{\alpha}) = f(\overline{\widetilde{\alpha}})$. Функции из множества AS будем называть *антисамодвойственными*. Положим $AS_0 = AS \cap T_0$, $AS_1 = AS \cap T_1$. Положим
$$\widehat{\mathfrak{Z}} = \{S \cup AS\}.$$

Пусть A — замкнутый класс. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — булева функция, и она представима в виде $f(x_1,\ldots,x_n)=g_1(x_1,\ldots,x_n)\&\ldots\&g_k(x_1,\ldots,x_n)$, $k\geqslant 1$, где $g_i(x_1,\ldots,x_n)\in A$, $1\leqslant i\leqslant k$. Обозначим через $K(A)$ — множество всех функций, представимых в таком виде. Положим

$$\widehat{\mathfrak{L}}=\{K(SU),K(L),K(L_0),K(L_1),K(L_{01}),K(SL)\}.$$

4.2. Базовые $\mathscr{P}$-пополнения классов L, U_{01} и SU.

Утверждение 4.2.1. *Пусть F — такой инвариантный класс, что либо $K_{01}\subseteq F$, либо $D_{01}\subseteq F$. Тогда выполняется равенство $[L]_F=P_2$.*

Доказательство. Пусть $K_{01}\subseteq F$. Очевидно, что любой полином Жегалкина может быть выражен как формула над типом (F,L). Следовательно, $[L]_F=P_2$. Равенство $[L]_F=P_2$ для класса F такого, что $D_{01}\subseteq F$, доказывается аналогично с использованием дизъюнктивного полинома Жегалкина. Утверждение доказано.

Утверждение 4.2.2. *Имеет место соотношение $[L]_{SM}=S\cup AS$.*

Доказательство. Докажем, что $[L]_{SM}\subseteq S\cup AS$. Любая формула над типом (SM,L) представляет сумму нескольких самодвойственных функций и, возможно, единицы. Очевидно, что сумма нечетного числа самодвойственных функций является самодвойственной функцией, а четного — антисамодвойственной функцией. Значит, $[L]_{SM}\subseteq S\cup AS$.

Докажем, что $AS\subseteq[L]_{SM}$. Пусть $h(x_1,\ldots,x_n)$ — антисамодвойственная функция, отличная от константной и принимающая нулевое значение на нулевом и единичном наборах. Пусть $\widetilde{\sigma}^1,\ldots,\widetilde{\sigma}^k$, $k\geqslant 1$, — все наборы с нулевой первой компонентой, на которых функция h принимает единичное значение. Пусть $h_{\widetilde{\sigma}^i}(x_1,\ldots,x_n)$, $1\leqslant i\leqslant k$, — антисамодвойственная функция, принимающая единичное значение на наборах $\widetilde{\sigma}^i$ и $\overline{\widetilde{\sigma}^i}$ и нулевое значение на всех остальных наборах. Заметим, что имеет место равенство

$$h(x_1,\ldots,x_n)=h_{\sigma^1}(x_1,\ldots,x_n)+\ldots+h_{\sigma^k}(x_1,\ldots,x_n).$$

Следовательно, достаточно доказать, что каждая из функций h_{σ^i} может быть представлена в виде суммы функций из класса SM.

Рассмотрим функцию $h_{\widetilde{\sigma}}$, где $\widetilde{\sigma}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ — некоторый набор из множества $\{\widetilde{\sigma}^1,\ldots,\widetilde{\sigma}^k\}$. Определим следующие множества наборов: $A_1=\{\widetilde{\beta}\in E^n|\widetilde{\beta}>\widetilde{\sigma}\}$, $A_2=\{\widetilde{\beta}\in E^n|\widetilde{\beta}<\widetilde{\sigma}\}$, $A_3=\{\widetilde{\beta}\in E^n|\widetilde{\beta}>\overline{\widetilde{\sigma}}\}$, $A_4=\{\widetilde{\beta}\in E^n|\widetilde{\beta}<\overline{\widetilde{\sigma}}\}$. Несложно видеть, что имеет место соотношение $(A_1\cup A_3)\cap(A_2\cup A_4)=\varnothing$. Определим функцию $f_1(x_1,\ldots,x_n)$ следующим образом. Пусть f_1 принимает единичное значение на наборе $\overline{\widetilde{\sigma}}$ и на наборах из множеств A_1 и A_3. Пусть она принимает нулевое значение на наборе $\widetilde{\sigma}$ и наборах из множеств A_2 и A_4. Пусть она принимает значение, равное первой компоненте набора на остальных наборах. Определим функцию $f_2(x_1,\ldots,x_n)$. Пусть $f_2(\widetilde{\sigma})=1$, $f_2(\overline{\widetilde{\sigma}})=0$, а на остальных наборах функция f_2 принимает те же значения, что и f_1. Несложно видеть, что $h_{\widetilde{\sigma}}=f_1+f_2$.

Докажем, что $f_1,f_2\in SM$. Самодвойственность функций f_1 и f_2 очевидна. Докажем, что функция f_1 монотонна. Пусть $\widetilde{\alpha}^1=(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_n^1)$, $\widetilde{\alpha}^2=(\alpha_1^2,\ldots,\alpha_n^2)\in E^n$, $\widetilde{\alpha}^1>\widetilde{\alpha}^2$. Докажем, что $f_1(\widetilde{\alpha}^1)\geqslant f_1(\widetilde{\alpha}^2)$. Предположим противное. Пусть $f_1(\widetilde{\alpha}^1)=0$, $f_1(\widetilde{\alpha}^2)=1$. Заметим, что для набора $\widetilde{\alpha}^1$ выполняется ровно одно из следующих соотношений: $\widetilde{\alpha}^1\notin A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup\{\overline{\widetilde{\sigma}}\}\cup\{\widetilde{\sigma}\}$,

$\widetilde{\alpha}^1 \in A_2 \cup \{\widetilde{\sigma}\}$ и $\widetilde{\alpha}^1 \in A_4$. Для набора $\widetilde{\alpha}^2$ выполняется ровно одно из следующих соотношений: $\widetilde{\alpha}^2 \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \{\overline{\widetilde{\sigma}}\} \cup \{\widetilde{\sigma}\}$, $\widetilde{\alpha}^2 \in A_3 \cup \{\overline{\widetilde{\sigma}}\}$ и $\widetilde{\alpha}^2 \in A_1$. Рассмотрим следующие возможные случаи.

Пусть $\widetilde{\alpha}^1$ и $\widetilde{\alpha}^2$ не принадлежат множеству $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \{\overline{\widetilde{\sigma}}\} \cup \{\widetilde{\sigma}\}$. Тогда $f_1(\widetilde{\alpha}^1) = \alpha_1^1 \geqslant \alpha_1^2 = f_1(\widetilde{\alpha}^2)$. Получили противоречие.

Пусть $\widetilde{\alpha}^1 \in A_2 \cup \{\widetilde{\sigma}\}$. Тогда $\widetilde{\sigma} \geqslant \widetilde{\alpha}^1 > \widetilde{\alpha}^2$. Следовательно, $\widetilde{\alpha}^2 \in A_2$, т. е. $f_1(\widetilde{\alpha}_1) = f_1(\widetilde{\alpha}_2) = 0$. Получили противоречие.

Аналогично получаем противоречие для оставшихся случаев $\widetilde{\alpha}^1 \in A_4$, $\widetilde{\alpha}^2 \in A_3 \cup \{\overline{\widetilde{\sigma}}\}$, $\widetilde{\alpha}^2 \in A_1$. Следовательно, предположение неверно и функция f_1 монотонна. Аналогично доказывается, что функция f_2 монотонна. Таким образом, функция $h_{\widetilde{\sigma}}$ может быть представлена в виде суммы двух функций из множества SM. Следовательно, из представления

$$h(x_1, \ldots, x_n) = h_{\widetilde{\sigma}^1}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + h_{\widetilde{\sigma}^k}(x_1, \ldots, x_n)$$

получаем, что выполнено соотношение $h(x_1, \ldots, x_n) \in [L]_{SM}$.

Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$ — антисамодвойственная функция, отличная от константной и принимающая единичное значение на нулевом и единичном наборах. Как было показано ранее, для антисамодвойственной функции $g(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n) + 1$ выполнено соотношение $g \in [L]_{SM}$. Поскольку при этом $h(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) + 1$, то несложно видеть, что также выполнено соотношение $h(x_1, \ldots, x_n) \in [L]_{SM}$. Для антисамодвойственных функций, тождественно равных нулю или единице, соотношение выполнено, поскольку они принадлежат классу L. Следовательно, $AS \subseteq [L]_{SM}$.

Докажем, что $S \subseteq [L]_{SM}$. Рассмотрим произвольную самодвойственную функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$. Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1$. Заметим, что $f \in SM$. Рассмотрим функцию

$$g(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим два произвольных противоположных набора $\widetilde{\alpha}, \overline{\widetilde{\alpha}} \in E^n$. Выполняются равенства

$$g(\widetilde{\alpha}) = h(\widetilde{\alpha}) + f(\widetilde{\alpha}) = (h(\overline{\widetilde{\alpha}}) + 1) + (f(\overline{\widetilde{\alpha}}) + 1) = h(\overline{\widetilde{\alpha}}) + f(\overline{\widetilde{\alpha}}) = g(\overline{\widetilde{\alpha}}).$$

Следовательно, g — антисамодвойственная функция и, согласно доказанному ранее, может быть выражена некоторой формулой $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ над типом (SM, L). Тогда имеет место соотношение

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(x_1, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_n).$$

Отсюда следует, что функция h также может быть выражена формулой над типом (SM, L). Таким образом, выполняется соотношение $S \subseteq [L]_{SM}$. Значит, $S \cup AS \subseteq [L]_{SM}$. Утверждение доказано.

Следствие 4.2.3. *Имеют место соотношения*

$$[L]_S = S \cup AS, \quad [L]_{S_{01}} = S \cup AS.$$

Доказательство. Заметим, что $L, S, S_{01} \subseteq S \cup AS$, $SM \subseteq S$, и $SM \subseteq S_{01}$. Из этих соотношений и равенства $[L]_{SM} = S \cup AS$ следуют требуемые соотношения.

Лемма 4.2.4. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняются следующие соотношения.*

1. *Если* $F \in \{S, S_{01}, SM\}$, *то* $[L]_F = S \cup AS$.

2. *Если* $F \in \{P_2, K_{01}, D_{01}, M_{01}, T_0, T_1, T_{01}, O^m, I^m, O_0^m, I_1^m, MO_0^m, MI_1^m\}$, *где* $m = 2, 3, \ldots, \infty$, *то* $[L]_F = P_2$.

3. *Если* $F \in \{L_{01}, L_0, L_1, L, SL, SU, U_{01}\}$, *то* $[L]_F = L$.

Доказательство. Пусть $F \in \mathscr{F}$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $F \in \{S, S_{01}, SM\}$. Тогда $[L]_F = S \cup AS \in \widehat{\mathfrak{Z}}$ согласно утверждению 4.2.2 и следствию из него.

2. Пусть $F \in \{P_2, K_{01}, D_{01}, M_{01}, T_0, T_1, T_{01}, O^m, I^m, O_0^m, I_1^m, MO_0^m, MI_1^m\}$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Тогда $[L]_F = P_2$ согласно утверждению 4.2.1.

3. Пусть $F \in \{L_{01}, L_0, L_1, L, SL, SU\}$. Тогда $[L]_F = L \in \widehat{\mathfrak{P}_2}$ согласно лемме 1.3.7.

Лемма доказана.

Следствие 4.2.5. *Для произвольного замкнутого класса* F *из множества* $\mathscr{F}$ *выполняется соотношение* $[L]_F \in \widehat{\mathfrak{P}_2} \cup \widehat{\mathfrak{Z}}$.

Доказательство следующих двух лемм очевидно.

Лемма 4.2.6. *Для произвольного замкнутого класса* F *из множества* $\mathscr{F}$ *выполняется соотношение* $[SU]_F \in \widehat{\widehat{\mathfrak{P}_2}} \cup \widehat{\mathfrak{P}_2}$.

Лемма 4.2.7. *Для произвольного замкнутого класса* F *из множества* $\mathscr{F}$ *выполняется соотношение* $[U_{01}]_F \in \widehat{\mathfrak{P}_2}$.

Таким образом, получено описание всех базовых $\mathscr{P}$-пополнений классов L, SU и U_{01}.

4.3. Базовые $\mathscr{P}$-пополнения класса M_{01}.

Утверждение 4.3.1. *Имеют место соотношения*

$$[M_{01}]_{L_{01}} = T_{01}, \quad [M_{01}]_{L_0} = T_0, \quad [M_{01}]_{L_1} = T_1, \quad [M_{01}]_{S_{01}} = T_{01}.$$

Доказательство. Докажем равенство $[M_{01}]_{L_{01}} = T_{01}$. Заметим, что $[M_{01}]_{L_{01}} \subseteq T_{01}$. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, — произвольная булева функция, принадлежащая классу T_{01}. Докажем, что выполняется соотношение $h \in [M_{01}]_{L_{01}}$. Положим

$$\widehat{L}_{01}(n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)), l \geqslant n,$$

$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_{L_{01}}(h)(x_1, \ldots, x_l),$$

$$R = R_{L_{01}}(h) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta})) | \widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Докажем, что все наборы, отличные от нулевого и единичного, в множестве R попарно не сравнимы. Предположим противное. Пусть существуют такие наборы $\widetilde{\delta}, \widetilde{\gamma} \in E^n$, что наборы $\alpha^{\widetilde{\delta}} = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta}))$, $\alpha^{\widetilde{\gamma}} = (f_1(\widetilde{\gamma}), \ldots, f_l(\widetilde{\gamma}))$ различны, отличны от нулевого и единичного наборов, и выполняется соотношение $\alpha^{\widetilde{\delta}} > \alpha^{\widetilde{\gamma}}$. Тогда существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\alpha_i^{\widetilde{\delta}} = f_i(\widetilde{\delta}) = 1$, $\alpha_i^{\widetilde{\gamma}} = f_i(\widetilde{\gamma}) = 0$. Поскольку наборы $\alpha^{\widetilde{\delta}}$ и $\alpha^{\widetilde{\gamma}}$ отличны от нулевого и единичного, то существуют такие k, j, $1 \leqslant k, j \leqslant n$, что

$$\alpha_j^{\widetilde{\delta}} = f_j(\widetilde{\delta}) = 0, \quad \alpha_j^{\widetilde{\gamma}} = f_j(\widetilde{\gamma}) = 0,$$
$$\alpha_k^{\widetilde{\delta}} = f_k(\widetilde{\delta}) = 1, \quad \alpha_k^{\widetilde{\gamma}} = f_k(\widetilde{\gamma}) = 1.$$

Заметим, что существует такое m, $1 \leqslant m \leqslant l$, что $f_m = f_i + f_j + f_k$, поскольку $f_i, f_j, f_k, x_1 + x_2 + x_3 \in L_{01}$. Тогда $\alpha_m^{\widetilde{\delta}} = \alpha_i^{\widetilde{\delta}} + \alpha_j^{\widetilde{\delta}} + \alpha_k^{\widetilde{\delta}}$, $\alpha_m^{\widetilde{\gamma}} = \alpha_i^{\widetilde{\gamma}} + \alpha_j^{\widetilde{\gamma}} + \alpha_k^{\widetilde{\gamma}}$, откуда следует, что $\alpha_m^{\widetilde{\delta}} = 0$, $\alpha_m^{\widetilde{\gamma}} = 1$. Следовательно, наборы $\alpha^{\widetilde{\delta}}$ и $\alpha^{\widetilde{\gamma}}$ не сравнимы. Получено противоречие. Значит, все наборы из области определения функции r, отличные от нулевого и единичного, попарно не сравнимы. При этом несложно видеть, что нулевой и единичный наборы входят в область определения функции r.

Из теоремы 2.1.1 и утверждений 2.2.1, 2.2.6, 2.2.7, 2.2.14 следует, что функция h принадлежит множеству $[M_{01}]_{L_{01}}$ тогда и только тогда, когда на нулевом наборе функция r не определена или принимает нулевое значение, на единичном наборе функция r не определена или принимает единичное значение, а также для любых наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ таких, что $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\beta}$, выполняется неравенство $r(\widetilde{\alpha}) \geqslant r(\widetilde{\beta})$. Как было показано, функция r на нулевом и единичном наборе принимает нулевое и единичное значения соответственно, и никакие два набора из области определения функции r, отличных от нулевого и единичного, не сравнимы. Следовательно, выполняется соотношение $h \in [M_{01}]_{L_{01}}$. Таким образом, верно равенство $[M_{01}]_{L_{01}} = T_{01}$.

Равенство $[M_{01}]_{S_{01}} = T_{01}$ следует из равенства $[M_{01}]_{L_{01}} = T_{01}$, поскольку $L_{01} \subseteq S_{01}$. Равенство $[M_{01}]_{L_0} = T_0$ доказывается аналогично с учетом того факта, что декомпозиция произвольной функции $h \in T_0$ относительно класса L_0 принимает нулевое значение на нулевом наборе и не определена на единичном наборе. Равенство $[M_{01}]_{L_1} = T_1$ следует из принципа двойственности. Утверждение доказано.

Утверждение 4.3.2. *Имеют место соотношения*

$$[M_{01}]_{O^m} = T_1, \quad [M_{01}]_{O_0^m} = T_{01}, \quad [M_{01}]_{I^m} = T_0, \quad [M_{01}]_{I_1^m} = T_{01},$$

где $m = 2, 3, \ldots, \infty$.

Доказательство. Пусть $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Докажем, что $[M_{01}]_{O^m} = T_1$. Очевидно, что выполняется соотношение $[M_{01}]_{O^m} \subseteq T_1$. Докажем, что $T_1 \subseteq [M_{01}]_{O^m}$. Рассмотрим произвольную функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$ из множества T_1, $n \geqslant 1$. Докажем, что $h \in [M_{01}]_{O^m}$. Положим

$$\widehat{O}^m(n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)), l \geqslant n,$$

$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_{O^m}(h)(x_1, \ldots, x_l),$$

$$R = R_{O^m}(h) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta})) | \widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Рассмотрим набор $\widetilde{1}^{(n)}$ (единичный набор длины n). Заметим, что набор $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{1}^{(n)}}$ является единичным, т. к. $O^m \subseteq T_1$. При этом $r(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{1}^{(n)}}) = h(\widetilde{1}^{(n)}) = 1$.

Докажем, что любые два различных набора, отличных от единичного, из множества R не сравнимы. Предположим противное. Пусть существуют такие наборы $\delta, \gamma \in E^n$, что $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} > \widetilde{\alpha}^{\widetilde{\gamma}}$, и набор $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}}$ отличен от единичного. Тогда очевидно, что $\delta > \gamma$. Поскольку набор $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{1}^{(n)}}$ является единичным, то набор δ отличен от $\widetilde{1}^{(n)}$. Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, равную единице на всех наборах из E^n, кроме δ. Поскольку набор δ отличен от единичного, то $f \in O^m(n)$ согласно определению класса O^m. Следовательно, существует такое $1 \leqslant i \leqslant l$, что $f_i(\delta) < f_i(\gamma)$. Отсюда следует, что $\alpha_i^{\widetilde{\delta}} = 0$ и $\alpha_i^{\widetilde{\gamma}} = 1$. Получено противоречие. Значит, любые два различных набора, отличных от единичного, из множества R не сравнимы.

Заметим, что $1\in O^m$, откуда следует, что существует такое $1 \leqslant i \leqslant l$, что выполняется равенство $f_i(\widetilde{\delta})=1$ для любого $\widetilde{\delta}\in E^n$. Следовательно, множество R не содержит нулевого набора.

Из утверждений 2.2.1, 2.2.6, 2.2.7, 2.2.14 и теоремы 2.1.1 следует, что функция h принадлежит множеству $[M_{01}]_{O^m}$ тогда и только тогда, когда на нулевом наборе функция r не определена или принимает нулевое значение, на единичном наборе функция r не определена или принимает единичное значение, а также для любых наборов $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\in R$ таких, что $\widetilde{\alpha}\geqslant\widetilde{\beta}$, выполняется неравенство $r(\widetilde{\alpha})\geqslant r(\widetilde{\beta})$.

Как было показано ранее, функция r на единичном наборе принимает единичное значение, а на нулевом наборе не определена. Кроме того, никакие два различных набора из области определения функции r, отличных от единичного, не сравнимы. Следовательно, выполняется соотношение $h\in[M_{01}]_{O^m}$, что и требовалось доказать.

Равенство $[M_{01}]_{O_0^m}=T_{01}$ доказывается аналогично с учетом того факта, что декомпозиция произвольной функции $h\in T_{01}$ относительно класса O_0^m принимает нулевое значение на нулевом наборе и единичное значение на единичном наборе. Равенства $[M_{01}]_{I^m}=T_0$ и $[M_{01}]_{I_1^m}=T_{01}$ следуют из равенств $[M_{01}]_{O^m}=T_1$, $[M_{01}]_{O_0^m}=T_{01}$ и принципа двойственности. Утверждение доказано.

Утверждение 4.3.3. *Имеет место соотношение* $[M_{01}]_{SU}=P_2$.

Доказательство. Пусть $h(x_1,\dots,x_n)$ — произвольная булева функция. Докажем, что $h\in[M_{01}]_{SU}$. Положим

$$\widehat{SU}(n)=(f_1(x_1,\dots,x_n)),\dots,f_l(x_1,\dots,x_n)),\, l\geqslant n,$$
$$r(x_1,\dots,x_l)=r_{SU}(h)(x_1,\dots,x_l),$$
$$R=R_{SU}(h)=\{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}}=(\alpha_1^{\widetilde{\delta}},\dots,\alpha_l^{\widetilde{\delta}})=(f_1(\widetilde{\delta}),\dots,f_l(\widetilde{\delta}))|\widetilde{\delta}\in E^n\}.$$

Докажем, что любые два различных набора из множества R несравнимы. Предположим противное. Пусть существуют такие наборы $\delta,\gamma\in E^n$, что $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}}>\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\gamma}}$. Значит, существует такое $1\leqslant i\leqslant n$, что выполняются равенства $\alpha_i^{\widetilde{\delta}}=\delta_i=1$, $\alpha_i^{\widetilde{\gamma}}=\gamma_i=0$. Отсюда следует, что $\alpha_{n+i}^{\widetilde{\delta}}=\overline{\delta_i}=0$, $\alpha_{n+i}^{\widetilde{\gamma}}=\overline{\gamma_i}=1$. Следовательно, наборы $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}}$ и $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\gamma}}$ несравнимы. Получили противоречие. Значит, любые два различных набора из множества R несравнимы. Также несложно видеть, что множество R не содержит нулевого и единичного наборов. Из утверждений 2.2.1, 2.2.6, 2.2.7, 2.2.14 и теоремы 2.1.1 следует, что функция h принадлежит множеству $[M_{01}]_{SU}$, что и требовалось доказать.

В обратную сторону включение очевидно. Утверждение доказано.

Следствие 4.3.4. *Имеют место соотношения*

$$[M_{01}]_{SL}=[M_{01}]_S=[M_{01}]_L=P_2,$$
$$[T_0]_{SL}=[T_0]_S=[T_0]_{SU}=P_2.$$

Лемма 4.3.5. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняются следующие соотношения.*

1. *Если $F\in\{P_2,M_{01},T_0,T_1,T_{01}\}$, то $[M_{01}]_F=F$.*

2. *Если* $F \in \{K_{01}, D_{01}, MO_0^m, MI_1^m, SM\}$, *то* $[M_{01}]_F = M_{01}$.

3. $[M_{01}]_{L_{01}} = T_{01}$, $[M_{01}]_{L_0} = T_0$, $[M_{01}]_{L_1} = T_1$, $[M_{01}]_{S_{01}} = T_{01}$.

4. *Если* $F \in \{L, S, SL, SU\}$, *то* $[M_{01}]_F = P_2$.

5. $[M_{01}]_{O^m} = T_1$, $[M_{01}]_{O_0^m} = T_{01}$, $[M_{01}]_{I^m} = T_0$, $[M_{01}]_{I_1^m} = T_{01}$.

Доказательство. Пусть $F \in \mathscr{F}$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $F \in \{P_2, M_{01}, T_0, T_1, T_{01}\}$. Тогда $[M_{01}]_F = F$ согласно лемме 1.3.6.

2. Пусть $F \in \{K_{01}, D_{01}, MO_0^m, MI_1^m, SM\}$. Тогда $[M_{01}]_F = M_{01}$ согласно лемме 1.3.7.

3. Пусть $F \in \{L_{01}, L_0, L_1, S_{01}\}$. Тогда утверждение леммы выполняется согласно утверждению 4.3.1.

4. Пусть $F \in \{L, S, SL, SU\}$. Тогда $[M_{01}]_F = P_2$ согласно утверждению 4.3.3 и следствию 4.3.4.

5. Пусть $F \in \{O^m, I^m, O_0^m, I_1^m$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty\}$. Тогда утверждение леммы выполняется согласно утверждению 4.3.2.

Лемма доказана.

Следствие 4.3.6. *Для произвольного замкнутого класса* F *из множества* $\mathscr{F}$ *выполняется соотношение* $[M_{01}]_F \in \widehat{\mathfrak{P}_2}$.

Таким образом, все базовые $\mathscr{P}$-пополнения класса M_{01} являются замкнутыми классами из множества $\widehat{\mathfrak{P}_2}$.

4.4. Базовые $\mathscr{P}$-пополнения класса T_0.

Утверждение 4.4.1. *Имеют место следующие утверждения:*

1. *Пусть* $F \in \{L_1, L, T_1, O^m$, *где* $m = 2, 3, \ldots, \infty\}$. *Тогда выполняется равенство* $[T_0]_F = P_2$.

2. *Пусть* $F \in \{L_1, L_0, L, T_1, O^m, T_0, I^m$, *где* $m = 2, 3, \ldots, \infty\}$. *Тогда выполняется равенство* $[S]_F = P_2$.

Доказательство. Пусть $F \in \{L_1, L, T_1, O^m$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty\}$. Тогда $1 \in F$. Заметим, что $P_2 = [T_0 \cup \{1\}]$, так как T_0 — предполный класс. Кроме того, $[T_0 \cup \{1\}] \subseteq [T_0]_F$. Отсюда следует, что $[T_0]_F = P_2$. Аналогично доказывается второй пункт.

Лемма 4.4.2. *Для произвольного замкнутого класса* F *из множества* $\mathscr{F}$ *выполняются следующие соотношения.*

1. *Если*

$$F \in \{K_{01}, D_{01}, L_{01}, L_0, M_{01}, T_0, T_{01}, I^m, O_0^m, \\ I_1^m, MO_0^m, MI_1^m, S_{01}, SM, \text{где } m = 2, 3, \ldots, \infty\},$$

то $[T_0]_F = T_0$.

2. *Если* $F \in \{P_2, L_1, L, T_1, O^m, S, SL, SU$, *где* $m = 2, 3, \ldots, \infty\}$, *то* $[T_0]_F = P_2$.

Доказательство. Пусть $F \in \mathscr{F}$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть

$$F \in \{K_{01}, D_{01}, L_{01}, L_0, M_{01}, T_0, T_{01}, I^m, O_0^m, I_1^m, MO_0^m, MI_1^m, S_{01}, SM, \text{где } m = 2, 3, \ldots, \infty\}.$$

Тогда $F \subseteq T_0$, откуда следует, что $[T_0]_F = T_0$ согласно лемме 1.3.7 (один класс содержит другой).

2. Пусть $F \in \{P_2, L_1, L, T_1, O^m, \text{где } m = 2, 3, \ldots, \infty\}$. Тогда $[T_0]_F = P_2$ согласно утверждению 4.4.1 (добавление константы 1 к предполному классу).

3. Пусть $F \in \{S, SL, SU\}$. Тогда $[T_0]_F = P_2$ согласно следствию 4.3.4.

Лемма доказана.

Следствие 4.4.3. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняется соотношение $[T_0]_F \in \widehat{\mathfrak{P}_2}$.*

Таким образом, все базовые $\mathscr{P}$-пополнения класса T_0 являются замкнутыми классами из множества $\widehat{\mathfrak{P}_2}$.

4.5. Базовые $\mathscr{P}$-пополнения классов вида O^m.

Утверждение 4.5.1. *Для любого инвариантного класса F и любого m, $m = 2, 3, \ldots, \infty$, выполнено равенство $[O^m]_F = G_F^m$.*

Доказательство. Пусть $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Рассмотрим произвольную булеву функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$. Положим

$$\widehat{F}(n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)), l \geqslant n,$$

$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_F(h)(x_1, \ldots, x_l),$$

$$R = R_F(h) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta}))|\widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Пусть $g \in [O^m]_F$. Докажем, что $g \in G_F^m$. Заметим, что согласно теореме 2.1.1 и утверждению 2.2.4 из соотношения $g \in [O^m]_F$ следует, что функция r согласована с классом O^m. Рассмотрим произвольное q, $1 \leqslant q \leqslant m$, и произвольные q наборов $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1}, \ldots, \widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^q}$ из множества R такие, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant q$, выполняется соотношение $g(\delta^i) = 0$. Согласно определению декомпозиции отсюда следует, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant q$, выполняется соотношение $r(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^i}) = 0$. Согласно утверждению 2.2.4 существует такое j, $1 \leqslant j \leqslant l$, что $\alpha_j^{\widetilde{\delta}^q} = 0$, $1 \leqslant j \leqslant l$. Отсюда следует, что $f_j(\widetilde{\delta}^i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Значит, согласно определению класса G_F^m выполняется соотношение $g \in G_F^m$.

Пусть $g \in G_F^m$. Докажем, что $g \in [O^m]_F$. Рассмотрим произвольное q, $1 \leqslant q \leqslant m$, и произвольные q наборов $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1}, \ldots, \widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^q}$ из множества R такие, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant q$, выполняется соотношение $r(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^i}) = 0$. Согласно определению декомпозиции для любого i, $1 \leqslant i \leqslant q$, выполняется соотношение $g(\delta^i) = 0$. Согласно определению класса G_F^m отсюда следует, что существует такое j, $1 \leqslant j \leqslant l$, что $f_j(\widetilde{\delta}^i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Следовательно, выполняется соотношение $\alpha_j^{\widetilde{\delta}^i} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Таким образом, согласно утверждению 2.2.4 функция r согласована с классом O^m, откуда согласно теореме 2.1.1 следует соотношение $g \in [O^m]_F$. Утверждение доказано.

Утверждение 4.5.2. *Имеет место соотношение $[O^m]_{MO_0^k} = O^k$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty$, $2 \leqslant k < m$.*

Доказательство. Очевидно, что $[O^m]_{MO_0^k} \subseteq O^k$. Докажем обратное соотношение. Рассмотрим произвольную функцию $h(x_1, \ldots, x_n) \in O^k$,

$n \geqslant 1$. Докажем, что $h \in G^m_{MO^k_0}$. Пусть $q \leqslant m$, $q \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольные q наборов $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^q \in E^n$ таких, что $h(\widetilde{\alpha}^i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Согласно лемме 1.3.6 и утверждению 4.5.1 выполняются равенства $[O^m]_{O^k} = G^m_{O^k} = O^k$. Отсюда следует, что $h \in G^m_{O^k}$. Следовательно, существует такая функция $g(x_1, \ldots, x_n) \in O^k$, что $g(\widetilde{\alpha}^i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Рассмотрим функцию $g'(x_1, \ldots, x_n)$, принимающую нулевое значение на всех таких наборах $\widetilde{\alpha}$, что существует такое j, $1 \leqslant j \leqslant q$, что $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\alpha}^j$, и единичное значение на всех остальных наборах. Докажем, что $g' \in MO^k_0$. Очевидно, что выполняются соотношения $g' \in T_0$ и $g' \in M$. Докажем, что $g' \in O^k$. Рассмотрим произвольные k наборов $\widetilde{\beta}^1, \ldots, \widetilde{\beta}^k \in E^n$ таких, что выполнено $g'(\widetilde{\beta}^i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Рассмотрим такие наборы $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{\beta}^1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{\widetilde{\beta}^k}$, что $\widetilde{\beta}^i \leqslant \widetilde{\alpha}_{\widetilde{\beta}^i}$ и $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{\beta}^i} \in \{\widetilde{\alpha}^1, \ldots \widetilde{\alpha}^m\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Эти наборы имеют общую нулевую компоненту, поскольку функция g принимает на них нулевое значение и принадлежит классу O^k. Из соотношения $\widetilde{\beta}^i \leqslant \widetilde{\alpha}_{\widetilde{\beta}^i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, следует, что наборы $\widetilde{\beta}^1, \ldots, \widetilde{\beta}^k$ также имеют общую нулевую компоненту. Следовательно, выполняется соотношение $g' \in O^k$. Таким образом, доказано, что для произвольных m наборов $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^m \in E^n$ таких, что $h(\widetilde{\alpha}^i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, существует такая функция $g' \in MO^k_0$, что $g'(\widetilde{\alpha}^i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Следовательно, $h \in G^m_{MO^k_0} = [O^m]_{MO^k_0}$. Утверждение доказано.

С л е д с т в и е 4.5.3. *Имеет место соотношение* $[O^m]_{O^k_0} = O^k$, *где* $m = 2, 3, \ldots, \infty$, $2 \leqslant k < m$.

У т в е р ж д е н и е 4.5.4. *Имеют место соотношения*

$$[O^m]_L = [O^m]_{L_0} = [O^m]_{T_0} = [O^m]_{I^k} = P_2,$$

где $k = 2, 3, \ldots, \infty$, $m = 2, 3, \ldots, \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Заметим, что согласно лемме 1.3.5 выполняются соотношения

$$[O^m]_{U_0} = [O^m \cup \{0\}]_{U_{01}} = [O^m \cup \{0\}] = P_2,$$

$m = 2, 3, \ldots, \infty$. Поскольку $U_0 \subseteq L, L_0, T_0, I^k$, отсюда следует, что выполняются равенства

$$[O^m]_L = [O^m]_{L_0} = [O^m]_{T_0} = [O^m]_{I^k} = P_2,$$

где $k = 2, 3, \ldots, \infty$, $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Утверждение доказано.

У т в е р ж д е н и е 4.5.5. *Имеют место соотношения*

$$[O^m]_{K_{01}} = [O^m]_{M_{01}} = [O^m]_{T_{01}} = [O^m]_{I^k_1} = [O^m]_{MI^k_1} = T_1,$$

где $k = 2, 3, \ldots, \infty$, $m = 2, 3, \ldots, \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Докажем, что верно равенство $[O^m]_{K_{01}} = T_1$. Очевидно, что выполняется соотношение $[O^m]_{K_{01}} \subseteq T_1$. Докажем обратное соотношение. Рассмотрим произвольную функцию $h(x_1, \ldots, x_n) \in T_1$. Докажем, что $h \in [O^m]_{K_{01}}$. Положим

$$\widehat{K}_{01}(n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)), l \geqslant n,$$
$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_{K_{01}}(h)(x_1, \ldots, x_l),$$
$$R = R_{K_{01}}(h) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta})) | \widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Рассмотрим произвольное множество различных наборов $\widetilde{\delta}^1, \ldots, \widetilde{\delta}^k \in E^n$, $k \geqslant 1$, таких, что $r(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^i}) = 0$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Заметим, что, если $\widetilde{\delta}^i$ — единичный набор, $1 \leqslant i \leqslant k$, то получаем противоречие

$$0 = r(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^i}) = h(1, \ldots, 1) = 1,$$

поскольку $h \in T_1$. Следовательно, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, набор $\widetilde{\delta}^i$ отличен от единичного. Докажем, что существует такое j, $1 \leqslant j \leqslant l$, что $\alpha_j^{\widetilde{\delta}^i} = 0$ для любого $1 \leqslant i \leqslant k$. Заметим, что существует такое j, $1 \leqslant j \leqslant l$, что $f_j(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \& \ldots \& x_n$. Поэтому для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, выполняется равенство $\alpha_j^{\widetilde{\delta}^i} = \delta_1^i \& \ldots \& \delta_n^i = 0$. Из утверждения 2.2.4 следует, что функция r согласована с классом O^m. Отсюда согласно теореме 2.1.1 следует, что $h \in [O^m]_{K_{01}}$, что и требовалось доказать. Поскольку $K_{01} \subseteq M_{01}, T_{01}, I_1^k, MI_1^k$, отсюда следуют равенства

$$[O^m]_{M_{01}} = [O^m]_{T_{01}} = [O^m]_{I_1^k} = [O^m]_{MI_1^k} = T_1,$$

где $k = 2, 3, \ldots, \infty$, $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Утверждение доказано.

Лемма 4.5.6. *Пусть A — замкнутый класс, $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Тогда выполняется соотношение $b(A) \subseteq [O^m]_A$.*

Доказательство. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, — произвольная булева функция, принадлежащая множеству $b(A)$. Докажем, что $h \in [O^m]_A$. Пусть $1 \leqslant q \leqslant m$ и $\widetilde{\delta}^1, \ldots, \widetilde{\delta}^q$ — такие наборы из E^n, что выполняются соотношения $h(\widetilde{\delta}^i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Согласно определению множества $b(A)$ существует такая функция $g(x_1, \ldots, x_n) \in A$, что $h \geqslant g$. Отсюда следует, что $g(\widetilde{\delta}^i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant q$. Тогда согласно утверждению 4.5.1 выполняется соотношение $h \in [O^m]_A$, что и требовалось доказать.

Утверждение 4.5.7. *Имеет место соотношение $[O^m]_S = b(S)$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty$.*

Доказательство. Пусть $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Пусть $h_1(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, — произвольная булева функция, принадлежащая множеству $b(S)$. Тогда соотношение $h_1 \in [O^m]_S$ выполняется согласно утверждению 4.5.6.

Пусть $h_2(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, — произвольная булева функция такая, что $h_2 \in [O^m]_S$. Докажем соотношение $h_2 \in b(S)$. Пусть $\widetilde{\delta}^1, \widetilde{\delta}^2$ — такие наборы из E^n, что выполняются соотношения $h_2(\widetilde{\delta}^i) = 0$, $i = 1, 2$. Тогда согласно утверждению 4.5.1 существует такая функция $q(x_1, \ldots, x_n) \in S$, что $q(\widetilde{\delta}^i) = 0$, $i = 1, 2$. Поскольку $q \in S$, то наборы $\widetilde{\delta}^1$ и $\widetilde{\delta}^2$ не являются противоположными. Отсюда следует, что любые два набора, на которых функция h_2 принимает нулевое значение, не являются противоположными. Следовательно, на любых двух противоположных наборах из области определения функции h_2 она принимает либо противоположные значения, либо единичные. Значит, существует функция $g(x_1, \ldots, x_n) \in S$ такая, что $h_2 \geqslant g$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается

Следствие 4.5.8. *Имеют место соотношение $[O^m]_{S_{01}} = b(S_{01})$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty$.*

Утверждение 4.5.9. *Имеет место соотношение $[O^m]_{SM} = b(SM)$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty$.*

Доказательство. Пусть $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, — произвольная булева функция, принадлежащая множеству $b(SM)$. Тогда соотношение $h \in [O^m]_{SM}$ выполняется согласно лемме 4.5.6.

Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, — произвольная булева функция такая, что $h \in [O^m]_{SM}$. Докажем соотношение $h \in b(SM)$. Рассмотрим множество всех наборов, на которых функция h принимает нулевое значение. Обозначим это множество через R. Пусть $R = \{\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^k\}$, $k \geqslant 1$. Рассмотрим частичную функцию $r(x_1, \ldots, x_n)$ с областью определения R и такую, что $r(\widetilde{\alpha}^i) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Согласно утверждениям 2.2.1, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.22 функция r согласована с классом SM тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия.

1. Для любых наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ таких, что $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\beta}$, выполняется неравенство $r(\widetilde{\alpha}) \geqslant r(\widetilde{\beta})$.

2. Для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}^1, \widetilde{\alpha}^2 \in R$ таких, что $r(\widetilde{\alpha}^1) = r(\widetilde{\alpha}^2) = 0$, найдется такое j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $\alpha_j^1 = \alpha_j^2 = 0$.

3. Для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}^1, \widetilde{\alpha}^2 \in R$ таких, что $r(\widetilde{\alpha}^1) = r(\widetilde{\alpha}^2) = 1$, найдется такое j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $\alpha_j^1 = \alpha_j^2 = 1$.

Первое и третье условия выполняются, поскольку функция r принимает нулевое значение на всей области определения. Докажем, что выполняется второе условие. Рассмотрим два произвольных набора $\widetilde{\alpha}^1, \widetilde{\alpha}^2 \in R$. Предположим противное. Пусть наборы $\widetilde{\alpha}^1$ и $\widetilde{\alpha}^2$ не имеют общей нулевой компоненты. Согласно утверждению 4.5.1 существует такая функция $p(x_1, \ldots, x_n) \in SM$, что выполняются равенства $p(\widetilde{\alpha}^1) = p(\widetilde{\alpha}^2) = 0$. Рассмотрим набор $\overline{\widetilde{\alpha}^1}$. Заметим, что не существует такого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\alpha_i^1 = 0$ и $\alpha_i^2 = 0$. Отсюда следует, что не существует такого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\overline{\widetilde{\alpha}_i^1} = 1$ и $\widetilde{\alpha}_i^2 = 0$. Значит, выполняется соотношение $\widetilde{\alpha}^2 \geqslant \overline{\widetilde{\alpha}^1}$. В силу монотонности функции p выполняется равенство $p(\overline{\widetilde{\alpha}^1}) = 0$. Это противоречит самодвойственности функции p. Следовательно, предположение неверно и любые два набора из области определения функции r имеют общую нулевую компоненту. Таким образом, функция r согласована с классом SM.

Рассмотрим доопределение функции r в классе SM. Обозначим эту функцию через $g(x_1, \ldots, x_n)$. Заметим, что выполняется неравенство $g \leqslant h$, поскольку на всех наборах, на которых функция h принимает нулевое значение, функция g также принимает нулевое значение. Следовательно, функция h принадлежит множеству $b(SM)$, что и требовалось доказать. Утверждение доказано.

Лемма 4.5.10. *Пусть $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняются следующие соотношения.*

1. *Если $F \in \{L_0, L, T_0, I^k\}$, где $k = 2, 3, \ldots, \infty$, то $[O^m]_F = P_2$.*

2. *Если $F \in \{K_{01}, M_{01}, T_{01}, I_1^k, MI_1^k\}$, где $k = 2, 3, \ldots, \infty$, то $[O^m]_F = T_1$.*

3. *Если $F \in \{L_{01}, L_1, SL, SU\}$, то $[O^m]_F = G_F^m$.*

4. *Если $F \in \{D_{01}, O^k, O_0^k, MO_0^k\}$, где $k \geqslant m$, то $[O^m]_F = O^m$.*

5. *Если* $F\in\{P_2, T_1, O^k\}$, *где* $k<m$, *то* $[O^m]_F=F$.

6. *Если* $F\in\{O_0^k, MO_0^k\}$, *где* $k<m$, *то* $[O^m]_F=O^k$.

7. *Если* $F\in\{S, S_{01}, SM\}$, *то* $[O^m]_F=b(F)$.

Доказательство. Пусть $F\in\mathscr{F}$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $F\in\{L_0, L, T_0, I^k\}$, где $k=2, 3, \ldots, \infty$. Тогда $[O^m]_F=P_2$ согласно утверждению 4.5.4.

2. Пусть $F\in\{K_{01}, M_{01}, T_{01}, I_1^k, MI_1^k\}$, где $k=2, 3, \ldots, \infty$. Тогда $[O^m]_F=T_1$ согласно утверждению 4.5.5.

3. Пусть $F\in\{L_{01}, L_1, SL, SU\}$. Тогда $[O^m]_F=G_F^m$ согласно утверждению 4.5.1.

4. Пусть $F\in\{D_{01}, O^k, O_0^k, MO_0^k\}$, где $k\geqslant m$. Тогда $[O^m]_F=O^m$ согласно лемме 1.3.7.

5. Пусть $F\in\{P_2, T_1, O^k\}$, где $k<m$. Тогда $[O^m]_F=F$ согласно лемме 1.3.6.

6. Пусть $F\in\{O_0^k, MO_0^k\}$, где $k<m$. Тогда $[O^m]_F=O^k$ согласно утверждению 4.5.2 и его следствию.

7. Пусть $F\in\{S, S_{01}, SM\}$. Тогда $[O^m]_F=b(F)$ согласно утверждениям 4.5.7 и 4.5.9 и следствиям из них.

Следствие 4.5.11. *Для произвольного замкнутого класса* F *из множества* $\mathscr{F}$ *выполняется соотношение* $[O^m]_F\in\widehat{\mathfrak{P}_2}\cup\widehat{\mathfrak{G}}\cup\widehat{\mathfrak{S}}$, *где* $m=2, 3, \ldots, \infty$.

Таким образом, в лемме 4.5.10 получено описание всех базовых $\mathscr{P}$-пополнений класса O^m.

4.6. Базовые $\mathscr{P}$-пополнения класса K_{01}.

Утверждение 4.6.1. *Имеет место соотношение* $[K_{01}]_{D_{01}}=M_{01}$.

Доказательство. Очевидно, что $[K_{01}]_{D_{01}}\subseteq M_{01}$. Докажем соотношение $M_{01}\subseteq[K_{01}]_{D_{01}}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)\in M_{01}$. Докажем, что функция f может быть выражена формулой над типом (D_{01}, K_{01}). Пусть $A=\{\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^k\}\subseteq E^n$, $k\geqslant 1$ — множество всех наборов, на которых функция f принимает нулевое значение. Оно не пусто, поскольку в него входит нулевой набор. Рассмотрим любой такой набор $\widetilde{\beta}\in E^n$, что выполняется равенство $f(\widetilde{\beta})=1$. Такой набор существует, поскольку $f\neq 0$. В силу монотонности функции f для любого i, $1\leqslant i\leqslant k$, либо наборы $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\alpha}^i$ несравнимы, либо выполнено неравенство $\widetilde{\beta}>\widetilde{\alpha}^i$.

Сопоставим каждому из наборов множества A некоторую функцию следующим образом. Набору $\widetilde{\alpha}^i=(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$, $1\leqslant i\leqslant k$, сопоставим дизъюнкцию $d^i(x_1, \ldots, x_n)=x_{j_1}\vee\ldots\vee x_{j_m}$, где $\alpha_{j_1}^i, \ldots, \alpha_{j_m}^i$ — все нулевые компоненты набора $\widetilde{\alpha}^i$. Это возможно, поскольку $f\neq 0$. Несложно видеть, что каждая такая дизъюнкция принимает нулевое значение на тех и только тех наборах, которые не превосходят набор, сопоставленный этой дизъюнкции. Поскольку функция f монотонна, функция f принимает на таких наборах нулевое значение, т. е. все эти наборы входят в множество A. Рассмотрим функцию

$$h(x_1, \ldots, x_n)=d^1(x_1, \ldots, x_n)\&\ldots\&d^k(x_1, \ldots, x_n).$$

Заметим, что $h\in[K_{01}]_{D_{01}}$. Для любого i, $1\leqslant i\leqslant k$, выполнено равенство $h(\widetilde{\alpha}^i)=0$, так как хотя бы одна из дизъюнкций принимает нулевое значение на наборе $\widetilde{\alpha}^i$. На любом наборе длины n, не принадлежащем множеству A, каждая из дизъюнкций принимает единичное значение, откуда следует, что функция h принимает на этом наборе единичное значение. Таким образом, функции h и f тождественно равны и функция f может быть выражена формулой над типом (D_{01}, K_{01}), что и требовалось доказать. Утверждение доказано.

Утверждение 4.6.2. *Имеют место соотношения*

$$[K_{01}]_{O^m} = T_1, \quad [K_{01}]_{O_0^m} = T_{01}, \quad [K_{01}]_{MO_0^m} = M_{01},$$

где $m = 2, 3, \ldots, \infty$.

Доказательство. Пусть $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Докажем равенство $[K_{01}]_{O^m} = T_1$. Очевидно, что выполняется соотношение $[K_{01}]_{O^m} \subseteq T_1$. Докажем, что $T_1 \subseteq [K_{01}]_{O^m}$. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n) \in T_1$. Если h является единичной функцией, то $h \in [K_{01}]_{O^m}$, поскольку $1 \in O^m$. Пусть функция h отлична от единичной функции. Тогда существует СКНФ функции h вида

$$h(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1, \ldots, x_n) \& \ldots \& g_k(x_1, \ldots, x_n),$$

где $1 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$. Согласно определению СКНФ каждая из функций g_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, принимает нулевое значение ровно на одном наборе. Поскольку $h \in T_1$, то эти наборы отличны от единичного. Следовательно, $g_i \in O^m$, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Поэтому выполняется соотношение $h \in [K_{01}]_{O^m}$, что и требовалось доказать. Равенства $[K_{01}]_{O_0^m} = T_{01}$ и $[K_{01}]_{MO_0^m} = M_{01}$, $m = 2, 3, \ldots, \infty$, доказываются аналогично.

Утверждение 4.6.3. *Имеет место соотношение* $[K_{01}]_S = l(S)$.

Доказательство. Докажем равенство $[K_{01}]_S = l(S)$. Соотношение $[K_{01}]_S \subseteq l(S)$ выполняется, поскольку согласно следствию из утверждения 4.5.7 выполняются соотношения $[K_{01}]_S \subseteq [I^2]_S = l(S)$.

Докажем соотношение $l(S) \subseteq [K_{01}]_S$. Рассмотрим $p(x_1, \ldots, x_n) \in l(S)$. Пусть $q_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, q_m(x_1, \ldots, x_n)$, $m \geqslant 1$, — все самодвойственные функции от переменных $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $q_i \geqslant p$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Докажем, что формула $q_1(x_1, \ldots, x_n) \& \ldots \& q_m(x_1, \ldots, x_n)$ реализует функцию p. Пусть $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E^n$ и $p(\widetilde{\beta}) = 1$. Тогда $q_i(\widetilde{\beta}) = 1$ для всех $i = 1, \ldots, l$, откуда следует, что $q_1(\widetilde{\beta}) \& \ldots \& q_l(\widetilde{\beta}) = 1$. Пусть $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in E^n$ и $p(\widetilde{\beta}) = 0$. Докажем, что существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant m$, что $q_i(\widetilde{\beta}) = 0$. Рассмотрим функцию q_1. Предположим, что $q_1(\widetilde{\beta}) = 1$. Рассмотрим функцию $q'(x_1, \ldots, x_n)$ такую, что $q'(\widetilde{\beta}) = 0$, $q'(\overline{\widetilde{\beta}}) = 1$, и такую, что $q'(\widetilde{\alpha}) = q_1(\widetilde{\alpha})$ для любого набора $\widetilde{\alpha}$ из E^n такого, что $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\beta}, \overline{\widetilde{\beta}}$. Заметим, что $q'(\widetilde{\beta}) = p(\widetilde{\beta}) = 0$ и $q'(\overline{\widetilde{\beta}}) = 1 \geqslant p(\overline{\widetilde{\beta}})$. На остальных наборах функция q' совпадает с функцией q_1. Отсюда следует, что $q' \geqslant p$, т. е. существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant m$, что $q' = q_i$. Значит, выполняется равенство $q_i(\widetilde{\beta}) = 0$, откуда следует равенство $q_1(\widetilde{\beta}) \& \ldots \& q_l(\widetilde{\beta}) = 0$. Таким образом, формула $q_1(x_1, \ldots, x_n) \& \ldots \& q_m(x_1, \ldots, x_n)$ является формулой над типом (S, K_{01}) и реализует функцию p. Следовательно, выполняется соотношение $l(S) \subseteq [K_{01}]_S$. Утверждение доказано.

Аналогично доказывается

Утверждение 4.6.4. *Имеют место соотношения*

$$[K_{01}]_{S_{01}} = l(S_{01}), [K_{01}]_{SM} = l(SM).$$

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 4.6.5. *Для произвольного класса F из множества $\{SU, L, L_0, L_1, L_{01}, SL\}$ имеет место соотношение $[K_{01}]_F = K(F)$.*

Лемма 4.6.6. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathcal{F}$ выполняются следующие соотношения.*

1. *Если* $F \in \{P_2, K_{01}, M_{01}, T_0, T_1, T_{01}, I^m, I_1^m, MI_1^m\}$, *где* $m = 2, 3, \ldots, \infty$, *то* $[K_{01}]_F = F$.
2. *Если* $F \in \{SU, L_{01}, L_0, L_1, L, SL\}$, *то* $[K_{01}]_F = K(F)$.
3. $[K_{01}]_{D_{01}} = M_{01}$.
4. $[K_{01}]_{O^m} = T_1, [K_{01}]_{O_0^m} = T_{01}, [K_{01}]_{MO_0^m} = M_{01}$, *где* $m = 2, 3, \ldots, \infty$.
5. $[K_{01}]_S = l(S), [K_{01}]_{S_{01}} = l(S_{01}), [K_{01}]_{SM} = l(SM)$.

Доказательство. Пусть $F \in \mathcal{F}$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $F \in \{P_2, K_{01}, M_{01}, T_0, T_1, T_{01}, I^m, I_1^m, MI_1^m\}$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Тогда $[K_{01}]_F = F$ согласно лемме 1.3.6 (один класс содержит другой).

2. Пусть $F \in \{SU, L_{01}, L_0, L_1, L, SL\}$. Тогда $[K_{01}]_F = K(F)$ согласно утверждению 4.6.5.

3. Пусть $F = D_{01}$. Тогда $[K_{01}]_F = M_{01}$ согласно утверждению 4.6.1.

4. Пусть $F \in \{O^m, O_0^m, MO_0^m\}$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Тогда утверждение леммы выполняется согласно утверждению 4.6.2.

5. Пусть $F \in \{S, S_{01}, SM\}$. Тогда утверждение леммы выполняется согласно утверждениям 4.6.3 и 4.6.4.

Лемма доказана.

Следствие 4.6.7. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathcal{F}$ выполняется соотношение $[K_{01}]_F \in \widehat{\mathfrak{P}_2} \cup \widehat{\mathfrak{L}} \cup \widehat{\mathfrak{S}}$.*

Таким образом, в лемме 4.6.6 получено описание всех базовых $\mathcal{P}$-пополнений класса K_{01}.

4.7. Базовые $\mathcal{P}$-пополнения класса S.

Утверждение 4.7.1. *Имеет место соотношение $[S]_{K_{01}} = T_{01} \cup \overline{T_{01}}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную булеву функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$. Положим

$$\widehat{K}_{01}(n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)), l \geqslant n,$$

$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_{K_{01}}(h)(x_1, \ldots, x_l),$$

$$R = R_{K_{01}}(h) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta})) | \widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Заметим, что согласно теореме 2.1.1 соотношение $h \in [S]_{K_{01}}$ выполняется тогда и только тогда, когда функция r согласована с классом S. Заметим, что существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant l$, что $f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \& \ldots \& x_n$. Отсюда следует, что у всех наборов из множества R, кроме единичного, есть общая нулевая компонента. Заметим, что множество R содержит нулевой и единичный наборы, поскольку $f_i \in K_{01}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant l$. Значит, множество R содержит только два противоположных набора — нулевой и единичный. Следовательно, согласно утверждению 2.2.2 функция r согласована с классом S тогда и только тогда, когда функция h принимает на нулевом и единичном наборах противоположные значения, т. е. $h \in T_{01} \cup \overline{T_{01}}$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается

Следствие 4.7.2. *Для любого множества*

$$A \in \{[S]_{D_{01}}, [S]_{M_{01}}, [S]_{T_{01}}\}$$

выполняется равенство $A = T_{01} \cup \overline{T_{01}}$.

Утверждение 4.7.3. *Имеет место соотношение* $[S]_{MO_0^m} = T_{01} \cup \overline{T_{01}}$, *где* $m = 2, 3, \ldots, \infty$.

Доказательство. Заметим, что выполняется соотношение $S \subseteq T_{01} \cup \overline{T_{01}}$, поскольку любая самодвойственная функция принимает противоположные значения на нулевом и единичном наборах. Очевидно, что $MO_0^m \subseteq T_{01} \subseteq T_{01} \cup \overline{T_{01}}$. Поэтому из соотношения $S \subseteq T_{01} \cup \overline{T_{01}}$ следует, что $[S]_{MO_0^m} \subseteq T_{01} \cup \overline{T_{01}}$. Согласно утверждению 4.7.1 выполняется равенство $[S]_{K_{01}} = T_{01} \cup \overline{T_{01}}$. Поскольку $K_{01} \subseteq MO_0^m$, то $[S]_{K_{01}} \subseteq [S]_{MO_0^m}$. Следовательно, выполняются соотношения

$$T_{01} \cup \overline{T_{01}} = [S]_{K_{01}} \subseteq [S]_{MO_0^m} \subseteq T_{01} \cup \overline{T_{01}}.$$

Следовательно, $[S]_{MO_0^m} = T_{01} \cup \overline{T_{01}}$.

Аналогично доказывается

Следствие 4.7.4. *Имеют место соотношения*

$$[S]_{I_1^m} = [S]_{O_0^m} = [S]_{MI_1^m} = T_{01} \cup \overline{T_{01}},$$

где $m = 2, 3, \ldots, \infty$.

Лемма 4.7.5. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняются следующие соотношения.*

1. *Если* $F \in \{K_{01}, D_{01}, T_{01}, M_{01}\}$, *то* $[S]_F = T_{01} \cup \overline{T}_{01}$.
2. *Если* $F \in \{L_{01}, S, S_{01}, SM, SL, SU\}$, *то* $[S]_F = S$.
3. *Если* $F \in \{P_2, L_0, L_1, L, T_0, T_1, O^m, I^m\}$, *где* $m = 2, 3, \ldots, \infty$, *то* $[S]_F = P_2$.
4. *Если* $F \in \{O_0^m, I_1^m, MO_0^m, MI_1^m\}$, *где* $m = 2, 3, \ldots, \infty$, *то* $[S]_F = T_{01} \cup \overline{T_{01}}$.

Доказательство. Пусть $F \in \mathscr{F}$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $F \in \{K_{01}, D_{01}, T_{01}, M_{01}\}$. Тогда $[S]_F = T_{01} \cup \overline{T}_{01}$ согласно утверждению 4.7.1 и следствию из него.

2. Пусть $F \in \{L_{01}, S, S_{01}, SM, SL, SU\}$. Тогда $F \subseteq S$, откуда следует, что $[S]_F = S$ согласно лемме 1.3.7.

3. Пусть $F \in \{P_2, L_0, L_1, L, T_0, T_1, O^m, I^m\}$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Тогда $[S]_F = P_2$ согласно утверждению 4.4.1.

4. Пусть $F \in \{O_0^m, I_1^m, MO_0^m, MI_1^m\}$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Тогда $[S]_F = T_{01} \cup \overline{T_{01}}$ согласно утверждению 4.7.3.

Лемма доказана.

Следствие 4.7.6. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathcal{F}$ выполняется соотношение* $[S]_F \in \{P_2, S, T_{01} \cup \overline{T_{01}}\} \subseteq \widehat{\mathfrak{P}_2} \cup \widehat{\overline{\mathfrak{P}}}_2$.

Таким образом, в лемме 4.7.5 получено описание всех базовых $\mathcal{P}$-пополнений класса S.

4.8. Теорема о множестве базовых $\mathcal{P}$-пополнений.

Теорема 4.8.1. *Множество G булевых функций является базовым $\mathcal{P}$-пополнением тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$G \in \widehat{\mathfrak{S}} \cup \widehat{\mathfrak{Z}} \cup \widehat{\mathfrak{G}} \cup \widehat{\mathfrak{L}} \cup \widehat{\mathfrak{P}_2} \cup \widehat{\overline{\mathfrak{P}}}_2.$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из лемм 4.2.4, 4.3.5, 4.4.2, 4.5.10, 4.6.6, 4.7.5, 4.2.6, 4.2.7 и их следствий.

Приведенная далее таблица иллюстрирует теорему 4.8.1. В ней указаны все возможные базовые $\mathcal{P}$-пополнения $[A]_F$, жирным выделены случаи, когда базовое $\mathcal{P}$-пополнение не является замкнутым классом.

4.9. Теорема о множестве $\mathcal{P}$-пополнений. Обозначим через $\mathfrak{P}_2$ множество всех неконстантных замкнутых классов, а также классов, получающихся из них добавлением констант. Обозначим через $\overline{\mathfrak{P}}_2$ множество всех таких классов булевых функций A, что существует замкнутый класс булевых функций B такой, что $A = B \cup \overline{B}$, а также классов, получающихся из этих классов одновременным добавлением обеих констант. Обозначим через $\mathfrak{G}$ множество, состоящее из классов, содержащихся в $\widehat{\mathfrak{G}}$, а также классов

$$T_0 \cap G_{L_{01}}^m, (T_0 \cap G_{L_{01}}^m) \cup \{1\}, T_{01} \cap G_{L_{01}}^2 \cap H_{L_{01}}^2, G_{SL}^2 \cap H_{SL}^2, G_{SU}^2 \cap H_{SU}^2,$$

$m = 2, 3, \ldots, \infty$, и двойственных к перечисленным. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество, состоящее из классов, содержащихся в классе $\widehat{\mathfrak{S}}$, классов $T_1 \cap l(S_{01})$, $T_1 \cap l(SM)$, $M_{01} \cap l(SM)$, классов, получающихся из них добавлением констант, а также классов, двойственных перечисленным. Обозначим через $\mathfrak{Z}$ множество, состоящее из классов $S \cup AS$, $T_0 \cap (S \cup AS)$, $T_1 \cap (S \cup AS)$, а также двойственных к перечисленным. Обозначим через $\mathfrak{L}$ множество, состоящее из классов, содержащихся в множестве $\widehat{\mathfrak{L}}$, классов, получающихся из них добавлением констант, а также классов, двойственных к перечисленным.

Пусть $\widehat{\mathbb{G}} = \widehat{\mathfrak{S}} \cup \widehat{\mathfrak{Z}} \cup \widehat{\mathfrak{G}} \cup \widehat{\mathfrak{L}} \cup \mathfrak{P}_2 \cup \overline{\mathfrak{P}}_2$ и $\mathbb{G} = \mathfrak{S} \cup \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{P}_2 \cup \overline{\mathfrak{P}}_2$. Заметим, что из определений классов $\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{G}, \mathfrak{L}, \mathfrak{P}_2, \overline{\mathfrak{P}}_2$, очевидно, следует следующая лемма.

Лемма 4.9.1. *Для любого класса A, принадлежащего множеству $\mathbb{G}$, выполнено соотношение $A^* \in \mathbb{G}$.*

Лемма 4.9.2. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathcal{F}$ выполняется соотношение* $[L_0]_F \in \mathfrak{P}_2 \cup \mathfrak{Z}$.

Доказательство. Пусть $F \in \mathcal{F}$ и $F \notin \{S, S_{01}, SM\}$. Тогда заметим, что $[L]_F \in \mathfrak{P}_2$ и $[T_0]_F \in \mathfrak{P}_2$ согласно леммам 4.2.4 и 4.4.2. Отсюда следует, что согласно лемме 3.2.2 выполняются соотношения $[L_0]_F = [L]_F \cap [T_0]_F \in \mathfrak{P}_2$.

Таблица

$F \setminus A$	K_{01}	L	M_{01}	T_0	O^m	S	U_{01}	SU
P_2	P_2	P_2	P_2	P_2	P_2	P_2	P_2	P_2
K_{01}	K_{01}	P_2	M_{01}	T_0	T_1	$\boldsymbol{T_{01} \cup \overline{T_{01}}}$	K_{01}	$\boldsymbol{K_{01} \cup \overline{K_{01}}}$
D_{01}	M_{01}	P_2	M_{01}	T_0	O^m	$\boldsymbol{T_{01} \cup \overline{T_{01}}}$	D_{01}	$\boldsymbol{D_{01} \cup \overline{D_{01}}}$
L_{01}	$\boldsymbol{K(L_{01})}$	L	T_{01}	T_0	$\boldsymbol{G^m_{L_{01}}}$	S	L_{01}	SL
L_0	$\boldsymbol{K(L_0)}$	L	T_0	T_0	P_2	P_2	L_0	L
L_1	$\boldsymbol{K(L_1)}$	L	T_1	P_2	$\boldsymbol{G^m_{L_1}}$	P_2	L_1	L
L	$\boldsymbol{K(L)}$	L	P_2	P_2	P_2	P_2	L	L
M_{01}	M_{01}	P_2	M_{01}	T_0	T_1	$\boldsymbol{T_{01} \cup \overline{T_{01}}}$	M_{01}	$\boldsymbol{M_{01} \cup \overline{M_{01}}}$
T_0	T_0	P_2	T_0	T_0	P_2	P_2	T_0	P_2
T_1	T_1	P_2	T_1	P_2	T_1	P_2	T_1	P_2
T_{01}	T_{01}	P_2	T_{01}	T_0	T_1	$\boldsymbol{T_{01} \cup \overline{T_{01}}}$	T_{01}	$\boldsymbol{T_{01} \cup \overline{T_{01}}}$
O^m	T_1	P_2	T_1	P_2	O^m	P_2	O^m	$\boldsymbol{O^m \cup \overline{O^m}}$
I^m	I^m	P_2	T_0	T_0	P_2	P_2	I^m	$\boldsymbol{I^m \cup \overline{I^m}}$
O^m_0	T_{01}	P_2	T_{01}	T_0	O^m_0	$\boldsymbol{T_{01} \cup \overline{T_{01}}}$	O^m_0	$\boldsymbol{O^m_0 \cup \overline{O^m_0}}$
I^m_1	I^m_1	P_2	T_{01}	T_0	T_1	$\boldsymbol{T_{01} \cup \overline{T_{01}}}$	I^m_1	$\boldsymbol{I^m_1 \cup \overline{I^m_1}}$
MO^m_0	M_{01}	P_2	M_{01}	T_0	MO^m_0	$\boldsymbol{T_{01} \cup \overline{T_{01}}}$	MO^m_0	$\boldsymbol{MO^m_0 \cup \overline{MO^m_0}}$
MI^m_1	MI^m_1	P_2	M_{01}	T_0	T_1	$\boldsymbol{T_{01} \cup \overline{T_{01}}}$	MI^m_1	$\boldsymbol{MI^m_1 \cup \overline{MI^m_1}}$
S	$\boldsymbol{l(S)}$	$\boldsymbol{S \cup AS}$	P_2	P_2	$\boldsymbol{b(S)}$	S	S	S
S_{01}	$\boldsymbol{l(S_{01})}$	$\boldsymbol{S \cup AS}$	T_{01}	T_0	$\boldsymbol{b(S_{01})}$	S	S_{01}	S
SM	$\boldsymbol{l(SM)}$	$\boldsymbol{S \cup AS}$	M_{01}	T_0	$\boldsymbol{b(SM)}$	S	SM	$\boldsymbol{SM \cup \overline{SM}}$
SL	$\boldsymbol{K(SL)}$	L	P_2	P_2	$\boldsymbol{G^m_{SL}}$	S	SL	SL
SU	$\boldsymbol{K(SU)}$	L	P_2	P_2	$\boldsymbol{G^m_{SU}}$	S	SU	SU
U_{01}	K_{01}	L	M_{01}	T_0	O^m	S	U_{01}	SU

Пусть $F = S$. Тогда согласно лемме 4.4.2 выполняется равенство $[T_0]_F = P_2$. Согласно следствию из утверждения 4.2.2 выполняется равенство $[L]_F = S \cup AS$. Согласно лемме 3.2.2 выполняются соотношения

$$[L_0]_F = [L]_F \cap [T_0]_F = (S \cup AS) \cap P_2 = S \cup AS.$$

Следовательно, $[L_0]_F \in \mathfrak{Z}$.

Пусть $F \in \{S_{01}, SM\}$. Согласно лемме 4.4.2 выполняется равенство $[T_0]_F = T_0$. Согласно утверждению 4.2.2 и следствию из него выполняется равенство $[L]_F = S \cup AS$. Согласно лемме 3.2.2 выполняются соотношения

$$[L_0]_F = [L]_F \cap [T_0]_F = (S \cup AS) \cap T_0.$$

Следовательно, $[L_0]_F \in \mathfrak{Z}$. Лемма доказана.

Лемма 4.9.3. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняется соотношение $[SL]_F \in \mathfrak{P}_2 \cup \overline{\mathfrak{P}}_2$.*

Доказательство. Пусть $F \in \{L_{01}, L_0, L_1, L, T_0, T_1, O^m, I^m, SL, SU\}$. Заметим, что согласно леммам 4.2.4 и 4.7.5 выполняются соотношения $[L]_F \in \mathfrak{P}_2$ и $[S]_F \in \mathfrak{P}_2$. Поэтому согласно лемме 3.2.2 выполняются соотношения $[SL]_F = [L]_F \cap [S]_F \in \mathfrak{P}_2$.

Пусть $F \in \{K_{01}, D_{01}, M_{01}, T_{01}, O_0^m, I_1^m, MO_0^m, MI_1^m\}$. Заметим, что согласно леммам 4.2.4 и 4.7.5 выполняются соотношения $[L]_F = P_2$ и $[S]_F = T_{01} \cup \overline{T}_{01}$. Согласно лемме 3.2.2 выполняются соотношения

$$[SL]_F = [S]_F \cap [L]_F = T_{01} \cup \overline{T}_{01}.$$

Следовательно, $[SL]_F \in \overline{\mathfrak{P}}_2$.

Пусть $F \in \{S, S_{01}, SM\}$. Согласно лемме 4.7.5 выполняется равенство $[S]_F = S$. Согласно утверждению 4.2.2 и следствию из него выполняется равенство $[L]_F = S \cup AS$. Поэтому согласно лемме 3.2.2 выполняются соотношения

$$[SL]_F = [S]_F \cap [L]_F = S.$$

Следовательно, $[SL]_F \in \mathfrak{P}_2$. Лемма доказана.

Лемма 4.9.4. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняется соотношение $[L_{01}]_F \in \mathfrak{P}_2$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.2.2 выполняются соотношения $[L_{01}]_F = [L_0]_F \cap [L_1]_F \cap [S]_F = [L]_F \cap [T_0]_F \cap [T_1]_F \cap [S]_F$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $F = SM$. Тогда согласно леммам 4.2.4, 4.4.2, 4.7.5 и принципу двойственности выполняются следующие равенства: $[L]_F = S \cup AS$, $[T_0]_F = T_0$, $[T_1]_F = T_1$, $[S]_F = S$. Следовательно, $[L_{01}]_F = S_{01}$.

2. Пусть $F \in \{S_{01}, S\}$. Тогда $[L_{01}]_F \in \{S_{01}, S\}$ согласно лемме 1.3.6, поскольку $L_{01} \subseteq S_{01} \subseteq S$.

3. Пусть $F \in \{K_{01}, D_{01}, T_{01}, M_{01}, O_0^m, I_1^m, MO_0^m, MI_1^m\}$. Тогда согласно леммам 4.2.4, 4.4.2, 4.7.5 и принципу двойственности выполняются следующие равенства: $[L]_F = P_2$, $[T_0]_F = T_0$, $[T_1]_F = T_1$, $[S]_F = T_{01} \cup \overline{T}_{01}$. Следовательно, $[L_{01}]_F = T_{01}$.

4. Пусть F отличен от вышеперечисленных классов. Тогда согласно леммам 4.2.4, 4.4.2, 4.7.5 и принципу двойственности $[L]_F, [T_0]_F, [T_1]_F, [S]_F$ являются замкнутыми классами. Следовательно, $[L_{01}]_F \in \mathfrak{P}_2$.

Лемма доказана.

Лемма 4.9.5. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняется соотношение $[T_{01}]_F \in \mathfrak{P}_2$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.2.2 выполняется соотношение $[T_{01}]_F = [T_0]_F \cap [T_1]_F$. Согласно лемме 4.4.2 выполняется соотношение $[T_0]_F \in \{P_2, T_0\}$. Из принципа двойственности следует, что $[T_1]_F \in \{P_2, T_1\}$. Следовательно, выполняется соотношение

$$[T_{01}]_F \in \{P_2, T_0, T_1, T_{01}\} \subseteq \mathfrak{P}_2.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.9.6. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняется соотношение $[O_0^m]_F \in \mathfrak{P}_2 \cup \mathfrak{S} \cup \mathfrak{G}$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty$. При этом выполняются следующие соотношения.*

1. *Если* $F \in \{K_{01}, D_{01}, L_0, L, M_{01}, T_0, T_1, T_{01}, O^k, I^k, O_0^k, I_1^k, MO_0^k, MI_1^k\}$, *где* $k = 2, 3, \ldots, \infty$, *то* $[O_0^m]_F \in \mathfrak{P}_2$.

2. *Если* $F = L_{01}$, *то* $[O_0^m]_F = G_{L_{01}}^m \cap T_0$.

3. *Если* $F = L_1$, *то* $[O_0^m]_F = G_{L_1}^m$.

4. *Если* $F = SL$, *то* $[O_0^m]_F = G_{SL}^m$.

5. *Если* $F = S$, *то* $[O_0^m]_F = b(S)$.

6. *Если* $F = S_{01}$, *то* $[O_0^m]_F = b(S_{01}) \cap T_0$.

7. *Если* $F = SM$, *то* $[O_0^m]_F = b(SM) \cap T_0$.

8. *Если* $F = SU$, *то* $[O_0^m]_F = G_{SU}^m$.

Доказательство. Из леммы 3.2.2 следует, что $[O_0^m]_F = [O^m]_F \cap [T_0]_F$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть выполняется соотношение

$$F \in \{K_{01}, D_{01}, L_0, L, M_{01}, T_0, T_1, T_{01}, O^k, I^k, O_0^k, I_1^k, MO_0^k, MI_1^k\},$$

где $k = 2, 3, \ldots, \infty$. Заметим, что согласно леммам 4.5.10 и 4.4.2 выполняются соотношения $[O^m]_F \in \mathfrak{P}_2$ и $[T_0]_F \in \mathfrak{P}_2$. Поэтому согласно лемме 3.2.2 выполняются соотношения $[O_0^m]_F = [O^m]_F \cap [T_0]_F \in \mathfrak{P}_2$.

2. Пусть $F = L_{01}$. Тогда $[O_0^m]_F = G_{L_{01}}^m \cap T_0 \in \mathfrak{G}$ согласно леммам 4.5.10 и 4.4.2.

3. Пусть $F = L_1$. Согласно леммам 4.5.10 и 4.4.2 выполняются соотношения $[O_0^m]_F = G_{L_1}^m \cap P_2 = G_{L_1}^m$. Следовательно, $[O_0^m]_F \in \mathfrak{G}$.

4. Пусть $F = SL$. Согласно леммам 4.5.10 и 4.4.2 выполняются соотношения $[O_0^m]_F = G_{SL}^m \cap P_2 \in \mathfrak{G}$.

5. Пусть $F = S$. Тогда $[O_0^m]_F = b(S) \cap P_2 = b(S) \in \mathfrak{S}$ согласно леммам 4.5.10 и 4.4.2.

6. Пусть $F = S_{01}$. Тогда $[O_0^m]_F = b(S_{01}) \cap T_0 \in \mathfrak{S}$ согласно леммам 4.5.10 и 4.4.2.

7. Пусть $F = SM$. Тогда $[O_0^m]_F = b(SM) \cap T_0 \in \mathfrak{S}$ согласно леммам 4.5.10 и 4.4.2.

8. Пусть $F = SU$. Тогда $[O_0^m]_F = G_{SU}^m \cap P_2 = G_{SU}^m \in \mathfrak{G}$ согласно леммам 4.5.10 и 4.4.2.

Лемма доказана.

Лемма 4.9.7. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathcal{F}$ выполняется соотношение $[MO_0^m]_F \in \mathfrak{P}_2 \cup \mathfrak{G} \cup \mathfrak{S}$. При этом выполняются следующие соотношения.*

1. *Если*

$$F \in \{K_{01}, D_{01}, L, L_0, M_{01}, T_0, T_1, T_{01}, O^k, I^k, O_0^k, I_1^k, MO_0^k, MI_1^k\},$$

где $k = 2, 3, \ldots, \infty$, *то*

$$[MO_0^m]_F \in \{P_2, T_0, T_1, T_{01}, M_{01}, MO_0^m, O^m, MO_0^k, O^k\}.$$

2. *Если* $F \in \{L_{01}, L_1, SL, SU\}$, *то*

$$[MO_0^m]_F \in \{T_{01} \cap G_{L_{01}}^m = T_0 \cap G_{L_{01}}^m, T_1 \cap G_{L_1}^m = G_{L_1}^m, G_{SL}^m, G_{SU}^m\}.$$

3. $[MO_0^m]_S = b(S)$.

4. $[MO_0^m]_{S_{01}} = b(S_{01}) \cap T_0$.

5. $[MO_0^m]_{SM} = b(SM) \cap M_{01}$

Доказательство. Заметим, что из соотношения $O^m \subseteq T_1$ следует, что $[O^m]_F \subseteq [T_1]_F$, поэтому $[T_1]_F \cap [O^m]_F = [O^m]_F$. Следовательно, согласно лемме 3.2.2 выполняются соотношения

$$[MO_0^m]_F = [M]_F \cap [O^m]_F \cap [T_0]_F =$$

$$= [M]_F \cap ([T_1]_F \cap [O^m]_F) \cap [T_0]_F = [M_{01}]_F \cap [O^m]_F.$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть

$$F \in \{K_{01}, D_{01}, L, L_0, M_{01}, T_0, T_1, T_{01}, O^k, I^k, O_0^k, I_1^k, MO_0^k, MI_1^k\}.$$

Тогда заметим, что согласно леммам 4.3.5 и 4.5.10 выполняются соотношения $[MO_0^m]_{K_{01}} = M_{01}$, $[MO_0^m]_{D_{01}} = MO_0^m$, $[MO_0^m]_L = P_2$, $[MO_0^m]_{L_0} = T_0$, $[MO_0^m]_{M_{01}} = M_{01}$, $[MO_0^m]_{T_0} = T_0$, $[MO_0^m]_{T_1} = T_1$, $[MO_0^m]_{T_{01}} = T_1$, $[MO_0^m]_{O^k} = O^m$ (при $k \geqslant m$), $[MO_0^m]_{O^k} = O^k$ (при $k < m$), $[MO_0^m]_{I^k} = T_0$, $[MO_0^m]_{O_0^k} = O_0^m$ (при $k \geqslant m$), $[MO_0^m]_{O_0^k} = O_0^k$ (при $k < m$), $[MO_0^m]_{I_1^k} = T_{01}$, $[MO_0^m]_{MO_0^k} = MO_0^m$ (при $k \geqslant m$), $[MO_0^m]_{MO_0^k} = MO_0^k$ (при $k < m$). Отсюда следует требуемое утверждение.

2. Пусть $F \in \{L_{01}, L_1, SL, SU\}$. Согласно утверждению 4.3.1, утверждению 4.3.3, следствию из него и лемме 4.5.10 выполняется соотношение

$$[MO_0^m]_F \in \{T_{01} \cap G_{L_{01}}^m = T_0 \cap G_{L_{01}}^m, T_1 \cap G_{L_1}^m = G_{L_1}^m, G_{SL}^m, G_{SU}^m\}.$$

Следовательно, $[MO_0^m]_F \in \mathfrak{G}$.

3. Пусть $F = S$. Согласно следствию из утверждения 4.3.3 и лемме 4.5.10 выполняется соотношение $[MO_0^m]_F = b(S) \cap P_2 = b(S)$. Следовательно, $[MO_0^m]_F \in \mathfrak{S}$.

4. Пусть $F = S_{01}$. Согласно утверждению 4.3.1 и лемме 4.5.10 выполняется соотношение $[MO_0^m]_F = b(S_{01}) \cap T_{01} = b(S_{01}) \cap T_0$. Следовательно, $[MO_0^m]_F \in \mathfrak{S}$.

5. Пусть $F = SM$. Согласно леммам 1.3.7 и 4.5.10 выполняется соотношение $[MO_0^m]_F = b(SM) \cap M_{01}$. Следовательно, $[MO_0^m]_F \in \mathfrak{S}$.

Лемма доказана.

Лемма 4.9.8. *Пусть* $A \in \{D_{01}, L_1, I^m, T_1, I_1^m, MI_1^m\}$. *Для произвольного замкнутого класса* F *из множества* $\mathscr{F}$ *выполняется соотношение* $[A]_F \in \mathbb{G}$.

Доказательство. Пусть $A \in \{D_{01}, L_1, I^m, T_1, I_1^m, MI_1^m\}$. Заметим, что выполняется соотношение $A^* \in \{K_{01}, L_0, O^m, T_0, O_0^m, MO_0^m\}$. Заметим, что для произвольного замкнутого класса из множества $\mathscr{F}$ в этом множестве содержится класс, двойственный к данному. Следовательно, $F^* \in \mathscr{F}$. Тогда согласно леммам 4.6.6, 4.9.2, 4.5.10, 4.4.2, 4.9.7 выполняется соотношение $[A^*]_{F^*} \in \mathbb{G}$. Значит, из леммы 4.9.1 следует, что $[A]_F = ([A^*]_{F^*})^* \in \mathbb{G}$. Лемма доказана.

Лемма 4.9.9. *Пусть выполняется соотношение*

$$A \in \{K, K_0, K_1, D, D_0, D_1, M, M_0, M_1, MU, U_1, U_0\}.$$

Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняется соотношение $[A]_F \in \mathbb{G}$.

Доказательство. Заметим, что существует такой замкнутый класс $B \in \{K_{01}, D_{01}, M_{01}, U_{01}\}$ и такое множество константных функций $\widetilde{C} \in \{C_0, C_1, C\}$, что $A = B \cup \widetilde{C}$. Согласно утверждениям 4.6.7, 4.3.6, 4.2.7 и 4.9.1 выполняется соотношение $[B]_F \in \mathfrak{P}_2 \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{S}$. Согласно определениям классов $\mathfrak{P}_2, \overline{\mathfrak{P}}_2, \overline{\mathfrak{P}_2}, \mathfrak{L}, \mathfrak{S}$ и лемме 1.3.4 выполняются соотношения

$$[A]_F = [B]_F \cup \widetilde{C} \in \mathfrak{P}_2 \cup \overline{\mathfrak{P}_2} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{S} \subseteq \mathbb{G}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.9.10. *Пусть выполняется соотношение $A \in \{MO^m, MI^m\}$. Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняется соотношение $[A]_F \in \mathbb{G}$.*

Доказательство. Заметим, что $MO^m = MO_0^m \cup \{1\}$. Согласно лемме 1.3.4 выполняется равенство $[MO^m]_F = [MO_0^m]_F \cup \{1\}$.

1. Пусть

$$F \in \{K_{01}, D_{01}, L, L_0, M_{01}, T_0, T_1, T_{01}, O^k, I^k, O_0^k, I_1^k, MO_0^k, MI_1^k\},$$

где $k = 2, 3, \ldots, \infty$. Тогда согласно лемме 4.9.7 выполняется соотношение $[MO^m]_F \in \{P_2, T_0 \cup \{1\}, T_1, T_{01} \cup \{1\}, M_1, MO^m, O^m, MO^k, O^k\} \subseteq \mathfrak{P}_2$.

2. Пусть $F \in \{S, S_{01}, SM\}$. Тогда согласно лемме 4.9.7 выполняется соотношение $[MO_0^m]_F \in \mathfrak{S}$, откуда согласно определению множества $\mathfrak{S}$ следует, что $[MO^m]_F \in \mathfrak{S}$.

3. Пусть $F \in \{L_{01}, L_1, SL, SU\}$. Тогда согласно лемме 4.9.7 выполняется соотношение

$$[MO^m]_F \in \{(T_0 \cap G_{L_{01}}^m) \cup \{1\}, G_{L_1}^m \cup \{1\}, G_{SL}^m \cup \{1\}, G_{SU}^m \cup \{1\}\} =$$

$$= \{(T_0 \cap G_{L_{01}}^m) \cup \{1\}, G_{L_1}^m, G_{SL}^m, G_{SU}^m\} \subseteq \mathfrak{S}.$$

Для класса MI^m утверждение леммы следует из принципа двойственности. Лемма доказана.

Лемма 4.9.11. *Пусть выполняется соотношение $A = U$. Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняется соотношение $[A]_F \in \mathbb{G}$.*

Доказательство. Заметим, что $U = SU \cup \{0, 1\}$. Согласно лемме 1.3.4 выполняется равенство $[U]_F = [SU]_F \cup \{0, 1\}$. Согласно лемме 4.2.6 выполняется соотношение $[SU]_F \in \widehat{\overline{\mathfrak{P}}_2} \cup \widehat{\mathfrak{P}_2}$. Согласно определениям классов $\mathfrak{P}_2$ и $\overline{\mathfrak{P}}_2$ выполняется соотношение $[U]_F \in \mathfrak{P}_2 \cup \overline{\mathfrak{P}_2}$. Лемма доказана.

Лемма 4.9.12. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняется соотношение* $[SM]_F \in \mathfrak{P}_2 \cup \mathfrak{G} \cup \mathfrak{S}$.

Доказательство. Согласно лемме 3.2.2 и принципу двойственности выполняются соотношения

$$[SM]_F = [M]_F \cap [O^2]_F \cap [I^2]_F = \\ = [M]_F \cap ([T_1]_F \cap [O^2]_F) \cap ([T_0]_F \cap [I^2]_F) = [M_{01}]_F \cap [O^2]_F \cap [I^2]_F.$$

Пусть $F \in \{K_{01}, D_{01}, L, M_{01}, T_0, T_1, T_{01}, O^m, I^m, O_0^m, I_1^m, MO_0^m, MI_1^m\}$. Из лемм 4.3.5, 4.5.10 и принципа двойственности следуют соотношения $[M_{01}]_F \in \mathfrak{P}_2$, $[O^2]_F \in \mathfrak{P}_2$ и $[I^2]_F \in \mathfrak{P}_2$. Отсюда следует, что выполняются соотношения

$$[SM]_F = [M_{01}]_F \cap [O^2]_F \cap [I^2]_F \in \mathfrak{P}_2,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $F \in \{L_{01}, L_0, L_1, SL, SU\}$. Из утверждения 4.3.1, лемм 4.3.5, 4.5.10 и принципа двойственности следуют соотношения

$$[SM]_F \in \{T_{01} \cap G^2_{L_{01}} \cap H^2_{L_{01}}, T_1 \cap G^m_{L_1}, T_0 \cap H^m_{L_0}, G^2_{SL} \cap H^2_{SL}, G^2_{SU} \cap H^2_{SU}\} \subseteq \mathfrak{G},$$

что и требовалось доказать.

Пусть $F \in \{S, S_{01}, SM\}$. Тогда $[SM]_F = F \in \mathfrak{P}_2$ согласно лемме 1.3.6. Лемма доказана.

Лемма 4.9.13. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняется соотношение* $[S_{01}]_F \in \mathfrak{P}_2 \cup \overline{\mathfrak{P}}_2$.

Доказательство. Из леммы 3.2.2 следует, что $[S_{01}]_F = [S]_F \cap \cap [T_0]_F \cap [T_1]_F$. Согласно лемме 4.7.5 выполняется соотношение $[S]_F \in \in \{P_2, S, T_{01} \cup \overline{T}_{01}\}$. Из леммы 4.4.2 и принципа двойственности следует, что $[T_0]_F \in \{P_2, T_0\}$, $[T_1]_F \in \{P_2, T_1\}$. Отсюда несложно видеть, что

$$[S_{01}]_F \in \{P_2, T_0, T_{01}, S_{01}, S, T_{01} \cup \overline{T}_{01}\} \subseteq \mathfrak{P}_2 \cup \overline{\mathfrak{P}}_2.$$

Лемма 4.9.14. *Для произвольного замкнутого класса F из множества $\mathscr{F}$ выполняется соотношение* $[P_2]_F = P_2$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $[P_2]_F = P_2 \in \mathfrak{P}_2 \subseteq \mathbb{G}$ согласно лемме 1.3.7.

Сформулируем основной результат.

Теорема 4.9.15. *Множество G булевых функций является $\mathscr{P}$-пополнением тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$G \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{P}_2 \cup \overline{\mathfrak{P}}_2.$$

Доказательство. Согласно данным ранее обозначениям $\mathscr{F} = = \{P_2, M_{01}, L, L_0, L_1, L_{01}, SL, K_{01}, D_{01}, SU, U_{01}, T_0, T_1, T_{01}, O^k, O_0^k, MO_0^k, I^k, I_1^k, MI_1^k, S, SM, S_{01}\}$, где $k = 2, 3, \ldots, \infty$.

Докажем, что, если множество G булевых функций является $\mathscr{P}$-пополнением, то выполняется соотношение

$$G \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{G} \cup \mathfrak{L} \cup \mathfrak{P}_2 \cup \overline{\mathfrak{P}}_2.$$

Пусть A — неконстантный замкнутый класс, F — замкнутый класс из множества $\mathscr{F}$. Докажем, что $[A]_F \in \mathbb{G}$. Рассмотрим четыре случая.

1. A содержит константы 0 и 1, т. е. является одним из следующих классов:

$$P_2, M, L, K, D, U, MU.$$

Тогда $[A]_F \in \mathbb{G}$ согласно леммам 4.9.14 (класс P_2), 4.9.9 (классы M, K, D, U, MU) и 4.2.4 (класс L).

2. A содержит 1 и не содержит 0, т. е. является одним из следующих классов:

$$T_1, M_1, L_1, K_1, D_1, U_1, O^m, MO^m,$$

где $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Тогда $[A]_F \in \mathbb{G}$ согласно леммам 4.9.8 (классы T_1, L_1), 4.9.9 (классы M_1, K_1, D_1, U_1, MO^m), 4.5.10 (O^m).

3. A содержит 0 и не содержит 1, т. е. является одним из следующих классов:

$$T_0, M_0, L_0, K_0, D_0, U_0, I^m, MI^m,$$

где $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Тогда соотношение $[A]_F \in \mathbb{G}$ следует из аналогичного соотношения для классов T_1, M_1, L_1, K_1, D_1, U_1, O^m, MO^m и принципа двойственности.

4. A не содержит 0 и 1, т. е. является одним из следующих классов:

$$T_{01}, S_{01}, M_{01}, L_{01}, K_{01}, D_{01}, U_{01}, S, SM, SL, SU, O_0^m, MO_0^m, I_1^m, MI_1^m,$$

где $m = 2, 3, \ldots, \infty$. Тогда $[A]_F \in \mathbb{G}$ согласно леммам 4.9.5 (класс T_{01}), 4.9.13 (класс S_{01}), 4.3.5 (класс M_{01}), 4.9.4 (класс L_{01}), 4.6.6 (класс K_{01}), 4.9.8 (классы D_{01}, I_1^m, MI_1^m), 4.2.7 (класс U_{01}), 4.7.5 (класс S), 4.9.12 (класс SM), 4.9.3 (класс SL), 4.2.6 (класс SU), 4.9.6 (класс O_0^m), 4.9.7 (класс MO_0^m).

Таким образом, доказано, что для произвольного неконстантного замкнутого класса A и замкнутого класса F, принадлежащего множеству $\mathscr{F}$, выполнено соотношение $[A]_F \in \mathbb{G}$.

Докажем, что $[A]_F \in \mathbb{G}$, если A — неконстантный замкнутый класс, а F — неконстантный замкнутый класс, не принадлежащий множеству $\mathscr{F}$. Заметим, что множество неконстантных замкнутых классов, не принадлежащих множеству $\mathscr{F}$, исчерпывается следующим списком:

$$P_2, U_{01}, K, K_0, K_1, D, D_0, D_1, M, M_0, M_1, MU, U_1, U_0, U, MO^k, MI^k,$$

где $k = 2, 3, \ldots, \infty$. Рассмотрим следующие три случая.

Пусть $F = P_2$. Тогда $[A]_{P_2} = P_2 \in \mathbb{G}$ согласно лемме 1.3.7.

Пусть $F = U_{01}$. Тогда $U_{01} \subseteq A$, поскольку A — неконстантный замкнутый класс. Следовательно, $[A]_{U_{01}} = A \in \mathfrak{P}_2 \subseteq \mathbb{G}$ согласно лемме 1.3.6.

Пусть $F \in \{K, K_0, K_1, D, D_0, D_1, M, M_0, M_1, MU, U_1, U_0, U, MO^k, MI^k\}$, где $k = 2, 3, \ldots, \infty$. Тогда существуют такие классы $H \in \{K_{01}, D_{01}, M_{01}, U_{01}, SU, MO_0^k, MI_1^k\}$, $k = 2, 3, \ldots, \infty$, и $\widetilde{C} \in \{C_0, C_1, C\}$, что $F = H \cup \widetilde{C}$. Тогда согласно лемме 1.3.5 $[A]_F = [A]_{H \cup \widetilde{C}} = [[A \cup \widetilde{C}]]_H \in \mathbb{G}$.

Таким образом, если A и F — неконстантные замкнутые классы, то выполняется соотношение $[A]_F \in \mathbb{G}$. Итак, необходимость доказана.

Докажем теорему в обратную сторону. Покажем, что для произвольного класса H из $\mathbb{G}$ существуют такие замкнутые классы A и F, что $H=[A]_F$. Перечислим всевозможные классы из $\mathbb{G}$, не являющиеся замкнутыми. Согласно определениям множеств $\overline{\mathfrak{P}}_2, \mathfrak{S}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{L}$ множество таких классов исчерпывается следующими списками.

1. Классы $l(S)$, $l(S_{01})$, $l(SM)$, $T_1\cap l(S_{01})$, $T_1\cap l(SM)$, $M_{01}\cap l(SM)$, классы, получающиеся из них добавлением констант, а также двойственные к перечисленным. Согласно утверждениям 4.6.3 и 4.6.4 выполняются равенства $[K_{01}]_S=l(S)$, $[K_{01}]_{S_{01}}=l(S_{01})$, $[K_{01}]_{SM}=l(SM)$. Согласно лемме 4.9.6 и принципу двойственности выполняются равенства $[I_1^m]_{S_{01}}=T_1\cap l(S_{01})$, $[I_1^m]_{SM}=T_1\cap l(SM)$. Согласно леммам 1.3.7 и 4.5.10 и принципу двойственности выполняется равенство $[MI_1^m]_{S_{01}}=M_{01}\cap l(SM)$. Заметим, что согласно лемме 1.3.5, заменив в равенствах класс K_{01} на K_0, K_1 или K, а класс I_1^m на MI_1^m, можно получить классы, получающиеся добавлением констант. Заменив оба класса A и F на двойственные им, можно получить оставшиеся двойственные классы.

2. Классы $K(SU)$, $K(L)$, $K(L_0)$, $K(L_1)$, $K(L_{01})$, $K(SL)$, классы, получающиеся из них добавлением констант, а также двойственные к перечисленным. Согласно утверждению 4.6.5 выполняются равенства $[K_{01}]_{SU}=K(SU)$, $[K_{01}]_L=K(L)$, $[K_{01}]_{L_0}=K(L_0)$, $[K_{01}]_{L_1}=K(L_1)$, $[K_{01}]_{L_{01}}=K(L_{01})$, $[K_{01}]_{SL}= =K(SL)$. Заметим, что согласно лемме 1.3.5, заменив в равенствах класс K_{01} на K_0, K_1 или K, можно получить классы, получающиеся добавлением констант. Заменив оба класса A и F на двойственные им, можно получить оставшиеся двойственные классы.

3. Классы $G_{L_{01}}^m$, $G_{L_1}^m$, G_{SL}^m, G_{SU}^m, $T_0\cap G_{L_{01}}^m$, $(T_0\cap G_{L_{01}}^m)\cup\{1\}$, $T_{01}\cap G_{L_{01}}^2\cap H_{L_{01}}^2$, $G_{SL}^2\cap H_{SL}^2$, $G_{SU}^2\cap H_{SU}^2$, а также классы, двойственные к перечисленным. Согласно утверждению 4.5.1 выполняются равенства $[O^m]_{L_{01}}=G_{L_{01}}^m$, $[O^m]_{L_1}= =G_{L_1}^m$, $[O^m]_{SL}=G_{SL}^m$, $[O^m]_{SU}=G_{SU}^m$, согласно лемме 4.9.6 выполняется равенство $[O_0^m]_{L_{01}}=T_0\cap G_{L_{01}}^m$, согласно лемме 4.9.12 выполняются равенства $[SM]_{L_{01}}=T_{01}\cap G_{L_{01}}^2\cap H_{L_{01}}^2$, $[SM]_{SL}=G_{SL}^2\cap H_{SL}^2$, $[SM]_{SU}=G_{SU}^2\cap H_{SU}^2$, согласно лемме 4.9.10 выполняется равенство $[MO^m]_{L_{01}}=(T_0\cap G_{L_{01}}^m)\cup\{1\}$. Заменив оба класса A и F на двойственные им, можно получить оставшиеся двойственные классы.

4. Классы $S\cup AS$, $T_0\cap(S\cup AS)$, $T_1\cap(S\cup AS)$. Согласно следствию из утверждения 4.2.2 выполняется равенство $[L]_S=S\cup AS$, согласно лемме 4.9.2 выполняется равенство $[L_0]_{S_{01}}=T_0\cap(S\cup AS)$. Согласно принципу двойственности и предыдущему равенству выполняется равенство $[L_1]_{S_{01}}=T_1\cap(S\cup AS)$.

5. Незамкнутые классы из множества $\overline{\mathfrak{P}}_2$ (некоторые классы из этого множества являются замкнутыми). Рассмотрим произвольный незамкнутый класс $A\in\overline{\mathfrak{P}}_2$. Тогда существует такой замкнутый класс B, что $A=B\cup\overline{B}$. Очевидно, что выполняются следующие равенства: $[SU]_B=A$, $[U]_B=A\cup\{0,1\}$.

6. Незамкнутые классы из множества $\mathfrak{P}_2$, т.е. незамкнутые классы, получающиеся из замкнутых добавлением констант. Рассмотрим произвольный незамкнутый класс $A\in\mathfrak{P}_2$. Тогда существует такой замкнутый класс B, что $A=B\cup\widetilde{C}$, где $\widetilde{C}\in\{C_0,C_1,C\}$. Тогда $[U_{01}\cup\widetilde{C}]_B=[U_{01}]_B\cup\widetilde{C}=A$, причем $U_{01}\cup\widetilde{C}\in\{MU,U_0,U_1\}$. Теорема доказана.

4.10. Отличие некоторых $\mathscr{P}$-пополнений от замкнутых классов.

Утверждение 4.10.1. *Множества $K(L)$, $K(L_0)$, $K(L_1)$, $K(L_{01})$, $K(SL)$, $K(SU)$ не являются замкнутыми классами.*

Доказательство. Докажем, что множество $K(L)$ не является замкнутым классом. Заметим, что $L \subseteq K(L) \subseteq P_2$. Поскольку L является предполным классом, то достаточно доказать, что $K(L) \neq L$ и $K(L) \neq P_2$. Первое неравенство очевидно. Докажем, что $K(L) \neq P_2$.

Предположим противное. Тогда $x_1 \vee x_2 \in K(L)$. Следовательно, существуют такие линейные функции $f_1(x_1, x_2), \ldots, f_k(x_1, x_2)$, $k \geqslant 2$, что $x_1 \vee x_2 = f_1 \& \ldots \& f_k$. Тогда очевидно, что $f_i(x_1, x_2) \geqslant x_1 \vee x_2$, $1 \leqslant i \leqslant k$, при любых значениях переменных x_1 и x_2. Отсюда следует, что либо $f_i(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, либо $f_i(x_1, x_2) = 1$. Поскольку все функции f_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, являются линейными, то $f_1 = \ldots = f_k = 1$. Значит, $x_1 \vee x_2 = 1$. Получено противоречие. Следовательно, предположение неверно, и $K(L) \neq P_2$, что и требовалось доказать.

Утверждение для множеств $K(L_0)$, $K(L_1)$, $K(L_{01})$, $K(SL)$, $K(SU)$ доказывается аналогично. Утверждение доказано.

Утверждение 4.10.2. *Множества $l(S)$, $l(S_{01})$, $l(SM)$ не являются замкнутыми классами.*

Доказательство. Докажем, что множество $l(S)$ не является замкнутым классом. Заметим, что $S \subseteq l(S) \subseteq P_2$. Поскольку S является предполным классом, то достаточно доказать, что $l(S) \neq S$ и $l(S) \neq P_2$. Первое неравенство очевидно. Докажем, что $l(S) \neq P_2$. Предположим противное. Тогда $1 \in l(S)$. Следовательно, существует такая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $n \geqslant 1$, что $1 \leqslant f(x_1, \ldots, x_n)$. Очевидно, что тогда $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Получили противоречие. Следовательно, предположение неверно, и $l(S) \neq P_2$, что и требовалось доказать. Утверждение для множеств $l(S_{01})$, $l(SM)$ доказывается аналогично. Утверждение доказано.

Утверждение 4.10.3. *Множество $S \cup AS$ не является замкнутым классом.*

Доказательство. Заметим, что $S \subseteq S \cup AS \subseteq P_2$. Очевидно, что $S \cup AS \neq S$ и $S \cup AS \neq P_2$. Поскольку S является предполным классом, отсюда следует, что $S \cup AS$ не является замкнутым классом. Утверждение доказано.

Утверждение 4.10.4. *Множества $G^m_{L_{01}}$, $G^m_{L_1}$, G^m_{SL}, G^m_{SU}, $m = 2, 3, \ldots, \infty$, не являются замкнутыми классами.*

Доказательство. Докажем, что $G^m_{L_{01}}$, $2 \leqslant m \leqslant \infty$, не является замкнутым классом. Заметим, что $O^m \subseteq G^m_{L_{01}}$. Значит, множество $G^m_{L_{01}}$ может быть только одним из следующих замкнутых классов: O^k, $k \leqslant m$, T_1, P_2. Рассмотрим функцию $h(x_1, x_2, x_3)$, принимающую нулевое значение на наборах $(1, 1, 0)$ и $(0, 1, 1)$ и единичное значение на всех остальных наборах. Положим $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \in L_{01}$. Заметим, что $g(1, 1, 0) = g(0, 1, 1) = 0$. Отсюда следует, что $h \in G^m_{L_{01}}$. Очевидно, что $h \notin O^k$, $k = 2, 3, \ldots, \infty$. Следовательно, множество $G^m_{L_{01}}$ отлично от классов O^k, $k \leqslant m$. Рассмотрим функцию $x_1 \vee x_2$. Очевидно, что $x_1 \vee x_2 \notin G^m_{L_{01}}$, поскольку $L_{01}(2)$ содержит только селекторы. Следовательно, множество $G^m_{L_{01}}$ отлично от классов T_1 и P_2. Таким образом, множество $G^m_{L_{01}}$ не является замкнутым классом. Утверждение для множеств $G^m_{L_1}$, G^m_{SL}, G^m_{SU} доказывается аналогично. Утверждение доказано.

§ 5. Вопросы полноты для P_2 и предполных классов булевых функций

В данном параграфе рассматривается задача полноты для операции расширенной суперпозиции. Пусть A, B — замкнутые классы, F — инвариантный класс такие, что выполняются соотношения $A \subseteq B$, $F \subseteq B$. Будем говорить, что тип (F, A) является *полным* в классе B, если выполняется равенство $[A]_F = B$. Задача полноты формулируется следующим образом. При заданных классах A и B необходимо найти необходимые и достаточные условия на класс F так, чтобы тип (F, A) был полон в классе B.

Пусть A и B — замкнутые классы. Семейство всех инвариантных классов $F \subseteq B$ таких, что тип $B \subseteq [A]_F$, будем обозначать через $\mathfrak{R}(A, B)$. Если $A \subseteq B$, то очевидно, что $\mathfrak{R}(A, B)$ — множество всех инвариантных классов $F \subseteq B$ таких, что тип (F, A) полон в классе B.

5.1. Вспомогательные утверждения.

Лемма 5.1.1. *Пусть A — замкнутый класс, F — инвариантный класс, $F \subseteq A$. Пусть B, C и D — такие замкнутые классы, что $[B]_F \cap [C]_F = [D]_F$, $C, D \subseteq A$. Соотношение $[D]_F = A$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняются соотношения $A \subseteq [B]_F$ и $[C]_F = A$.*

Доказательство леммы очевидно.

Докажем следующие вспомогательные леммы, позволяющие достаточно легко доказать критерии полноты для широких классов случаев.

Лемма 5.1.2. *Пусть F — инвариантный класс такой, что $\overline{x} \in F$. Тогда выполняется соотношение $[T_0]_F = P_2$.*

Доказательство. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция, $n \geqslant 1$. Докажем, что $h \in [T_0]_F$. Положим

$$\widehat{F}(n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)), l \geqslant n,$$
$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_F(h)(x_1, \ldots, x_l),$$
$$R = R_F(h) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta})) | \widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Несложно видеть, что для произвольного набора $\widetilde{\delta} \in E^n$ первые n компонент у наборов $\widetilde{\delta}$ и $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}}$ совпадают, откуда следует, что только набор $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{0}}$ может быть нулевым, где $\widetilde{0}$ — нулевой набор длины n. Докажем, что частичная функция r согласована с классом T_0. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{0}}$. Заметим, что его $(n+1)$-я компонента этого набора равна $f_{n+1}(0, \ldots, 0) = 1$. Отсюда следует, что множество R не содержит нулевых наборов. Значит, согласно лемме 2.2.6 частичная функция r согласована с классом T_0. Следовательно, согласно теореме 2.1.1 функция h принадлежит множеству $[T_0]_F$. Лемма доказана.

Лемма 5.1.3. *Пусть F — инвариантный класс такой, что $\overline{x} \in [M]_F$. Тогда выполняется соотношение $\overline{x} \in F$.*

Доказательство. Рассмотрим набор функций $\widehat{F}(1) = (f_1(x), \ldots$ $\ldots, f_l(x))$, $l \geqslant 1$. Рассмотрим функцию $h(x) = \overline{x}$, $h \in [M]_F$. Рассмотрим декомпозицию функции h относительно F, обозначим ее через $r(y_1, \ldots, y_l)$. Согласно теореме 2.1.1 частичная функция r согласована с классом M. Рассмотрим наборы $\widetilde{\alpha} = (f_1(0), f_2(0), \ldots, f_l(0))$ и $\widetilde{\beta} = (f_1(1), f_2(1), \ldots, f_l(1))$

из области определения функции r. Тогда выполняются равенства $r(\widetilde{\alpha}) = h(0) = 1$ и $r(\widetilde{\beta}) = h(1) = 0$. Следовательно, согласно утверждению 2.2.1 не выполняется соотношение $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$. Поэтому существует такое k, $1 \leqslant k \leqslant l$, что $f_k(0) = 1$ и $f_k(1) = 0$, а значит, выполняется равенство $f_k(x) = \overline{x}$, откуда следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 5.1.4. *Пусть F — инвариантный класс такой, что $\overline{x} \in F$. Тогда выполняется соотношение $[M]_F = P_2$.*

Доказательство. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция, $n \geqslant 1$. Докажем, что $h \in [M]_F$. Положим

$$\widehat{F}(n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)), l \geqslant n,$$

$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_F(h)(x_1, \ldots, x_l),$$

$$R = R_F(h) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta}))|\widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Несложно видеть, что для произвольного набора $\widetilde{\delta} \in E^n$ первые n компонент у наборов $\widetilde{\delta}$ и $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}}$ совпадают. Докажем, что частичная функция r согласована с классом M. Предположим, что существуют такие два набора $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1}$ и $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^2}$, где $\widetilde{\delta}^1, \widetilde{\delta}^2 \in E^n$, что выполняется неравенство $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1} > \widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^2}$. Тогда существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\widetilde{\alpha}_i^{\widetilde{\delta}^1} = 1$, $\widetilde{\alpha}_i^{\widetilde{\delta}^2} = 0$. Заметим, что выполняются равенства $\widetilde{\alpha}_{n+i}^{\widetilde{\delta}^1} = 0$, $\widetilde{\alpha}_{n+i}^{\widetilde{\delta}^2} = 1$. Следовательно наборы $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1}$ и $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^2}$ несравнимы. Получено противоречие. Значит, наборы из множества R попарно несравнимы. Значит, согласно лемме 2.2.1 частичная функция r согласована с классом M. Следовательно, согласно теореме 2.1.1 функция h принадлежит множеству $[M]_F$. Лемма доказана.

Лемма 5.1.5. *Пусть F — инвариантный класс, $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Пусть выполняется соотношение $1 \in [I^m]_F$. Тогда выполняется соотношение $1 \in F$.*

Доказательство. Рассмотрим набор $\widehat{F}(1) = (f_1(x_1), \ldots, f_l(x_1))$, $l \geqslant 1$. Рассмотрим функцию $h(x_1) = 1$. Согласно условию леммы выполняется соотношение $h \in [I^m]_F$. Рассмотрим декомпозицию функции h относительно F, обозначим ее через $r(y_1, \ldots, y_l)$. Согласно теореме 2.1.1 частичная функция r согласована с классом I^m. Рассмотрим наборы $\widetilde{\alpha} = (f_1(0), f_2(0), \ldots, f_l(0))$ и $\widetilde{\beta} = (f_1(1), f_2(1), \ldots, f_l(1))$ из области определения функции r. Заметим, что выполняются соотношения $r(\widetilde{\alpha}) = h(0) = 1$ и $r(\widetilde{\beta}) = h(1) = 1$. Следовательно, согласно утверждению 2.2.5 наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ имеют общую единичную компоненту. Отсюда следует, что существует такое k, $1 \leqslant k \leqslant l$, что $f_k(0) = f_k(1) = 1$. Следовательно, выполняется равенство $f_k(x) = 1$, откуда следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 5.1.6. *Пусть $n \geqslant 1$, $Q \subseteq E^n$, $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Пусть F — инвариантный класс. Тогда следующие два утверждения эквивалентны.*

1. *Для любого $k \leqslant m$ и для любых k наборов $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^k \in Q$ существует такая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$, что $f(\widetilde{\alpha}^i) = 0$, $i = 1, \ldots, k$.*

2. *Для любой функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ такой, что для любого набора $\widetilde{\beta} \in E^n \setminus Q$ верно равенство $g(\widetilde{\beta}) = 1$, выполняется соотношение $g \in [O^m]_F$.*

Доказательство. Докажем, что из второго утверждения следует первое. Пусть $k \leqslant m$ и $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^k \in Q$. Докажем, что существует функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса F такая, что $f(\widetilde{\alpha}^i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Рассмотрим функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$, принимающую нулевое значение на всех наборах из множества Q и единичное значение на всех наборах из множества $E^n \setminus Q$. Согласно условию леммы выполняется равенство $h \in [O^m]_F$. Положим

$$\widehat{F}(n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)), l \geqslant n,$$

$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_F(h)(x_1, \ldots, x_l),$$

$$R = R_F(h) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta})) | \widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Согласно теореме 2.1.1 частичная функция r согласована с классом O^m. Рассмотрим наборы

$$\widetilde{\gamma}^1 = (f_1(\widetilde{\alpha}^1), \ldots, f_l(\widetilde{\alpha}^1)), \ldots, \widetilde{\gamma}^k = (f_1(\widetilde{\alpha}^k), \ldots, f_l(\widetilde{\alpha}^k))$$

из области определения функции r. Заметим, что согласно определению декомпозиции выполняются соотношения $r(\widetilde{\gamma}^i) = h(\widetilde{\alpha}^i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, поскольку наборы $\widetilde{\alpha}^i$ принадлежат Q для $1 \leqslant i \leqslant k$. Поскольку функция r согласована с классом O^m, то согласно утверждению 2.2.4 наборы $\widetilde{\gamma}^1, \ldots, \widetilde{\gamma}^k$ имеют общую нулевую компоненту. Отсюда следует, что существует такое p, $1 \leqslant p \leqslant l$, что выполняются равенства $f_p(\widetilde{\alpha}^i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, откуда следует требуемое утверждение.

Докажем, что из первого утверждения следует второе. Пусть для любого $k \leqslant m$ и любых k наборов длины n из множества Q существует функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса F, принимающая на этих наборах нулевое значение. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n)$ — такая функция, что для любого набора $\widetilde{\beta} \in E^n \setminus Q$ верно равенство $g(\widetilde{\beta}) = 1$. Докажем, что $g \in [O^m]_F$. Положим

$$\widehat{F}(n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)), l \geqslant n,$$

$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_F(g)(x_1, \ldots, x_l),$$

$$R = R_F(g) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta})) | \widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Докажем, что частичная функция r согласована с классом O^m. Пусть $k \leqslant m$. Рассмотрим произвольные k наборов $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1}, \ldots, \widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^k}$, где $\widetilde{\delta}^1, \ldots, \widetilde{\delta}^k \in E^n$, таких, что $r(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^i}) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Заметим, что выполняется соотношение $\widetilde{\delta}^1, \ldots, \widetilde{\delta}^k \in Q$, поскольку $g(\widetilde{\delta}^i) = r(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^i}) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Значит, согласно условию существует такая функция $f_j(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leqslant j \leqslant l$, что $f_j(\widetilde{\delta}^i) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Следовательно, наборы $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1}, \ldots, \widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^k}$ имеют общую нулевую компоненту. Отсюда согласно утверждению 2.2.4 следует, что частичная функция r согласована с классом O^m. Следовательно, согласно теореме 2.1.1 функция g принадлежит множеству $[O^m]_F$. Лемма доказана.

Следствие 5.1.7. *Пусть $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$, F — инвариантный класс. Тогда равенство $[O^m]_F = P_2$ выполняется тогда и только тогда, когда для любого $k \leqslant m$, любого $n \geqslant 1$ и для любых k наборов $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^k \in E^n$ существует функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$ такая, что $f(\widetilde{\alpha}^i) = 0$, $i = 1, \ldots, k$.*

Доказательство. Достаточно для каждого $n \geqslant 1$ использовать лемму 5.1.6, положив $Q = E^n$.

Лемма 5.1.8. *Пусть F — инвариантный класс. Пусть для любого $m \geqslant 1$ в $[L]_F$ содержится функция $h(x_1, \ldots, x_m)$ ранга m. Тогда для любого $m \geqslant 1$ в F содержится функция $g(x_1, \ldots, x_m)$ ранга m.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует такое $m \geqslant 1$, что множество F не содержит ни одной функции от m переменных ранга m. Рассмотрим функцию $h(x_1, \ldots, x_m) \in [L]_F$ ранга m. Функция h может быть выражена формулой над типом (F, L). Таким образом, выполняется равенство

$$h(x_1, \ldots, x_m) = g_1(x_1, \ldots, x_m) + \ldots + g_r(x_1, \ldots, x_m),$$

$r \geqslant 2$, где $g_1, \ldots, g_{r-1} \in F$, и либо $g_r \in F$, либо $g_r = 1$. Заметим, что каждая из функций в этой сумме имеет ранг не более $m - 1$, откуда следует, что их сумма также имеет ранг не более $m - 1$. Получено противоречие. Следовательно, для любого $m \geqslant 1$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_m) \in F$ ранга m, что и требовалось доказать.

Лемма 5.1.9. *Пусть F — инвариантный класс, $k \geqslant 1$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Пусть $g(x_1, \ldots, x_k) = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_k^{\sigma_k}$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$ и выполняется соотношение $g(x_1, \ldots, x_k) \in [K_{01}]_F$. Тогда выполняется соотношение $g \in F$.*

Доказательство. Заметим, что функция g принимает нулевое значение ровно на одном наборе и единичное значение на всех остальных наборах из E^k. Согласно лемме 1.3.2 существует формула вида

$$f_1(x_1, \ldots, x_k) \& \ldots \& f_m(x_1, \ldots, x_k),$$

где $f_i \in F$, $m \geqslant 1$, реализующая функцию g. На всех $2^k - 1$ наборах, на которых функция g принимает единичное значение, функции $f_1, \ldots, f_m$ также принимают единичное значение. На оставшемся наборе хотя бы одна из этих функций принимает нулевое значение. Эта функция, очевидно, совпадает с g. Следовательно, $g \in F$. Утверждение доказано.

Аналогично лемме 5.1.9 доказываются следующие утверждения

Лемма 5.1.10. *Пусть F — инвариантный класс. Пусть $1 \in [K_{01}]_F$. Тогда выполняется соотношение $1 \in F$.*

Лемма 5.1.11. *Пусть F — инвариантный класс. Пусть $0 \in [K_{01}]_F$. Тогда выполняется соотношение по крайней мере одно из двух соотношений $0 \in F$ и $\overline{x} \in F$.*

5.2. Полнота в классе P_2. Сформулируем и докажем критерии полноты типов в классе P_2.

Утверждение 5.2.1. *$\mathfrak{R}(T_0, P_2)$ — семейство всех инвариантных классов, содержащих 1 или $\overline{x}$.*

Доказательство. Пусть $[T_0]_F = P_2$ (здесь и далее будем полагать, что F — некоторый инвариантный класс). Тогда выполняется соотношение $1 \in [T_0]_F$, откуда согласно лемме 2.2.10 следует, что либо $1 \in F$, либо $\overline{x} \in F$, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $\overline{x} \in F$. Тогда $[T_0]_F = P_2$ согласно лемме 5.1.2. Пусть $1 \in F$. Заметим, что тогда согласно лемме 1.3.5 выполняется равенство $[T_0]_F = P_2$, поскольку T_0 является предполным классом. Отсюда следует требуемое утверждение.

Утверждение 5.2.2. $\mathfrak{R}(S, P_2)$ — *семейство всех инвариантных классов, содержащих* 0 *или* 1.

Доказательство. Пусть $[S]_F = P_2$. Тогда выполняется соотношение $1 \in [S]_F$, откуда согласно лемме 2.2.3 следует, что либо $1 \in F$, либо $0 \in F$, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $1 \in F$ или $0 \in F$. Заметим, что тогда согласно лемме 1.3.5 выполняется равенство $[S]_F = P_2$, поскольку S является предполным классом. Отсюда следует требуемое утверждение.

Утверждение 5.2.3. $\mathfrak{R}(M, P_2)$ — *семейство всех инвариантных классов, содержащих функцию* $\overline{x}$.

Доказательство. Пусть $[M]_F = P_2$. Тогда выполняется соотношение $\overline{x} \in [M]_F$, откуда согласно лемме 5.1.3 следует, что $\overline{x} \in F$, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $\overline{x} \in F$. Тогда $[M]_F = P_2$ согласно лемме 5.1.4. Утверждение доказано.

Утверждение 5.2.4. $\mathfrak{R}(O^m, P_2)$, *где* $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$, — *семейство всех инвариантных классов, содержащих* 0.

Доказательство. Из следствия леммы 5.1.6 следует, что соотношение $[O^m]_F = P_2$ выполняется тогда и только тогда, когда для любого $n \geqslant 1$, любого $k \leqslant m$ и любых k наборов длины n существует функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса F, принимающая на каждом из этих наборов нулевое значение.

Докажем, что это условие эквивалентно условию $0 \in F$. Если $0 \in F$, то для любого $n \geqslant 1$ существует функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса F, принимающая нулевое значение на всех наборах из множества E^n, откуда следует требуемое утверждение. Докажем в обратную сторону. Пусть для любого $n \geqslant 1$, любого $k \leqslant m$ и любых k наборов длины n существует функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса F, принимающая на каждом из этих наборов нулевое значение. Пусть $n = 1$. Рассмотрим наборы (0) и (1). Существует функция $f(x) \in F$, принимающая на этих наборах нулевое значение, откуда следует, что $0 \in F$. Утверждение доказано.

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество всех булевых функций, принимающих нулевое значение ровно на одном наборе.

Утверждение 5.2.5. $\mathfrak{R}(K_{01}, P_2)$ — *семейство всех инвариантных классов* F *таких, что* $\{1\} \cup \mathcal{D} \subseteq F$. $\mathfrak{R}(K_1, P_2)$ — *семейство всех инвариантных классов* F *таких, что* $\mathcal{D} \subseteq F$. $\mathfrak{R}(K_0, P_2) = \mathfrak{R}(K_{01}, P_2)$, $\mathfrak{R}(K, P_2) = \mathfrak{R}(K_1, P_2)$.

Доказательство. Пусть $A = K_{01}$. Пусть $\{1\} \cup \mathcal{D} \subseteq F$. Заметим, что множество $\mathcal{D}$ является множеством всех функций, представимых в виде $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_1}$, $n \geqslant 1$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, любая совершенная конъюнктивная нормальная форма является формулой над типом (F, K_{01}). Следовательно, произвольная булева функция, отличная от единичной, может быть выражена формулой над типом (F, K_{01}). Единичная функция выразима формулой над типом (F, K_{01}), поскольку $1 \in F$.

Пусть $[K_{01}]_F = P_2$. Тогда соотношение $\{1\} \cup \mathcal{D} \subseteq F$ выполняется согласно леммам 5.1.9 и 5.1.10.

Утверждение для случаев $A = K_1, K_0, K$ доказывается аналогично. Таким образом, утверждение доказано.

Утверждение 5.2.6. $\mathfrak{R}(L, P_2)$ — *семейство всех инвариантных классов F, обладающих следующим свойством: для любого $m \geqslant 1$ класс F содержит некоторую функцию $g(x_1, \ldots, x_m)$ ранга m.*

Доказательство. Пусть для любого $m \geqslant 1$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_m) \in F$ ранга m. Докажем, что $[L]_F = P_2$. Индукцией по n докажем, что для любого $n \geqslant 1$ формулами над типом (F, L) можно реализовать произвольную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. При $n = 1$ это утверждение очевидно. Предположим, что формулами над типом (F, L) можно реализовать все функции не более чем от $n-1$ переменной, $n \geqslant 2$. Докажем, что можно реализовать все функции от n переменных. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — константная функция, то она, очевидно, принадлежит множеству $[L]_F$. Пусть f отлична от константы. Рассмотрим полином Жегалкина функции f. Пусть $M_1, \ldots, M_k$, $k \geqslant 0$, — множество (возможно пустое) всех мономов, содержащихся в этом полиноме, и имеющих ранг, не превосходящий $n-1$. По предположению индукции мы можем выразить каждый из этих мономов формулой над типом (F, L). Таким образом, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, выполнено равенство $M_i = g_1^i + \ldots + g_{r_i}^i$, $r_i \geqslant 1$, где $g_1^i, \ldots, g_{r_i-1}^i \in F$, и либо $g_{r_i}^i \in F$, либо $g_{r_i}^i = 1$. Пусть в полиноме Жегалкина функции f нет монома ранга n. Тогда очевидно, что $k \geqslant 1$ и выполняются равенства

$$f = M_1 + \ldots + M_k = g_1^1 + \ldots + g_{r_1}^1 + \ldots + g_1^k + \ldots + g_{r_k}^k.$$

Отсюда следует, что функция f может быть выражена формулой над типом (F, L).

Пусть полином Жегалкина функции f содержит моном ранга n, т. е. моном $x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_n$. По условию утверждения существует функция $g(x_1, \ldots, x_n) \in F$, полином Жегалкина которой содержит моном ранга n. Рассмотрим функцию $h(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n)$. Очевидно, что полином Жегалкина функции h не содержит монома ранга n, и, следовательно, функция h может быть реализована некоторой формулой Φ над типом (F, L). Заметим, что выполняется равенство $f = h + g$, откуда следует, что функция f может быть реализована формулой над типом (F, L), что и требовалось доказать.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $[L]_F = P_2$. Тогда для любого $m \geqslant 1$ существует функция $h(x_1, \ldots, x_m) \in [L]_F$ ранга m, откуда согласно лемме 5.1.8 следует требуемое утверждение. Утверждение доказано.

Следствие 5.2.7. *Пусть F — инвариантный класс. Пусть для любого $m \geqslant 1$ существует функция $h(x_1, \ldots, x_m)$ ранга m, принадлежащая $[L]_F$. Тогда выполняется равенство $[L]_F = P_2$.*

Имеет место следующая теорема о полноте в классе P_2.

Теорема 5.2.8. *Выполняются следующие утверждения.*

1. $\mathfrak{R}(T_0, P_2)$ — *семейство всех инвариантных классов, содержащих* 1 *или функцию* $\overline{x}$.
2. $\mathfrak{R}(S, P_2)$ — *семейство всех инвариантных классов, содержащих* 0 *или* 1.
3. $\mathfrak{R}(M, P_2)$ — *семейство всех инвариантных классов, содержащих функцию* $\overline{x}$.

4. $\mathfrak{R}(O^m, P_2)$, *где* $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$, *— семейство всех инвариантных классов, содержащих* 0.

5. $\mathfrak{R}(K_{01}, P_2)$ *— семейство всех инвариантных классов* F *таких, что* $\{1\} \cup \mathcal{D} \subseteq F$. $\mathfrak{R}(K_1, P_2)$ *— семейство всех инвариантных классов* F *таких, что* $\mathcal{D} \subseteq F$. $\mathfrak{R}(K_0, P_2) = \mathfrak{R}(K_{01}, P_2)$, $\mathfrak{R}(K, P_2) = \mathfrak{R}(K_1, P_2)$.

6. $\mathfrak{R}(L, P_2)$ *— семейство всех инвариантных классов* F, *обладающих следующим свойством: для любого* $m \geqslant 1$ *класс* F *содержит некоторую функцию* $g(x_1, \ldots, x_m)$ *ранга* m.

7. $\mathfrak{R}(U, P_2)$ *— семейство всех инвариантных классов* F *таких, что для любой функции* $g \in P_2 \setminus \{0, 1\}$ *множество* F *содержит по крайней мере одну из функций* g, $\overline{g}$. $\mathfrak{R}(MU, P_2) = \mathfrak{R}(U_1, P_2) = \mathfrak{R}(U_0, P_2) = \mathfrak{R}(U_{01}, P_2) = \{P_2\}$.

8. *Семейства* $\mathfrak{R}(T_{01}, P_2)$, $\mathfrak{R}(M_0, P_2)$, $\mathfrak{R}(O_0^m, P_2)$ *равны пересечениям семейства* $\mathfrak{R}(T_0, P_2)$ *с семействами* $\mathfrak{R}(T_1, P_2)$, $\mathfrak{R}(M, P_2)$, $\mathfrak{R}(O^m, P_2)$ *соответственно; семейства* $\mathfrak{R}(MO^m, P_2)$, $\mathfrak{R}(MO_0^m, P_2)$, $\mathfrak{R}(M_{01}, P_2)$ *— пересечениям семейства* $\mathfrak{R}(M, P_2)$ *с семействами* $\mathfrak{R}(O^m, P_2)$, $\mathfrak{R}(O_0^m, P_2)$, $\mathfrak{R}(T_{01}, P_2)$ *соответственно; семейства* $\mathfrak{R}(S_{01}, P_2)$ *и* $\mathfrak{R}(SU, P_2)$ *— пересечениям семейства* $\mathfrak{R}(S, P_2)$ *с семействами* $\mathfrak{R}(T_{01}, P_2)$ *и* $\mathfrak{R}(U, P_2)$ *соответственно; семейства* $\mathfrak{R}(SL, P_2)$, $\mathfrak{R}(L_0, P_2)$ *— пересечениям семейства* $\mathfrak{R}(L, P_2)$ *с семействами* $\mathfrak{R}(S, P_2)$, $\mathfrak{R}(T_0, P_2)$ *соответственно.* $\mathfrak{R}(L_{01}, P_2) = \mathfrak{R}(S, P_2) \cap \mathfrak{R}(L_0, P_2) \cap \mathfrak{R}(L_1, P_2)$, $\mathfrak{R}(SM, P_2) = \mathfrak{R}(M, P_2) \cap \mathfrak{R}(I^2, P_2) \cap \mathfrak{R}(O^2, P_2)$.

9. *Пусть* $A \in \{T_1, M_1, D_{01}, D_1, D_0, D, L_1, I^m, I_1^m, MI^m, MI_1^m\}$, *где* $m \in \{2, \ldots, \infty\}$. *Тогда* $\mathfrak{R}(A, P_2) = \mathfrak{R}^*(A^*, P_2)$.

Доказательство. Утверждение теоремы для пп. 1–6 следует из утверждений 5.2.1–5.2.6. Утверждение теоремы для п. 7 очевидно. Утверждение теоремы для п. 8 следует из пп. 1–6 и леммы 3.2.2. Утверждение теоремы для п. 9 следуют из пп. 1–8 и принципа двойственности. Таким образом, теорема доказана.

5.3. Полнота в классе T_1.

Утверждение 5.3.1. $\mathfrak{R}(M, T_1)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq T_1$ *таких, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $x_1 + x_2 + 1 \in F$;

2) $x_1 \to x_2 \in F$.

Доказательство. Пусть $T_1 \subseteq [M]_F$. Докажем, что либо $x_1 + x_2 + 1 \in F$, либо $x_1 \to x_2 \in F$. Пусть $h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1$. Положим

$$\widehat{F}(2) = (f_1(x_1, x_2)), \ldots, f_l(x_1, x_2)), l \geqslant 2,$$

$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_F(h)(x_1, \ldots, x_l),$$

$$R = R_F(h) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta})) | \widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Заметим, что $h \in [M]_F$, так как $h \in T_1$. Согласно теореме 2.1.1 частичная функция r согласована с классом M. Рассмотрим наборы $\widetilde{\alpha} = (f_1(0,0), f_2(0,0), \ldots, f_l(0,0)) \in R$ и $\widetilde{\beta} = (f_1(1,0), f_2(1,0), \ldots, f_l(1,0)) \in R$. Тогда $r(\widetilde{\alpha}) = h(0,0) = 1$, $r(\widetilde{\beta}) = h(1,0) = 0$. Следовательно, согласно условию согласованности с классом M, либо $\widetilde{\alpha} > \widetilde{\beta}$, либо эти два набора несравнимы. Поэтому существует такое k, $1 \leqslant k \leqslant l$, что $f_k(0,0) > f_k(1,0)$. Значит, выполняются соотношения $f_k(0,0) = 1$ и $f_k(1,0) = 0$. Соотношение $f_k(1,1) = 1$ выполняется, поскольку $F \subseteq T_1$. Значит, либо $f_k(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1$, либо $f_k(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $x_1 + x_2 + 1 \in F$ (случай $x_1 \to x_2 \in F$ рассматривается аналогично). Докажем, что $T_1 \subseteq [M]_F$. Рассмотрим произвольную функцию $h(x_1, \ldots, x_n) \in T_1$. Докажем, что $h \in [M]_F$. Положим

$$\widehat{F}(n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)), l \geqslant n,$$

$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_F(h)(x_1, \ldots, x_l),$$

$$R = R_F(h) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta})) | \widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Несложно видеть, что для произвольного набора $\widetilde{\delta} \in E^n$ первые n компонент у наборов $\widetilde{\delta}$ и $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}}$ совпадают. Докажем, что частичная функция r согласована с классом M. Согласно утверждению 2.2.1 для этого достаточно доказать, что для любых наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ таких, что $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\beta}$, выполняется неравенство $r(\widetilde{\alpha}) \geqslant r(\widetilde{\beta})$. Предположим противное, пусть существуют такие наборы $\widetilde{\delta} = (\delta_1, \ldots \delta_n) \in E^n, \widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in E^n$, что $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} > \widetilde{\alpha}^{\widetilde{\gamma}}$ и $r(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}}) = 0$, $r(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\gamma}}) = 1$. Отсюда следует, что $\widetilde{\delta} > \widetilde{\gamma}$, поскольку первые n компонент у соответствующих друг другу наборов совпадают. Значит, существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\delta_i = 1$, $\gamma_i = 0$. Заметим, что $\widetilde{\delta}$ не является единичным набором, т. к. иначе бы выполнялось равенство $r(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}}) = h(\widetilde{\delta}) = 1$. Следовательно, существует такое j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $\delta_j = \gamma_j = 0$. Пусть $f_k(x_1, \ldots, x_n) = x_i + x_j + 1$, $n+1 \leqslant k \leqslant l$. Тогда $\alpha_k^{\widetilde{\delta}} = f_k(\widetilde{\delta}) = 1 + 0 + 1 = 0$, $\alpha_k^{\widetilde{\gamma}} = f_k(\widetilde{\gamma}) = 0 + 0 + 1 = 1$. При этом выполняется соотношение $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} > \widetilde{\alpha}^{\widetilde{\gamma}}$. Получено противоречие. Следовательно, частичная функция r согласована с классом M, т. е. $h(x_1, \ldots, x_n) \in [M]_F$, что и требовалось доказать.

У т в е р ж д е н и е 5.3.2. $\mathfrak{R}(T_0, T_1)$ — *семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq T_1$ *таких, что* $1 \in F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T_1 \subseteq [T_0]_F$. Тогда выполняется соотношение $1 \in [T_0]_F$, откуда согласно лемме 2.2.10 следует, что либо $1 \in F$, либо $\overline{x} \in F$. Поскольку $F \subseteq T_1$, то выполняется соотношение $1 \in F$, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $1 \in F$. Заметим, что тогда согласно лемме 1.3.5 выполняется равенство $[T_0]_F = P_2$, поскольку T_0 является предполным классом. Отсюда следует требуемое утверждение.

У т в е р ж д е н и е 5.3.3. $\mathfrak{R}(I^m, T_1) = \mathfrak{R}(T_0, T_1)$, *где* $m = 2, 3, \ldots, \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполняется соотношение $T_1 \subseteq [I^m]_F$, $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$. Тогда $1 \in [I^m]_F$, откуда согласно лемме 5.1.5 следует, что $1 \in F$, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $1 \in F$. Заметим, что тогда согласно лемме 1.3.5 выполняются равенства $[I^m]_F = [I^m \cup \{1\}]_F = [P_2]_F = P_2$, откуда следует требуемое утверждение.

Утверждение 5.3.4. *$\mathfrak{R}(O^m, T_1)$, где $m = 2, 3, \ldots, \infty$, — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq T_1$ таких, что для любого $n \geqslant 2$, любого $k \leqslant m$ и любых k отличных от единичного наборов длины n существует функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из класса F, принимающая на каждом из этих наборов нулевое значение.*

Доказательство. Пусть $n \geqslant 1$, $Q = E^n \setminus \{\widetilde{1}^{(n)}\}$. Тогда множество всех функций от n переменных, принимающих единичное значение на всех наборах из множества $E^n \setminus Q$, — это множество $T_1(n)$. Согласно лемме 5.1.6 следующие два утверждения эквивалентны.

1. Для любого $k \leqslant m$ и для любых k отличных от единичного наборов $\widetilde{\alpha}^1, \ldots$ $\ldots, \widetilde{\alpha}^k$ длины n существует функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$, принимающая на каждом из этих наборов нулевое значение.

2. Для любой функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ такой, что $g \in T_1$, выполняется соотношение $g \in [O^m]_F$.

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы.

Утверждение 5.3.5. *$\mathfrak{R}(S, T_1)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq T_1$ таких, что $1 \in F$.*

Доказательство. Пусть $T_1 \subseteq [S]_F$. Тогда выполняется соотношение $1 \in [S]_F$, откуда согласно лемме 2.2.3 следует, что либо $1 \in F$, либо $0 \in F$. Поскольку $F \subseteq T_1$, то выполняется соотношение $1 \in F$, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $1 \in F$. Заметим, что тогда согласно лемме 1.3.5 выполняется равенство $[S]_F = P_2$, поскольку S является предполным классом. Отсюда следует требуемое утверждение.

Утверждение 5.3.6. *$\mathfrak{R}(L_1, T_1)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq T_1$ таких, что для любого $m \geqslant 1$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_m) \in F$ ранга m.*

Доказательство. Из леммы 3.2.2 и соотношения $F \subseteq T_1$ следуют равенства $[L_1]_F = [L]_F \cap [T_1]_F = [L]_F \cap T_1$.

Пусть для любого $m \geqslant 1$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_m) \in F$ ранга m. Докажем, что $[L_1]_F = T_1$. Согласно утверждению 5.2.6 выполняется равенство $[L]_F = P_2$. Следовательно, $[L_1]_F = [P_2]_F \cap T_1 = T_1$, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $[L_1]_F = T_1$. Тогда $[L_1]_F = [L]_F \cap T_1 = T_1$, откуда следует, что $T_1 \subseteq [L]_F$. Следовательно, согласно лемме 5.1.8 для любого $m \geqslant 1$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_m) \in F$ ранга m, что и требовалось доказать.

Утверждение 5.3.7. *$\mathfrak{R}(L_{01}, T_1)$ — семейство всех инвариантных классов $F \in \mathfrak{R}(L_1, T_1)$ таких, что $\{1\} \in F$.*

Доказательство. Пусть для любого $m \geqslant 1$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_m) \in F$ ранга m и $\{1\} \in F$. Тогда согласно лемме 1.3.5 выполняются равенства

$$[L_{01}]_F = [L_{01} \cup \{1\}]_F = [L_1]_F.$$

Следовательно, согласно утверждению 5.3.6 верно равенство $[L_{01}]_F = T_1$, что и требовалось доказать.

Пусть $[L_{01}]_F = T_1$. Тогда $T_1 = [L_{01}]_F \subseteq [L_1]_F$. Следовательно, выполняется равенство $[L_1]_F = T_1$, откуда согласно лемме 5.3.6 следует, что для любого $m \geqslant 1$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_m) \in F$ ранга m. Докажем, что $1 \in F$. Предположим, что $F \subseteq T_0$. Тогда $[L_{01}]_F \subseteq T_0$, что противоречит равенству $[L_{01}]_F = T_1$. Следовательно, в F найдется функция $g(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, такая, что $g(0, \ldots, 0) = g(1, \ldots, 1) = 1$. Поскольку F — инвариантный класс, то функция $g'(x) = g(x, \ldots, x) = 1$ принадлежит F. Тем самым утверждение доказано.

Утверждение 5.3.8. $\mathfrak{R}(K_{01}, T_1)$ — *семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq T_1$ *таких, что выполняется соотношение* $\{1\} \cup (\mathscr{D} \cap T_1) \subseteq F$.

Доказательство. Пусть $\{1\} \cup (\mathscr{D} \cap T_1) \subseteq F$. Заметим, что совершенная конъюктивная нормальная форма произвольной функции из класса T_1 является конъюнкцией функций из множества $\{1\} \cup (\mathscr{D} \cap T_1)$. Следовательно, произвольная функция из множества T_1 может быть выражена формулой над типом (F, K_{01}). Следовательно, $[K_{01}]_F = T_1$.

Пусть $[K_{01}]_F = T_1$. Тогда любая функция из множества $\mathscr{D} \cap T_1$ принадлежит $[K_{01}]_F$, откуда согласно лемме 5.1.9 следует, что $\mathscr{D} \cap T_1 \subseteq F$. Аналогично из леммы 5.1.10 следует, что $1 \in F$. Утверждение доказано.

Аналогично доказывается

Утверждение 5.3.9. $\mathfrak{R}(K_1, T_1)$ — *семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq T_1$ *таких, что выполняется соотношение* $\mathscr{D} \cap T_1 \subseteq F$.

Обозначим через $\mathscr{K}'$ множество всех булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых выполнено равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}) \vee (x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_n),$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{0, 1\}, n \geqslant 1$.

Утверждение 5.3.10. $\mathfrak{R}(D_{01}, T_1)$ — *семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq T_1$ *таких, что выполняется соотношение* $\mathscr{K}' \subseteq F$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{K}' \subseteq F$. Заметим, что совершенная дизъюнктивная нормальная форма реализует функцию из класса T_1 тогда и только тогда, когда содержит конъюнкцию $x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_n$. Таким образом, каждая функция из T_1 может быть представлена как дизъюнкция функций из множества $\mathscr{K}'$ и, следовательно, как формула над типом (F, D_{01}). Значит, $[D_{01}]_F = T_1$.

Пусть $[D_{01}]_F = T_1$. Докажем, что $\mathscr{K}' \subseteq F$. Рассмотрим произвольную функцию $h(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}'$, существенно зависящую от всех переменных, $n \geqslant 1$. Заметим, что эта функция принимает единичное значение на единичном наборе и не более чем на одном отличном от единичного наборе. Также она принимает нулевое значение на всех остальных наборах из E^n. Рассмотрим некоторую формулу над типом (F, D_{01}), реализующую функцию h. Пусть эта формула имеет вид

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee f_k(x_1, \ldots, x_n),$$

где $f_i \in F$, $k \geqslant 1$. На всех наборах, на которых функция h принимает нулевое значение, функции $f_1, \ldots, f_k$ также принимают нулевое значение. На единичном наборе все эти функции принимают единичное значение, поскольку $F \subseteq T_1$. Если функция h принимает единичное значение на некотором отличном от единичного наборе, то существует функция f_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, также принимающая на этом наборе единичное значение и соответственно равная функции h. Если h принимает единичное значение только на единичном наборе, то, очевидно, все функции h, $f_1, \ldots, f_k$ попарно равны. Таким образом, $h \in F$, т. е. класс F содержит любую функцию из $\mathscr{K}'$. Утверждение доказано.

Аналогично доказывается

Утверждение 5.3.11. $\mathfrak{R}(D_1, T_1) = \mathfrak{R}(D_{01}, T_1)$.

Имеет место следующая теорема о полноте в классе T_1.

Теорема 5.3.12. *Выполняются следующие утверждения.*

1. $\mathfrak{R}(O^m, T_1)$, *где* $m = 2, 3, \ldots, \infty$, *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq T_1$ *таких, что для любого* $n \geqslant 2$, *любого* $k \leqslant m$ *и любых* k *наборов длины* n, *отличных от единичного, существует функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *из класса* F, *принимающая на каждом из этих наборов нулевое значение.*

2. $\mathfrak{R}(L_1, T_1)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq T_1$ *таких, что для любого* $m \geqslant 1$ *существует функция* $g(x_1, \ldots, x_m) \in F$ *ранга* m. $\mathfrak{R}(L_{01}, T_1)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \in \mathfrak{R}(L_1, T_1)$, *таких, что* $\{1\} \in F$.

3. $\mathfrak{R}(K_{01}, T_1)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq T_1$ *таких, что выполняется соотношение* $\{1\} \cup (\mathscr{D} \cap T_1) \subseteq F$. $\mathfrak{R}(K_1, T_1)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq T_1$ *таких, что выполняется соотношение* $\mathscr{D} \cap T_1 \subseteq F$.

4. $\mathfrak{R}(D_{01}, T_1)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq T_1$ *таких, что выполняется соотношение* $\mathscr{K}' \subseteq F$. $\mathfrak{R}(D_1, T_1) = \mathfrak{R}(D_{01}, T_1)$.

5. $\mathfrak{R}(U_1, T_1) = T_1 \setminus \{1\}$, $\mathfrak{R}(U_{01}, T_1) = T_1$.

6. *Семейство* $\mathfrak{R}(SM, T_1)$ *равно пересечению семейств* $\mathfrak{R}(M, T_1)$, $\mathfrak{R}(O^2, T_1)$ *и* $\mathfrak{R}(I^2, T_1)$; *семейства* $\mathfrak{R}(M_{01}, T_1)$, $\mathfrak{R}(MI_1^m, T_1)$, $\mathfrak{R}(MO^m, T_1)$ *— пересечениям семейства* $\mathfrak{R}(M, T_1)$ *с семействами* $\mathfrak{R}(T_0, T_1)$, $\mathfrak{R}(I^m, T_1)$, $\mathfrak{R}(T_0, T_1)$ *соответственно; семейства* $\mathfrak{R}(S_{01}, T_1)$, $\mathfrak{R}(O_0^m, T_1)$, $\mathfrak{R}(MO_0^m, T_1)$ *— пересечениям семейства* $\mathfrak{R}(T_{01}, T_1)$ *с семействами* $\mathfrak{R}(S, T_1)$, $\mathfrak{R}(O^m, T_1)$, $\mathfrak{R}(MO^m, T_1)$ *соответственно.* $\mathfrak{R}(I_1^m, T_1) = \mathfrak{R}(I^m, T_1)$, $\mathfrak{R}(M_1, T_1) = \mathfrak{R}(M, T_1)$, $\mathfrak{R}(T_{01}, T_1) = \mathfrak{R}(T_0, T_1)$.

Доказательство. Утверждение теоремы для пп. 1–4 следует из утверждений 5.3.4, 5.3.6, 5.3.7, 5.3.8, 5.3.9, 5.3.10, 5.3.11. Утверждение теоремы для п. 5 очевидно.

Докажем, что семейство $\mathfrak{R}(M_{01}, T_1)$ равно пересечению семейства $\mathfrak{R}(M, T_1)$ с семейством $\mathfrak{R}(T_0, T_1)$. Согласно лемме 3.2.2 выполняется соотношение $[M_{01}]_F = [M]_F \cap [T_0]_F \cap [T_1]_F$. Следовательно, соотношение $[M_{01}]_F = T_1$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняются соотношения $T_1 \subseteq [M]_F$ и $T_1 \subseteq [T_0]_F$, что и требовалось доказать. Аналогично доказываются остальные равенства из п. 6. Теорема доказана.

5.4. Полнота в классе S.

Утверждение 5.4.1. *$\mathfrak{R}(S_{01}, S)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq S$ таких, что $\overline{x} \in F$. $\mathfrak{R}(SM, S) = \mathfrak{R}(S_{01}, S)$.*

Доказательство. Пусть выполняется соотношение $[S_{01}]_F = S$. Докажем, что $\overline{x} \in F$. Рассмотрим функцию $h(x_1) = \overline{x_1}$. Заметим, что выполняется соотношение $h \in [S_{01}]_F$, так как $h \in S$. Положим

$$\widehat{F}(1) = (f_1(x_1), \ldots, f_l(x_1)), l \geqslant 1,$$

$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_F(h)(x_1, \ldots, x_l),$$

$$R = R_F(h) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta})) | \widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Согласно теореме 2.1.1 частичная функция r согласована с классом S_{01}. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} = (f_1(0), \ldots, f_l(0)) \in R$. Заметим, что выполняются равенства $r(\widetilde{\alpha}) = h(0) = 1$. Следовательно, согласно утверждениям 2.2.8 и 2.2.20 набор $\widetilde{\alpha}$ не является нулевым. Значит, существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant l$, что $f_i(0) = 1$. Поскольку $f_i \in S$, то очевидно, что $f_i(x_1) = \overline{x_1}$, что и требовалось доказать.

Пусть выполняется соотношение $[SM]_F = S$. Тогда выполняется соотношение $[S_{01}]_F = S$, поскольку $SM \subseteq S_{01}$. Следовательно, как доказано ранее, $\overline{x} \in F$.

Пусть выполняется соотношение $\overline{x} \in F$. Докажем, что $[SM]_F = S$. Рассмотрим произвольную функцию $h(x_1, \ldots, x_n) \in S$. Докажем, что $h \in [SM]_F$. Положим

$$\widehat{F}(n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)), l \geqslant n,$$

$$r(x_1, \ldots, x_l) = r_F(h)(x_1, \ldots, x_l),$$

$$R = R_F(h) = \{\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}} = (\alpha_1^{\widetilde{\delta}}, \ldots, \alpha_l^{\widetilde{\delta}}) = (f_1(\widetilde{\delta}), \ldots, f_l(\widetilde{\delta})) | \widetilde{\delta} \in E^n\}.$$

Докажем, что частичная функция r согласована с классом SM. Согласно утверждению 2.2.22 функция r согласована с классом SM тогда и только тогда, когда она согласована с классами M, O^2 и I^2. Значит, согласно утверждениям 2.2.1, 2.2.4 и 2.2.5 достаточно доказать, что функция r удовлетворяет следующим трем условиям.

1. Для любых наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ таких, что $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\beta}$, выполняется неравенство $r(\widetilde{\alpha}) \geqslant r(\widetilde{\beta})$.

2. Для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ таких, что $r(\widetilde{\alpha}) = r(\widetilde{\beta}) = 0$, найдется такое j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $\alpha_j = \beta_j = 0$.

3. Для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in R$ таких, что $r(\widetilde{\alpha}) = r(\widetilde{\beta}) = 1$, найдется такое j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $\alpha_j = \beta_j = 1$.

Докажем, что любые два набора из множества R несравнимы. Предположим противное. Пусть существуют такие наборы $\widetilde{\delta}^1, \widetilde{\delta}^2 \in E^n$, что выполняется соотношение $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1} > \widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^2}$. Тогда, очевидно, $\widetilde{\delta}^1 > \widetilde{\delta}^2$. Следовательно существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\widetilde{\delta}_i^1 = 1$, $\widetilde{\delta}_i^2 = 0$. Поскольку $\overline{x}_i \in F(n)$, то существует такое j, $n+1 \leqslant j \leqslant l$, что $\widetilde{\alpha}_j^{\widetilde{\delta}^1} = f_j(\widetilde{\delta}^1) = 0$ и $\widetilde{\alpha}_j^{\widetilde{\delta}^2} = f_j(\widetilde{\delta}^2) = 1$. Следовательно, наборы $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1}$ и $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^2}$ несравнимы. Получено противоречие. Значит, любые два набора из множества R несравнимы, откуда следует, что выполняется первое условие.

Рассмотрим наборы $\widetilde{\delta}^1, \widetilde{\delta}^2 \in E^n$ такие, что $r(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1}) = r(\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^2}) = 0$. Отсюда следует, что $h(\widetilde{\delta}^1) = h(\widetilde{\delta}^2) = 0$. Поскольку выполняется соотношение $h \in S$, то наборы $\widetilde{\delta}^1$ и $\widetilde{\delta}^2$ не являются противоположными. Отсюда следует, что существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что $\widetilde{\delta}^1_i = \widetilde{\delta}^2_i$. Если $\widetilde{\delta}^1_i = \widetilde{\delta}^2_i = 0$, то наборы $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1}$, $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^2}$ имеют общую нулевую компоненту. Если $\widetilde{\delta}^1_i = \widetilde{\delta}^2_i = 1$, то, поскольку $\overline{x}_i \in F(n)$, существует такое j, $n+1 \leqslant j \leqslant l$, что $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1}_j = \widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^2}_j = \overline{\widetilde{\delta}^1_i} = 0$, т. е. наборы $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^1}$, $\widetilde{\alpha}^{\widetilde{\delta}^2}$ имеют общую нулевую компоненту. Таким образом, выполняется второе условие.

Аналогично доказывается, что выполняется третье условие.

Таким образом, функция r согласована с классом SM, откуда согласно теореме 2.1.1 следует, что выполняется соотношение $h \in [SM]_F$, что и требовалось доказать. Следовательно, из соотношения $\overline{x} \in F$ следует равенство $[SM]_F = S$, из которого в свою очередь следует равенство $[S_{01}]_F = S$, поскольку $SM \subseteq S_{01}$. Утверждение доказано.

Пусть $n \geqslant 2$. Обозначим через $\mathbb{M}^n$ множество всех мономов вида $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ таких, что $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, $k \geqslant 1$.

Пусть $M_1 = x_{i_1} \ldots x_{i_p}$, $M_2 = x_{j_1} \ldots x_{j_q}$ — мономы из множества $\mathbb{M}^n$. Будем говорить что моном M_1 является *подмономом* монома M_2 (обозначение $M_1 \lhd M_2$), если $\{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{j_1, \ldots, j_q\}$ и $p < q$. Пусть M — моном, содержащийся в $\mathbb{M}^n$. Обозначим через $sub(M)$ сумму всех подмономов монома M, т. е.

$$sub(M) = \bigoplus_{M' \in \mathbb{M}^n : M' \lhd M} M'.$$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, $n \geqslant 2$. Пусть полином Жегалкина функции f имеет вид $M_1 + \ldots + M_r + c$, где $r \geqslant 1$, $c \in \{0, 1\}$, $M_1, \ldots, M_r$ — некоторые мономы положительного ранга. Пусть M — моном, содержащийся в $\mathbb{M}^n$. Обозначим через $v(f, M)$ количество всех таких мономов в полиноме Жегалкина функции f, что M является их подмономом, т. е. $v(f, M) = \sum\limits_{M' \in \mathbb{M}^n : M \lhd M'} 1$.

Утверждение 5.4.2. *Пусть $M = x_{i_1} \ldots x_{i_p}$ — моном из множества $\mathbb{M}^n$, $n \geqslant 2$. Тогда выполняется соотношение*

$$\overline{x}_{i_1} \ldots \overline{x}_{i_p} = x_{i_1} \ldots x_{i_p} + sub(M) + 1.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} &\overline{x}_{i_1} \ldots \overline{x}_{i_p} = (x_{i_1} + 1) \ldots (x_{i_p} + 1) = \\ &\quad = x_{i_1} \ldots x_{i_p} + (x_{i_1} \ldots x_{i_{p-1}} + \ldots + x_{i_2} \ldots x_{i_p} + \ldots + x_1 + \ldots + x_p) + 1 = \\ &\qquad\qquad = x_{i_1} \ldots x_{i_p} + sub(M) + 1. \end{aligned}$$

Утверждение 5.4.3. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 3$ — булева функция, отличная от константы. Функция f является самодвойственной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: число мономов положительного ранга в полиноме Жегалкина функции f нечетно и для любого монома $M' \in \mathbb{M}^n$ число $v(f, M')$ четно.*

Доказательство. Пусть $M_1 + \ldots + M_k + c$ — полином Жегалкина функции f, где $k \geqslant 1$, $M_1, \ldots, M_k \in \mathbb{M}^n$, $c \in \{0, 1\}$. Функция f является самодвойственной тогда и только тогда, когда выполняется тождество $f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$. Заметим, что согласно утверждению 5.4.2 выполняется равенство

$$\overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = M_1 + \ldots + M_k + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} sub(M_i) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} 1 + 1 + c.$$

Отсюда следует, что f является самодвойственной тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства: $\bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} sub(M_i) = 0$ и $\bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} 1 + 1 = 0$. Второе равенство эквивалентно нечетности k, т. е. нечетности числа мономов положительного ранга в полиноме Жегалкина функции f. Несложно видеть, что выполняются соотношения

$$\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant k} sub(M_i) = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant k} \ \bigoplus_{M' \in \mathbb{M}^n : M' \lhd M_i} M' = \bigoplus_{M' \in \mathbb{M}} v(f, M') \cdot M'.$$

Выражение $\bigoplus\limits_{M' \in \mathbb{M}} v(f, M') \cdot M'$ тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда для любого монома $M \in \mathbb{M}^n$ число $v(f, M)$ четно. Утверждение доказано.

Утверждение 5.4.4. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $n \geqslant 3$. Тогда ранг функции f не превосходит $n - 1$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть в полиноме Жегалкина функции f содержится моном M_1 ранга n, т. е. $M_1 = x_1 \ldots x_n$. Пусть $M_2 = x_1 \ldots x_{n-1}$. Заметим, что $M_2 \lhd M_1$, причем, кроме монома M_1, не существует других таких мономов из $\mathbb{M}^n$, что моном M_2 является их подмономом. Поэтому $v(f, M_2) = 1$, откуда согласно утверждению 5.4.3 следует, что $f \notin S$. Получено противоречие. Следовательно, предположение неверно и ранг функции f не превосходит $n - 1$. Утверждение доказано.

Введем на множестве переменных $x_1, \ldots, x_n$ порядок $\succ$ такой, что $x_i \succ x_j$, если $i \leqslant j$. Произвольный моном $M = x_{i_1} \ldots x_{i_p}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$ будем рассматривать как слово $x_{i_1} \ldots x_{i_p}$ в алфавите $\{x_1, \ldots, x_n\}$ с порядком $\succ$. Данное определение порядка $\succ$ естественным образом определяет лексикографический порядок на множестве $\mathbb{M}^n$. Например, $x_1 x_2 x_3 x_6 \succ x_1 x_2 x_4 x_5$. Будем говорить, что моном M_1 больше монома M_2, если $M_1 \succ M_2$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $n \geqslant 2$, — функция ранга k, $k \geqslant 2$. Наибольший относительно заданного порядка моном ранга k из полинома Жегалкина функции f будем называть старшим мономом функции f.

Утверждение 5.4.5. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда существует функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ ранга $n - 1$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ такую, что $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus\limits_{M \in \mathbb{M}^n : M \neq x_1 \ldots x_n} M$. Пусть $M' \in \mathbb{M}^n$. Докажем, что значение $v(f, M')$ четно. Если $M' = x_1 \ldots x_n$, то очевидно, что $v(f, M') = 0$. Пусть M' имеет ранг меньше n. Не умаляя общности, будем считать, что $M' = x_1 \ldots x_k$, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. Заметим, что мощность множества мономов из $\mathbb{M}^n$ таких, что M' является их подмономом, равна количеству всевозможных непустых подмножеств множества переменных $\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$. Следовательно, она равна $2^{n-k} - 1$.

Все такие мономы, кроме $x_1 \ldots x_n$ содержатся в полиноме Жегалкина функции f, откуда следует, что $v(f, M') = 2^{n-k} - 2$. Поэтому согласно утверждению 5.4.3 одна из функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $f(x_1, \ldots, x_n) + x_1$ является самодвойственной и имеет ранг $n-1$.

Заметим, что существует $2^{n-k}-1$ мономов из $\mathbb{M}^n$ таких, что $M' = x_1 \ldots x_k$ является их подмономом.

Утверждение 5.4.6. *Пусть F — такой инвариантный класс, что $F \subseteq S$, и для любого $m \geqslant 2$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in F$ ранга m. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 3$, — самодвойственная функция ранга k, где $2 \leqslant k < n$. Тогда существуют такие функции $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n) \in F$, $m \geqslant 1$, что одна из функций $f + \bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i$, $f + \bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i + x_1$ является самодвойственной функцией ранга не более $k-1$.*

Доказательство. Пусть $M_1, \ldots, M_q$, $q \geqslant 1$, — мономы ранга k из полинома Жегалкина функции f, упорядоченные в лексикографическом пордяке так, что $M_1 \succ \ldots \succ M_p$, т. е. M_1 — старший моном. Пусть $M_1 = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$. Рассмотрим моном $M' = x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}}$. Заметим, что $M' \lhd M_1$. Значит, $v(f, M') > 0$. Поскольку согласно утверждению 5.4.3 число $v(f, M')$ делится на 2, то существует такое j, $2 \leqslant j \leqslant p$, что $M' \lhd M_j$. Поскольку $M_1 \succ M_j$, то M_j имеет вид $x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}} x_{i_{k+1}}$, где $i_k < i_{k+1} \leqslant n$. Согласно условию утверждения существует функция $g(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in F$ ранга k. Поскольку множество F замкнуто относительно операций переименования переменных и введения несущественных переменных, то существует функция $g_1(x_1, \ldots, x_n) \in F$ ранга k, существенно зависящая только от переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_{k+1}}$, и такая, что ее полином Жегалкина содержит моном $M_1 = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$. Заметим, что моном M_1 является ее старшим мономом.

Рассмотрим функцию $h_1 = f + g_1 + x_1$. Поскольку полиномы Жегалкина функций f и g_1 не содержат мономов ранга k, больших монома M_1 и оба полинома содержат моном M_1, то все мономы ранга k в полиноме Жегалкина функции h_1 строго меньше монома M_1. Из соотношений $f \in S$, $g_1 \in S$ и $x_1 + x_2 + x_3 \in S$ следует, что $h_1 \in S$. Если функция h_1 имеет ранг k, то аналогично существует такая функция $g_2(x_1, \ldots, x_n)$, что функция $h_2 = h_1 + g_2 + x_1$ является самодвойственной, имеет ранг не более k и ее мономы ранга k меньше старшего монома функции h_1.

Продолжая данную процедуру, мы построим последовательность функций $h_1, \ldots, h_m$ и получим в результате такие функции $g_1, \ldots, g_m \in F$, $m \geqslant 1$ и функцию

$$h_m = f + g_1 + \ldots + g_m + \underbrace{x_1 + \ldots + x_1}_{m},$$

что функция h_m является самодвойственной и имеет ранг не более $k-1$. Действительно, на каждом следующем шаге процедуры наибольший моном ранга k функциии h_i, где $2 \leqslant i \leqslant m$, будет меньше, чем наибольший моном ранга k функции h_{i-1}. Поскольку различных мономов ранга k конечное число, то после некоторого шага процедуры у полученной в результате функции h_m в полиноме Жегалкина не останется мономов ранга k. Очевидно, что в зависимости от четности m выполнено либо $h_m = f + \bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i$, либо $h_m = f + \bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i + x_1$. Утверждение доказано.

Из утверждения 5.4.6 очевидно следует

Следствие 5.4.7. *Пусть F — такой инвариантный класс, что $F \subseteq S$, и для любого $m \geqslant 2$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in F$ ранга m. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 3$ — самодвойственная функция ранга k, где $2 \leqslant k < n$. Тогда существуют такие функции $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n) \in F$, $m \geqslant 1$, что одна из функций $f + \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i$ и $f + \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i + x_1$ принадлежит классу SL.*

Утверждение 5.4.8. *$\mathfrak{R}(SL, S)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq S$ таких, что для любого $m \geqslant 2$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in F$ ранга m.*

Доказательство. Пусть $[SL]_F = S$. Докажем, что для любого $m \geqslant 2$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in F$ ранга m. Пусть $m \geqslant 2$. Согласно утверждению 5.4.5 существует функция $f(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in S$ ранга m. Поскольку $f \in [SL]_F$, то в F существуют такие функции $g_1, \ldots, g_{2k+1}$, $k \geqslant 0$, от переменных $x_1, \ldots, x_{m+1}$, что $f = g_1 + \ldots + g_{2k+1} + c$, $c \in \{0, 1\}$. Тогда по крайней мере одна из функций $g_1, \ldots, g_{2k+1}$ имеет ранг m, что и требовалось доказать.

Пусть для любого $m \geqslant 2$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in F$ ранга m. Докажем, что $[SL]_F = S$. Заметим, что любая самодвойственная функции от одной или двух переменных имеет не более одной существенной переменной, т. е. является функцией отрицания или селектором. Поскольку $x, \overline{x} \in SL$, то $S(1) \cup S(2) \subseteq [SL]_F$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $n \geqslant 3$. Докажем, что $f \in [SL]_F$. Согласно утверждению 5.4.7 существуют такие функции $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n) \in F$, $m \geqslant 1$, что одна из функций $f + \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i$ и $f + \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i + x_1$ принадлежит классу SL. Пусть, например, $h = f + \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i \in SL$ (случай $f + \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i + x_1 \in SL$ рассматривается аналогично) и $h = x_{i_1} + \ldots + x_{i_{2r+1}} + c$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{2r+1} \leqslant n$, $r \geqslant 0$, $c \in \{0, 1\}$. Заметим, что сумма четного числа самодвойственных функций не является самодвойственной функцией, откуда следует, что m четно. Тогда $f = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i + x_{i_1} + \ldots + x_{i_{2r+1}} + c$, и в этой сумме нечетное число неконстантных слагаемых. Поэтому $f \in [SL]_F$. Значит, $[SL]_F = S$. Утверждение доказано.

Утверждение 5.4.9. *$\mathfrak{R}(L_{01}, S)$ — семейство всех инвариантных классов $F \in \mathfrak{R}(SL, S)$ таких, что $\overline{x} \in F$.*

Доказательство. Пусть $[L_{01}]_F = S$. Тогда очевидно, что $[SL]_F = S$, откуда следует, что $F \in \mathfrak{R}(SL, S)$. Рассмотрим функцию $f(x) = \overline{x}$. Поскольку $f(x) \in S$ и $[L_{01}]_F = S$, то существуют такие функции $g_1(x), \ldots, g_{2k+1}(x) \in F$, $k \geqslant 0$, что $f(x) = g_1(x) + \ldots + g_{2k+1}(x)$. Для любого i, $1 \leqslant i \leqslant 2k+1$, либо $g_i(x) = x$, либо $g_i(x) = \overline{x}$. Если $g_i(x) = x$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant 2k+1$, то $f(x) = x$, откуда следует, что хотя бы одна из этих функций равна $\overline{x}$. Значит, $\overline{x} \in F$. Следовательно, $F \in \mathfrak{R}(SL, S)$ и $\overline{x} \in F$, что и требовалось доказать.

Пусть $F \in \mathfrak{R}(SL, S)$ и $\overline{x} \in F$. Докажем, что $[L_{01}]_F = S$. Поскольку $F \in \mathfrak{R}(SL, S)$, то $[SL]_F = S$. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $n \geqslant 1$. Докажем, что $h \in [L_{01}]_F$. Из соотношения $h \in [SL]_F$ следует, что существуют такие функции $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_{2k+1}(x_1, \ldots, x_n) \in F$, $k \geqslant 0$, и $c \in \{0, 1\}$, что $h = g_1 + \ldots + g_{2k+1} + c$. Если $c = 0$, то очевидно, что $h \in [L_{01}]_F$. Пусть $c = 1$. Положим $g_{2k+2}(x_1, \ldots, x_n) = x_1$, $g_{2k+3}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{x}_1$. Поскольку $g_{2k+2}, g_{2k+3} \in S$, то выполняется равенство $h = g_1 + \ldots + g_{2k+3}$, откуда следует, что $h \in [L_{01}]_F$. Утверждение доказано.

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 5.4.10. *$\mathfrak{R}(SU, S)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq S$ таких, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $n \geqslant 1$, выполнено хотя бы одно из соотношений $\overline{f} \in F$ или $f \in F$. $\mathfrak{R}(U_{01}, S) = \{S\}$.*

Имеет место следующая теорема о полноте в классе S.

Теорема 5.4.11. *Выполняются следующие утверждения.*

1. *$\mathfrak{R}(S_{01}, S)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq S$ таких, что $\overline{x} \in F$. $\mathfrak{R}(SM, S) = \mathfrak{R}(S_{01}, S)$.*

2. *$\mathfrak{R}(SL, S)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq S$ таких, что для любого $m \geqslant 2$ существует функция $g(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in F$ ранга m.*

3. *$\mathfrak{R}(L_{01}, S)$ — семейство всех инвариантных классов $F \in \mathfrak{R}(SL, S)$ таких, что $\overline{x} \in F$.*

4. *$\mathfrak{R}(SU, S)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq S$ таких, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, $n \geqslant 1$, выполняется хотя бы одно из соотношений $f \in F$ или $\overline{f} \in F$. $R(U_{01}, S) = \{S\}$.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из утверждений 5.4.1, 5.4.8 и 5.4.9 и 5.4.10.

5.5. Полнота в классе M.

Утверждение 5.5.1. *$\mathfrak{R}(M_0, M)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq M$ таких, что $1 \in F$. $\mathfrak{R}(M_1, M) = (\mathfrak{R}(M_0, M))^*$. $\mathfrak{R}(M_{01}, M)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq M$ таких, что $0, 1 \in F$. $\mathfrak{R}(MI^m, M) = \mathfrak{R}(M_0, M)$, $\mathfrak{R}(MO^m, M) = \mathfrak{R}(M_1, M)$, $\mathfrak{R}(MO_0^m, M) = \mathfrak{R}(MI_1^m, M) = \mathfrak{R}(M_{01}, M)$ для $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$.*

Доказательство. Докажем утверждение для класса M_0. Согласно лемме 3.2.2 выполняется равенство $[M_0]_F = [M]_F \cap [T_0]_F$. Следовательно, соотношение $[M_0]_F = M$ выполняется тогда и только тогда, когда $M \subseteq [T_0]_F$.

Пусть $M \subseteq [T_0]_F$. Тогда согласно лемме 2.2.10 выполняется хотя бы одно из соотношений $1 \in F$ и $\overline{x} \in F$. Поскольку $F \subseteq M$, то получаем, что $1 \in F$.

Пусть $1 \in F$. Тогда согласно лемме 1.3.5 $[M_0]_F = [M_0 \cup \{1\}]_F = [M]_F = M$, что и требовалось доказать.

Для классов M_1, M_{01} утверждение доказывается аналогично. Для классов $MI^m, MI_1^m, MO^m, MO_1^m$ утверждение доказывается аналогично с использованием леммы 5.1.5 и принципа двойственности.

Утверждение 5.5.2. *$\mathfrak{R}(K_{01}, M)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq M$ таких, что $D \subseteq F$. $\mathfrak{R}(K_0, M)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq M$ таких, что $D_1 \subseteq F$. $\mathfrak{R}(K_1, M)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq M$ таких, что $D_0 \subseteq F$. $\mathfrak{R}(K, M)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq M$ таких, что $D_{01} \subseteq F$. $\mathfrak{R}(D_{01}, M) = \mathfrak{R}(K_{01}, M)^*$, $\mathfrak{R}(D_1, M) = \mathfrak{R}(K_0, M)^*$, $\mathfrak{R}(D_0, M) = \mathfrak{R}(K_0, M)^*$, $\mathfrak{R}(D, M) = \mathfrak{R}(K, M)^*$.*

Доказательство. Докажем утверждение для класса K_{01}. Пусть $D \subseteq F$. Заметим, что произвольная функция из класса M может быть представлена в виде конъюнкции функций из класса D, т. е. может быть выражена формулой над типом (F, K_{01}). Следовательно, $[K_{01}]_F = M$.

Пусть $[K_{01}]_F = M$. Заметим, что тогда соотношение $D \subseteq F$ выполняется согласно леммам 5.1.9, 5.1.10 и 5.1.11.

Утверждение для классов K_0, K_1, K доказывается аналогично. Утверждение для классов D, D_0, D_1, D_{01} следует из принципов двойственности. Утверждение доказано.

Утверждение 5.5.3. $\mathfrak{R}(SM, M) = \mathfrak{R}(M_{01}, M)$.

Доказательство. Пусть $[SM]_F = M$. Согласно лемме 3.2.2 выполняется равенство $[SM]_F = [M]_F \cap [O^2]_F \cap [I^2]_F$. Следовательно $M \subseteq [I^2]_F$, откуда согласно лемме 5.1.5 следует, что $1 \in F$. Из соображений двойственности также следует, что $0 \in F$. Следовательно, $F \subseteq \mathfrak{R}(SM, M)$.

Пусть $F \subseteq \mathfrak{R}(SM, M)$. Тогда согласно лемме 1.3.5 выполняются равенства $[SM]_F = [SM \cup \{0, 1\}]_F = [M]_F = M$. Утверждение доказано.

Доказательство следующего утверждения очевидно.

Утверждение 5.5.4. $\mathfrak{R}(U_{01}, M) = \{M\}$, $\mathfrak{R}(U_0, M) = \{M_1, M\}$, $\mathfrak{R}(U_1, M) = \{M_0, M\}$, $\mathfrak{R}(MU, M) = \{M_{01}, M_0, M_1, M\}$.

Теорема 5.5.5. *Выполняются следующие утверждения.*

1. $\mathfrak{R}(M_0, M)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq M$ *таких, что* $1 \in F$. $\mathfrak{R}(M_1, M) = (\mathfrak{R}(M_0, M))^*$. $\mathfrak{R}(M_{01}, M)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq M$ *таких, что* $0, 1 \in F$. $\mathfrak{R}(MI^m, M) = \mathfrak{R}(M_0, M)$, $\mathfrak{R}(MO^m, M) = \mathfrak{R}(M_1, M)$, $\mathfrak{R}(MO_0^m, M) = \mathfrak{R}(MI_1^m, M) = \mathfrak{R}(M_{01}, M)$ *для* $m \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$.

2. $\mathfrak{R}(K_{01}, M)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq M$ *таких, что* $D \subseteq F$. $\mathfrak{R}(K_0, M)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq M$ *таких, что* $D_1 \subseteq F$. $\mathfrak{R}(K_1, M)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq M$ *таких, что* $D_0 \subseteq F$. $\mathfrak{R}(K, M)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq M$ *таких, что* $D_{01} \subseteq F$. $\mathfrak{R}(D_{01}, M) = \mathfrak{R}(K_{01}, M)^*$, $\mathfrak{R}(D_1, M) = \mathfrak{R}(K_0, M)^*$, $\mathfrak{R}(D_0, M) = \mathfrak{R}(K_0, M)^*$, $\mathfrak{R}(D, M) = \mathfrak{R}(K, M)^*$.

3. $\mathfrak{R}(SM, M) = \mathfrak{R}(M_{01}, M)$.

4. $\mathfrak{R}(U_{01}, M) = \{M\}$, $\mathfrak{R}(U_0, M) = \{M_1, M\}$, $\mathfrak{R}(U_1, M) = \{M_0, M\}$, $\mathfrak{R}(MU, M) = \{M_{01}, M_0, M_1, M\}$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из утверждений 5.5.1, 5.5.2, 5.5.3 и 5.5.4.

5.6. Полнота в классе L.

Утверждение 5.6.1. $\mathfrak{R}(L_0, L)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq L$ *таких, что* $1 \in F$ *или* $\overline{x} \in F$. $\mathfrak{R}(L_1, L) = (\mathfrak{R}(L_0, L))^*$. $\mathfrak{R}(L_{01}, L)$ *— семейство всех инвариантных классов* $F \subseteq L$ *таких, что* $0, 1 \in F$ *или* $\overline{x} \in F$.

Доказательство. Докажем утверждение для класса L_0. Пусть $[L_0]_F = L$. Согласно лемме 3.2.2 выполняется равенство $[L_0]_F = [L]_F \cap [T_0]_F$.

Следовательно, $L \subseteq [T_0]_F$, откуда согласно лемме 2.2.10 следует, что $1 \in F$ или $\overline{x} \in F$.

Пусть $1 \in F$ или $\overline{x} \in F$. Тогда равенство $[L_0]_F = L$ очевидно.

Утверждение для класса L_1 следует из принципа двойственности, а для класса L_{01} доказывается аналогично.

Утверждение 5.6.2. *$\mathfrak{R}(SL, L)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq L$ таких, что $0 \in F$ или $1 \in F$.*

Доказательство. Пусть $[SL]_F = L$. Согласно лемме 3.2.2 выполняется равенство $[SL]_F = [L]_F \cap [S]_F$. Следовательно $L \subseteq [S]_F$, откуда согласно лемме 2.2.3 следует, что $0 \in F$ или $1 \in F$.

Пусть $0 \in F$ или $1 \in F$. Тогда равенство $[SL]_F = L$ очевидно. Утверждение доказано.

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 5.6.3. *$\mathfrak{R}(SU, L)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq L$, удовлетворяющих следующему условию: для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in L$, $n \geqslant 1$, выполняется хотя бы одно из соотношений $f \in F$ и $\overline{f} \in F$. $\mathfrak{R}(U, L)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq L$, удовлетворяющих следующему условию: для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, $n \geqslant 1$, отличной от 0 и 1, выполняется хотя бы одно из соотношений $f \in F$ и $\overline{f} \in F$. $\mathfrak{R}(U_{01}, L) = \mathfrak{R}(U_1, L) = \mathfrak{R}(U_0, L) = \mathfrak{R}(MU, L) = \{L\}$.*

Теорема 5.6.4. *Выполняются следующие утверждения.*

1. *$\mathfrak{R}(L_0, L)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq L$ таких, что $1 \in F$ или $\overline{x} \in F$. $\mathfrak{R}(L_1, L) = (\mathfrak{R}(L_0, L))^*$. $R(L_{01}, L)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq L$ таких, что $0, 1 \in F$ или $\overline{x} \in F$.*

2. *$\mathfrak{R}(SL, L)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq L$ таких, что $0 \in F$ или $1 \in F$.*

3. *$\mathfrak{R}(SU, L)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq L$, удовлетворяющих следующему условию: для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in L$, $n \geqslant 1$, выполняется хотя бы одно из соотношений $f \in F$ и $\overline{f} \in F$. $\mathfrak{R}(U, L)$ — семейство всех инвариантных классов $F \subseteq L$, удовлетворяющих следующему условию: для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$, $n \geqslant 1$, отличной от 0 и 1, выполняется хотя бы одно из соотношений $f \in F$ и $\overline{f} \in F$. $\mathfrak{R}(U_{01}, L) = \mathfrak{R}(U_1, L) = \mathfrak{R}(U_0, L) = \mathfrak{R}(MU, L) = \{L\}$.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из утверждений 5.6.1, 5.6.2 и 5.6.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аманжаев Г. Г. О замыкании ненулевого инвариантного класса Яблонского по операции отождествления переменных. // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1995. — №3. — С. 76–79.
2. Андреева О. В., Голунков Ю. В. Программно-замкнутые классы функций алгебры логики и предикатов // Кибернетика. — 1981. — №5. — С. 133.
3. Бурле Г. А. Классы k-значной логики, содержащие все функции одной переменной // Дискретный анализ. Вып. 10. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1967. — С. 3–7.

4. Голунков Ю. В. Критерий полноты систем операций в операторных алгоритмах, реализующих функции k-значной логики // Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 17. — Казань: Изд-во Казанского университета, 1980. — С. 23–34.
5. Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 4. — С. 397–416.
6. Касим-Заде О. М. О неявной выразимости булевых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика.— 1995. — № 2. — С. 44–49.
7. Касим-Заде О. М. О классах функций, инвариантных относительно подстановки функций от одной переменной // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1995. — № 3. — С. 79–82.
8. Касим-Заде О. М. Об одной метрической характеристике неявных и параметрических представлений булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука, 1996. — С. 133–188.
9. Касим-Заде О. М. О метрических свойствах обобщенных инвариантных классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 15. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — С. 9–34.
10. Касим-Заде О. М. О неявной полноте в k-значной логике // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика.— 2007. — № 3. — С. 9–13.
11. Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — С. 5–33.
12. Кузнецов Ю. В. О классах булевых функций, инвариантных относительно отождествления переменных // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 290, № 4. — С. 780-785.
13. Кузнецов Ю. В. Исследование инвариантных классов, связанных с функциональными системами. Автореф. дисс. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / МГУ им. М. В. Ломоносова. — Москва, 1987.
14. Ларионов В. Б. Замкнутые классы k-значной логики, содержащие классы монотонных или самодвойственных функций. Автореф. дисс. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / МГУ им. М. В. Ломоносова. — Москва, 2010.
15. Марченков С. С., Угольников А. Б. Замкнутые классы булевых функций — М.: Изд-во ИПМ АН СССР, 1990.
16. Марченков С. С. Основные отношения S-классификации функций многозначной логики // Дискретная математика. — 1996. — Т. 8, № 1. — С. 99–128.
17. Марченков С. С. S-классификация идемпотентных алгебр с конечными носителями // Докл. РАН. — 1996. — Т. 348, № 5. — С. 587–589.
18. Марченков С. С. S-классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. — 1997. — Т. 9, № 3. — С. 125–152.
19. Марченков С. С. Клоновая классификация дуально дискриминаторных алгебр с конечным носителем // Математические заметки. — 1997. — Т. 61. № 3. — С. 359–366.
20. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
21. Михайлец Е. В. О ранге неявных представлений над одним классом функций трехзначной логики // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика.— 2008. — № 2. — С. 65–70.
22. Михайлец Е. В. О ранге неявных представлений функций k-значной логики над классом монотонных функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 18. — 2013. — С. 245–256.
23. Нгуен Ван Хоа. Об L-эквивалентности систем функций в многозначных логиках // Алгебра и логика. — 1988. — Т. 27, № 1. — С. 37–47.
24. Нгуен Ван Хоа. О G-полных замкнутых классах k-значной логики // J. Inform. Process. Cybern. EIK. — 1990. — Bd. 26, Nr. 5/6. — S. 301–313.
25. Нгуен Ван Хоа. К описанию семейства G-полных замкнутых классах k-значной логики // Кибернетика. — 1990. — № 5. — С. 9–12.
26. Нгуен Ван Хоа. О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, № 4. — С. 82–95.
27. Нгуен Ван Хоа. О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. — 1993. — Т. 5, № 4. — С. 87–108.
28. Нгуен Ван Хоа Описание замкнутых классов в k-значной логике, сохраняемых всеми автоморфизмами // Докл. АН Беларуси. — 1994. — Т. 38, № 3. — С. 16–29.
29. Нечаев А. А. Критерий полноты систем функций p^n-значной логики, содержащий операции сложения и умножения по модулю p^n // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. Вып. 34. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980. — С. 74–89.

30. Орехова Е. А. Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 27–74.
31. Соловьев В. Д. Замкнутые классы в k-значной логике с операцией разветвления по предикатам // Дискретная математика. — 1990. — Т. 2, № 4. — С. 18–25.
32. Тайманов В. А. Функциональные системы с операциями замыкания программного типа. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. — Москва, 1983.
33. Тайманов В. А. О функциональных системах k-значной логики операциями программного типа // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 268, № 6. — С. 1307–1310.
34. Тарасова О. С. Классы k-значной логики, замкнутые относительно расширенной операции суперпозиции // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2001. — № 6. — С. 54–57.
35. Тарасова О. С. Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановок // Математические вопросы кибернетики. Вып. 13. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — С. 59–112.
36. Тарасова О. С. Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановки // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2004. — № 1. — С. 25–29.
37. Угольников А. Б. О замкнутых классах Поста // Известия вузов. Математика. — 1988. — № 7 (314). — С. 79–88.
38. Угольников А. Б. Классы Поста. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова, 2008.
39. Яблонский С. В. Об одном семействе классов функций алгебры логики, допускающих простую схемную реализацию // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 149.
40. Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 2. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 75–121.
41. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
42. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2006.
43. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.
44. Baker K. A., Pixley A. F. Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems // Mathematische Zeitschrift. — 1975. — V. 143. — P. 165–174.
45. Burris S., Willard R. Finitely many primitive positive clones // Proc. of the American Mathematical Society. — 1987. — V. 101, No. 3. — P. 427–430.
46. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. — 1921. — V. 43, No. 3. — P. 163–185.
47. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Vol. 5. — Princeton Univ. Press, 1941.
48. Rosenberg I. G. Minimal clones I: The five types // Lectures in Universal Algebra (Proc. Conf. Szeged 1983). — 1986. — V. 43 — P. 405–427.

Поступило в редакцию 1 III 2015