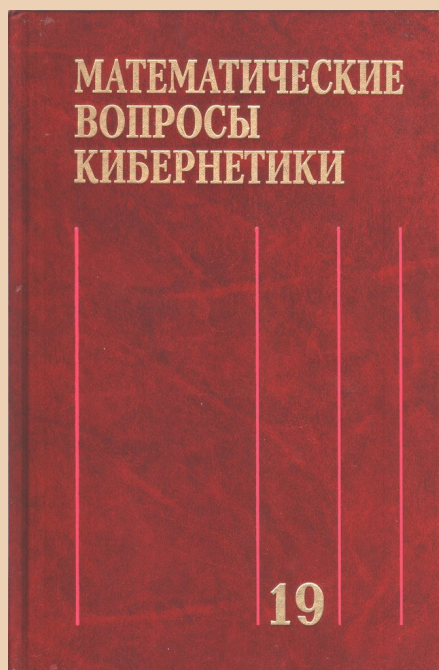




Д. К. Подолько

**О классах функций
многозначной логики,
замкнутых
относительно
усиленной операции
суперпозиции**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки:

Подолько Д. К. О классах функций многозначной логики, замкнутых относительно усиленной операции суперпозиции // Математические вопросы кибернетики. Вып. 19. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. — С. 199–278. URL: <http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2019-199>

О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, ЗАМКНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО УСИЛЕННОЙ ОПЕРАЦИИ СУПЕРПОЗИЦИИ

Д. К. ПОДОЛЬКО

(МОСКВА)

Оглавление

Введение	199
§ 1. Основные определения	206
1.1. Двоичные представления	206
1.2. Двоичные перестановки	207
1.3. Операция двоичной суперпозиции	210
1.4. Критерий полноты β -замкнутых классов	215
§ 2. Классы функций из $P_{k 2}$	217
2.1. Счетность семейства β -замкнутых классов	217
2.2. Описание β -замкнутых классов	222
§ 3. Классы функций из $P_{k 3}$	228
3.1. Континуальность семейства β -замкнутых классов	228
3.2. Конечные множества β -замкнутых классов	231
3.3. Семейство β -замкнутых классов с булевым замыканием O^μ , $\mu \geq 3$	244
3.4. Полная классификация	250
3.5. Классы функций с фиксированной областью значений	250
3.6. Подход к описанию β -замкнутых классов	255
§ 4. Классы функций из $P_{k 4}$	255
4.1. Континуальные семейства β -замкнутых классов	255
4.2. Конечные множества β -замкнутых классов	259
4.3. Семейство β -замкнутых классов с булевым замыканием O^2	264
4.4. Полная классификация	269
§ 5. Классы функций из P_k	269
5.1. Континуальные семейства β -замкнутых классов	269
5.2. Классификация семейств β -замкнутых классов по их мощности	274
Литература	274

Введение

Настоящая работа относится к одному из основных направлений дискретной математики и математической кибернетики — теории функциональных систем [21, 61, 63]. Функциональная система представляет собой

пару $(\mathfrak{A}; \psi)$, где $\mathfrak{A}$ является некоторым множеством функций, а ψ — некоторым отображением множества всех подмножеств системы $\mathfrak{A}$ в себя. Функциональные системы, как правило, имеют содержательную связь с реальными кибернетическими моделями управляющих систем. К числу важнейших задач теории функциональных систем можно отнести задачи о полноте, о выразимости одних функций через другие, о структуре замкнутых классов, о тождественных преобразованиях и т. д. Результаты, получаемые при исследовании функциональных систем, позволяют разрабатывать новые подходы для решения других задач дискретной математики и математической кибернетики. Поэтому С. В. Яблонский утверждал [63], что роль функциональных систем в дискретной математике можно сравнить с ролью математического анализа в непрерывной математике.

Одним из центральных направлений в теории функциональных систем является изучение систем $(P_k; \varphi)$, где P_k — множество функций k -значной логики, $k \geq 2$, а φ — некоторый оператор на множестве всех подмножеств P_k . В качестве операторов φ часто рассматриваются операторы, являющиеся операторами замыкания, т. е. обладающие тремя свойствами (см., например, [16]): $\mathcal{A} \subseteq \varphi(\mathcal{A})$ (экстенсивность), $\varphi(\mathcal{A}) \subseteq \varphi(\mathcal{B})$ при $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ (монотонность) и $\varphi(\varphi(\mathcal{A})) = \varphi(\mathcal{A})$ (идемпотентность).

Основными типами задач, возникающих при исследовании функций k -значной логики, являются задачи выразимости и полноты (см., например, обзор [58]). К первому из данных типов относятся задачи определения по множеству $\mathcal{A}$ и произвольной функции из P_k принадлежности этой функции множеству $\varphi(\mathcal{A})$. Задачи второго типа для заданных множеств F и $\mathcal{A}$ из P_k направлены на исследование вопроса порождаемости множеством F всех функций из $\mathcal{A}$, т. е. выполнения условия $\varphi(F) = \mathcal{A}$. При этом важное место занимают задачи исследования классов на наличие конечных порождающих систем, а также задачи о существовании базиса, то есть порождающей системы, при удалении любой функции из которой эта система уже перестает быть порождающей. Также важным направлением при изучении функций k -значной логики является исследование свойств семейства классов $\{\varphi(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \subseteq P_k\}$. К этой проблематике можно отнести задачи определения мощности такого семейства классов, его структуры, свойств его элементов и т. д.

Для функциональных систем функций двузначной логики с операцией суперпозиции Э. Л. Пост показал [103, 104, 109], что каждый класс булевых функций, замкнутый относительно данной операции, имеет конечный базис, и описал все такие классы. Тем самым установлена счетность семейства замкнутых классов булевых функций и построена решетка замкнутых классов. Данные результаты в более доступном изложении позднее представлены в книге С. В. Яблонского, Г. П. Гаврилова и В. Б. Кудрявцева [64]. При этом в отличие от работ Поста, в этой книге рассматривались классы, замкнутые относительно двух операций: суперпозиции и введения несущественной переменной. Такой подход позволил получить более простую структуру замкнутых классов, исключив семнадцать классов, которые не являются замкнутыми относительно операции введения несущественной переменной.

Результаты, полученные в двузначной логике, способствовали развитию исследований функциональных систем функций k -значной логики

при $k \geq 3$. С.В.Яблонский решил [60] задачу о полноте в множестве функций трехзначной логики с операциями суперпозиции и введения несущественной переменной и описал все 18 предполных классов в P_3 , а А.В.Кузнецов (см. [22] и [34, с.102–115]) установил конечность семейства всех предполных классов в P_k при любом k . В работах многих исследователей выявлены различные семейства предполных классов (см., например, [1, 11–13, 24–26, 96, 98–102]), а описание всех предполных классов функций из P_k завершено И.Розенбергом [105–107].

Пост предполагал [103], что для исследования функций многозначной логики можно воспользоваться методом моделирования таких функций в двоичной системе и получить результаты, подобные результатам для булевых функций. Однако позднее были выявлены существенные различия между двузначной и k -значной логикой при $k \geq 3$. Так, Ю.И.Янов и А.А.Мучник привели примеры замкнутых классов без базиса и классов со счетным базисом [65], тем самым установив, что семейство замкнутых классов функций многозначной логики является континуальным.

Изучение семейства замкнутых классов функций k -значной логики при $k \geq 3$ наталкивается на значительные трудности в связи с его континуальностью. Поэтому для его исследования используются различные подходы, которые условно можно разделить на два направления: изучение свойств конкретных семейств замкнутых классов и изучение функциональных систем $P_k^+ = (P_k; \varphi^+)$, в которых в качестве оператора φ^+ рассматривается какое-либо усиление оператора суперпозиции φ (см., например, обзор [58]).

К первому из описанных направлений естественным образом относится задача исследования свойств предполных классов функций k -значной логики. Помимо их описания, для данных классов рассматривался вопрос наличия у них конечных базисов. Д.Лау приведены [84] конечные порождающие системы для всех предполных классов в P_k при любом k , кроме классов типа $\odot$ (классов монотонных функций), а также для классов типа $\odot$ при $k \leq 7$. Пример предполного класса монотонных функций из P_8 , который не имеет конечного базиса, построен Г.Тардошем [110]. В работах Я.Деметровича, Л.Ханнака, Л.Роняи [76–78] описаны некоторые достаточные условия конечной порожденности предполных монотонных классов при любом k . В дальнейшем существенные продвижения в данном направлении получены в работах О.С.Дудаковой [8–10], в которых найден критерий наличия конечного базиса у предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины 2.

Также для каждого предполного класса функций k -значной логики рассматривалась задача нахождения мощности семейства замкнутых классов, которые в нем содержатся (см., например, [27, 28, 33, 66–70, 72–75, 85–89, 92–95, 97]). В работах С.С.Марченкова, Я.Деметровича, Л.Ханнака [27, 28, 33, 72–75] доказано, что при любом k множество замкнутых классов, содержащихся в любом предполном классе, является континуальным, за исключением классов типа $\mathbb{L}$ (классов линейных функций), в которых при простых k данное множество является конечным, а при k , равных степеням простых чисел, — счетным.

Помимо исследования предполных классов, большое внимание уделялось изучению семейств классов, содержащих простые естественные множества функций. Е.Слупецкий привел [108] критерий полноты замкнутых

классов многозначной логики, содержащих все функции одной переменной, и показал, что число таких классов является конечным, а Г. А. Бурле описал [2] данные классы. С. В. Яблонским найден [61] критерий полноты классов функций многозначной логики, содержащих все одноместные функции, принимающие не более $k - 1$ значения. В работах В. Б. Кудрявцева [18–20] изучаются свойства систем функций, которые принимают все значения из $E_k = \{0, 1, \dots, k - 1\}$ (такие системы называются S -системами), приводится описание всех S -предполных S -множеств, устанавливается асимптотическое поведение числа таких множеств и их типов.

При изучении конкретных семейств замкнутых классов функций из P_k одними из первых часто исследуются семейства $P_{k,l}$ функций k -значной логики, которые принимают только значения из множества E_l , где $l \geq 2$. В работах Д. Лау [82, 83, 90, 91] и Н. Грюнвальда [79–81] для каждого класса B булевых функций установлена мощность семейства замкнутых классов функций из $P_{3,2}$, которые содержат только функции, ограничение которых на множестве E_2 принадлежит классу B , и описаны такие семейства в тех случаях, когда они являются конечными или счетными. Также некоторые специальные семейства классов функций из $P_{k,2}$ исследовались в работах А. В. Михайлович [35–37].

Относительная простота некоторых классов функций из $P_{k,l}$, достигнутые в этом направлении результаты и разработанные методы позволили в отдельных случаях исследовать задачи о сложности представления функций формулами. Д. А. Дагаевым [5, 6] для почти всех замкнутых классов булевых функций получены асимптотически совпадающие с «мощностными» нижними оценками верхние оценки функций Шеннона, характеризующих сложность множества всех функций из $P_{3,2}$ с проекцией (булевым ограничением) в заданный класс булевых функций, при реализации формулами над некоторыми порождающими системами, а для почти всех замкнутых классов псевдолинейных функций (проекции которых совпадают с классом всех линейных булевых функций) из $P_{3,2}$ установлен точный рост соответствующих функций Шеннона для некоторых порождающих систем.

Значительное число работ посвящено исследованиям функциональных систем $(P_k; \varphi^+)$, в которых оператор φ^+ является усилением оператора суперпозиции. Использование такого подхода позволяет, как правило, получать семейства замкнутых классов с более обозримой структурой. Стоит отметить, что упомянутые выше работы Е. Слупецкого и Г. А. Бурле можно отнести к данному направлению исследований, поскольку задачи, рассматриваемые в данных работах, естественным образом можно переформулировать в терминах усиленной операции суперпозиции, допускающей в качестве тривиальных формул формулы, реализующие функции одной переменной.

С. С. Марченков и Нгуен Ван Хоа рассматривали [29–32, 38–41] S -замкнутые классы функций k -значной логики (классы, которые вместе с каждой функцией содержат функции, двойственные к ней относительно заданной группы перестановок) и показали, что семейство таких классов является конечным при любом $k \geq 3$ и при этом число таких классов растет сверхэкспоненциально с ростом k .

В работе А. В. Кузнецова [23] введены понятия параметрической выразимости и оператора параметрического замыкания, а также установлены критерии параметрической выразимости для k -значных логик при $k \geq 2$

и найдены все параметрически замкнутые классы при $k = 2$. В дальнейшем А. Ф. Данильченко установлена [7] конечность семейства параметрически замкнутых классов при $k = 3$, а С. Баррисом и Р. Уиллардом — при $k > 3$ [71]. На основе понятия параметрической выразимости О. М. Касим-Заде определено [14, 15] понятие неявной выразимости. Им установлена эквивалентность параметрической и неявной выразимости при $k = 2$ и тем самым установлена конечность множества классов неявно выразимых булевых функций. Критерии неявной полноты множеств функций k -значной логики получены О. М. Касим-Заде [15] и Е. А. Ореховой [42] при $k = 2$ и $k = 3$ соответственно. При этом в [42] критерий неявной полноты для $k = 3$ формулируется не в терминах предполных (т. е. максимальных неполных) классов, а в терминах минимальных полных классов.

Функционально-предикатные системы с операциями замыкания программного типа, определяемые своими множествами предикатов, рассматривались в работе Ю. В. Голункова [4], в которой исследовалась задача полноты таких систем. Работы В. А. Тайманова и В. Д. Соловьева [50–52] посвящены изучению функциональных систем функций k -значной логики, $k \geq 2$, с операциями программного типа. В. А. Тайманов установил, что в зависимости от свойств множеств предикатов, семейства замкнутых классов могут быть конечными, счетными и континуальными. Примеры конечных описаний замкнутых классов для некоторых операций программного типа рассматривались В. Д. Соловьевым.

К этому же направлению относятся и работы О. С. Тарасовой [53–55]. В них определены операторы замыкания относительно суперпозиции и перестановок, основанных на разбиении множеств E_k^n , и приведены примеры перестановок, при которых семейство замкнутых классов функций k -значной логики является счетным при $k \geq 3$, а также пример оператора, для которого семейство замкнутых классов функций из P_k является счетным при $k = 3$ и континуальным при $k \geq 5$.

Таким образом, при исследовании функциональных систем $(P_k; \varphi^+)$ в качестве оператора φ^+ , как правило, выбирается оператор, возникающий при решении других задач или представляющий практический интерес. Немаловажное значение при этом имеет наличие новых качественных «эффектов», выявляемых при изучении семейств классов, замкнутых относительно оператора φ^+ , и возможность использования полученных результатов для исследования классов, замкнутых относительно операции (обычной) суперпозиции.

В настоящей работе изучаются функции k -значной логики при $k = 2^m$, $m \geq 2$. Каждое число из множества $\{0, 1, \dots, k - 1\}$ кодируется в двоичной системе счисления. Тем самым этому числу взаимно-однозначно сопоставляется двоичный вектор из множества $\{0, 1\}^m$. На основе этого кодирования каждой функции из P_k сопоставляется булева вектор-функция, состоящая из m компонент. Идея применения такого подхода для изучения функций многозначной логики была предложена, как уже говорилось, еще Э. Л. Постом [103] и часто используется в различных областях дискретной математики (см., например, [3, 49, 59, 62]), а в отдельных случаях является настолько эффективной, что позволяет получать в некотором смысле окончательные результаты (см., например, [17, 56]).

В статье на основе представления функций k -значной логики в виде булевых вектор-функций определяется оператор β -замыкания, который

является усилением оператора суперпозиции, и исследуются свойства β -замкнутых классов.

Опишем кратко содержание работы.

В §1 введены основные понятия и определены новые операторы замыкания. Каждая функция F из P_k , зависящая от n переменных, $n \geq 1$, естественным образом кодируется в двоичной системе счисления. Тем самым ей сопоставляется булева вектор-функция $\hat{F}$, содержащая m компонент, каждая из которых зависит от mn переменных, и называемая двоичным представлением функции F . В п.1.2 определена операция двоичной S -суперпозиции, которая подобна операции (обычной) суперпозиции, но, в отличие от нее, позволяет при построении новых функций специальным образом переставлять компоненты двоичных представлений функций k -значной логики между собой. Для оператора замыкания относительно операции двоичной S -суперпозиции, который назван S_0 -замыканием, на основе примера замкнутых классов со счетным базисом, предложенного Ю.И. Яновым и А.А. Мучником [65], установлена континуальность семейства S_0 -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ (теорема 1.1).

В п.1.3 для каждого множества $\mathcal{A}$ из P_k определено его булево замыкание $B(\mathcal{A})$ — класс булевых функций, который равен замыканию всех компонент двоичных представлений функций из $\mathcal{A}$ относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной. Также определено β -замыкание множества $\mathcal{A}$ как множество всех функций k -значной логики с двоичным представлением $\hat{F}(g_1, \dots, g_{mn})$, где $F \in \mathcal{A}$ и $g_1, \dots, g_{mn} \in B(\mathcal{A})$ (здесь n — число переменных функции F). В этом пункте доказаны некоторые свойства такого оператора, а в п.1.4 установлено, что оператор β -замыкания эквивалентен оператору замыкания относительно операций двоичной S -суперпозиции и введения несущественной переменной (теорема 1.2). В п.1.5 приведен критерий полноты β -замкнутых классов (теорема 1.3) и описаны все β -предполные классы. Оказалось, что их число не зависит от k и равно шести. Пять из них соответствуют предполным классам булевых функций и состоят из всех функций k -значной логики, компоненты которых принадлежат соответствующему предполному классу булевых функций. Шестым β -предполным классом является множество всех функций из P_k , которые принимают не все значения.

В §2 исследуются β -замкнутые классы функций из $P_{k|2}$. В п.2.1 показано, что для каждого замкнутого класса $\mathcal{B}$ булевых функций семейство β -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ является конечным и непустым (теорема 2.1). В качестве простого следствия этого утверждения установлена счетность семейства β -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ (теорема 2.2), в то время как семейство классов функций из $P_{k|2}$, замкнутых относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной, является континуальным. В п.2.2 приведено описание этого семейства β -замкнутых классов (теорема 2.3) и описан подход к построению решетки β -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$.

В п.3.1 приведен пример континуального семейства β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием O^∞ (теорема 3.1) и тем самым установлена континуальность семейства β -замкнутых классов. При их изучении в §3–5 применяется подход, намеченный в §2 — для каждого замкнутого класса $\mathcal{B}$ булевых функций исследуется семейство β -замкнутых классов функций из $P_{k|r}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$, где $k = 2^m$, $m \geq 2$, $r = 3, 4, k$.

Вводятся следующие обозначения: $Q(k, r)$ — множество классов булевых функций, для которых такие семейства β -замкнутых классов являются континуальным, $C(k, r)$ — множество классов булевых функций, для которых соответствующие семейства β -замкнутых классов являются конечными.

В п. 3.2 установлена принадлежность некоторых классов булевых функций множеству $C(k, k)$, а также множеству $C(k, 3)$ (теоремы 3.2 и 3.3). На основе этих результатов показано, что для множества $Q(k, 3)$ справедливы следующие соотношения $\{O^\infty, I^\infty\} \subseteq Q(k, 3)$ и $Q(k, 3) \subseteq \{O^\infty, I^\infty\} \cup \{O^\mu, I^\mu \mid \mu \geq 3\}$. В п. 3.3 доказано, что на самом деле справедливы следующие равенства (теоремы 3.4 и 3.5):

$$Q(k, 3) = \{O^\infty, I^\infty\} \cup \{O^\mu, I^\mu \mid \mu \geq 3\};$$

$$C(k, 3) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \mid [\mathcal{B}] = \mathcal{B}, \mathcal{B} \notin Q(k, 3)\}.$$

В п. 3.5 для каждой тройки попарно различных чисел a, b, c исследуются функции k -значной логики, которые принимают значения из множества $\{a, b, c\}$. Для каждого такого множества $\{a, b, c\}$ и класса $\mathcal{B}$ булевых функций из множества $Q(k, 3)$ установлено, что семейство β -замкнутых классов функций, которые принимают только значения из множества $\{a, b, c\}$, с булевым замыканием $\mathcal{B}$ может быть пустым, конечным или континуальным, и найдены соотношения для чисел a, b и c , при которых оно имеет соответствующую мощность (теорема 3.6). Также показано, что семейство β -замкнутых классов функций, которые принимают значения только из множества $\{a, b, c\}$, может быть конечным, счетным или континуальным, и выявлен критерий, позволяющий это определить (теорема 3.7).

В §4 изучаются семейства β -замкнутых классов функций из $P_{k|4}$ с фиксированным булевым замыканием. В п. 4.1 континуальные семейства β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ обобщены на случай функций из $P_{k|4}$ (теорема 4.1), в п. 4.2 найдены некоторые классы из множества $C(k, 4)$ (теорема 4.2), а в п. 4.3 показано, что класс O^2 содержится в множестве $C(k, 4)$ при $k = 4$ и в множестве $Q(k, 4)$ при $k = 2^m$, $m \geq 3$ (теоремы 4.3 и 4.4). На основе результатов этого и предыдущих параграфов доказаны следующие равенства (теоремы 4.5 и 4.6):

$$Q(4, 4) = \{O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, I^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\} \cup \\ \cup \{O^\mu, O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu, I^\mu, I_1^\mu, MI^\mu, MI_1^\mu \mid \mu \geq 3\};$$

$$C(4, 4) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \mid [\mathcal{B}] = \mathcal{B}, \mathcal{B} \notin Q(4, 4)\};$$

$$Q(k, 4) = Q(4, 4) \cup \{O^2, I^2\} \text{ при } k = 2^m, m \geq 3;$$

$$C(k, 4) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \mid [\mathcal{B}] = \mathcal{B}, \mathcal{B} \notin Q(k, 4)\} \text{ при } k = 2^m, m \geq 3.$$

Таким образом, приведена полная классификация семейств β -замкнутых классов функций из P_4 с фиксированным булевым замыканием по их мощности. В § 5 получены следующие результаты относительно подобных

семейств β -замкнутых классов для случая P_k , где $k = 2^m$, $m \geq 3$ (теорема 5.1):

$$\{P_2, T_0, T_1, T_{01}, S, S_{01}, L, L_0, L_1, SL, L_{01}\} \subseteq C(k, k);$$

$$\{D, D_0, D_1, D_{01}, K, K_0, K_1, K_{01}, U, SU, MU, U_0, U_1, U_{01}, C, C_0, C_1\} \subseteq C(k, k);$$

$$\{O_0^2, MO^2, MO_0^2, I_0^2, MI^2, MI_0^2\} \cup Q(k, 4) \subseteq Q(k, k).$$

§ 1. Основные определения

1.1. Двоичные представления. Пусть k , $n \geq 1$. Обозначим через E_k множество $\{0, 1, \dots, k-1\}$, а через E_k^n — множество всех наборов длины n , все компоненты которых принадлежат E_k . Пусть $F^{(n)}(x^1, \dots, x^n)$ — функция, определенная на множестве E_k^n и принимающая значения из множества E_k . Тогда она называется n -местной функцией k -значной логики. Данную функцию будем обозначать также через $F(x^1, \dots, x^n)$ и F . Через P_k обозначим множество всех функций k -значной логики.

Для каждой функции F из P_k через $D(F)$ будем обозначать множество значений функции F , а для каждого $r = 1, \dots, k$ через $P_{k|r}$ — множество всех функций k -значной логики, которые принимают не более r значений.

Далее будем считать, что $k = 2^m$, где m — натуральное, $m \geq 2$. В этом случае каждое из чисел $\{0, 1, \dots, k-1\}$ можно записать в двоичной системе счисления:

$$0 \leftrightarrow (0, 0, \dots, 0, 0);$$

$$1 \leftrightarrow (0, 0, \dots, 0, 1);$$

$$2 \leftrightarrow (0, 0, \dots, 1, 0);$$

$$\vdots$$

$$k-1 \leftrightarrow (1, 1, \dots, 1, 1).$$

Таким образом числу α из E_k сопоставляется двоичный вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ из E_2^m . Для этого вектора будем использовать также обозначения $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$ или $\hat{\alpha}$. Переменной x , принимающей значения из E_k , поставим в соответствие вектор-переменную $\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$, где $x_1, \dots, x_m$ являются переменными, принимающими значения из множества E_2 , таким образом, что каждому значению α переменной x ставится в соответствие значение $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \rangle$ вектор-переменной $\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$. Будем обозначать эту вектор-переменную также через $\hat{x}$.

Произвольной n -местной функции $F(x^1, x^2, \dots, x^n)$ k -значной логики сопоставим булеву вектор-функцию $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$, где $f_1, \dots, f_m$ — mn -местные функции алгебры логики, каждая из которых зависит от переменных $x_1^j, \dots, x_m^j$, где $\langle x_1^j, \dots, x_m^j \rangle = \hat{x}^j$, $j = 1, \dots, n$. Для этой вектор-функции будем также использовать обозначения $\langle f_1, \dots, f_m \rangle(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^n)$, $\hat{F}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^n)$ и $\hat{F}$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Указанные представления называются двоичными представлениями числа α , переменной x и функции F соответственно.

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть $F \in P_k$ и $\hat{F} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Для каждого i , $1 \leq i \leq m$, функцию f_i будем называть i -й компонентой вектор-функции $\hat{F}$ и обозначать через $b_i(F)$. Множество всех компонент функции F будем обозначать через $b(F)$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Пусть $\hat{x} = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$. Тогда переменные $x_1, \dots, x_m$ будем называть *компонентами* вектор-переменной $\hat{x}$.

П р и м е р. Пусть $m = 2$. $F(x, y) = x + y \pmod{4}$ — сложение по модулю 4.

$\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Пусть $\hat{F} = \langle f_1, f_2 \rangle$, $\hat{x} = \langle x_1, x_2 \rangle$, $\hat{y} = \langle y_1, y_2 \rangle$. Тогда

x_1	x_2	y_1	y_2	f_1	f_2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0

Из таблицы видно, что справедливы равенства

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 + y_1 + x_2 \& y_2 \pmod{2};$$

$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_2 + y_2 \pmod{2}.$$

1.2. Двоичные перестановки. В этом пункте для множеств функций k -значной логики при $k = 2^m$, $m \geq 2$, будет определен оператор S_0 -замыкания, который строится на основе специальных перестановок компонент двоичных представлений функций из P_k . Для каждого $n \geq 1$ обозначим через S_n множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ и введем ряд определений.

О п р е д е л е н и е 1.4. Пусть $\omega \in S_{mp}$, $p \geq 1$. Тогда отображение $\omega^{(mp)}: E_2^{mp} \rightarrow E_2^{mp}$, задаваемое функцией

$$\omega^{(mp)}(x_1, \dots, x_{mp}) = (x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(mp)}),$$

будем называть *двоичной перестановкой порядка mp* .

Пусть $x^1, \dots, x^p$, $p \geq 1$ — переменные, принимающие значения из множества E_k . Вектор $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^p)$, компоненты которого являются двоичными представлениями переменных $x^1, \dots, x^p$, можно рассматривать как вектор-переменную, принимающую значения из E_2^{mp} . Поэтому если $\omega^{(mp)}$ — двоичная перестановка порядка mp , то имеет место соотношение:

$$\omega^{(mp)}(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^p) = (\langle x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(m)} \rangle, \dots, \langle x_{\omega(m(p-1)+1)}, \dots, x_{\omega(mp)} \rangle),$$

где $\hat{x}^i = \langle x_{m(i-1)+1}, \dots, x_{mi} \rangle$ для $i = 1, \dots, p$.

О п р е д е л е н и е 1.5. Пусть $\mathcal{A}$ — множество функций из P_k . Введем понятие *S-формулы над $\mathcal{A}$* .

1. Пусть x — переменная. Тогда выражение $\hat{x}$ будем называть *S-формулой над $\mathcal{A}$* . Такие S-формулы назовем *тривиальными*.

2. Пусть $F \in \mathcal{A}$, F зависит от p переменных, $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ — S-формулы над $\mathcal{A}$, а $\omega^{(mp)}$ — двоичная перестановка порядка mp . Тогда выражение $\hat{F}(\omega^{(mp)}(\Phi_1, \dots, \Phi_p))$ будем называть *S-формулой над $\mathcal{A}$* .

Если Φ является S-формулой над множеством $\mathcal{A}$, а $\{\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n\}$ — множество всех тривиальных S-формул, содержащихся в Φ , то будем обозначать S-формулу Φ через $\Phi(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ и говорить, что она зависит от вектор-переменных $\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n$. Значение $\Phi(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^n)$ S-формулы $\Phi(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ для каждого набора $(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^n)$ из E_2^{mn} определяется стандартным образом.

Далее для каждого множества функций $\mathcal{A}$ из P_k введем понятие *S₀-замыкания*.

О п р е д е л е н и е 1.6. Будем говорить, что функция $F(x^1, \dots, x^n)$ из P_k реализуется S-формулой $\Phi(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ над $\mathcal{A}$, если для всех наборов $(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^n)$ из E_2^{mn} верно соотношение $\Phi(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^n) = \hat{F}(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^n)$.

О п р е д е л е н и е 1.7. Если функция $F(x^1, \dots, x^n)$ из P_k реализуется S-формулой $\Phi(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ над $\mathcal{A}$, которая не является тривиальной, то будем говорить, что функция F получена при помощи *операции двоичной S-суперпозиции* из функций системы $\mathcal{A}$.

О п р е д е л е н и е 1.8. Множество всех функций k -значной логики, которые можно получить из функций системы $\mathcal{A}$ при помощи операции двоичной S-суперпозиции, будем называть *S₀-замыканием множества $\mathcal{A}$* (обозначение $[\mathcal{A}]_{S_0}$).

На основе введенных определений 1.5 и 1.8 несложно показать, что для оператора S₀-замыкания выполняются все условия, предъявляемые к операторам замыкания (см., например, [16]), а именно:

- $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{A}]_{S_0}$;
- если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, то $[\mathcal{A}]_{S_0} \subseteq [\mathcal{B}]_{S_0}$;
- $[[\mathcal{A}]_{S_0}]_{S_0} = [\mathcal{A}]_{S_0}$.

Тем самым использование термина «S₀-замыкание» правомерно, и можно ввести следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1.9. Множество $\mathcal{A}$ будем называть *S₀-замкнутым*, если выполняется равенство $\mathcal{A} = [\mathcal{A}]_{S_0}$.

Покажем, что семейство всех S_0 -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ имеет мощность континуума. Отметим, что этот результат был анонсирован в работе [44]. Для каждого $n \geq 2$ определим множества $R_n \subseteq E_k^n$ и $\widehat{R}_n \subseteq E_2^{mn}$ следующим образом:

$$R_n = \{(1, k-1, \dots, k-1), (k-1, 1, k-1, \dots, k-1), \dots, (k-1, k-1, \dots, k-1, 1)\};$$

$$\widehat{R}_n = \{(\widehat{\alpha}^1, \dots, \widehat{\alpha}^n) \mid (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in R_n\}.$$

Определим n -местную функцию χ_n из P_k как характеристическую функцию множества R_n :

$$\chi_n(x^1, \dots, x^n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x^1, \dots, x^n) \in R_n; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим также $\mathcal{W} = \bigcup_{n=2}^{\infty} \{\chi_n\}$. Для введенных функций имеет место следующее утверждение.

Л е м м а 1.1. Пусть $n \geq 2$. Тогда верно соотношение $\chi_n \notin [\mathcal{W} \setminus \{\chi_n\}]_{S_0}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство данной леммы основано на методе, который используется при доказательстве леммы о континуальности семейства классов функций из P_k , замкнутых относительно операции суперпозиции (см., например, [63, 65]).

Предположим, что $\chi_n \in [\mathcal{W} \setminus \{\chi_n\}]_{S_0}$. Тогда χ_n реализуется нетривиальной S -формулой Φ над $\mathcal{W} \setminus \{\chi_n\}$. Без ограничения общности будем считать, что Φ зависит только от вектор-переменных $\widehat{x}^1, \dots, \widehat{x}^n$. Поэтому Φ имеет вид

$$\widehat{\chi}_p \left(\omega^{(mp)}(\Phi_1(\widehat{x}^1, \dots, \widehat{x}^n), \dots, \Phi_p(\widehat{x}^1, \dots, \widehat{x}^n)) \right),$$

где $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ — некоторые S -формулы над $\mathcal{W} \setminus \{\chi_n\}$, а $\omega^{(mp)}$ — двоичная перестановка порядка mp , $p \geq 2$, $p \neq n$.

Рассмотрим произвольный набор $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ из R_n . Так как S -формула Φ реализует функцию χ_n , то $\Phi(\widehat{\alpha}^1, \dots, \widehat{\alpha}^n) = \widehat{1}$. Значит, набор $\left(\omega^{(mp)}(\Phi_1(\widehat{\alpha}^1, \dots, \widehat{\alpha}^n), \dots, \Phi_p(\widehat{\alpha}^1, \dots, \widehat{\alpha}^n)) \right)$ должен содержаться в $\widehat{R}_p$, а поскольку двоичная перестановка $\omega^{(mp)}$ сохраняет количество нулевых компонент в наборе, на котором она действует, то в наборе $(\Phi_1(\widehat{\alpha}^1, \dots, \widehat{\alpha}^n), \dots, \Phi_p(\widehat{\alpha}^1, \dots, \widehat{\alpha}^n))$ должно быть ровно $m-1$ нулевая компонента. Покажем, что это не так. Тогда возможен ровно один из трех случаев.

1. Среди S -формул $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ имеются хотя бы две нетривиальные S -формулы. Каждая из таких S -формул реализует функцию, которая принимает только значения из множества $\{0, 1\}$, а следовательно, в ее двоичное представление входит как минимум $m-1$ нулевая компонента. Тогда для любого набора $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ из R_n набор $(\Phi_1(\widehat{\alpha}^1, \dots, \widehat{\alpha}^n), \dots, \Phi_p(\widehat{\alpha}^1, \dots, \widehat{\alpha}^n))$ содержит как минимум $2m-2$ нулевые компоненты, что неверно.

2. Среди S -формул $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ имеется только одна нетривиальная. Так как $p \geq 2$, то среди данных S -формул имеется хотя бы одна тривиальная.

Без ограничения общности будем считать, что это S -формула $\widehat{x}^1$. Рассмотрим набор $(1, k-1, \dots, k-1)$ из R_n . Тогда набор $(\Phi_1(\widehat{1}, \widehat{k-1}, \dots, \widehat{k-1}), \dots, \Phi_p(\widehat{1}, \widehat{k-1}, \dots, \widehat{k-1}))$ содержит как минимум $2m-2$ нулевые компоненты: по $m-1$ от каждой нетривиальной S -формулы и по $m-1$ от каждой S -формулы $\widehat{x}^1$.

3. Все S -формулы $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ являются тривиальными. Поскольку все переменные функции χ_n существенные, то среди рассматриваемых S -формул должна содержаться каждая из S -формул $\widehat{x}^i$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $p > n$ и среди S -формул $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ найдутся как минимум две одинаковые S -формулы. Без ограничения общности будем считать, что они равны S -формуле $\widehat{x}^1$. Как и в предыдущем случае, набор $(\Phi_1(\widehat{1}, \widehat{k-1}, \dots, \widehat{k-1}), \dots, \Phi_p(\widehat{1}, \widehat{k-1}, \dots, \widehat{k-1}))$ содержит не менее $2m-2$ нулевых компонент, что неверно. Лемма доказана.

Теорема 1.1. Пусть $k = 2^m$, $m \geq 2$. Тогда семейство различных S_0 -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ континуально.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится с использованием леммы 1.1 аналогично доказательству теоремы о континуальности семейства классов функций из P_k , замкнутых относительно операции суперпозиции (см., например, [63, 65]).

Для каждого подмножества T множества $\{2, 3, 4, \dots\}$ определим множество функций $\{\chi_i \mid i \in T\}$, которое будем обозначать через $\mathcal{X}(T)$.

Пусть R и Q — два различных подмножества множества $\{2, 3, 4, \dots\}$. Для них найдется число n такое, что $n \in R \setminus Q$ или $n \in Q \setminus R$. Без ограничения общности будем считать, что $n \in R \setminus Q$. Тогда $\chi_n \in [\mathcal{X}(R)]_{S_0}$, но по лемме 1.1 справедливо соотношение $F_n \notin [\mathcal{W} \setminus \{F_n\}]_{S_0}$, а значит, $\chi_n \notin [\mathcal{X}(Q)]_{S_0}$.

Получили, что для различных подмножеств R и Q множества $\{2, 3, 4, \dots\}$ различны и S_0 -замкнутые классы функций $[\mathcal{X}(R)]_{S_0}$ и $[\mathcal{X}(Q)]_{S_0}$. Так как семейство различных таких подмножеств имеет континуальную мощность, то семейство различных S_0 -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ как минимум континуально.

Множество всех функций k -значной логики является счетным, а следовательно, семейство его подмножеств континуально. Поэтому семейство различных S_0 -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ не более чем континуально. Значит оно является континуальным, что и требовалось показать.

1.3. Операция двоичной суперпозиции. В предыдущем пункте для множеств функций k -значной логики при $k = 2^m$, $m \geq 2$, введена операция двоичной S -суперпозиции и на основе этой операции определено понятие S_0 -замыкания. Добавим к данной операции операцию введения несущественной переменной и рассмотрим новый оператор.

Определение 1.10. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Множество всех функций, которые можно получить из $\mathcal{A}$ при помощи операций двоичной S -суперпозиции и введения несущественной переменной, будем называть S -замыканием множества $\mathcal{A}$ (обозначение $[\mathcal{A}]_S$).

Определение 1.11. Множество $\mathcal{A}$ будем называть S -замкнутым, если справедливо равенство $\mathcal{A} = [\mathcal{A}]_S$.

Рассмотрим оператор, эквивалентный оператору S -замыкания, но являющийся более удобным для исследования S -замкнутых классов функций.

О п р е д е л е н и е 1.12. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Определим понятия вектор-формул над $\mathcal{A}$ и их компонент.

1. Пусть x — переменная, принимающая значения из E_k , и ее компонентами являются переменные $x_1, \dots, x_m$. Тогда выражение $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ будем называть *вектор-формулой* над $\mathcal{A}$, а выражение x_i — *компонентой вектор-формулы* $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$, $i = 1, \dots, m$. Такие вектор-формулы и их компоненты назовем *тривиальными*.

2. Если $\langle f_1, \dots, f_m \rangle(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ — двоичное представление функции F из $\mathcal{A}$, зависящей от переменных $x^1, \dots, x^n$, $n \geq 1$, а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{mn}$ — компоненты некоторых вектор-формул над $\mathcal{A}$, то выражение Φ вида

$$\langle f_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{mn}), \dots, f_m(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{mn}) \rangle$$

будем называть *вектор-формулой* над $\mathcal{A}$. При этом выражение $f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{mn})$ назовем *компонентой вектор-формулы* Φ , $i = 1, 2, \dots, m$.

Пусть Φ — вектор-формула над $\mathcal{A}$, а φ — ее компонента. Пусть также $\{x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p}\}$ — множество всех тривиальных компонент вектор-формулы над $\mathcal{A}$, которые содержатся в φ , где $1 \leq j_q \leq m$ для всех $q = 1, \dots, p$. Тогда будем обозначать компоненту φ через $\varphi(x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p})$ и говорить, что в нее входят переменные $x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p}$. Если при этом множество $\{i_1, \dots, i_p\}$ равно множеству $\{a_1, \dots, a_n\}$ попарно различных чисел, где $n \geq 1$, то будем обозначать Φ через $\Phi(\hat{x}^{a_1}, \dots, \hat{x}^{a_n})$ и говорить, что в эту вектор-формулу входят переменные $\hat{x}^{a_1}, \dots, \hat{x}^{a_n}$.

Для каждого набора $(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^n)$ из E_2^{mn} определим значение $\Phi(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^n)$ вектор-формулы $\Phi(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ и значение $\varphi(\alpha_{j_1}^{i_1}, \dots, \alpha_{j_p}^{i_p})$ компоненты $\varphi(x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p})$ этой вектор-формулы (здесь $\hat{\alpha}^i = \langle \alpha_1^i, \dots, \alpha_m^i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$).

1. Пусть $\Phi(\hat{x})$ имеет вид $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$. Тогда $\Phi(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha}$. При этом если $\varphi(x_i)$ — компонента этой вектор-формулы, имеющая вид x_i , $1 \leq i \leq m$, то $\varphi(\alpha_i) = \alpha_i$.

2. Пусть вектор-формула $\Phi(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ не является тривиальной и имеет вид

$$\langle \varphi_1(x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p}), \dots, \varphi_m(x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p}) \rangle,$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ — компоненты этой вектор-формулы. В этом случае каждая компонента $\varphi_r(x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p})$, $1 \leq r \leq m$, имеет вид

$$f_r(\psi_1(x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p}), \dots, \psi_{mn}(x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p})),$$

где $f_1, \dots, f_m$ — компоненты некоторой функции из $\mathcal{A}$, а $\psi_1, \dots, \psi_{mn}$ являются компонентами вектор-формулы над $\mathcal{A}$ и в них входят переменные из множества $\{x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p}\}$. Причем множество компонент $\{\psi_q \mid q = 1, 2, \dots, mn\}$ является одним и тем же для всех $r = 1, \dots, m$. Тогда для данных значений r справедливы равенства

$$\varphi_r(\alpha_{j_1}^{i_1}, \dots, \alpha_{j_p}^{i_p}) = f_r(\psi_1(\alpha_{j_1}^{i_1}, \dots, \alpha_{j_p}^{i_p}), \dots, \psi_{mn}(\alpha_{j_1}^{i_1}, \dots, \alpha_{j_p}^{i_p}))$$

и для вектор-формулы Φ имеет место соотношение

$$\Phi(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^n) = \langle \varphi_1(\alpha_{j_1}^{i_1}, \dots, \alpha_{j_p}^{i_p}), \dots, \varphi_m(\alpha_{j_1}^{i_1}, \dots, \alpha_{j_p}^{i_p}) \rangle.$$

Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$ и $\Phi(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ — нетривиальная вектор-формула над $\mathcal{A}$.

Определение 1.13. Будем говорить, что функция $F(x^1, \dots, x^n)$ из P_k реализуется вектор-формулой $\Phi(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$, если для всех наборов $(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^n)$ из E_2^{mn} выполняется соотношение $\Phi(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^n) = \hat{F}(\hat{\alpha}^1, \dots, \hat{\alpha}^n)$.

Определение 1.14. Если функция F реализуется некоторой вектор-формулой над $\mathcal{A}$, то будем говорить, что функция F получена при помощи операции двоичной суперпозиции из функций системы $\mathcal{A}$.

Несложно показать, что операция двоичной суперпозиции является усилением операции (обычной) суперпозиции. Для этого достаточно при формировании новых вектор-формул использовать все m компонент ранее построенных вектор-формул.

Определение 1.15. Множество всех функций k -значной логики, которые можно получить из функций системы $\mathcal{A}$ при помощи операций двоичной суперпозиции и введения несущественной переменной, будем называть β -замыканием множества $\mathcal{A}$ (обозначение $[\mathcal{A}]_\beta$).

На основе введенных определений несложно показать, что для оператора β -замыкания выполняются все условия, предъявляемые к операторам замыкания (см., например, [16]), а именно:

- $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{A}]_{S_0}$;
- если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, то $[\mathcal{A}]_{S_0} \subseteq [\mathcal{B}]_{S_0}$;
- $[[\mathcal{A}]_{S_0}]_{S_0} = [\mathcal{A}]_{S_0}$.

Тем самым использование термина « β -замыкание» правомерно, и можно ввести следующее определение.

Определение 1.16. Множество $\mathcal{A}$ будем называть β -замкнутым, если $\mathcal{A} = [\mathcal{A}]_\beta$.

По построению компоненты каждой нетривиальной вектор-формулы над $\mathcal{A}$ реализуют функции из P_2 .

Определение 1.17. Булевым замыканием множества $\mathcal{A}$ (обозначение $B(\mathcal{A})$) будем называть все функции из P_2 , которые могут быть реализованы компонентами нетривиальных вектор-формул над $\mathcal{A}$ и получены из них при помощи операции введения несущественной булевой переменной.

Пусть $\mathcal{B}$ — множество функций из P_2 . Обозначим через $[\mathcal{B}]$ замыкание множества $\mathcal{B}$ относительно операции суперпозиции и введения несущественной переменной. Тогда справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.2. Для $\mathcal{A} \subseteq P_k$ справедливо равенство $B(\mathcal{A}) = [\bigcup_{F \in \mathcal{A}} b(F)]$.

Доказательство данной леммы непосредственно следует из определения 1.12 компонент вектор-формул и определения 1.17 булевого замыкания.

Лемма 1.3. Для $\mathcal{A} \subseteq P_k$ справедливо равенство $B([\mathcal{A}]_\beta) = B(\mathcal{A})$.

Доказательство. В силу утверждения леммы 1.2 выполняется равенство $B([\mathcal{A}]_\beta) = [\bigcup_{F \in [\mathcal{A}]_\beta} b(F)]$. Если функция F принадлежит классу $[\mathcal{A}]_\beta$, то $b(F) \subseteq B(\mathcal{A})$. Значит выполняется соотношение $[\bigcup_{F \in [\mathcal{A}]_\beta} b(F)] \subseteq B(\mathcal{A})$.

А так как $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{A}]_\beta$, то $B(\mathcal{A}) \subseteq B([\mathcal{A}]_\beta)$, что и требовалось показать.

Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Рассмотрим произвольную нетривиальную вектор-формулу $\Phi(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ над $\mathcal{A}$. Она имеет вид

$$\langle \varphi_1(x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p}), \dots, \varphi_m(x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p}) \rangle,$$

а каждая из ее компонент $\varphi_r(x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p})$, $1 \leq r \leq m$, представляется в следующем виде:

$$f_r(\psi_1(x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p}), \dots, \psi_{mn}(x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p})),$$

где $f_1, \dots, f_m$ — компоненты некоторой вектор-функции F из $\mathcal{A}$, а $\psi_1, \dots, \psi_{mn}$ являются компонентами вектор-формулы над $\mathcal{A}$ и в них входят переменные из множества $\{x_{j_1}^{i_1}, \dots, x_{j_p}^{i_p}\}$.

Для каждого числа t , $1 \leq t \leq mn$, рассмотрим компоненту ψ_t . Если она не является тривиальной, то она реализует некоторую функцию g_t из класса $B(\mathcal{A})$. Если данная компонента является тривиальной, то она имеет вид x_j^i для $i \geq 1$ и $1 \leq j \leq m$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть класс $B(\mathcal{A})$ содержит селекторные функции. Тогда компоненту ψ_t можно заменить на нетривиальную компоненту, которая реализует булеву функцию $g_t(x_j^i) = x_j^i$. При этом новая вектор-формула будет реализовывать ту же функцию, что и вектор-формула Φ .

2. Пусть класс $B(\mathcal{A})$ не содержит селекторные функции. По свойствам классов булевых функций класс $B(\mathcal{A})$ содержит только константы (см., например, [57]). Так как для каждой функции F из множества $\mathcal{A}$ справедливо соотношение $b(F) \subseteq B(\mathcal{A})$, то все компоненты функции F являются константами и функция F тоже является константой. Поэтому если заменить компоненту ψ_t на компоненту, реализующую константную функцию $g_t = c$, где $c \in B(\mathcal{A})$, то новая новая вектор-формула будет реализовывать ту же константу, что и вектор-формула Φ .

Таким образом можно считать, что для каждого t , $1 \leq t \leq mn$, верно включение $g_t \in B(\mathcal{A})$. Поэтому если вектор-формула Φ реализует некоторую функцию H из P_k , то справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \langle f_1(g_1, \dots, g_{mn}), \dots, f_m(g_1, \dots, g_{mn}) \rangle = \\ &= \hat{F}(\langle g_1, \dots, g_m \rangle, \dots, \langle g_{m(n-1)+1}, \dots, g_{mn} \rangle). \end{aligned}$$

Согласно определению 1.15 каждая функция H из множества $[\mathcal{A}]_\beta$ равна некоторой функции, которая реализуется вектор-формулой Φ над $\mathcal{A}$, либо получена из такой функции путем добавления несущественных переменных. В первом из данных случаев, как было показано выше, выполняется равенство $\hat{H} = \hat{F}(\langle g_1, \dots, g_m \rangle, \dots, \langle g_{m(n-1)+1}, \dots, g_{mn} \rangle)$ для некоторых функций $g_1, \dots, g_{mn}$ из множества $B(\mathcal{A})$. Но можно считать, что и во втором случае выполняется данное равенство, так как можно для каждого t , $1 \leq t \leq mn$, вместо функции g_t рассмотреть функцию g'_t , полученную из нее путем добавления всех компонент несущественных переменных для функции H .

Покажем теперь, что каждая функция H из P_k содержится в множестве $[\mathcal{A}]_\beta$, если найдутся функция F из множества $\mathcal{A}$ и функции $g_1, \dots, g_{mn}$ из множества $B(\mathcal{A})$ (здесь n — число переменных функции F) такие, что выполняется следующее равенство

$$\hat{H} = \hat{F}(\langle g_1, \dots, g_m \rangle, \dots, \langle g_{m(n-1)+1}, \dots, g_{mn} \rangle).$$

Пусть функции $g_1, \dots, g_{mn}$ реализуются соответственно компонентами $\psi_1, \dots, \psi_{mn}$ некоторых вектор-функций над $\mathcal{A}$ или получены из них

при помощи операции введения несущественной переменной. Рассмотрим вектор-формулу $\langle f_1(\psi_1, \dots, \psi_{mn}), \dots, f_m(\psi_1, \dots, \psi_{mn}) \rangle$, где $\hat{F} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Она реализует функцию H' , которая с точностью до несущественных переменных равна H . Так как в множество $[\mathcal{A}]_\beta$ входят все функции, полученные из функции H' при помощи операции введения несущественной переменной, то функция H тоже содержится в β -замыкании множества $\mathcal{A}$.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Л е м м а 1.4. *Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Тогда множество $[\mathcal{A}]_\beta$ содержит все функции H из P_k , для которых найдутся функция F из множества $\mathcal{A}$ и функции $g_1, \dots, g_{mn}$ из множества $B(\mathcal{A})$ (здесь n — число переменных функции F) такие, что выполняется следующее равенство:*

$$\hat{H} = \hat{F}(\langle g_1, \dots, g_m \rangle, \dots, \langle g_{m(n-1)+1}, \dots, g_{mn} \rangle),$$

и только такие функции).*

З а м е ч а н и е. При $k = 2^m$, $m \geq 2$, если произвольным образом закодировать все числа из множества E_k двоичными наборами длины m так, чтобы отображение из E_k в E_2^m , задаваемое данным кодированием, являлось биективным, то можно определить двоичные представления функций из P_k относительно этого способа кодирования аналогично тому, как это было сделано при стандартном кодировании (см. определение 1.1). Поскольку определение β -замыкания основано исключительно на двоичном представлении функций k -значной логики, то оператор β -замыкания будет корректно определен и относительно нового способа кодирования. При этом существует изоморфизм между функциональными системами функций k -значной логики с операторами β -замыкания, которые основаны на различных способах кодирования. Этот изоморфизм можно построить, если каждой функции из одной функциональной системы поставить в соответствие функцию из другой функциональной системы с таким же двоичным представлением.

З а м е ч а н и е. В том случае, когда k не является степенью двойки, если попытаться определить двоичные представления функций k -значной логики на основе кодирования чисел из множества E_k в двоичной системе счисления, то эти двоичные представления не будут являться булевыми вектор-функциями. Так, если $2^{m-1} < k < 2^m$ для некоторого $m \geq 2$, то двоичное представление n -местной функции из P_k , $n \geq 1$, будет представлять собой вектор, компонентами которого являются m функций, определенных на некотором собственном подмножестве множества E_2^{mn} и принимающих значения из множества E_2 . Поэтому при рассмотрении функциональной системы P_k , где $2^{m-1} < k < 2^m$, $m \geq 2$, с оператором, подобным оператору β -замыкания, возникнет необходимость каким-либо образом доопределить компоненты функций этой системы до булевых функций. В этой связи появляется дополнительная вариативность при выборе способа такого доопределения, а также получается, что каждая из функций k -значной логики доопределяется до функции 2^m -значной логики, и, следовательно, задачу исследования β -замкнутых классов функций из P_k можно свести к задаче исследования некоторых семейств β -замкнутых классов функций из P_{2^m} .

*) В некоторых случаях мы будем опускать скобки $\langle \rangle$ в такой записи

1.4. Критерий полноты β -замкнутых классов. В настоящем пункте найдем критерий полноты β -замкнутых классов. Для этого определим следующие множества функций k -значной логики:

$$\begin{aligned} T_0^m &= \{F \in P_k \mid b(F) \subseteq T_0\}, \\ T_1^m &= \{F \in P_k \mid b(F) \subseteq T_1\}, \\ S^m &= \{F \in P_k \mid b(F) \subseteq S\}, \\ M^m &= \{F \in P_k \mid b(F) \subseteq M\}, \\ L^m &= \{F \in P_k \mid b(F) \subseteq L\}, \\ N^m &= \{F \in P_k \mid D(F) \neq E_k\}, \end{aligned}$$

где через T_0 , T_1 , S , M и L обозначены предполные классы булевых функций.

Пусть $\mathcal{A}$ — одно из множеств $T_0^m, T_1^m, S^m, M^m, L^m$. Тогда класс $B(\mathcal{A})$ является классом T_0, T_1, S, M, L соответственно. Так как для каждой функции F из множества $[\mathcal{A}]_\beta$ справедливо включение $b(F) \subseteq B(\mathcal{A})$, то $F \in \mathcal{A}$ и класс $\mathcal{A}$ является β -замкнутым. Также очевидно, что класс N^m является β -замкнутым.

Приведенные ниже таблицы показывают, что при $m \geq 2$ все введенные β -замкнутые классы различны. По горизонтали в них указаны двоичные представления функций, которые содержатся в классе, соответствующем этой горизонтали, а по вертикали — не содержатся.

Таблица 1

	T_0^m	T_1^m	S^m	M^m
T_0^m		$\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$	$\langle x_1 + x_2, 0, \dots, 0 \rangle$
T_1^m	$\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$		$\langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$	$\langle x_1 + x_2 + 1, 1, \dots, 1 \rangle$
S^m	$\langle \bar{x}_1, x_2, \dots, x_m \rangle$	$\langle \bar{x}_1, x_2, \dots, x_m \rangle$		$\langle \bar{x}_1, x_2, \dots, x_m \rangle$
M^m	$\langle 1, 0, \dots, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$	
L^m	$\langle 1, 0, \dots, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$	$\langle x_1 + x_2, 0, \dots, 0 \rangle$
N^m	$\langle 1, 0, \dots, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$	$\langle x_1 + x_2, 0, \dots, 0 \rangle$

Таблица 2

	L^m	N^m
T_0^m	$\langle x_1 x_2, 0, \dots, 0 \rangle$	$\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$
T_1^m	$\langle x_1 x_2, 1, \dots, 1 \rangle$	$\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$
S^m	$\langle x_1^1 x_1^2 + x_1^1 x_1^3 + x_1^2 x_1^3, x_1^1, \dots, x_1^1 \rangle$	$\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$
M^m	$\langle x_1 x_2, 0, \dots, 0 \rangle$	$\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$
L^m		$\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle$
N^m	$\langle x_1 x_2, 0, \dots, 0 \rangle$	

Для введенных β -замкнутых классов функций справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. Пусть $k=2^m$, $m \geq 2$, и $\mathcal{A} \subseteq P_k$. Тогда $[\mathcal{A}]_\beta = P_k$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ целиком не лежит ни в одном из классов T_0^m , T_1^m , S^m , M^m , L^m , N^m .

Доказательство. Пусть сначала множество $\mathcal{A}$ лежит хотя бы в одном из классов T_0^m , T_1^m , S^m , M^m , L^m , N^m . Тогда класс $[\mathcal{A}]_\beta$ лежит в этом же классе. Но ни один из рассматриваемых классов не содержит все функции из P_k , и поэтому $[\mathcal{A}]_\beta \neq P_k$.

Пусть теперь множество $\mathcal{A}$ целиком не содержится ни в одном из классов T_0^m , T_1^m , S^m , M^m , L^m , N^m . Тогда среди функций множества $\mathcal{A}$ существуют функции $F_{T_0^m}$, $F_{T_1^m}$, F_{S^m} , F_{M^m} , F_{L^m} , F_{N^m} , которые не лежат в соответствующем β -замкнутом классе. В силу определения этих классов для функций $F_{T_0^m}$, $F_{T_1^m}$, F_{S^m} , F_{M^m} , F_{L^m} справедливы соотношения $b(F_{T_0^m}) \not\subseteq T_0$, $b(F_{T_1^m}) \not\subseteq T_1$, $b(F_S) \not\subseteq S$, $b(F_M) \not\subseteq M$ и $b(F_L) \not\subseteq L$. Поскольку классы T_0 , T_1 , S , M , L являются предполными классами булевых функций, то $[b(F_{T_0^m}) \cup b(F_{T_1^m}) \cup b(F_S) \cup b(F_M) \cup b(F_L)] = P_2$, а следовательно, $B(\mathcal{A}) = P_2$.

Рассмотрим функцию F_{N^m} . Пусть она зависит от n переменных. Тогда она принимает все значения и для любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ из множества E_2^m существует набор $(\beta_1^1(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \beta_2^1(\alpha_1, \dots, \alpha_m), \dots, \beta_m^n(\alpha_1, \dots, \alpha_m))$ из множества E_2^{mn} , на котором значение двоичного представления функции F_{N^m} равно $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, m$ определим булеву функцию φ_j^i , зависящую от m переменных, следующим образом:

$$\varphi_j^i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \beta_j^i(\alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Все функции φ_j^i принадлежат классу $B(\mathcal{A})$. Следовательно, в силу утверждения леммы 1.4, в $[\mathcal{A}]_\beta$ содержится функция $E(x)$, имеющая двоичное представление

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{N^m}(\langle \varphi_1^1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_m^1(x_1, \dots, x_m) \rangle, \dots \\ \dots, \langle \varphi_1^n(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_m^n(x_1, \dots, x_m) \rangle). \end{aligned}$$

Также очевидно, что $\widehat{E}(\widehat{x}) = \widehat{x}$ по построению функций φ_j^i .

Далее рассмотрим произвольную функцию F из P_k . Обозначим ее двоичное представление через $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Тогда функция, соответствующая двоичному представлению $\widehat{E}(\langle f_1, \dots, f_m \rangle)$, лежит в классе $[\mathcal{A}]_\beta$. Но это и есть функция F , и, следовательно, $[\mathcal{A}]_\beta = P_k$, что и требовалось показать.

Введем следующее определение.

Определение 1.18. Класс $\mathcal{A}$ функций из P_k такой, что $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$, называется β -предполным классом, если для любой функции F , не принадлежащей $\mathcal{A}$, верно равенство $[\mathcal{A} \cup \{F\}]_\beta = P_k$.

Поскольку каждый из β -замкнутых классов T_0^m , T_1^m , S^m , M^m , L^m , N^m содержит функции, не принадлежащие другим классам, то в качестве следствия теоремы 1.2 легко получить следующее утверждение.

Следствие 1.1. Пусть $k = 2^m$, $m \geq 2$. Тогда семейство всех β -предполных классов функций из P_k есть $\{T_0^m, T_1^m, S^m, M^m, L^m, N^m\}$.

§ 2. Классы функций из $P_{k|2}$

2.1. Счетность семейства β -замкнутых классов. Покажем, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций. Тогда семейство β -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ является конечным и непустым.

Основные этапы доказательства данной теоремы опубликованы в работе [43], а в настоящей статье приводится ее подробное доказательство. Для этого нам потребуются некоторые леммы.

Лемма 2.1. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq P_k$ и $[\mathcal{U}]_\beta = [\mathcal{V}]_\beta$. Тогда выполняется соотношение $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$.

Доказательство. Так как β -замкнутые классы $[\mathcal{U}]_\beta$ и $[\mathcal{V}]_\beta$ равны, то выполняется равенство $B([\mathcal{U}]_\beta) = B([\mathcal{V}]_\beta)$. Согласно утверждению леммы 1.3 для каждого множества $\mathcal{A}$ из P_k верно соотношение $B(\mathcal{A}) = B([\mathcal{A}]_\beta)$. Поэтому имеет место следующая цепочка равенств:

$$B(\mathcal{U}) = B([\mathcal{U}]_\beta) = B([\mathcal{V}]_\beta) = B(\mathcal{V}),$$

что и требовалось показать.

Лемма 2.2. Пусть $F \in P_{k|2}$ и $|D(F)| = 2$. Тогда существует булева функция f такая, что выполняются соотношения $\{f\} \subseteq b(F) \subseteq \{0, 1, f, \bar{f}\}$.

Доказательство. Пусть двоичное представление функции $\hat{F}$ равно $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$. По условию функция F принимает два значения. Тогда для некоторого i , $1 \leq i \leq m$, булева функция f_i не является константой. Обозначим эту функцию через f . Покажем, что среди булевых функций $f_1, \dots, f_m$ могут встречаться только функции $0, 1, f$ и $\bar{f}$.

Рассмотрим произвольную функцию g из множества $b(F)$. Покажем, что для функции g не выполняется ни одно из следующих условий.

1. Существуют наборы $\tilde{\alpha}_0$ и $\tilde{\alpha}_1$, для которых $f(\tilde{\alpha}_0) = f(\tilde{\alpha}_1) = 0$, но $g(\tilde{\alpha}_0) = 0$ и $g(\tilde{\alpha}_1) = 1$.

2. Существуют наборы $\tilde{\beta}_0$ и $\tilde{\beta}_1$, для которых $f(\tilde{\beta}_0) = f(\tilde{\beta}_1) = 1$, но $g(\tilde{\beta}_0) = 0$ и $g(\tilde{\beta}_1) = 1$.

Предположим, что это не так, и для функции g выполняется хотя бы одно из этих условий. Без ограничения общности будем считать, что выполняется первое из них. Так как функция f не является константой, то множество $\{\tilde{\beta} \mid f(\tilde{\beta}) = 1\}$ не является пустым. Поэтому двоичное представление $\hat{F}$ принимает уже как минимум 3 значения на трех различных наборах:

- на наборе $\tilde{\alpha}_0$, для которого $f(\tilde{\alpha}_0) = 0$ и $g(\tilde{\alpha}_0) = 0$;
- на наборе $\tilde{\alpha}_1$, для которого $f(\tilde{\alpha}_1) = 0$ и $g(\tilde{\alpha}_1) = 1$;
- на наборе $\tilde{\beta}$, для которого $f(\tilde{\beta}) = 1$.

Таким образом пришли к противоречию с тем, что функция F принимает только 2 значения. Значит для функции g не выполняется ни одно из приведенных условий. Поэтому на множестве наборов $\{\tilde{\alpha} \mid f(\tilde{\alpha}) = 0\}$ функция g принимает либо только значение 0, либо только значение 1. Аналогично и для множества наборов $\{\tilde{\beta} \mid f(\tilde{\beta}) = 1\}$. Получили четыре возможности для функции g — как раз $0, 1, f$ или $\bar{f}$. В силу произвольности

выбора функции g из множества $b(F)$ получаем, что справедливо включение $b(F) \subseteq \{0, 1, f, \bar{f}\}$, причем $b_i(F) = f$. Что и требовалось показать

Лемма 2.3. Пусть $F \in P_k$, $F \notin P_{k|1}$. Тогда в β -замкнутом классе $[\{F\}]_\beta$ найдется функция, зависящая от одной переменной, и множество компонент которой содержит селекторную функцию.

Доказательство. Обозначим двоичное представление функции F через $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$, а число ее переменных — через n . Если все компоненты функции F являются константами, то функция F принимает одно значение, что неверно по условиям леммы. Поэтому среди компонент функции F найдется функция, не являющаяся константой. Без ограничения общности положим, что это функция f_1 . Тогда класс $[\{f_1\}]$ содержит селекторные функции (см., например, [57]). Поэтому $x_1 \in [\{f_1\}]$ и верно равенство $x_1 = f_1(g_1, \dots, g_{mn})$ для некоторых функций $g_1, \dots, g_{mn}$, которые принадлежат классу $[\{f_1\}]$. Поскольку функция x_1 зависит только от переменной x_1 , то без ограничения общности можно считать, что функции $g_1, \dots, g_{mn}$ тоже зависят только от переменной x_1 , а так как $[\{f_1\}] \subseteq B(\{F\})$, то $\{g_1, \dots, g_{mn}\} \subseteq B(\{F\})$.

Обозначим через H функцию, имеющую следующее двоичное представление:

$$\langle f_1, \dots, f_m \rangle (\langle g_1, \dots, g_m \rangle, \dots, \langle g_{m(n-1)+1}, \dots, g_{mn} \rangle).$$

По построению функция H содержится в классе $[\{F\}]_\beta$ и зависит от одной переменной. А так как выполняется соотношение $f_1(g_1, \dots, g_{mn}) = x_1$, то $x_1 \in b(H)$, что и требовалось показать.

Лемма 2.4. Пусть $F \in P_{k|2}$ и $|D(F)| = 2$. Тогда найдется функция $G \in [\{F\}]_\beta$ такая, что выполняются соотношения $\{x\} \subseteq b(G) \subseteq \{0, 1, x, \bar{x}\}$.

Доказательство. Согласно утверждению леммы 2.3 в множестве $[\{F\}]_\beta$ существует функция G , в состав которой входит селекторная функция, которую обозначим через x_1 . Так как в этом множестве содержатся только функции, принимающие не более двух значений, то функция G принимает ровно два значения. Поэтому в силу утверждения леммы 2.2 справедливы соотношения $\{g\} \subseteq b(G) \subseteq \{0, 1, g, \bar{g}\}$ для некоторой булевой функции g . Но тогда либо функция g равна функции x_1 , либо функция $\bar{g}$ равна функции x_1 . В первом случае получаем необходимо утверждение леммы, а во втором можно рассмотреть вместо функции g функцию $g' = \bar{g}$ и тоже получить необходимое утверждение.

Следствие 2.1. Пусть $D(F) = \{p, q\}$, где

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \langle \overbrace{0, \dots, 0}^{k_{00}}, \overbrace{0, \dots, 0}^{k_{01}}, \overbrace{1, \dots, 1}^{k_{10}}, \overbrace{1, \dots, 1}^{k_{11}} \rangle, \\ \hat{q} &= \langle \overbrace{0, \dots, 0}^{k_{00}}, \overbrace{1, \dots, 1}^{k_{01}}, \overbrace{0, \dots, 0}^{k_{10}}, \overbrace{1, \dots, 1}^{k_{11}} \rangle, \end{aligned}$$

причем $k_{00}, k_{01}, k_{10}, k_{11}$ — неотрицательные целые числа, такие, что $k_{00} + k_{01} + k_{10} + k_{11} = m$, а $k_{01} + k_{10} > 0$. Тогда существует такая булева функция f , что выполняется соотношение

$$\hat{F} = \langle \overbrace{0, \dots, 0}^{k_{00}}, \overbrace{f, \dots, f}^{k_{01}}, \overbrace{\bar{f}, \dots, \bar{f}}^{k_{10}}, \overbrace{1, \dots, 1}^{k_{11}} \rangle,$$

а также класс $[\{F\}]_\beta$ содержит функцию, имеющую двоичное представление

$$\underbrace{(0, \dots, 0)}_{k_{00}}, \underbrace{(x, \dots, x)}_{k_{01}}, \underbrace{(\bar{x}, \dots, \bar{x})}_{k_{10}}, \underbrace{(1, \dots, 1)}_{k_{11}}.$$

Доказательство. По условию $k_{01} + k_{10} > 0$. Без ограничения общности будем считать, что $k_{01} > 0$ (иначе просто поменяем p и q местами).

Пусть $\hat{F} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$, $\hat{p} = \langle p_1, \dots, p_m \rangle$ и $\hat{q} = \langle q_1, \dots, q_m \rangle$. Очевидно, что функции f_i , $i = 1, \dots, k_{00}$, являются константами 0, а функции f_i , $i = k_{00} + k_{01} + k_{10} + 1, \dots, m$, являются константами 1. Так как при $i = k_{00} + 1, \dots, k_{00} + k_{01}$ значения p_i равны 0, а значения q_i равны 1, то все функции f_i , $i = k_{00} + 1, \dots, k_{00} + k_{01}$ не являются константами и равны между собой. Обозначим все рассматриваемые функции через f . Покажем, что функция f — искомая.

Если $k_{10} = 0$, то первое утверждение следствия доказано.

Если $k_{10} > 0$, то все функции f_i , $i = k_{00} + k_{01} + 1, \dots, k_{00} + k_{01} + k_{10}$ не являются константами и тоже равны между собой. Обозначим их через g . Так как значения компонент p_i и q_i с номером $i = k_{00} + 1$ равны 0 и 1 соответственно, а значения компонент p_j и q_j с номером $j = k_{00} + k_{01} + 1$ равны 1 и 0 соответственно, то $g = \bar{f}$, что и требовалось показать.

Доказательство второго утверждения следствия проводится абсолютно аналогично доказательству леммы 2.4.

Для всех β -замкнутых классов $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$ введем следующие определения.

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$ и $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{pp} &= \{F \in \mathcal{A} \mid D(F) = \{p\}\} \text{ для всех } p \in E_k, \\ \mathcal{A}_{pq} &= \{F \in \mathcal{A} \mid D(F) = \{p, q\}\} \text{ для всех } p, q \in E_k, p < q. \end{aligned}$$

Определение 2.2. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$ и $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$. Положим

$$\text{Ind}(\mathcal{A}) = \{(p, q) \mid \mathcal{A}_{pq} \neq \emptyset, p, q \in E_k, p \leq q\}.$$

Очевидно, что для всех β -замкнутых классов $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$ справедливо равенство $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}_{pq}$, где объединение берется по всем значениям $p, q \in E_k$, $p \leq q$.

Лемма 2.5. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$, $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{pq} \neq \emptyset$ для некоторых значений p и q , $p \neq q$. Тогда выполняется равенство

$$\mathcal{A}_{pq} = \{G \in P_{k|2} \mid D(G) = \{p, q\}, b(G) \subseteq B(\mathcal{A})\}.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \underbrace{(0, \dots, 0)}_{k_{00}}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{k_{01}}, \underbrace{(1, \dots, 1)}_{k_{10}}, \underbrace{(1, \dots, 1)}_{k_{11}}; \\ \hat{q} &= \langle 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1 \rangle, \end{aligned}$$

где k_{00} , k_{01} , k_{10} , k_{11} — неотрицательные целые числа, такие что $k_{00} + k_{01} + k_{10} + k_{11} = m$, а $k_{01} > 0$.

Если $H \in \mathcal{A}_{pq}$, то справедливы соотношения $b(H) \subseteq B(\mathcal{A}_{pq}) \subseteq B(\mathcal{A})$. Поэтому множество $\mathcal{A}_{pq}$ содержит только функции из $P_{k|2}$, которые принимают значения p и q и в двоичное представление которых входят только функции из $B(\mathcal{A})$, т.е. имеет место включение $\mathcal{A}_{pq} \subseteq \{G \in P_{k|2} \mid D(G) = \{p, q\}, b(G) \subseteq B(\mathcal{A})\}$.

Покажем теперь, что если множество $\mathcal{A}_{pq}$ не пусто, то в него входят все функции k -значной логики, принимающие только значения p и q , и в двоичное представление которых входят только функции из $B(\mathcal{A})$. Для этого рассмотрим произвольную функцию H такую, что $D(H) = \{p, q\}$ и $b(H) \subseteq B(\mathcal{A})$, и покажем, что она принадлежит $\mathcal{A}_{pq}$. По следствию 2.1 двоичное представление функции H имеет вид

$$\hat{H} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k_{00}}, \underbrace{h, \dots, h}_{k_{01}}, \underbrace{\bar{h}, \dots, \bar{h}}_{k_{10}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k_{11}}).$$

Поскольку $b(H) \subseteq B(\mathcal{A})$, то $h \in B(\mathcal{A})$.

Так как по условию леммы множество $\mathcal{A}_{pq}$ не пусто, то по следствию 2.1 в классе $[\mathcal{A}_{pq}]_\beta$ найдется функция G такая, что

$$\hat{G} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k_{00}}, \underbrace{x, \dots, x}_{k_{01}}, \underbrace{\bar{x}, \dots, \bar{x}}_{k_{10}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k_{11}}).$$

Очевидно, что при подстановке функции h в $\hat{G}$ вместо переменной x мы получим $\hat{H}$. Так как $h \in B(\mathcal{A})$ и $G \in [\mathcal{A}_{pq}]_\beta \subseteq [\mathcal{A}]_\beta$, то в силу утверждения леммы 1.4 справедливо включение $H \in [\mathcal{A}]_\beta$. Но $D(H) = \{p, q\}$, а значит, $H \in \mathcal{A}_{pq}$, что и требовалось показать.

Л е м м а 2.6. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$, $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_{pp} \neq \emptyset$ для некоторого значения p . Тогда выполняется равенство

$$\mathcal{A}_{pp} = \{G \in P_{k|2} \mid D(G) = \{p\}\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $\mathcal{A}_{pp} \subseteq \{G \in P_{k|2} \mid D(G) = \{p\}\}$ является очевидным. Покажем, что верно и обратное включение. Для этого рассмотрим произвольную функцию F из множества $\mathcal{A}_{pp}$. Так как класс $\mathcal{A}$ содержит все функции, которые могут быть получены из $\mathcal{A}$ с использованием операций двоичной суперпозиции и введения несущественной переменной, то он содержит все функции, полученные из функции F путем введения и удаления несущественных переменных. Множество таких функций равно $\{G \in P_{k|2} \mid D(G) = \{p\}\}$, а значит, оно содержится в классе $\mathcal{A}$ и очевидно содержится также во множестве $\mathcal{A}_{pp}$.

Л е м м а 2.7. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq P_{k|2}$, $[\mathcal{U}]_\beta = \mathcal{U}$, $[\mathcal{V}]_\beta = \mathcal{V}$ и $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$. Тогда для выполнения равенства $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\text{Ind}(\mathcal{U}) = \text{Ind}(\mathcal{V})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если совпадают два класса β -замкнутых класса $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, то очевидно, что верно равенство $\mathcal{U}_{pq} = \mathcal{V}_{pq}$ для всех наборов индексов (p, q) и, значит, совпадают множества $\text{Ind}(\mathcal{U})$ и $\text{Ind}(\mathcal{V})$.

Докажем утверждение в другую сторону. Для этого покажем, что для каждого набора индексов (p, q) , $p, q = 0, \dots, k-1$, $p \leq q$, совпадают множества $\mathcal{U}_{pq}$ и $\mathcal{V}_{pq}$, а как следствие и сами классы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

Пусть $(p, q) \in \text{Ind}(\mathcal{U})$. Если $p \neq q$, то по лемме 2.5 получим, что множество $\mathcal{U}_{pq}$ равно множеству всех функций из $P_{k|2}$, принимающих только значения p и q , и в двоичное представление которых входят только функции из $B(\mathcal{U})$. Но по той же лемме этому множеству равно и $\mathcal{V}_{pq}$, а следовательно, $\mathcal{U}_{pq} = \mathcal{V}_{pq}$. Аналогично рассматривается случай $p = q$.

Если же $(p, q) \notin \text{Ind}(\mathcal{U})$, то $\mathcal{U}_{pq} = \mathcal{V}_{pq} = \emptyset$, что и требовалось показать.

Л е м м а 2.8. Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый класс алгебры логики. Тогда существует β -замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$ такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим множество функций $A(\mathcal{B})$ функций из $P_{k|2}$ следующим образом: функция F принадлежит множеству $A(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда $b(F) = \{f\}$, $f \in \mathcal{B}$. То есть в множество $A(\mathcal{B})$ входят все функции, соответствующие двоичным представлениям $\langle f, \dots, f \rangle$, где $f \in \mathcal{B}$ и f зависит от mn переменных для некоторого $n \geq 1$, и только они.

Покажем, что множество $A(\mathcal{B})$ как раз и удовлетворяет условиям леммы. Для этого нужно показать, что $B(A(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$ и $A(\mathcal{B})$ является β -замкнутым классом.

Сначала докажем, что $B(A(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$. По лемме 1.2 множество $B(A(\mathcal{B}))$ равно множеству $\left[\bigcup_{F \in A(\mathcal{B})} b(F) \right] = [\{f^{(mn)} \in \mathcal{B}, n \geq 1\}]$. Рассмотрим произвольный базис $\{f_1^{(n_1)}, \dots, f_p^{(n_p)}\}$ класса $\mathcal{B}$. Для каждой функции $f_i^{(n_i)}$ из данного базиса определим число r_i как наименьшее число, кратное m и большее n_i , а функцию $f_i^{(r_i)}(x_1, \dots, x_{n_i}, x_{n_i+1}, \dots, x_{r_i})$ — как полученную из функции $f_i^{(n_i)}$ введением несущественных переменных $x_{n_i+1}, \dots, x_{r_i}$. Очевидно, что верно равенство $\mathcal{B} = [\{f_1^{(r_1)}, \dots, f_p^{(r_p)}\}]$, а следовательно, $[\{f^{(mn)} \in \mathcal{B}, n \geq 1\}] = \mathcal{B}$. Поэтому $B(A(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.

Теперь покажем, что множество функций $A(\mathcal{B})$ является β -замкнутым классом. Для этого рассмотрим произвольную функцию H из множества $[A(\mathcal{B})]_\beta$. Согласно лемме 1.4 для нее найдутся функция F из множества $\mathcal{A}$ и функции $g_1, \dots, g_{mr}$ из множества $B(A(\mathcal{B}))$ (здесь r — число переменных функции F) такие, что выполняется следующее равенство:

$$\hat{H} = \hat{F}(\langle g_1, \dots, g_m \rangle, \dots, \langle g_{m(r-1)+1}, \dots, g_{mr} \rangle).$$

Очевидно, что все компоненты функции F зависят от mr переменных, равны между собой и равны некоторой функции f из класса $B(A(\mathcal{B}))$, который равен $\mathcal{B}$. Поэтому все компоненты функции H тоже равны между собой, реализуют функции из класса $\mathcal{B}$ и зависят от mn переменных для некоторого $n \geq 1$. Поэтому по определению множества $A(\mathcal{B})$ функция H содержится в этом множестве и, следовательно, $A(\mathcal{B}) = [A(\mathcal{B})]_\beta$, что и требовалось показать.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2.7 два β -замкнутых класса $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ функций из $P_{k|2}$, такие, что $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V}) = \mathcal{B}$, отличаются тогда и только тогда, когда отличаются множества $\text{Ind}(\mathcal{U})$ и $\text{Ind}(\mathcal{V})$. Но так как число различных подмножеств множества $\{(p, q), p, q \in E_k, p \leq q\}$ конечно, то семейство β -замкнутых классов $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$ таких, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, является конечным. По лемме 2.8 существует β -замкнутый класс $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ функций из $P_{k|2}$ такой, что $B(\mathcal{A}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$. Поэтому рассматриваемое семейство классов не пусто, что и требовалось показать.

В качестве простого следствия теоремы 2.1 и леммы 2.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2. Семейство всех β -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ счетно.

2.2. Описание β -замкнутых классов. Основные результаты настоящего пункта описаны в работе [48] и в этой статье приводятся для полноты изложения.

В силу утверждения теоремы 2.1 для каждого замкнутого класса $\mathcal{B}$ функций алгебры логики существует конечное число различных β -замкнутых классов $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, таких, что верно равенство $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Изучим свойства таких классов. Для этого сначала введем некоторые обозначения.

Пусть I — подмножество множества $\{(p, q) \mid p, q \in E_k, p \leq q\}$. Положим

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= \{(p, p) \mid (p, p) \in I\}, \\ I^{(2)} &= \{(p, q) \mid (p, q) \in I, p \neq q\}, \\ d(I) &= \bigcup_{(p, q) \in I} (\{p\} \cup \{q\}). \end{aligned}$$

Если $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций, то множество $\mathcal{B} \cap \{0, 1, x, \bar{x}\}$ называется *основанием* класса $\mathcal{B}$ (см., например, [64]). Для основания класса $\mathcal{B}$ будем использовать обозначение $U(\mathcal{B})$.

Лемма 2.9. Пусть $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$, $[\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A}$, $(p, q) \in \text{Ind}(\mathcal{A})$ и $\hat{p} = \langle p_1, \dots, p_m \rangle$, $\hat{q} = \langle q_1, \dots, q_m \rangle$. Тогда для всех $i = 1, \dots, m$ выполняются следующие соотношения:

- 1) если $x \notin U(B(\mathcal{A}))$, то $p_i = q_i$;
- 2) если $\bar{x} \notin U(B(\mathcal{A}))$, то $p_i \leq q_i$;
- 3) если $0 \notin U(B(\mathcal{A}))$, то $p_i \vee q_i = 1$, где $x \vee y$ — дизъюнкция в P_2 ;
- 4) если $1 \notin U(B(\mathcal{A}))$, то $p_i \& q_i = 0$, где $x \& y$ — конъюнкция в P_2 .

Доказательство. Все случаи рассматриваются аналогично, поэтому изучим только один из них. Пусть $1 \notin U(B(\mathcal{A}))$. Предположим, что найдется число i , $1 \leq i \leq m$, такое, что $p_i \& q_i = 1$. Так как $(p, q) \in \text{Ind}(\mathcal{A})$, то найдется функция F из $\mathcal{A}$, для которой верно равенство $D(F) = \{p, q\}$. Обозначим ее двоичное представление через $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Так как $p_i = 1$ и $q_i = 1$, то булева функция f_i на некоторых наборах принимает значение 1. Предположим, что она также принимает значение 0. Тогда функция F принимает значения p, q , а также значение r , у которого в двоичном представлении i -я компонента равна нулю, что неверно. Поэтому функция f_i равна константе 1 и тогда $1 \in b(F) \subseteq B(\mathcal{A})$, что противоречит условиям рассматриваемого случая. Значит, $p_i \& q_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, m$. Лемма доказана.

Теорема 2.3. Пусть $I \subseteq \{(p, q) \mid p, q \in E_k, p \leq q\}$, а $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций. Тогда существует не более одного β -замкнутого класса $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$ такого, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $\text{Ind}(\mathcal{A}) = I$. Необходимые и достаточные условия существования такого β -замкнутого класса в зависимости от основания класса $\mathcal{B}$ задаются следующими ограничениями на множество I :

- 1) $U(\mathcal{B}) = \{0, 1, x, \bar{x}\}$: $I^{(2)} \neq \emptyset$ и $d(I^{(2)}) \subseteq d(I^{(1)})$;
- 2) $U(\mathcal{B}) = \{x, \bar{x}\}$: $I^{(2)} \neq \emptyset$ и $p + q = k - 1$ для всех $(p, q) \in I$;
- 3) $U(\mathcal{B}) = \{0, 1, x\}$: $I^{(2)} \neq \emptyset$, $d(I^{(2)}) \subseteq d(I^{(1)})$ и $\hat{p} \leq \hat{q}$ для всех $(p, q) \in I$;
- 4) $U(\mathcal{B}) = \{0, x\}$: $I^{(2)} \neq \emptyset$, $I^{(1)} = \{(0, 0)\}$ и $p = 0$ для всех $(p, q) \in I$;
- 5) $U(\mathcal{B}) = \{1, x\}$: $I^{(2)} \neq \emptyset$, $I^{(1)} = \{(k - 1, k - 1)\}$ и $q = k - 1$ для всех $(p, q) \in I$;
- 6) $U(\mathcal{B}) = \{x\}$: $I = \{(0, k - 1)\}$;
- 7) $U(\mathcal{B}) = \{0, 1\}$: $I^{(2)} = \emptyset$, $I^{(1)} \neq \emptyset$, $I^{(1)} \neq \{(0, 0)\}$ и $I^{(1)} \neq \{(k - 1, k - 1)\}$;
- 8) $U(\mathcal{B}) = \{0\}$: $I = \{(0, 0)\}$;
- 9) $U(\mathcal{B}) = \{1\}$: $I = \{(k - 1, k - 1)\}$.

Доказательство. Пусть существует β -замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, для которого верны равенства $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $\text{Ind}(\mathcal{A}) = I$. Единственность такого класса следует из утверждения леммы 2.7. Докажем необходимость указанных в утверждении теоремы соотношений для множества I в зависимости от основания класса $\mathcal{B}$.

Сначала рассмотрим случай, когда $x \in U(\mathcal{B})$. Предположим, что множество $I^{(2)}$ является пустым. Это означает, что каждая функция F из $\mathcal{A}$ принимает только одно значение, а следовательно, все ее компоненты являются константами. Но в этом случае $B(\mathcal{A}) \subseteq \{0, 1\}$, что неверно. Значит, $I^{(2)} \neq \emptyset$.

Если основание класса $\mathcal{B}$ равно одному из множеств $\{x\}$ или $\{x, \bar{x}\}$, то оставшиеся соотношения для множества I легко выводятся из леммы 2.9.

Пусть теперь $\{0, 1, x\} \subseteq \mathcal{A}$. Так как $I^{(2)} \neq \emptyset$, то $d(I^{(2)}) \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольное число s из $d(I^{(2)})$. Покажем, что $s \in d(I^{(1)})$. Так как $s \in d(I^{(2)})$, то либо существует число p , $p \in E_k$, $p < s$, такое, что $(p, s) \in I^{(2)}$, либо существует число q , $q \in E_k$, $q > s$, такое, что $(s, q) \in I^{(2)}$, либо и то и другое. Без ограничения общности будем считать, что $(p, s) \in I^{(2)}$ для некоторого числа p , $1 \leq p < s$. Это означает, что множество $\mathcal{A}_{ps}$ не является пустым. Обозначим двоичные представления p и s через $\langle p_1, \dots, p_m \rangle$ и $\langle s_1, \dots, s_m \rangle$ соответственно. Для каждого i , $1 \leq i \leq m$, определим булеву функцию f_i , зависящую от переменных $x_1, \dots, x_m$, следующим образом:

$$\begin{aligned} f_i &= 0, \text{ если } p_i = 0 \text{ и } s_i = 0; \\ f_i &= x_1, \text{ если } p_i = 0 \text{ и } s_i = 1; \\ f_i &= \bar{x}_1, \text{ если } p_i = 1 \text{ и } s_i = 0; \\ f_i &= 1, \text{ если } p_i = 1 \text{ и } s_i = 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ булевых функций. Он является двоичным представлением некоторой функции $F(x)$ из P_k . Так как $p \neq s$, то $D(F) = \{p, s\}$, а также найдется число i , $1 \leq i \leq m$, такое, что $p_i < s_i$. Поэтому $x_1 \in b(F)$. Если $\bar{x} \notin U(\mathcal{B})$, то по лемме 2.9 среди компонент функции F не содержится функции $\bar{x}_1$, а значит, $b(F) \subseteq \{0, 1, x_1\} \subseteq \mathcal{B}$. Если $\bar{x} \in U(\mathcal{B})$, то выполняется соотношение $b(F) \subseteq \{0, 1, x_1, \bar{x}_1\} \subseteq \mathcal{B}$. Поэтому по лемме 2.5 верно включение $F \in \mathcal{A}_{ps}$.

В рассматриваемом случае булевы функции c_0 и c_1 , реализующие константы 0 и 1 соответственно, содержатся в $B(\mathcal{A})$. Так как класс $\mathcal{A}$ является β -замкнутым, то функции H_0 и H_1 , соответствующие двоичным представлениям $\hat{F}(\langle c_0, \dots, c_0 \rangle)$ и $\hat{F}(\langle c_1, \dots, c_1 \rangle)$, принадлежат $\mathcal{A}$. Очевидно, что данные

функции принимают ровно одно значение, а поскольку среди компонент функции $b(F)$ содержится функция x_1 , то $H_0 \neq H_1$. Следовательно, либо функция H_0 , либо функция H_1 принимает значение s . Поэтому $(s, s) \in I^{(1)}$ и $s \in d(I^{(1)})$. Что и требовалось показать.

Доказано, что если основание класса $\mathcal{B}$ совпадает с множеством $\{0, 1, x, \bar{x}\}$, то выполняются соотношения $I^{(2)} \neq \emptyset$ и $d(I^{(2)}) \subseteq d(I^{(1)})$, что и требовалось. Если же $U(\mathcal{B}) = \{0, 1, x\}$, то оставшееся соотношение для множества I следует из леммы 2.9.

Случаи, когда основание класса $\mathcal{B}$ равно множеству $\{0, x\}$ или $\{1, x\}$, рассматриваются аналогично.

Если основание класса $\mathcal{B}$ равно одному из множеств $\{0\}$ или $\{1\}$, то все нужные соотношения для I вытекают из утверждений леммы 2.9, а если $U(\mathcal{B}) = \{0, 1\}$ — из утверждений этой леммы и исключения вариантов, когда множество $I^{(1)}$ является пустым или равно множеству $\{(0, 0)\}$ или $\{(k-1, k-1)\}$ (в этих случаях $U(\mathcal{B}) = \emptyset$, $U(\mathcal{B}) = \{0\}$ и $U(\mathcal{B}) = \{1\}$ соответственно).

Таким образом, установлена необходимость указанных в утверждении теоремы соотношений для множества I (в зависимости от основания класса $\mathcal{B}$) для того, чтобы существовал β -замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $\text{Ind}(\mathcal{A}) = I$. Покажем, что данные условия для множества I являются достаточными.

Пусть $I \subseteq \{(p, q) \mid p, q \in E_k, p \leq q\}$, $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций и для I выполняются соотношения, приведенные в утверждении теоремы. Построим β -замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $\text{Ind}(\mathcal{A}) = I$.

Рассмотрим произвольную пару индексов (p, q) из I . Обозначим двоичные представления p и q через $\langle p_1, \dots, p_m \rangle$ и $\langle q_1, \dots, q_m \rangle$ соответственно. Для каждого i , $1 \leq i \leq m$, определим булеву функцию $h_{pq,i}$, зависящую от переменных $x_1, \dots, x_m$, следующим образом:

$$\begin{aligned} h_{pq,i} &= 0, \text{ если } p_i = 0 \text{ и } s_i = 0; \\ h_{pq,i} &= x_1, \text{ если } p_i = 0 \text{ и } s_i = 1; \\ h_{pq,i} &= \bar{x}_1, \text{ если } p_i = 1 \text{ и } s_i = 0; \\ h_{pq,i} &= 1, \text{ если } p_i = 1 \text{ и } s_i = 1. \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор $\langle h_{pq,1}, \dots, h_{pq,m} \rangle$ булевых функций. Он является двоичным представлением некоторой функции $H_{pq}(x)$ из P_k . Если $p \neq q$, то $D(H_{pq}) = \{p, q\}$, а если $p = q$, то $D(H_{pp}) = \{p\}$. Значит, $H_{pq} \in P_{k|2}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $x \notin U(\mathcal{B})$. Тогда $\mathcal{B}$ является одним из классов C_0 , C_1 или C . В каждом из этих случаев β -замкнутый класс $\mathcal{A}$, задаваемый равенством $\mathcal{A} = [\{H_{pp} \mid (p, p) \in I\}]_\beta$, является искомым, поскольку для него, очевидно, выполняются соотношения $\text{Ind}(\mathcal{A}) = I$ и $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $x \in U(\mathcal{B})$. Пусть $\{g_1, \dots, g_r\}$ — базис класса $\mathcal{B}$. Если n_j — число переменных функции g_j , то через c_j обозначим минимальное натуральное число, превосходящее n_j и кратное m , $j = 1, \dots, r$. Для каждого j , $1 \leq j \leq r$, определим функцию $g'_j(x_1, \dots, x_{c_j})$ как функцию, полученную из функции g_j путем добавления несущественных переменных $x_{n_j+1}, \dots, x_{c_j}$. Очевидно, что $[\{g'_1, \dots, g'_r\}] = \mathcal{B}$.

Так как $x \in U(\mathcal{B})$, то выполняется соотношение $I^{(2)} \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольную пару индексов (p, q) из $I^{(2)}$. Обозначим через $\langle p_1, \dots, p_m \rangle$ и $\langle q_1, \dots, q_m \rangle$ двоичные представления чисел p и q соответственно. Для каждой пары чисел j и i , $1 \leq j \leq r$, $1 \leq i \leq m$, определим c_j -местную булеву функцию $g_{j,i}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} g_{j,i} &= 0, \text{ если } p_i = 0 \text{ и } s_i = 0; \\ g_{j,i} &= g'_j, \text{ если } p_i = 0 \text{ и } s_i = 1; \\ g_{j,i} &= \overline{g'_j}, \text{ если } p_i = 1 \text{ и } s_i = 0; \\ g_{j,i} &= 1, \text{ если } p_i = 1 \text{ и } s_i = 1. \end{aligned}$$

Для каждого значения j , $1 \leq j \leq r$, рассмотрим вектор $\langle g_{j,1}, \dots, g_{j,m} \rangle$ булевых функций. Он является двоичным представлением некоторой функции G_j из P_k , зависящей от $\frac{c_j}{m}$ переменных, и по построению $G_j \in P_{k|2}$, $j = 1, \dots, r$, причем поскольку $p < q$, то найдется такой номер t , $1 \leq t \leq m$, для которого $p_t = 0$, а $q_t = 1$. Значит, $g'_j \in b(G_j)$, $j = 1, \dots, r$.

Определим множество $\mathcal{S} = \{H_{pq} \mid (p, q) \in I\} \cup \{G_1, \dots, G_r\}$ и класс $\mathcal{A} = [\mathcal{S}]_{\beta}$. По построению верны соотношения $\mathcal{A} \subseteq P_{k|2}$ и $[\mathcal{A}]_{\beta} = \mathcal{A}$. Покажем, что $\mathcal{A}$ — искомый класс.

Докажем сначала, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Так как по лемме 1.3 верно равенство $B(\mathcal{A}) = B(\mathcal{S})$, то достаточно доказать равенство $B(\mathcal{S}) = \mathcal{B}$. По построению функций $G_1, \dots, G_r$ справедливо включение $\{G_1, \dots, G_r\} \subseteq \mathcal{S}$, а значит, $\{g'_1, \dots, g'_r\} \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{S}} b(F)$ и $\mathcal{B} \subseteq B(\mathcal{S})$. По построению функций из множества $\mathcal{S}$ и по лемме 2.9 если $0 \notin U(\mathcal{B})$, то среди компонент функций из $\mathcal{S}$ не содержится функций, реализующих константу 0, если $1 \notin U(\mathcal{B})$, то не содержится функций, реализующих константу 1, а если $\bar{x} \notin U(\mathcal{B})$ — функций $\bar{x}_1$ и $\overline{g'_1}, \dots, \overline{g'_r}$. Поэтому независимо от множества $U(\mathcal{B})$ получим, что для каждой функции F из $\mathcal{S}$ выполняется соотношение $b(F) \subseteq \mathcal{B}$. А значит, выполняется соотношение $B(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{B}$ и, следовательно, $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Теперь покажем, что имеет место равенство $\text{Ind}(\mathcal{A}) = I$. Включение $I \subseteq \text{Ind}(\mathcal{A})$ очевидно в силу определения класса $\mathcal{A}$. Перейдем к доказательству включения $\text{Ind}(\mathcal{A}) \subseteq I$. Рассмотрим произвольную пару индексов $(p, q) \notin I^{(2)}$, $p \neq q$. По построению среди функций множества $\mathcal{S}$ не содержится функций, принимающих оба значения p и q , а значит, таких функций нет и в классе $\mathcal{A}$. Следовательно, верны соотношения $(p, q) \notin (\text{Ind}(\mathcal{A}))^{(2)}$ и $(\text{Ind}(\mathcal{A}))^{(2)} \subseteq I^{(2)}$.

Для доказательства включения $(\text{Ind}(\mathcal{A}))^{(1)} \subseteq I^{(1)}$ рассмотрим сначала случай, когда $\{0, 1\} \not\subseteq U(\mathcal{B})$. Предположим, что найдется такая пара $(s, s) \in (\text{Ind}(\mathcal{A}))^{(1)}$, что $(s, s) \notin I^{(1)}$. Тогда найдется функция H из $\mathcal{A}$ такая, что $D(H) = \{s\}$. Если $U(\mathcal{B}) \cap \{0, 1\} = \emptyset$, то $b(H) \not\subseteq \mathcal{B}$, так как среди компонент функции H содержатся только константы. Значит, $B(\mathcal{A}) \neq \mathcal{B}$, что неверно. Если $U(\mathcal{B}) \cap \{0, 1\} = \{0\}$, то $I^{(1)} = \{(0, 0)\}$. Поскольку $(s, s) \notin I^{(1)}$, то $s \neq 0$ и среди компонент функции H содержится функция, реализующая константу 1. Значит, $b(H) \not\subseteq \mathcal{B}$ и $B(\mathcal{A}) \neq \mathcal{B}$, что неверно. Случай, когда $U(\mathcal{B}) \cap \{0, 1\} = \{1\}$, рассматривается аналогично предыдущему.

Таким образом, установлено, что если $\{0, 1\} \not\subseteq U(\mathcal{B})$, то $(\text{Ind}(\mathcal{A}))^{(1)} \subseteq I^{(1)}$, и для завершения доказательства теоремы осталось доказать включение $(\text{Ind}(\mathcal{A}))^{(1)} \subseteq I^{(1)}$ в тех случаях, когда $\{0, 1, x\} \subseteq U(\mathcal{B})$. Для этого

рассмотрим произвольную пару $(s, s) \in (\text{Ind}(\mathcal{A}))^{(1)}$, где $s \in E_k$, и произвольную функцию $H \in \mathcal{A}_{ss}$. Тогда выполняется равенство $\widehat{H} = \widehat{F}(\langle g_1, \dots, g_m \rangle, \dots, \langle g_{m(n-1)+1}, \dots, g_{mn} \rangle)$, где F — некоторая функция из $\mathcal{S}$, которая зависит от n переменных, а $g_1, \dots, g_{mn}$ — функции из $\mathcal{B}$. Если $D(F) = \{s\}$, то по определению множества $\mathcal{S}$ пара индексов (s, s) принадлежит $I^{(1)}$. Если $D(F) = \{s_1, s_2\}$, где $s_1, s_2 \in E_k$, $s_1 < s_2$, то $s \in \{s_1, s_2\}$. В силу определения множества $\mathcal{S}$ пара индексов (s_1, s_2) принадлежит $I^{(2)}$. Поэтому $s \in d(I^{(2)})$, а так как верно соотношение $d(I^{(2)}) \subseteq d(I^{(1)})$, то $s \in d(I^{(1)})$. Значит, пара индексов (s, s) принадлежит множеству $I^{(1)}$ и для рассматриваемых случаев справедливо включение $(\text{Ind}(\mathcal{A}))^{(1)} \subseteq I^{(1)}$, что и требовалось показать. Теорема доказана.

Теорема 2.3 утверждает, что для каждого класса $\mathcal{B}$ алгебры логики и множества индексов I , которые удовлетворяют приведенным в условии теоремы условиям, однозначным образом определяется β -замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|2}$, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $\text{Ind}(\mathcal{A}) = I$. В свою очередь, для каждого β -замкнутого класса функций из $P_{k|2}$ однозначным образом определяются такой класс $\mathcal{B}$ и множество соответствующих индексов. Покажем, как, используя данное утверждение, можно описать решетку таких β -замкнутых классов функций.

Л е м м а 2.10. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq P_{k|2}$, $[\mathcal{U}]_\beta = \mathcal{U}$ и $[\mathcal{V}]_\beta = \mathcal{V}$. Тогда для того, чтобы выполнялось соотношение $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения $B(\mathcal{U}) \subseteq B(\mathcal{V})$ и $\text{Ind}(\mathcal{U}) \subseteq \text{Ind}(\mathcal{V})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала имеет место вложение $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Тогда $\bigcup_{F \in \mathcal{U}} b(F) \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{V}} b(F)$, а значит, по определению 1.2, имеет место вложение $B(\mathcal{U}) \subseteq B(\mathcal{V})$. Также для каждого значения чисел p и q таких, что $p, q \in E_k$, $p \leq q$, выполняется соотношение $\mathcal{U}_{pq} \subseteq \mathcal{V}_{pq}$ и поэтому, по определению множеств $\text{Ind}(\mathcal{U})$ и $\text{Ind}(\mathcal{V})$, верно включение $\text{Ind}(\mathcal{U}) \subseteq \text{Ind}(\mathcal{V})$.

Пусть теперь выполняются соотношения $B(\mathcal{U}) \subseteq B(\mathcal{V})$ и $\text{Ind}(\mathcal{U}) \subseteq \text{Ind}(\mathcal{V})$. Тогда для каждого значения чисел p и q таких, что $p, q \in E_k$, $p \leq q$, в силу утверждения лемм 2.5 и 2.6 выполняются соотношения $\mathcal{U}_{pq} \subseteq \mathcal{V}_{pq}$, а следовательно, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.

Л е м м а 2.11. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq P_{k|2}$, $[\mathcal{U}]_\beta = \mathcal{U}$, $[\mathcal{V}]_\beta = \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ и $U(B(\mathcal{U})) = U(B(\mathcal{V}))$. Тогда $\mathcal{U}$ является предполным в $\mathcal{V}$ тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих случаев:

- 1) $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$ и множество $\text{Ind}(\mathcal{V}) \setminus \text{Ind}(\mathcal{U})$ одноэлементное;
- 2) $B(\mathcal{U})$ является предполным в $B(\mathcal{V})$ и $\text{Ind}(\mathcal{U}) = \text{Ind}(\mathcal{V})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим мощность множества $\text{Ind}(\mathcal{V}) \setminus \text{Ind}(\mathcal{U})$ через N .

Сначала докажем необходимость приведенных в утверждении леммы соотношений. Пусть $\mathcal{U}$ является предполным в $\mathcal{V}$. Тогда в силу утверждения леммы 2.10 справедливы вложения $B(\mathcal{U}) \subseteq B(\mathcal{V})$ и $\text{Ind}(\mathcal{U}) \subseteq \text{Ind}(\mathcal{V})$.

Рассмотрим случай, когда $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$. Обозначим этот класс через $\mathcal{B}$. Если $N = 0$, то $\text{Ind}(\mathcal{U}) = \text{Ind}(\mathcal{V})$ и в силу утверждения леммы 2.7 выполняется соотношение $\mathcal{U} = \mathcal{V}$, что неверно. Значит, $N \geq 1$.

Пусть теперь $N \geq 2$. Тогда найдутся наборы $(p_1, q_1) \in \text{Ind}(\mathcal{V})$ и $(p_2, q_2) \in \text{Ind}(\mathcal{V})$, для которых $(p_1, q_1) \notin \text{Ind}(\mathcal{U})$ и $(p_2, q_2) \notin \text{Ind}(\mathcal{U})$.

Пусть выполняется соотношение $p_1 \neq q_1$. Тогда рассмотрим функцию $F' \in \mathcal{V}_{p_2 q_2}$ и β -замкнутый класс $[\mathcal{U} \cup \{F'\}]_\beta$, который обозначим через $\mathcal{U}'$. Так как $F' \notin \mathcal{U}$, то $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{V}$, а так как $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$, то $B(\mathcal{U}') = \mathcal{B}$.

Покажем, что $\mathcal{U}'_{p_1 q_1} = \emptyset$. Для этого рассмотрим произвольную функцию H из класса $[\mathcal{U} \cup \{F'\}]_\beta$. Она имеет вид

$$\hat{F}(\langle g_1, \dots, g_m \rangle, \dots, \langle g_{m(n-1)+1}, \dots, g_{mn} \rangle),$$

где функция F принадлежит множеству $\mathcal{U} \cup \{F'\}$, зависит от n переменных, а $g_1, \dots, g_{mn}$ — некоторые функции из $\mathcal{B}$. Если $F \in \mathcal{U}$, то в силу утверждений лемм 2.5 и 2.6 функция H принадлежит $\mathcal{U}$, а следовательно, $D(H) \neq \{p_1, q_1\}$. Если $F = F'$, то функция H может принимать только значения из множества $\{p_2, q_2\}$, и $D(H) \neq \{p_1, q_1\}$. Значит, среди функций класса $\mathcal{U}'$ нет функций, которые принимают значения p_1 и q_1 , и поэтому $\mathcal{U}$ не является предполным в $\mathcal{V}$. Случай, когда $p_2 \neq q_2$, рассматривается аналогично.

Если $p_1 = q_1$ и $p_2 = q_2$, то рассмотрим функцию $F' \in \mathcal{V}_{p_2 p_2}$ и β -замкнутый класс $[\mathcal{U} \cup \{F'\}]_\beta$. Рассуждениями, аналогичными предыдущему случаю, получим, что константа p_1 не принадлежит классу $[\mathcal{U} \cup \{F'\}]_\beta$. Поэтому класс $\mathcal{U}$ не является предполным в $\mathcal{V}$. Значит, в рассматриваемом случае $N = 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда $B(\mathcal{U}) \subset B(\mathcal{V})$. Покажем, что в этом случае $B(\mathcal{U})$ является предполным в $B(\mathcal{V})$ и $\text{Ind}(\mathcal{U}) = \text{Ind}(\mathcal{V})$. Предположим, что найдется класс $\mathcal{B}$ функций алгебры логики такой, что $B(\mathcal{U}) \subset \mathcal{B} \subset B(\mathcal{V})$. Тогда найдется функция $f \in P_2$ такая, что $f \notin B(\mathcal{U})$ и $f \in \mathcal{B}$. Так как равны основания классов $B(\mathcal{U})$ и $B(\mathcal{V})$, то функция f не может содержаться в множестве $\{0, 1, x, \bar{x}\}$. Поэтому по свойствам булевых функций $x \in [\{f\}] \subset B(\mathcal{V})$ (см., например, [57]) и в силу утверждения теоремы 2.3 для класса $\mathcal{V}$ выполняется соотношение $\text{Ind}^{(2)}(\mathcal{V}) \neq \emptyset$.

Рассмотрим $(p, q) \in \text{Ind}^{(2)}(\mathcal{V})$. Определим функцию $F \in P_{k|2}$ через ее двоичное представление $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Для каждого i , $1 \leq i \leq m$, положим:

$$f_i = 0, \text{ если } p_i = 0, \quad q_i = 0;$$

$$f_i = f, \text{ если } p_i = 0, \quad q_i = 1;$$

$$f_i = \bar{f}, \text{ если } p_i = 1, \quad q_i = 0;$$

$$f_i = 1, \text{ если } p_i = 1, \quad q_i = 1.$$

Рассмотрим класс $[\mathcal{U} \cup \{F\}]_\beta$, который обозначим через $\mathcal{U}'$. Поскольку $p < q$, то найдется i , $1 \leq i \leq m$, для которого $p_i < q_i$, а следовательно, $f \in b(F)$ и $F \notin \mathcal{U}$. Если множество $U(B(\mathcal{V}))$ не содержит функцию 0, то в силу утверждения леммы 2.9 для каждого i , $1 \leq i \leq m$, выполняется соотношение $q_i = 1$; не содержит функцию 1 — соотношение $p_i = 0$; не содержит функцию $\bar{x}$ — соотношение $p_i < q_i$. В любом из этих случаев $b(F) \subseteq \mathcal{B}$. Поэтому $B(\mathcal{U}') \subseteq \mathcal{B} \subset B(\mathcal{V})$, и в силу утверждения леммы 2.1 β -замкнутые классы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ различны. Значит $\mathcal{U}$ не является предполным в $\mathcal{V}$, что противоречит условию.

Поэтому $B(\mathcal{U})$ является предполным в $B(\mathcal{V})$. Предположим, что $\text{Ind}(\mathcal{U}) \neq \text{Ind}(\mathcal{V})$. Рассмотрим $(p, q) \notin \text{Ind}(\mathcal{V}) \setminus \text{Ind}(\mathcal{U})$. Определим одноместную функцию $F \in P_{k|2}$ через ее двоичное представление $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Для каждого i ,

$1 \leq i \leq m$, положим:

$$\begin{aligned} f_i &= 0, \text{ если } p_i = 0, \quad q_i = 0; \\ f_i &= x_1, \text{ если } p_i = 0, \quad q_i = 1; \\ f_i &= \overline{x_1}, \text{ если } p_i = 1, \quad q_i = 0; \\ f_i &= 1, \text{ если } p_i = 1, \quad q_i = 1. \end{aligned}$$

По построению $D(F) = \{p, q\}$, а значит, $F \notin \mathcal{U}$. Рассмотрим β -замкнутый класс $[\mathcal{U} \cup \{F\}]_\beta$, который обозначим через $\mathcal{U}'$. Если множество $U(B(\mathcal{V}))$ не содержит функцию 0, то в силу утверждения леммы 2.9 для каждого i , $1 \leq i \leq m$, выполняется соотношение $q_i = 1$; не содержит функцию 1 — соотношение $p_i = 0$; не содержит функцию $\overline{x}$ — соотношение $p_i < q_i$. В любом из этих случаев $b(F) \subseteq U(B(\mathcal{V})) = U(B(\mathcal{U}))$. Поэтому $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{U}') \subset B(\mathcal{V})$, и в силу утверждения леммы 2.1 β -замкнутые классы $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{V}$ различны. Поэтому $\mathcal{U}$ не является предполным в $\mathcal{V}$, что противоречит условию. Значит, в рассматриваемом случае $B(\mathcal{U})$ является предполным в $B(\mathcal{V})$ и $N = 0$.

Перейдем к доказательству достаточности приведенных в утверждении леммы соотношений. Пусть сначала $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$ и $N = 1$. Тогда существует набор (p, q) такой, что $\mathcal{U}_{pq} = \emptyset$ и $\mathcal{V}_{pq} \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольную функцию F из $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ и β -замкнутый класс $[\mathcal{U} \cup \{F\}]_\beta$, который обозначим через $\mathcal{U}'$. Так как $B(\mathcal{U}) = B(\mathcal{V})$, то согласно утверждениям лемм 2.5 и 2.6 для всех $(a, b) \in \text{Ind}(\mathcal{U})$ справедливо равенство $\mathcal{U}_{ab} = \mathcal{V}_{ab}$. Поэтому $D(F) = \{p, q\}$. Из этого следует, что $\text{Ind}(\mathcal{U}) \subset \text{Ind}(\mathcal{U}') \subseteq \mathcal{V}$. В рассматриваемом случае $N = 1$, а значит, выполняется соотношение $\text{Ind}(\mathcal{U}') = \text{Ind}(\mathcal{V})$. Так как $B(\mathcal{U}') = B(\mathcal{V})$, то в силу утверждения леммы 2.7 имеет место равенство $\mathcal{U}' = \mathcal{V}$. Поэтому класс $\mathcal{U}$ является предполным в $\mathcal{V}$.

Пусть теперь $B(\mathcal{U})$ является предполным в $B(\mathcal{V})$ и $N = 0$. Рассмотрим произвольную функцию F из $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$ и β -замкнутый класс $[\mathcal{U} \cup \{F\}]_\beta$, который обозначим через $\mathcal{U}'$. Тогда $D(F) = \{p, q\}$ для некоторого набора $(p, q) \in \text{Ind}(\mathcal{V})$, а следовательно, $(p, q) \in \text{Ind}(\mathcal{U})$. Поэтому если $b(F) \subseteq B(\mathcal{U})$, то согласно леммам 2.5 и 2.6 выполняется соотношение $F \in \mathcal{U}$. Значит, среди функций множества $b(F)$ найдется булева функция f , которая не содержится в классе $B(\mathcal{U})$. Поэтому $B(\mathcal{U}') = B(\mathcal{V})$ в силу предполноты класса $B(\mathcal{U})$ в $B(\mathcal{V})$. Так как $\text{Ind}(\mathcal{U}') = \text{Ind}(\mathcal{V})$, то в силу утверждения леммы 2.7 выполняется соотношение $\mathcal{U}' = \mathcal{V}$, а значит, класс $\mathcal{U}$ является предполным в $\mathcal{V}$.

Полностью описание решетки β -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ не приводится в этой работе, так как, несмотря на простоту, разбор всех случаев достаточно громоздок и, главное, при этом не выявляется никаких новых содержательных эффектов.

§ 3. Классы функций из $P_{k|3}$

3.1. Континуальность семейства β -замкнутых классов. Приведем пример континуального семейства β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$, изложенный в работе [47]. Для каждого $n \geq 2$ определим функцию W_n из P_k , зависящую от переменных $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$, через ее

двоичное представление $\langle w_{n,1}, \dots, w_{n,m} \rangle$:

$$w_{n,1} = x_1^1 \vee x_1^2 \vee \dots \vee x_1^n \vee y_1^1 \& y_1^2 \& \dots \& y_1^n, \\ w_{n,i} = y_1^1 \vee y_1^2 \vee \dots \vee y_1^n \vee d_n(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n) \vee \overline{x_1^1} \& \overline{x_1^2} \& \dots \& \overline{x_1^n} \text{ для } i, 2 \leq i \leq m,$$

где $x \vee y$, $x \& y$, $\overline{x}$ — соответственно дизъюнкция, конъюнкция и отрицание в двузначной логике, а $d_n(x_1^1, \dots, x_1^n) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_1^i \& x_1^j$.

Так как каждая из компонент функции W_n зависит только от первых компонент переменных $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$, то в дальнейшем будем обозначать булевы переменные x_1^i, y_1^i через x_i и y_i соответственно, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$w_{n,1} = x_1 \vee \dots \vee x_n \vee y_1 \& \dots \& y_n, \\ w_{n,i} = y_1 \vee \dots \vee y_n \vee d_n(x_1, \dots, x_n) \vee \overline{x_1} \& \dots \& \overline{x_n} \text{ для } i, 2 \leq i \leq m.$$

Установим некоторые свойства функций W_n для каждого $n \geq 2$.

1. Справедливо равенство $B(\{W_n\}) = O^\infty$ (все обозначения для классов булевых функций заимствованы из работы [57]).

Данное утверждение следует из того, что все компоненты функции W_n содержатся в классе O^∞ , а функция $w_{n,2}$ не содержится в классах MO^∞ и O_0^∞ , обоих предполных классах в классе O^∞ (см., например, [57]), и тем самым порождает все функции из этого класса.

2. Справедливо равенство $D(W_n) = \{\alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}\}$, где двоичные представления чисел $\alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11}$ равны $\langle 0, 1, 1, \dots, 1 \rangle$, $\langle 1, 0, 0, \dots, 0 \rangle$ и $\langle 1, 1, 1, \dots, 1 \rangle$ соответственно.

Так как функции $w_{n,2}, \dots, w_{n,m}$ равны между собой, то двоичное представление функции W_n может принимать только значения из множества

$$\{\langle 0, 0, 0, \dots, 0 \rangle, \langle 0, 1, 1, \dots, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0, \dots, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1, \dots, 1 \rangle\}.$$

Функция $w_{n,1}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $x_1 = \dots = x_n = 0$ и хотя бы одна из переменных $y_1, \dots, y_n$ равна 0. Но если $x_1 = \dots = x_n = 0$, то функция $w_{n,2}$ будет равна единице, поэтому двоичное представление функции W_n не принимает значение $\langle 0, 0, 0, \dots, 0 \rangle$, а значения $\langle 0, 1, 1, \dots, 1 \rangle$, $\langle 1, 0, 0, \dots, 0 \rangle$, $\langle 1, 1, 1, \dots, 1 \rangle$ принимает соответственно при следующих значениях переменных:

- $x_1 = \dots = x_n = y_1 = \dots = y_n = 0$;
- $x_1 = 1, x_2 = \dots = x_n = y_1 = \dots = y_n = 0$;
- $x_1 = \dots = x_n = y_1 = \dots = y_n = 1$.

Положим $\mathcal{W} = \bigcup_{n=2}^{\infty} \{W_n\}$. Отметим, что похожее множество функций использовалось в работе [28] для доказательства континуальности семейства самодвойственных классов функций k -значной логики.

Л е м м а 3.1. Для всех $n \geq 2$ справедливо соотношение $W_n \notin [\mathcal{W} \setminus \{W_n\}]_\beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что доказываемое утверждение неверно. Значит, в силу утверждения леммы 1.4 имеет место соотношение

$$\widehat{W_n} = \widehat{H}(\langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle, \dots, \langle \omega_{m(r-1)+1}, \dots, \omega_{mr} \rangle), \quad (1)$$

где функция H принадлежит множеству $\mathcal{W} \setminus \{W_n\}$, r — число переменных функции H , а булевы функции $\omega_1, \dots, \omega_{mr}$ принадлежат множеству $B(\mathcal{W} \setminus \{W_n\})$. Поэтому $H = W_p$ для некоторого числа p , $p \geq 2$, $p \neq n$, и $r = 2p$. Так как верно равенство $B(\{W_i\}) = O^\infty$ для любого $i \geq 2$, то $B(\mathcal{W} \setminus \{W_n\}) = O^\infty$, а следовательно, все функции $\omega_1, \dots, \omega_{2mp}$ принадлежат классу O^∞ . Поскольку все компоненты функции W_n существенно зависят только от переменных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, то без ограничения общности можно считать, что булевы функции $\omega_1, \dots, \omega_{2mp}$ зависят только от тех же переменных.

Для всех i , $1 \leq i \leq p$, обозначим функцию $\omega_{m(i-1)+1}$ через g_i , а функцию $\omega_{m(p+i-1)+1}$ — через h_i . В данных обозначениях соотношение (1) можно записать при помощи эквивалентной системы равенств:

$$\begin{cases} w_{n,1} = g_1 \vee \dots \vee g_p \vee h_1 \& \dots \& h_p, \\ w_{n,i} = h_1 \vee \dots \vee h_p \vee d_p(g_1, \dots, g_p) \vee \overline{g_1} \& \dots \& \overline{g_p}, \quad i = 2, \dots, m. \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

Так как $g_i \in O^\infty$, то g_i мажорирует некоторую переменную из множества $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$, $i = 1, \dots, p$. Предположим, что для некоторого числа i , $1 \leq i \leq p$, функция g_i мажорирует переменную y_j , $1 \leq j \leq n$. Рассмотрим набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ из E_2^{2n} , у которого все компоненты равны нулю, кроме компоненты с номером $n+j$ (она соответствует переменной y_j). Тогда $g_i(\tilde{\alpha}) = 1$. Но $w_{n,1}(\tilde{\alpha}) = 0$, а значит, не выполняется соотношение (2). Следовательно, ни одна из функций $g_1, \dots, g_p$ не мажорирует ни одну из переменных $y_1, \dots, y_n$. Аналогичными рассуждениями получаем, что ни одна из функций $h_1, \dots, h_p$ не мажорирует ни одну из переменных $x_1, \dots, x_n$.

Далее предположим, что выполняется неравенство $p > n$. Так как каждая из функций $g_1, \dots, g_p$ мажорирует хотя бы одну переменную из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$, то найдется переменная x_i , $1 \leq i \leq n$, которая мажорируется как минимум двумя функциями g_{i_1} и g_{i_2} , $1 \leq i_1 < i_2 \leq p$. Рассмотрим набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ из E_2^{2n} , у которого все компоненты равны нулю, кроме компоненты с номером i (она соответствует переменной x_i). Тогда $g_{i_1}(\tilde{\alpha}) = g_{i_2}(\tilde{\alpha}) = 1$, а следовательно, $d_p(g_1(\tilde{\alpha}), \dots, g_p(\tilde{\alpha})) = 1$. Но $w_{n,2}(\tilde{\alpha}) = 0$, так как $d_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \overline{\alpha_1} \& \dots \& \overline{\alpha_n} = \alpha_{n+1} \vee \dots \vee \alpha_{2n} = 0$. Поэтому не выполняется соотношение (3).

Теперь предположим, что $p < n$. Для каждого числа i , $1 \leq i \leq p$, функция h_i мажорирует хотя бы одну переменную из множества $\{y_1, \dots, y_n\}$. Это означает, что найдется число j_i , $1 \leq j_i \leq n$, для которого $h_i \geq y_{j_i}$. Рассмотрим набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ из E_2^{2n} , у которого компоненты с номерами $n+j_1, \dots, n+j_p$ равны единице (они соответствуют переменным $y_{j_1}, \dots, y_{j_p}$), а остальные компоненты равны нулю. Тогда $h_1(\tilde{\alpha}) = \dots = h_p(\tilde{\alpha}) = 1$, а следовательно, $h_1(\tilde{\alpha}) \& \dots \& h_p(\tilde{\alpha}) = 1$. Поскольку $p < n$, то $\{j_1, \dots, j_p\} \neq \{1, \dots, n\}$. Поэтому найдется число j , $1 \leq j \leq n$, такое, что $\alpha_{n+j} = 0$. Значит $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n = \alpha_{n+1} \& \dots \& \alpha_{2n} = 0$ и на наборе $\tilde{\alpha}$ функция $w_{n,1}$ равна нулю. Поэтому не может выполняться соотношение (2), что и требовалось доказать.

Теорема 3.1. Пусть $k = 2^m$, где $m \geq 2$. Тогда семейство различных β -замкнутых классов функций из $P_{k|\beta}$ с булевым замыканием O^∞ является континуальным.

Доказательство. Для каждого подмножества S множества $\{2, 3, 4, \dots\}$ определим множество функций k -значной логики $\{W_i \mid i \in S\}$, которое будем обозначать через $\mathcal{W}(S)$.

Рассмотрим два различных подмножества R и Q множества $\{2, 3, 4, \dots\}$. Для них найдется число n , такое, что $n \in R \setminus Q$ или $n \in Q \setminus R$. Без ограничения общности будем считать, что $n \in R \setminus Q$. Тогда $W_n \in [\mathcal{W}(R)]_\beta$, но по лемме 3.1 выполняется соотношение $W_n \notin [\mathcal{W} \setminus \{W_n\}]_\beta$, а значит, $W_n \notin [\mathcal{W}(Q)]_\beta$.

Получили, что для различных подмножеств R и Q множества $\{2, 3, 4, \dots\}$ различны и β -замкнутые классы функций $[\mathcal{W}(R)]_\beta$ и $[\mathcal{W}(Q)]_\beta$. Так как семейство различных таких подмножеств имеет континуальную мощность, то семейство различных β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием O^∞ как минимум континуально. Очевидно, что это семейство имеет мощность не более континуума, и значит, оно континуально. Теорема доказана.

Таким образом, получили, что семейство β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ является континуальным. При этом согласно утверждению теоремы 2.2 семейство β -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$ является счетным. Для исследования этого «эффекта» будем рассматривать семейства замкнутых классов функций из $P_{k|r}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$, где $r \geq 1$ и $\mathcal{B}$ — некоторый замкнутый класс булевых функций. Введем следующее определение.

Определение 3.1. Пусть $k = 2^m$, $m \geq 2$ и $1 \leq r \leq m$. Обозначим через $C(k, r)$ множество замкнутых классов $\mathcal{B}$ булевых функций, для которых семейство различных β -замкнутых классов $\mathcal{A}$ функций из $P_{k|r}$, удовлетворяющих условию $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, является конечным, а через $\mathcal{Q}(k, r)$ — множество всех классов булевых функций, для которых такое семейство β -замкнутых классов являются континуальным.

В настоящем параграфе будет показано, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} Q(k, 3) &= \{O^\infty, I^\infty\} \cup \{O^\mu, I^\mu \mid \mu \geq 3\}, \\ C(k, 3) &= \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \mid [\mathcal{B}] = \mathcal{B}, \mathcal{B} \notin Q(k, 3)\}. \end{aligned}$$

Отметим, что этот результат был установлен в работе [45] и приводится в настоящей статье для полноты изложения.

3.2. Конечные множества β -замкнутых классов. Текущий пункт посвящен исследованию множеств $C(k, k)$ и $C(k, 3)$ при $k = 2^m$, $m \geq 2$. В каждом из пп. 3.2.1–3.2.6 рассматриваются некоторые множества классов булевых функций. Для таких множеств доказываются леммы, которые затем обобщаются в п. 3.2.7 и позволяют установить принадлежность исследуемых множеств классу $C(k, k)$ или $C(k, 3)$.

3.2.1. Классы с булевым замыканием в U .

Лемма 3.2. Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов U , SU , MU , U_0 , U_1 , U_{01} , C , C_0 , C_1 булевых функций, $F \in P_k$ и $b(F) \subseteq \mathcal{B}$. Тогда существует функция G из множества $\{F\}_\beta$, которая зависит не более чем от t переменных, и такая, что $F \in \{G\}_\beta$.

Доказательство. Так как $b(F) \subseteq \mathcal{B} \subseteq U$, то каждая из компонент функции F существенно зависит не более чем от одной переменной. Значит, функция F существенно зависит не более чем от t переменных.

Рассмотрим функцию G из P_k , которая получена из функции F путем удаления всех несущественных переменных. Тогда функция G зависит не более чем от m переменных, и принадлежит множеству $[\{F\}]_\beta$. Также очевидно, что функция F может быть получена из функции G путем введения несущественных переменных, а следовательно, $F \in [\{G\}]_\beta$.

3.2.2. Классы с булевым замыканием в D или K .

Лемма 3.3. Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов D_{01} , D_0 , D_1 , D булевых функций, $F \in P_k$, $b(F) \subseteq \mathcal{B}$, $R \subseteq P_k$ и $B(R) = \mathcal{B}$. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_\beta$, которая зависит не более чем от k переменных и такая, что $F \in [\{G\} \cup R]_\beta$.

Доказательство. Обозначим через n число переменных функции F , через $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ — ее двоичное представление, а через $x_1, \dots, x_{mn}$ — переменные, от которых зависит двоичное представление функции F .

Введем на множестве $X = \{x_1, \dots, x_{mn}\}$ отношение эквивалентности. Рассмотрим переменные x_i и x_j из множества X . Положим $x_i \sim x_j$ тогда и только тогда, когда для каждого числа s , $1 \leq s \leq m$, одновременно верны соотношения $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_j$ или данные соотношения одновременно не выполняются. Чтобы показать, что введенное отношение является отношением эквивалентности, покажем, что если $x_i \sim x_j$ и $x_j \sim x_l$, то $x_i \sim x_l$. Если $x_i \sim x_j$, то для каждого числа s , $1 \leq s \leq m$, либо верны соотношения $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_j$, либо данные соотношения одновременно не выполняются. Рассмотрим каждый из данных случаев.

1. Пусть $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_j$. Так как $x_j \sim x_l$ и верно соотношение $f_s \geq x_j$, то $f_s \geq x_l$. Это значит, что $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_l$.

2. Пусть не выполняются соотношения $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_j$. Так как $x_j \sim x_l$ и не выполняется соотношение $f_s \geq x_j$, то не выполняется соотношение $f_s \geq x_l$. Поэтому одновременно не выполняются соотношения $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_l$.

Получили, что для каждого числа s , $1 \leq s \leq m$, либо верны соотношения $f_s \geq x_i$ и $f_s \geq x_l$, либо данные соотношения одновременно не выполняются. Поэтому $x_i \sim x_l$.

Оценим число t классов эквивалентности. Для этого каждой переменной x_i из множества X поставим в соответствие двоичный вектор $(a_1(i), \dots, a_m(i))$ из E_2^m следующим образом: $a_s(i) = 1$, если $f_s \geq x_i$, и $a_s(i) = 0$ в противном случае, $s = 1, \dots, m$. Тогда переменные x_i и x_j эквивалентны тогда и только тогда, когда справедливо равенство $(a_1(i), \dots, a_m(i)) = (a_1(j), \dots, a_m(j))$. Поэтому число t классов эквивалентности не превосходит $2^m = k$.

Обозначим через $X_1, \dots, X_t$ классы эквивалентности на множестве X . Для каждого числа i , $1 \leq i \leq mn$, обозначим через $q(i)$ номер класса эквивалентности, которому принадлежит переменная x_i , и для каждого класса эквивалентности X_q , $1 \leq q \leq t$, определим булеву функцию

$$V_q(x_1, \dots, x_{mn}) = \bigvee_{x_i \in X_q} x_i.$$

Так как $x \vee y \in \mathcal{B}$, то $V_q \in \mathcal{B}$. В силу определения функции V_q для каждого числа s , $1 \leq s \leq m$, либо выполняется соотношение $f_s \geq V_q$, либо для каждой переменной x_i из X_q не выполняется соотношение $f_s \geq x_i$.

Рассмотрим двоичное представление $\hat{F}(y_{q(1)}, \dots, y_{q(mn)})$. Обозначим через $g_1, \dots, g_m$ булевы функции $f_1(y_{q(1)}, \dots, y_{q(mn)}), \dots, f_m(y_{q(1)}, \dots, y_{q(mn)})$ соответственно, а через G — функцию, которая соответствует двоичному представлению $\langle g_1, \dots, g_m \rangle$. Отметим, что таких функций много, но все они равны с точностью до фиктивных переменных. Поскольку каждая из функций $g_1, \dots, g_m$ зависит только от переменных из множества $\{y_1, \dots, y_t\}$, то можно считать, что функция G тоже существенно зависит не более чем от t переменных.

Покажем, что функция G является искомой. Для этого докажем равенство

$$\hat{G}(V_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, V_t(x_1, \dots, x_{mn})) = \hat{F}(x_1, \dots, x_{mn}),$$

которое эквивалентно системе равенств:

$$g_j(V_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, V_t(x_1, \dots, x_{mn})) = f_j(x_1, \dots, x_{mn}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим каждое из данных равенств. Если функция f_j равна константе c , где $c \in E_2$, то $g_j(y_1, \dots, y_t) = f_j(y_{q(1)}, \dots, y_{q(mn)}) = c$ и доказываемое равенство очевидно. Если функция f_j не является константой, то в силу условия $f_j \in \mathcal{B} \subseteq D$ верно соотношение $f_j = x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_p}$, где $p \geq 1$ и $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq mn$. Так как $f_j \geq x_{j_s}$ при $1 \leq s \leq p$, то $f_j \geq V_{q(j_s)}$ и верна следующая цепочка соотношений:

$$f_j \geq V_{q(j_1)} \vee \dots \vee V_{q(j_p)} \geq x_{j_1} \vee \dots \vee x_{j_p} = f_j.$$

Таким образом $f_j = V_{q(j_1)} \vee \dots \vee V_{q(j_p)}$. Поэтому справедливы равенства:

$$g_j(V_1, \dots, V_t) = f_j(V_{q(1)}, \dots, V_{q(mn)}) = V_{q(j_1)} \vee \dots \vee V_{q(j_p)} = f_j,$$

что и требовалось показать.

Значит, $\hat{F}(\tilde{x}) = \hat{G}(V_1(\tilde{x}), \dots, V_t(\tilde{x}))$, а так как каждая из функций $V_1, \dots, V_t$ содержится в классе $\mathcal{B} = B(R)$, то $F \in [\{G\} \cup R]_{\mathcal{B}}$. Лемма доказана.

3.2.3. Классы с булевым замыканием в L .

Лемма 3.4. Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов L_{01}, L_0, L_1, SL, L булевых функций, $F \in P_k$, $b(F) \subseteq \mathcal{B}$, $R \subseteq P_k$ и $B(R) = \mathcal{B}$. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_{\mathcal{B}}$, которая зависит не более чем от $2k$ переменных и такая, что $F \in [\{G\} \cup R]_{\mathcal{B}}$.

Доказательство. Обозначим через n число переменных функции F , через $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ — ее двоичное представление, а через $x_1, \dots, x_{mn}$ — переменные, от которых зависит двоичное представление функции F . Тогда булевы функции $f_1, \dots, f_m$ являются линейными.

Введем на множестве $X = \{x_1, \dots, x_{mn}\}$ отношение эквивалентности. Рассмотрим переменные x_i и x_j из множества X . Положим $x_i \sim x_j$ тогда и только тогда, когда для каждого числа s , $1 \leq s \leq m$, функция f_s существенно зависит от переменных x_i и x_j , либо обе эти переменные являются несущественными для функции f_s . Очевидно, что введенное отношение является отношением эквивалентности.

Оценим число t классов эквивалентности. Для этого каждой переменной x_i из множества X поставим в соответствие двоичный вектор $(a_1(i), \dots, a_m(i))$ из E_2^m следующим образом: $a_s(i) = 1$, если f_s линейна по переменной x_i , и $a_s(i) = 0$ в противном случае, $s = 1, \dots, m$. Тогда переменные x_i и x_j эквивалентны тогда и только тогда, когда справедливо равенство $(a_1(i), \dots, a_m(i)) = (a_1(j), \dots, a_m(j))$. Поэтому число t классов эквивалентности не превосходит $2^m = k$.

Обозначим через $X_1, \dots, X_t$ классы эквивалентности на множестве X . Для каждого числа q , $1 \leq q \leq t$, рассмотрим множество X_q , $1 \leq q \leq t$. Если мощность данного множества является четной, то разделим его на два множества X'_q и X''_q нечетной мощности (например, 1 и $|X_q| - 1$ соответственно). Если мощность множества X_q является нечетной, то положим $X'_q = X_q$, а $X''_q = \emptyset$.

Произвольным образом перенумеруем все непустые множества из семейства $\{X'_1, X''_1, \dots, X'_t, X''_t\}$ и обозначим их через $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$. Тогда $r \leq 2t$, а значит, $r \leq 2k$.

Для каждого q , $1 \leq q \leq r$, определим функцию:

$$V_q(x_1, \dots, x_{mn}) = \bigoplus_{x_i \in \Lambda_q} x_i.$$

Так как $x \oplus y \oplus z \in L_{01} \subseteq \mathcal{B}$ и мощность множества Λ_q является нечетной, то $V_q \in \mathcal{B}$ для всех $q = 1, \dots, r$. В силу определения множества Λ_q для каждого s , $1 \leq s \leq m$, функция f_s существенно зависит от всех переменных из множества Λ_q либо существенно не зависит ни от одной переменной из этого множества.

Для каждого числа i , $1 \leq i \leq mn$, обозначим через $q(i)$ номер множества из семейства $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$, которому принадлежит переменная x_i .

Рассмотрим произвольное множество Λ_q , $1 \leq q \leq r$. Обозначим индексы переменных, которые содержатся в данном множестве через $i_1, \dots, i_v$ для некоторого $v \geq 1$. Тогда v является нечетным, и в силу определения чисел $q(i)$ справедливы равенства $q(i_1) = \dots = q(i_v) = q$. Поэтому имеет место следующая цепочка соотношений:

$$V_q(V_{q(1)}, \dots, V_{q(mn)}) = \bigoplus_{x_i \in \Lambda_q} V_{q(i)} = V_{q(i_1)} \oplus \dots \oplus V_{q(i_v)} = V_q. \quad (4)$$

Как и при доказательстве леммы 3.3 будем рассматривать функцию G из P_k , для которой справедливо соотношение

$$\widehat{G} = \widehat{F}(y_{q(1)}, \dots, y_{q(mn)}).$$

Компоненты функции G существенно зависят только от переменных из множества $\{y_1, \dots, y_r\}$. Поэтому функция G тоже существенно зависит не более чем от r переменных.

Покажем, что функция G является искомой. Для этого докажем равенство

$$\widehat{G}(V_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, V_r(x_1, \dots, x_{mn})) = \widehat{F}(x_1, \dots, x_{mn}),$$

которое эквивалентно системе равенств

$$g_j(V_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, V_r(x_1, \dots, x_{mn})) = f_j(x_1, \dots, x_{mn}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим каждое из данных равенств. Если функция f_j равна константе c , где $c \in E_2$, то $g_j(y_1, \dots, y_r) = f_j(y_{q(1)}, \dots, y_{q(mn)}) = c$ и доказываемое равенство очевидно. Если функция f_j не является константой, то в силу условия $f_j \in \mathcal{B} \subseteq L$ верно соотношение $f_j = x_{j_1} \oplus \dots \oplus x_{j_p} \oplus c$, где

$c \in E_2$, $p \geq 1$ и $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq mn$. Так как f_j линейна по переменной x_{j_s} при $1 \leq s \leq p$, то f_j линейна по каждой переменной из множества $\Lambda_{q(j_s)}$. Значит все существенные переменные функции $V_{q(j_s)}$ являются существенными и для функции f_j . Поэтому $f_j = V_{a_1} \oplus \dots \oplus V_{a_u} \oplus c$, где $u \geq 1$ и $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_u \leq r$. Тогда в силу соотношений (4) имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} f_j(V_{q(1)}, \dots, V_{q(mn)}) &= \\ &= V_{a_1}(V_{q(1)}, \dots, V_{q(mn)}) \oplus \dots \oplus V_{a_u}(V_{q(1)}, \dots, V_{q(mn)}) \oplus c = \\ &= V_{a_1} \oplus \dots \oplus V_{a_u} \oplus c = f_j. \end{aligned}$$

В качестве следствия получаем равенство

$$g_j(V_1, \dots, V_t) = f_j(V_{q(1)}, \dots, V_{q(mn)}) = f_j,$$

что и требовалось показать.

Значит $\widehat{F}(\tilde{x}) = \widehat{G}(V_1(\tilde{x}), \dots, V_r(\tilde{x}))$, а так как каждая из функций $V_1, \dots, V_r$ содержится в классе $\mathcal{B} = B(R)$, то $F \in [\{G\} \cup R]_{\mathcal{B}}$. Лемма доказана.

3.2.4. Классы с булевым замыканием P_2, T_0, T_1, T_{01}, S или S_{01} .

Лемма 3.5. Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов P_2, T_0, T_1, T_{01}, S или S_{01} булевых функций, $F \in P_k$, $b(F) \subseteq \mathcal{B}$, $R \subseteq P_k$ и $B(R) = \mathcal{B}$. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_{\mathcal{B}}$, которая зависит не более чем от 2^k переменных и такая, что $F \in [\{G\} \cup R]_{\mathcal{B}}$.

Доказательство. Обозначим через n число переменных функции F , через $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ — ее двоичное представление, а через $\{c_1, \dots, c_r\}$ — множество значений функции F . Для каждого $c \in D(F)$ специальным образом выберем набор $\tilde{\alpha}(c) = (\alpha_1(c), \dots, \alpha_{mn}(c))$ из E_2^{mn} , для которого выполняется равенство

$$\widehat{F}(\alpha_1(c), \dots, \alpha_{mn}(c)) = \widehat{c}.$$

Для этого рассмотрим возможные варианты класса $\mathcal{B}$.

— Пусть $\mathcal{B} = P_2$. Тогда для каждого $c \in D(F)$ нужный набор можно выбрать произвольным образом;

— пусть $\mathcal{B} = T_0$. Тогда верно соотношение $\widehat{F}(0, \dots, 0) = \langle 0, \dots, 0 \rangle$. Поэтому $0 \in D(F)$, и в качестве набора $\tilde{\alpha}(0)$ выберем набор $(0, \dots, 0)$. Для остальных $c \in D(F)$ нужный набор можно выбрать произвольным образом;

— пусть $\mathcal{B} = T_1$. Тогда верно соотношение $\widehat{F}(1, \dots, 1) = \langle 1, \dots, 1 \rangle$. Поэтому $k-1 \in D(F)$, и в качестве набора $\tilde{\alpha}(k-1)$ выберем набор $(1, \dots, 1)$. Для остальных $c \in D(F)$ нужный набор можно выбрать произвольным образом;

— случай, когда $\mathcal{B} = T_{01}$, рассматривается аналогично предыдущим случаям;

— пусть $\mathcal{B} = S$. Тогда если двоичное представление функции F принимает значение $\langle c_1, \dots, c_m \rangle$ на наборе $\tilde{\alpha}$, то оно принимает значение $\langle \overline{c_1}, \dots, \overline{c_m} \rangle$ на наборе, двойственном к $\tilde{\alpha}$. Для чисел $c \in D(F)$ и $c' \in D(F)$ таких, что их двоичные представления являются двойственными друг другу, выберем наборы $\tilde{\alpha}(c)$ и $\tilde{\alpha}(c')$, двойственные друг другу;

— случай, когда $\mathcal{B} = S_{01}$, рассматривается аналогично предыдущим случаям.

Так как все числа $c_1, \dots, c_r$ различны, то различны и их двоичные представления $\langle c_{1,1}, \dots, c_{1,m} \rangle, \dots, \langle c_{r,1}, \dots, c_{r,m} \rangle$. Поэтому для каждого числа i , $1 \leq i \leq mn$, найдется функция u_i из P_2 , зависящая от переменных $x_1, \dots, x_m$, что выполняется соотношение $u_i(c_{s,1}, \dots, c_{s,m}) = \alpha_i(c_s)$ для всех чисел $s = 1, \dots, r$. Функции из множества $\{u_i(x_1, \dots, x_m) \mid i = 1, \dots, mn\}$ зависят только от m переменных, и поэтому число различных функций этого множества не превосходит $2^{2^m} = 2^k$. Обозначим всевозможные такие функции через $v_1(x_1, \dots, x_m), \dots, v_t(x_1, \dots, x_m)$, где $t \leq 2^k$. Также для каждого i , $1 \leq i \leq mn$, обозначим через $q(i)$ такое число, что $u_i(x_1, \dots, x_m) = v_{q(i)}(x_1, \dots, x_m)$.

Для каждого j , $1 \leq j \leq t$, определим булеву функцию $w_j(x_1, \dots, x_{mn})$:

$$w_j(x_1, \dots, x_{mn}) = v_j(f_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, f_m(x_1, \dots, x_{mn})).$$

Покажем, что все функции $w_1, \dots, w_t$ содержатся в классе $\mathcal{B}$. Так как каждая из функций w_j — это одна из функций множества $\{u_i(f_1, \dots, f_m) \mid i = 1, \dots, mn\}$, то достаточно доказать, что для каждого i , $1 \leq i \leq mn$, функция $u_i(f_1, \dots, f_m)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$.

— Если $\mathcal{B} = P_2$, то доказываемое свойство для функций $u_1, \dots, u_{mn}$ очевидно;

— если $\mathcal{B} = T_0$, то верны равенства $u_i(f_1(0, \dots, 0), \dots, f_m(0, \dots, 0)) = u_i(0, \dots, 0) = \alpha_i(0) = 0$. Значит $u_i(f_1, \dots, f_m) \in T_0$;

— случай, когда $\mathcal{B} = T_1$, рассматривается аналогично предыдущему случаю;

— случай, когда $\mathcal{B} = T_{01}$, рассматривается аналогично предыдущим случаям;

— если $\mathcal{B} = S$, то необходимо показать, что для любого набора $\tilde{\gamma} \in E_2^{mn}$ верно равенство $u_i(f_1(\tilde{\gamma}), \dots, f_m(\tilde{\gamma})) = \overline{u_i(f_1(\tilde{\gamma}'), \dots, f_m(\tilde{\gamma}'))}$, где $\tilde{\gamma}'$ — набор, двойственный к $\tilde{\gamma}$. Пусть верно равенство $\widehat{F}(\tilde{\gamma}) = \widehat{c}$, где $c \in D(F)$. Тогда, в силу двойственности компонент функции F , верно и равенство $\widehat{F}(\tilde{\gamma}') = \widehat{c'}$, где двоичное представление $\widehat{c'}$ является двойственным к $\widehat{c}$. Поэтому $u_i(f_1(\tilde{\gamma}), \dots, f_m(\tilde{\gamma})) = u_i(c_1, \dots, c_m) = \alpha_i(c)$, а $u_i(f_1(\tilde{\gamma}'), \dots, f_m(\tilde{\gamma}')) = \alpha_i(c')$. Так как наборы $\tilde{\alpha}(c)$ и $\tilde{\alpha}(c')$ являются двойственными, то верно равенство $\alpha_i(c) = \overline{\alpha_i(c')}$. Поэтому $u_i(f_1, \dots, f_m) \in S$, что и требовалось показать;

— случай, когда $\mathcal{B} = S_{01}$, рассматривается аналогично предыдущим случаям.

Как и при доказательстве лемм 3.3 и 3.4, будем рассматривать функцию G из P_k , для которой справедливо соотношение

$$\widehat{G} = \widehat{F}(y_{q(1)}, \dots, y_{q(mn)}).$$

Компоненты функции G существенно зависят только от переменных из множества $\{y_1, \dots, y_t\}$. Поэтому функция G тоже существенно зависит не более, чем от $t \leq 2^k$ переменных. Покажем, что функция G является искомой. Для этого докажем равенство

$$\widehat{G}(w_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, w_t(x_1, \dots, x_{mn})) = \widehat{F}(x_1, \dots, x_{mn}),$$

которое эквивалентно системе равенств:

$$g_j(w_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, w_t(x_1, \dots, x_{mn})) = f_j(x_1, \dots, x_{mn}), \quad j = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим произвольный набор $\tilde{\alpha}$ из E_2^{mn} . Пусть на этом наборе значение двоичного представления функции F равно $\hat{c} = \langle c_1, \dots, c_m \rangle$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} g_j(w_1(\tilde{\alpha}), \dots, w_t(\tilde{\alpha})) &= g_j(v_1(f_1(\tilde{\alpha}), \dots, f_m(\tilde{\alpha})), \dots, v_t(f_1(\tilde{\alpha}), \dots, f_m(\tilde{\alpha}))) = \\ &= g_j(v_1(c_1, \dots, c_m), \dots, v_t(c_1, \dots, c_m)) = \\ &= f_j(v_{q(1)}(c_1, \dots, c_m), \dots, v_{q(mn)}(c_1, \dots, c_m)) = \\ &= f_j(u_1(c_1, \dots, c_m), \dots, u_{mn}(c_1, \dots, c_m)) = \\ &= f_j(\alpha_1(c), \dots, \alpha_{mn}(c)) = f_j(\tilde{\alpha}(c)) = c_j, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Значит, $\hat{F}(\tilde{x}) = \hat{G}(w_1(\tilde{x}), \dots, w_t(\tilde{x}))$, а так как каждая из функций $w_1, \dots, w_t$ содержится в классе $\mathcal{B} = B(R)$, то $F \in [\{G\} \cup R]_{\beta}$. Лемма доказана.

3.2.5. К л а с с ы с б у л е в ы м з а м ы к а н и е м O^2 . Для исследования классов функций из $P_{k|\beta}$ с булевым замыканием O^2 нам потребуется ряд определений.

О п р е д е л е н и е 3.2. Пусть $f, f_1, \dots, f_p$ — булевы функции, зависящие от одного и того же множества переменных. Функцию f будем называть *функционально зависимой от функций $f_1, \dots, f_p$* , если существует p -местная булева функция g такая, что $f = g(f_1, \dots, f_p)$. В ином случае функцию f будем называть *функционально независимой от функций $f_1, \dots, f_p$* . Функции, реализующие константы 0 и 1, будем считать функционально зависимыми от пустого множества функций.

О п р е д е л е н и е 3.3. Если для всех чисел j , $1 \leq j \leq p$, функции f_j являются функционально независимыми от функций $f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_p$, то множество функций $\{f_1, \dots, f_p\}$ будем называть *функционально независимым*.

Л е м м а 3.6. Пусть $A = \{f_1, \dots, f_p\}$ — функционально независимое множество булевых функций и $d(A)$ — число значений булевой вектор-функции $(f_1, \dots, f_p)$. Тогда выполняются соотношения $\lceil \log_2 d(A) \rceil \leq p \leq d(A) - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $d(A)$ — число значений булевой вектор-функции $(f_1, \dots, f_p)$, то очевидно, что верно неравенство $d(A) \leq 2^p$. Поэтому $\log_2 d(A) \leq p$, а так как p является натуральным числом, то $\lceil \log_2 d(A) \rceil \leq p$.

Доказательство соотношения $p \leq d(A) - 1$ будем вести индукцией по p .

Пусть $p = 1$. Тогда функция f_1 не является константой по определению функционально независимого множества. Поэтому $d(A) = 2$, что и требовалось.

Теперь предположим, что для любого функционально независимого множества $A' = \{f_1, \dots, f_s\}$ булевых функций верно соотношение $s \leq d(A') - 1$, где $1 \leq s < p$ и $d(A')$ — число значений булевой вектор-функции $(f_1, \dots, f_s)$.

Покажем, что выполняется соотношение $p \leq d(A) - 1$ для функционально независимого множества $\{f_1, \dots, f_p\}$ булевых функций. Для этого рассмотрим его подмножество $A' = \{f_1, \dots, f_{p-1}\}$. Это функционально независимое множество функций, поэтому по предположению индукции верно соотношение $p - 1 \leq d(A') - 1$. Если для любого вектора $(a_1, \dots, a_{p-1})$ из E_2^{p-1}

на множестве наборов, на которых вектор-функция $(f_1, \dots, f_{p-1})$ принимает значение $(a_1, \dots, a_{p-1})$, функция f_p является константой, то функция f_p является функционально зависимой от функций $f_1, \dots, f_{p-1}$, что неверно. Поэтому найдется вектор $(a_1, \dots, a_{p-1})$ из E_2^{p-1} такой, что на множестве наборов, на которых вектор-функция $(f_1, \dots, f_{p-1})$ принимает значение $(a_1, \dots, a_{p-1})$, функция f_p не является константой. Значит, $d(A) \geq d(A') + 1$, из чего и следует необходимое соотношение.

О п р е д е л е н и е 3.4. Пусть $F \in P_k$ и $\widehat{F} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Множество компонент $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_p}\}$ будем называть *базой функции* F , если данное множество является функционально независимым, а остальные компоненты функции F являются функционально зависимыми от функций $f_{i_1}, \dots, f_{i_p}$.

Л е м м а 3.7. Пусть $F \in P_k$, $\widehat{F} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$, множество $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_p}\}$ является базой функции F и $|D(F)| = r$. Тогда выполняются соотношения $\lceil \log_2 r \rceil \leq p \leq r - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как значение функции F однозначным образом определяется по значениям функций из ее базы, то доказываемые соотношения вытекают из леммы 3.6.

Перейдем теперь к доказательству леммы, на основе которой в дальнейшем будет доказана конечность семейства β -замкнутых классов функций из $P_{k|\beta}$ с булевым замыканием O^2 .

Л е м м а 3.8. Пусть $F \in P_k$, $b(F) \subset O^2$, у функции F есть база, состоящая не более, чем из двух функций, $R \subseteq P_k$ и $B(R) = O^2$. Тогда существует функция G из множества $\{\{F\}\}_\beta$, которая зависит не более чем от 16 переменных и такая, что $F \in \{\{G\} \cup R\}_\beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Двоичное представление функции F обозначим через $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$, а переменные, от которых зависят компоненты функции F — через $x_1, \dots, x_{mn}$ (здесь n — число переменных функции F). Рассмотрим только случай, когда база функции F состоит из двух функций. Случаи, когда база функции F состоит из одной функции или является пустой, рассматриваются аналогично.

Без ограничения общности будем считать, что функции f_1 и f_2 образуют базу функции F . Поскольку все компоненты функции F принадлежат классу O^2 , то на наборе $\tilde{\alpha}_{11} = (1, \dots, 1)$ из E_2^{mn} значения функций f_1 и f_2 равны единице.

В силу утверждения леммы 3.7 верны соотношения $\lceil \log_2 |D(F)| \rceil \leq 2 \leq |D(F)| - 1$. Поэтому $3 \leq |D(F)| \leq 4$. Выберем для функции F специальные наборы $\tilde{\alpha}_{00}, \tilde{\alpha}_{01}, \tilde{\alpha}_{10}$ из E_2^{mn} сначала в случае, когда выполняется равенство $|D(F)| = 4$, а затем и при $|D(F)| = 3$.

1. Пусть $|D(F)| = 4$. Так как функции f_1 и f_2 образуют базу функции F , то вектор-функция $\langle f_1, f_2 \rangle$ принимает все 4 значения. Поэтому найдутся наборы $\tilde{\alpha}_{00}, \tilde{\alpha}_{01}, \tilde{\alpha}_{10}$ такие, что:

	x_1	$\dots$	x_{mn}	$f_1(x_1, \dots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \dots, x_{mn})$
$\tilde{\alpha}_{00}$	$\alpha_{00,1}$	$\dots$	$\alpha_{00,mn}$	0	0
$\tilde{\alpha}_{01}$	$\alpha_{01,1}$	$\dots$	$\alpha_{01,mn}$	0	1
$\tilde{\alpha}_{10}$	$\alpha_{10,1}$	$\dots$	$\alpha_{10,mn}$	1	0
$\tilde{\alpha}_{11}$	1	$\dots$	1	1	1

Если $f_1 \& f_2 \in O^2$, то выберем для дальнейшего доказательства найденные нами наборы $\tilde{\alpha}_{01}$, $\tilde{\alpha}_{10}$. Если $f_1 \& f_2 \notin O^2$, то существуют наборы $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ из E_2^{mn} такие, что у них нет общих нулевых компонент, но при этом выполняется $f_1(\tilde{\gamma}_1) \& f_2(\tilde{\gamma}_1) = f_1(\tilde{\gamma}_2) \& f_2(\tilde{\gamma}_2) = 0$.

Без ограничения общности будем считать, что $f_1(\tilde{\gamma}_1) = 0$. Если $f_1(\tilde{\gamma}_2) = 0$, то для функции f_1 найдены два набора, на которых функция равна 0, но которые не содержат общих нулевых компонент, а следовательно, $f_1 \notin O^2$, что неверно по условиям леммы. Поэтому $f_1(\tilde{\gamma}_2) = 1$ и $f_2(\tilde{\gamma}_2) = 0$. Для функции f_2 аналогичным образом доказывается равенство $f_2(\tilde{\gamma}_1) = 1$.

Так как $f_1(\tilde{\gamma}_1) = f_2(\tilde{\gamma}_2) = 0$ и $f_1(\tilde{\gamma}_2) = f_2(\tilde{\gamma}_1) = 1$, то в качестве рассмотренных выше наборов $\tilde{\alpha}_{01}$ и $\tilde{\alpha}_{10}$ выберем наборы $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$, у которых нет общих нулевых компонент.

2. Пусть $|D(F)| = 3$. Выберем $\tilde{\alpha}_{00}$, $\tilde{\alpha}_{01}$, $\tilde{\alpha}_{10}$.

Так как функции f_1 и f_2 образуют базу, то значение функции F однозначным образом определяется по значению вектор-функции $\langle f_1, f_2 \rangle$. Значит данная вектор-функция принимает ровно 3 значения. Рассмотрим три случая.

а) Предположим сначала, что ни на каком наборе $\tilde{\alpha}$ из E_2^{mn} одновременно не выполняются равенства $f_1(\tilde{\alpha}) = 0$ и $f_2(\tilde{\alpha}) = 0$. Тогда существуют наборы $\tilde{\alpha}_{01}$, $\tilde{\alpha}_{10}$ такие, что:

	x_1	$\dots$	x_{mn}	$f_1(x_1, \dots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \dots, x_{mn})$
—	—	$\dots$	—	0	0
$\tilde{\alpha}_{01}$	$\alpha_{01,1}$	$\dots$	$\alpha_{01,mn}$	0	1
$\tilde{\alpha}_{10}$	$\alpha_{10,1}$	$\dots$	$\alpha_{10,mn}$	1	0
$\tilde{\alpha}_{11}$	1	$\dots$	1	1	1

Если $f_1 \& f_2 \in O^2$, то выберем для дальнейшего доказательства найденные нами наборы $\tilde{\alpha}_{01}$, $\tilde{\alpha}_{10}$. Если $f_1 \& f_2 \notin O^2$, то в качестве наборов $\tilde{\alpha}_{01}$, $\tilde{\alpha}_{10}$ будем использовать наборы $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$, найденные аналогично случаю, когда выполнялось равенство $|D(F)| = 4$.

В качестве набора $\tilde{\alpha}_{00}$ из E_2^{mn} будем рассматривать набор $(1, \dots, 1)$ (он равен набору $\tilde{\alpha}_{11}$, но, как будет видно из дальнейшего доказательства, это допустимо).

б) Пусть ни на каком наборе $\tilde{\alpha}$ из E_2^{mn} одновременно не выполняются равенства $f_1(\tilde{\alpha}) = 0$ и $f_2(\tilde{\alpha}) = 1$. Тогда существуют наборы $\tilde{\alpha}_{00}$, $\tilde{\alpha}_{10}$ такие, что:

	x_1	$\dots$	x_{mn}	$f_1(x_1, \dots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \dots, x_{mn})$
$\tilde{\alpha}_{00}$	$\alpha_{00,1}$	$\dots$	$\alpha_{00,mn}$	0	0
—	—	$\dots$	—	0	1
$\tilde{\alpha}_{10}$	$\alpha_{10,1}$	$\dots$	$\alpha_{10,mn}$	1	0
$\tilde{\alpha}_{11}$	1	$\dots$	1	1	1

В этом случае выберем найденные наборы $\tilde{\alpha}_{00}$, $\tilde{\alpha}_{10}$, а в качестве набора $\tilde{\alpha}_{01}$ выберем набор $(1, \dots, 1)$.

в) Случай, когда ни на каком наборе $\tilde{\alpha}$ из E_2^{mn} одновременно не выполняются равенства $f_1(\tilde{\alpha}) = 1$ и $f_2(\tilde{\alpha}) = 0$, рассматривается аналогично предыдущему.

Далее, для каждого числа i , $1 \leq i \leq mn$, определим булеву функцию $u_i(x_1, x_2)$:

$$u_i(a, b) = \alpha_{ab, i}.$$

Так как все функции из множества $\{u_i(x_1, x_2) \mid i = 1, \dots, mn\}$ зависят только от двух переменных, то число различных функций этого множества не превосходит 16. Обозначим всевозможные такие функции через $v_1(x_1, x_2), \dots, v_t(x_1, x_2)$, где $t \leq 16$, а для каждого i , $1 \leq i \leq mn$, через $q(i)$ обозначим число, определяемое из условия $u_i(x_1, x_2) = v_{q(i)}(x_1, x_2)$.

Для каждого j , $1 \leq j \leq t$, положим

$$w_j(x_1, \dots, x_{mn}) = v_j(f_1(x_1, \dots, x_{mn}), f_2(x_1, \dots, x_{mn})).$$

Покажем, что все функции $w_1, \dots, w_t$ содержатся в классе O^2 . Поскольку каждая из функций w_j — это одна из функций множества $\{u_i(f_1, f_2) \mid i = 1, \dots, mn\}$, то достаточно доказать, что для каждого i , $1 \leq i \leq mn$, функция $u_i(f_1, f_2)$ принадлежит классу O^2 . Отдельно рассмотрим разные случаи.

1. Пусть сначала $|D(F)| = 4$.

Если $f_1 \& f_2 \in O^2$, то по построению функции u_i выполняется неравенство $u_i(x_1, x_2) \geq x_1 \& x_2$. Поэтому $u_i(f_1, f_2) \geq f_1 \& f_2$, а значит, в силу свойств функций из класса O^2 функция $u_i(f_1, f_2)$ тоже принадлежит классу O^2 .

Если $f_1 \& f_2 \notin O^2$, то у наборов $\tilde{\alpha}_{01}$ и $\tilde{\alpha}_{10}$ нет общих нулевых компонент по построению. Поэтому для функции u_i выполняется хотя бы одно из соотношений $u_i(0, 1) = 1$ и $u_i(1, 0) = 1$. Но тогда $u_i \geq x_1$ или $u_i \geq x_2$, а значит, $u_i(f_1, f_2)$ мажорирует либо функцию f_1 , либо f_2 , которые содержатся в классе O^2 . Поэтому $u_i(f_1, f_2) \in O^2$.

2. Пусть теперь $|D(F)| = 3$. Снова рассмотрим несколько случаев.

а) Вектор-функция $\langle f_1, f_2 \rangle$ не принимает значения $\langle 0, 0 \rangle$. Данный случай рассматривается аналогично случаю $|D(F)| = 4$.

б) Вектор-функция $\langle f_1, f_2 \rangle$ не принимает значения $\langle 0, 1 \rangle$. Тогда верно равенство $\tilde{\alpha}_{01} = \tilde{\alpha}_{11} = (1, \dots, 1)$, и имеет место соотношение $u_i(x_1, x_2) \geq x_2$. Поэтому $u_i(f_1, f_2) \geq f_2$ и $u_i(f_1, f_2) \in O^2$.

в) Случай, когда вектор-функция $\langle f_1, f_2 \rangle$ не принимает значения $\langle 1, 0 \rangle$, рассматривается аналогично предыдущему.

Как и при доказательстве лемм 3.3, 3.4 и 3.5, рассмотрим функцию G из P_k , имеющую следующее двоичное представление:

$$\hat{G} = \hat{F}(y_{q(1)}, \dots, y_{q(mn)}).$$

По построению компоненты функции G существенно зависят от переменных из множества $\{y_1, \dots, y_t\}$, поэтому функция G тоже существенно зависит не более чем от t переменных, где $t \leq 16$. Также отметим, что поскольку у функции F базой является множество $\{f_1, f_2\}$, то у функции G найдется база, которая содержится в множестве $\{g_1, g_2\}$.

Покажем, что функция G является искомой. Для этого докажем равенство

$$\hat{G}(w_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, w_t(x_1, \dots, x_{mn})) = \hat{F}(x_1, \dots, x_{mn}).$$

Так как у функции F базой является множество $\{f_1, f_2\}$, а у функции G найдется база в множестве $\{g_1, g_2\}$, то достаточно доказать равенства

$$g_j(w_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, w_t(x_1, \dots, x_{mn})) = f_j(x_1, \dots, x_{mn}), \quad j = 1, 2.$$

Для этого рассмотрим произвольный набор $\tilde{\alpha}$ из E_2^{mn} . Пусть на этом наборе значение функции f_1 равно a , а значение функции f_2 равно b . Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} g_1(w_1(\tilde{\alpha}), \dots, w_t(\tilde{\alpha})) &= g_1(v_1(f_1(\tilde{\alpha}), f_2(\tilde{\alpha})), \dots, v_t(f_1(\tilde{\alpha}), f_2(\tilde{\alpha}))) = \\ &= g_1(v_1(a, b), \dots, v_t(a, b)) = f_1(v_{q(1)}(a, b), \dots, v_{q(mn)}(a, b)) = \\ &= f_1(u_1(a, b), \dots, u_{mn}(a, b)) = f_1(\alpha_{ab,1}, \dots, \alpha_{ab,mn}) = \\ &= f_1(\tilde{\alpha}_{ab}) = a, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказывается и соотношение для функции f_2 .

Значит, $\hat{F}(\tilde{x}) = \hat{G}(w_1(\tilde{x}), \dots, w_s(\tilde{x}))$, а так как каждая из функций $w_1, \dots, w_t$ содержится в классе O^2 , который равен $B(R)$, то $F \in [\{G\} \cup R]_\beta$. Лемма доказана.

3.2.6. Классы с булевым замыканием в M или T_{01} .

Лемма 3.9. Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций, такой, что $\mathcal{B} \subseteq M$ или $\mathcal{B} \subseteq T_{01}$. Пусть также $F \in P_{k|3}$, $b(F) \subseteq \mathcal{B}$, $R \subseteq P_k$ и $B(R) = \mathcal{B}$. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_\beta$, которая зависит не более чем от одной переменной и такая, что $F \in [\{G\} \cup R]_\beta$.

Доказательство. Обозначим через n число переменных функции F , а через $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ — ее двоичное представление. Если функция F является константой, то в качестве функции G можно взять функцию, реализующую ту же константу, что и функция F , и зависящую от одной переменной.

Пусть теперь функция F принимает два или три значения. Тогда среди ее компонент содержатся не только константы. Так как $b(F) \subseteq \mathcal{B}$, то класс $\mathcal{B}$ булевых функций содержит селекторные функции (см., например, [57]).

Рассмотрим случай, когда функция F принимает три значения (более простой случай, когда функция F принимает два значения, рассматривается аналогично). По лемме 3.7 у нее найдется база, состоящая ровно из двух функций. Без ограничения общности будем считать, что базой является множество $\{f_1, f_2\}$. Функции f_1 и f_2 не являются функционально зависимыми друг от друга. Поэтому они не равны и не являются константами. Если класс $\mathcal{B}$ содержится в классе монотонных функций, то функции f_1 и f_2 являются монотонными, а значит, верны равенства $f_1(0, \dots, 0) = f_2(0, \dots, 0) = 0$ и $f_1(1, \dots, 1) = f_2(1, \dots, 1) = 1$. Если класс $\mathcal{B}$ содержится в классе T_{01} , то выполняются аналогичные равенства.

Так как функции f_1 и f_2 не равны друг другу, то найдется набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{mn})$ из E_2^{mn} , на котором значения данных функций различны. Без ограничения общности будем считать, что $f_1(\tilde{\alpha}) = 1$, а $f_2(\tilde{\alpha}) = 0$. Поскольку функция F принимает ровно 3 значения, а значения ее компонент $f_3, \dots, f_m$ однозначным образом определяются по значениям функций f_1 и f_2 ,

то двоичное представление функции F принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} &\langle 0, 0, f_3(0, \dots, 0), \dots, f_m(0, \dots, 0) \rangle, \\ &\langle 1, 0, f_3(\alpha_1, \dots, \alpha_{mn}), \dots, f_m(\alpha_1, \dots, \alpha_{mn}) \rangle, \\ &\langle 1, 1, f_3(1, \dots, 1), \dots, f_m(1, \dots, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Для каждого числа i , $1 \leq i \leq mn$, определим булеву функцию $h_i(x_1, x_2)$ следующим образом: если $\alpha_i = 1$, то $h_i = x_1$, а если $\alpha_i = 0$, то $h_i = x_2$. Рассмотрим вектор-функцию $\langle f_1, \dots, f_m \rangle(h_1, \dots, h_{mn})$. Она является двоичным представлением некоторой функции G из P_k . Так как $m \geq 2$, а функции $h_1, \dots, h_{mn}$ зависят от булевых переменных x_1 и x_2 , то функция G зависит от одной переменной, а поскольку все функции $h_1, \dots, h_{mn}$ являются селекторными, то они содержатся в множестве $B(\{F\})$, а значит, функция G принадлежит множеству $[\{F\}]_\beta$. Покажем, что она искомая.

Обозначим через $\langle g_1, \dots, g_m \rangle$ двоичное представление функции G . Так как функции $f_3, \dots, f_m$ являются функционально зависимыми от функций f_1 и f_2 , то по построению функции G ее компоненты $g_3, \dots, g_m$ являются функционально зависимыми от функций g_1 и g_2 . Причем данные функциональные зависимости могут быть заданы теми же функциями.

Докажем соотношение $\hat{F} = \langle g_1, \dots, g_m \rangle(f_1, \dots, f_m)$. Так как функции $f_3, \dots, f_m$ являются функционально зависимыми от функций f_1 и f_2 , а функции $g_3, \dots, g_m$ от функций g_1 и g_2 , то достаточно доказать справедливость равенств $f_1 = g_1(f_1, \dots, f_m)$ и $f_2 = g_2(f_1, \dots, f_m)$. А так как компоненты функции G существенно зависят только от переменных x_1 и x_2 , то достаточно показать, что $f_1 = g'_1(f_1, f_2)$ и $f_2 = g'_2(f_1, f_2)$, где функции g'_1, g'_2 получены удалением несущественных переменных $x_3, \dots, x_m$ из функций g_1 и g_2 соответственно. Для этого рассмотрим произвольный набор $\tilde{\gamma}$ из E_2^{mn} . Имеют место три случая.

— Если $f_1(\tilde{\gamma}) = f_2(\tilde{\gamma}) = 0$, то $g'_j(0, 0) = f_j(h_1(0, 0), \dots, h_{mn}(0, 0)) = f_j(0, \dots, 0) = 0$, $j = 1, 2$, что и требовалось;

— случай, когда $f_1(\tilde{\gamma}) = f_2(\tilde{\gamma}) = 1$, рассматривается аналогично предыдущему;

— если $f_1(\tilde{\gamma}) = 1$, а $f_2(\tilde{\gamma}) = 0$, то $g_1(1, 0) = f_1(h_1(1, 0), \dots, h_{mn}(1, 0)) = f_1(\tilde{\alpha}) = 1$, а $g_2(1, 0) = f_2(\tilde{\alpha}) = 0$, что и было необходимо.

Таким образом, верно равенство $\hat{F} = \langle g_1, \dots, g_m \rangle(f_1, \dots, f_m)$, а поскольку каждая из функций $f_1, \dots, f_m$ содержится в классе $\mathcal{B} = B(R)$, то $F \in \{\{G\} \cup R\}_\beta$, что и требовалось доказать.

3.2.7. Множества $C(k, k)$ и $C(k, 3)$. В данном пункте будут найдены некоторые классы булевых функций из множеств $C(k, k)$ или $C(k, 3)$ при $k = 2^m$, $m \geq 2$. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 3.10. Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций. Тогда существует такое число $r = r(\mathcal{B})$, что в любом β -замкнутом классе $\mathcal{A}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ найдется множество R функций, каждая из функций которого зависит не более чем от r переменных и такое, что справедливо равенство $B(R) = \mathcal{B}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — β -замкнутый класс функций из P_k , такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Если все функции из класса $\mathcal{A}$ являются константами, то утверждение леммы очевидно, а в качестве r можно взять число 1.

Пусть теперь среди функций класса $\mathcal{A}$ имеется хотя бы одна функция, принимающая не менее двух значений. Обозначим ее через F . Тогда по лемме 2.3 в классе $[\{F\}]_\beta$ существует функция H , зависящая от одной переменной, и множество компонент которой содержит селекторную функцию. Так как $F \in \mathcal{A}$ и класс $\mathcal{A}$ является β -замкнутым, то $H \in \mathcal{A}$.

Известно, что у класса $\mathcal{B}$ существует конечный базис. Пусть он состоит из функций $g_1, \dots, g_s$. Обозначим переменные, от которых зависят эти функции, через $x_1^1, \dots, x_1^r$, где r является максимальным числом переменных у данных функций. Для каждого j , $1 \leq j \leq s$, определим функцию G_j из P_k через ее двоичное представление: $\widehat{G}_j = \widehat{H}(\langle g_j, \dots, g_j \rangle)$. Тогда функция G_j зависит не более чем от r переменных, а так как $\{g_1, \dots, g_s\} \subseteq \mathcal{B} = B(\mathcal{A})$ и класс $\mathcal{A}$ является β -замкнутым, то $G_j \in \mathcal{A}$.

Поскольку множество компонент функции H содержит селекторную функцию, то $g_j \in b(G_j)$, $j = 1, \dots, s$. Поэтому верно равенство $B(\{G_1, \dots, G_s\}) = \mathcal{B}$, что и требовалось доказать.

Теорема 3.2. Пусть $k = 2^m$, $m \geq 2$. Тогда каждый из классов P_2 , T_0 , T_1 , T_{01} , S , S_{01} , L , L_0 , L_1 , SL , L_{01} , D , D_0 , D_1 , D_{01} , K , K_0 , K_1 , K_{01} , U , SU , MU , U_0 , U_1 , U_{01} , C , C_0 , C_1 булевых функций содержится в множестве $C(k, k)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов булевых функций из формулировки теоремы. Рассмотрим произвольный β -замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из P_k , такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. В силу утверждения леммы 3.10 в классе $\mathcal{A}$ существует конечное множество R функций такое, что $B(R) = \mathcal{B}$, и каждая из функций данного множества зависит не более чем от r переменных, где $r = r(\mathcal{B})$.

В силу утверждения леммы 3.2 (если $\mathcal{B}$ — один из классов U , SU , MU , U_0 , U_1 , U_{01} , C , C_0 , C_1), леммы 3.3 (если $\mathcal{B}$ — один из классов D , D_0 , D_1 , D_{01} или двойственных им K , K_1 , K_0 , K_{01}), леммы 3.4 (если $\mathcal{B}$ — один из классов L , L_0 , L_1 , SL , L_{01}), леммы 3.5 (если $\mathcal{B}$ — один из классов P_2 , T_0 , T_1 , T_{01} , S , S_{01}) для каждой функции F из множества $\mathcal{A}$ существует функция G_F из $\mathcal{A}$, которая зависит не более чем от $\max(m, k, 2k, 2^k) = 2^k$ переменных и такая, что $F \in [\{G_F\} \cup R]_\beta$. Поэтому $\mathcal{A} \subseteq [R \cup \{G_F \mid F \in \mathcal{A}\}]_\beta$. Но каждая из функций множеств R и $\{G_F \mid F \in \mathcal{A}\}$ содержится в $\mathcal{A}$. Поэтому справедливо равенство $\mathcal{A} = [R \cup \{G_F \mid F \in \mathcal{A}\}]_\beta$.

Число функций из $\mathcal{A}$, зависящих не более чем от 2^k переменных, конечно. Значит, конечно и множество $\{G_F \mid F \in \mathcal{A}\}$. Следовательно, у класса $\mathcal{A}$ имеется конечный базис, все функции которого зависят не более чем от $\max(r, 2^k)$ переменных.

Так как r и k являются константами, то число функций из P_k , зависящих не более, чем от $\max(r, 2^k)$ фиксированных переменных, является конечным. Поэтому конечно и число их подмножеств. Значит, для каждого из рассматриваемых классов $\mathcal{B}$ число различных β -замкнутых классов функций из P_k с булевым замыканием $\mathcal{B}$ является конечным и, согласно определению 3.1, верно включение $\mathcal{B} \in C(k, k)$.

Теорема 3.3. Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый класс булевых функций, который равен классу O^2 , классу I^2 или содержится в классе M или в классе T_{01} . Тогда $\mathcal{B} \in C(k, 3)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов булевых функций из формулировки теоремы. Рассмотрим произвольный β -замкнутый класс $\mathcal{A}$

функций из $P_{k|3}$, такой, что $B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. В силу утверждения леммы 3.10 в классе $\mathcal{A}$ существует конечное множество R функций такое, что $B(R) = \mathcal{B}$ и каждая из функций данного множества зависит не более чем от r переменных, где $r = r(\mathcal{B})$.

Пусть сначала $\mathcal{B} = O^2$. Так как $\mathcal{A} \subseteq P_{k|3}$, то в силу утверждения леммы 3.7 у каждой функции F из $\mathcal{B}$ найдется база, состоящая не более чем из двух функций. Значит, в силу утверждения леммы 3.8 для каждой функции F существует функция G_F из $\mathcal{A}$, которая зависит не более чем от 16 переменных и такая, что $F \in [\{G_F\} \cup R]_{\mathcal{B}}$. Аналогичное утверждение можно получить и для классов $\mathcal{B}$ булевых функций, которые содержатся в классе M или T_{01} , в силу леммы 3.9. Если же $\mathcal{B} = I^2$, то данное утверждение следует из двойственности классов I^2 и O^2 .

Как и при доказательстве теоремы 3.2, легко показать, что у класса $\mathcal{A}$ имеется конечный базис, зависящий не более чем от $\max(r, 16)$ переменных, а в качестве следствия получить, что $\mathcal{B} \in C(k, 3)$.

В теоремах 3.2 и 3.3 найдены классы булевых функций, которые содержатся в множествах $C(k, k)$ и $C(k, 3)$. Так как $C(k, k) \subseteq C(k, 3)$, то классами булевых функций, для которых еще не исследованы мощности семейств β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с соответствующим булевым замыканием, являются классы I^μ и O^μ при $\mu \geq 3$. Далее будет показано, что все данные классы принадлежат множеству $Q(k, 3)$.

3.3. Семейство β -замкнутых классов с булевым замыканием O^μ , $\mu \geq 3$. Для класса O^μ булевых функций, где $\mu \geq 3$, примером базиса является множество функций $\{\bar{x}_1 \vee x_2, \bigvee_{1 \leq i < j \leq \mu+1} x_i \& x_j\}$ (см., например, [57]). Для каждого $\mu \geq 3$ определим функции $S(x^1, x^2)$ и $S^\mu(x^1, \dots, x^{\mu+1})$ из P_k . Для каждого t , $1 \leq t \leq m$, положим

$$b_t(S) = \bar{x}_1^1 \vee x_1^2,$$

$$b_t(S^\mu) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq \mu+1} x_1^i \& x_1^j.$$

Поскольку все компоненты данных функций равны между собой, то выполняется соотношение $D(S) = D(S^\mu) = \{0, k-1\}$. Также верно равенство $B(\{S, S^\mu\}) = O^\mu$.

Для каждой пары чисел n и a , удовлетворяющих неравенствам $n \geq a \geq 1$, определим n -местную булеву функцию ω_n^a следующим образом:

$$\omega_n^a(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 0, & \text{если среди компонент } \tilde{\alpha} \text{ меньше } a \text{ единиц;} \\ 1, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Для каждого числа n , $n \geq 3$, определим функцию W_n из P_k , зависящую от переменных $x^1, \dots, x^{2n+2}$, через ее компоненты:

$$b_1(W_n) = \omega_{2n+2}^3(x_1^1, \dots, x_1^{2n+1}, x_1^{2n+2}),$$

$$b_i(W_n) = x_1^{2n+2} \vee \omega_{2n+1}^{n+1}(x_1^1, \dots, x_1^{2n+1}) \vee \bar{b}_1(W_n), \quad i = 2, \dots, m.$$

Будем обозначать $b_1(W_n)$ через u_n , а $b_i(W_n)$, $i = 2, \dots, m$ — через v_n . Поскольку компоненты функции W_n существенно зависят только от булевых

переменных $x_1^1, \dots, x_1^{2n+1}$ и x_1^{2n+2} , то будем обозначать эти переменные через $x_1, \dots, x_{2n+1}$ и y соответственно. Тогда компоненты функции W_n принимают вид

$$u_n = \omega_{2n+2}^3(x_1, \dots, x_{2n+1}, y),$$

$$v_n = y \vee \omega_{2n+1}^{n+1}(x_1, \dots, x_{2n+1}) \vee \overline{u_n}.$$

Установим некоторые свойства функций W_n для каждого $n \geq 3$.

1. Справедливо включение $u_n \in MO_0^n$.

Функция u_n является монотонной и на нулевом наборе принимает значение 0. Поэтому $u_n \in M_0$. Покажем, что $u_n \in O^n$. Для этого рассмотрим произвольные n наборов из $E_2^{m(2n+2)}$, на которых функция u_n равна 0. Каждый из таких наборов содержит не более 2 единиц среди компонент под номерами $1, m+1, \dots, 2mn+1, m(2n+1)+1$ (данным компонентам соответствуют переменные $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}, y$ соответственно), а значит, общее число единиц среди рассматриваемых компонент не превышает $2n$. Поэтому в этих наборах как минимум две из рассматриваемых компонент будут равны 0. Значит $u_n \in MO_0^n$.

Также несложно показать, что $u_n \notin MO_0^{n+1}$.

2. Справедливо включение $v_n \in O^\infty$.

Функция v_n мажорирует переменную y , а следовательно, принадлежит классу O^∞ .

3. Функция W_n принимает три значения.

Так как $b_2(W_n) = \dots = b_m(W_n)$, то двоичное представление функции W_n может принимать только значения из множества

$$\{\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle, \langle 0, 1, \dots, 1 \rangle, \langle 1, 0, \dots, 0 \rangle, \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle\}.$$

Поскольку верно равенство $u_n \vee v_n = 1$, то $\widehat{W_n}$ не может принимать значения $\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$. Покажем, что $\widehat{W_n}$ принимает остальные три значения.

— Пусть $\tilde{\alpha}$ — нулевой набор из $E_2^{m(2n+2)}$. Тогда $u_n(\tilde{\alpha}) = 0$, а $v_n(\tilde{\alpha}) = 1$;
 — пусть $\tilde{\alpha}$ — единичный набор из $E_2^{m(2n+2)}$. Тогда $u_n(\tilde{\alpha}) = 1$, а $v_n(\tilde{\alpha}) = 1$;
 — пусть $\tilde{\alpha}$ — набор из $E_2^{m(2n+2)}$, содержащий ровно три единицы среди его компонент $\alpha_1, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{2mn+1}$, а все остальные компоненты которого равны 0. Тогда $u_n(\tilde{\alpha}) = 1$. Так как компонента $\alpha_{m(2n+1)+1}$, соответствующая переменной y , равна 0, и так как $n \geq 3$, то $v_n(\tilde{\alpha}) = \omega_{2n+1}^{n+1}(\alpha_1, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{2mn+1}) = 0$.

Л е м м а 3.11. Для любого $n \geq 3$ верно соотношение

$$W_n \notin \left[\{S\} \cup \{S^\mu \mid \mu \geq 3\} \cup \{W_i \mid i \geq 3, i \neq n\} \right]_\beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\{S\} \cup \{S^\mu \mid \mu \geq 3\} \cup \{W_i \mid i \geq 3, i \neq n\}$ обозначим через $\mathcal{A}$. По свойствам функций S и S^μ , $\mu \geq 3$, и W_i , $i \geq 3$, имеет место соотношение $B(\mathcal{A}) = O^3$.

Предположим, что $W_n \in [\mathcal{A}]_\beta$. Тогда найдутся функция H из множества $\mathcal{A}$ и функции $q_1, \dots, q_{ml}$ из множества $B(\mathcal{A})$ (здесь l — число переменных функции H) такие, что выполняется следующее равенство:

$$\widehat{W_n} = \widehat{H}(\langle q_1, \dots, q_m \rangle, \dots, \langle q_{m(l-1)+1}, \dots, q_{ml} \rangle). \quad (5)$$

Так как $|D(W_n)| = 3$, то функция H должна принимать как минимум три значения. Поэтому $H \neq S$ и $H \neq S^\mu$ для всех $\mu \geq 3$. Значит H равна W_p для некоторого числа p , $p \geq 3$, $p \neq n$, а следовательно, $l = 2p + 2$.

Для каждого i , $1 \leq i \leq 2p + 1$, обозначим булеву функцию $q_{m(i-1)+1}$ через g_i , а функцию $q_{m(2p+1)+1}$ — через h . Каждая из данных функций принадлежит классу O^3 , и без ограничения общности можно считать, что переменными данных функций являются только существенные переменные для компонент W_n (если есть несущественные, то их можно заменить на произвольную существенную переменную и при этом нужное равенство сохранится). Поэтому функции $g_1, \dots, g_{2p+1}, h$ зависят только от переменных из множества $\{x_1, \dots, x_{2n+1}, y\}$. В новых обозначениях равенство (5) можно записать следующим образом:

$$u_n = \omega_{2p+2}^3(g_1, \dots, g_{2p+1}, h); \quad (6)$$

$$v_n = h \vee \omega_{2p+1}^{p+1}(g_1, \dots, g_{2p+1}) \vee \overline{\omega_{2p+2}^3(g_1, \dots, g_{2p+1}, h)}. \quad (7)$$

Покажем сначала, что функция h мажорирует функцию $x_i \& y$ для любого $i = 1, \dots, 2n + 1$. Для этого рассмотрим наборы $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$, $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$ и $\tilde{\gamma}_{2n+1}$ из E_2^{2n+2} , имеющие вид:

	1	...	n	$n+1$	...	$2n$	$2n+1$	$2n+2$
$\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$	1	...	1	0	...	0	0	0
$\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$	0	...	0	1	...	1	0	0
$\tilde{\gamma}_{2n+1}$	0	...	0	0	...	0	1	1

На наборах $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$, $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$ функция v_n равна 0, так как компонента γ_{2n+2} , соответствующая переменной y , равна 0, а среди остальных компонент ровно n единиц. Поскольку $v_n \geq h$, то $h(\tilde{\gamma}_{2n+1,1}) = h(\tilde{\gamma}_{2n+1,2}) = 0$. Если функция h равна 0 на каком-нибудь наборе $\tilde{\gamma}'$, большем или равном $\tilde{\gamma}_{2n+1}$, то у наборов $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$, $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$, $\tilde{\gamma}'$ не будет общих нулевых компонент, а следовательно, $h \notin O^3$, что неверно. Поэтому $h \geq x_{2n+1} \& y$. Аналогичным образом можно установить, что функция h мажорирует функцию $x_i \& y$ для любого $i = 1, \dots, 2n$.

Покажем теперь, что для каждого числа i , $1 \leq i \leq 2n + 1$, найдется число j_i , $1 \leq j_i \leq 2p + 1$, такое, что $g_{j_i} \geq x_i \& y$. Для этого снова рассмотрим наборы $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$, $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$ и $\tilde{\gamma}_{2n+1}$. На наборах $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$ и $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$ функция v_n равна 0, а значит среди значений $g_1(\tilde{\gamma}_{2n+1,c}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{\gamma}_{2n+1,c})$ должно быть не более p единиц, $c = 1, 2$. Так как число функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$ равно $2p + 1$, то среди них найдется функция, равная 0 на наборах $\tilde{\gamma}_{2n+1,1}$ и $\tilde{\gamma}_{2n+1,2}$. Допустим это функция $g_{j_{2n+1}}$, где $1 \leq j_{2n+1} \leq 2p + 1$. Поскольку $g_{j_{2n+1}} \in O^3$, то данная функция равна 1 на любом наборе, большем или равном набору $\tilde{\gamma}_{2n+1}$. Значит $g_{j_{2n+1}} \geq x_{2n+1} \& y$. Аналогичные утверждения можно получить и для $i = 1, \dots, 2n$.

Предположим, что среди функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$ найдутся как минимум две функции, равные 1 на наборе $\tilde{\gamma}_{2n+1}$. На данном наборе функция h равна 1, а значит, $\omega_{2p+2}^3(g_1(\tilde{\gamma}_{2n+1}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{\gamma}_{2n+1}), h(\tilde{\gamma}_{2n+1})) = 1$. Но $u_n(\tilde{\gamma}_{2n+1}) = 0$, а следовательно $u_n \neq \omega_{2p+2}^3(g_1, \dots, g_{2p+1}, h)$. Пришли к противоречию. Поэтому среди функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$ не может существовать двух

функций, мажорирующих функцию $x_{2n+1} \& y$. Таким образом, для каждого числа i , $1 \leq i \leq 2n+1$, найдется ровно одно число j_i , $1 \leq j_i \leq 2p+1$, такое, что выполняется неравенство $g_{j_i} \geq x_i \& y$.

Далее предположим, что среди функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$ найдется функция, которая не мажорирует функцию $x_i \& y$ для всех $i = 1, \dots, 2n+1$. Обозначим данную функцию через g . Покажем, что в этом случае не выполняется как минимум одно из равенств: (6) или (7).

Обозначим через $M(n)$ семейство всех подмножеств множества $\{1, \dots, 2n+1\}$ мощности n . Каждому множеству $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ из $M(n)$ сопоставим набор из E_2^{2n+2} , у которого компоненты с номерами $a_1, \dots, a_n$ равны 1, а остальные компоненты равны 0. Такой набор будем обозначать через $\tilde{A}$. Отметим, что у данного набора компонента с номером $2n+2$, соответствующая переменной y , равна 0.

Рассмотрим $A, B \in M(n)$. Пусть сначала $A \cap B = \emptyset$. Через r обозначим число из множества $\{1, \dots, 2n+1\}$, которое не входит в $A \cup B$. Рассмотрим наборы $\tilde{A}, \tilde{B}$, а также набор $\tilde{\gamma}_r$, у которого только компоненты с номерами r и $2n+2$ равны 1:

	a_1	...	a_n	b_1	...	b_n	r	$2n+2$
$\tilde{A}$	1	...	1	0	...	0	0	0
$\tilde{B}$	0	...	0	1	...	1	0	0
$\tilde{\gamma}_r$	0	...	0	0	...	0	1	1

Если $g(\tilde{A}) = g(\tilde{B}) = 0$, то справедливо соотношение $g \geq x_r \& y$ (доказательство аналогично доказательству соотношения $h \geq x_{2n+1} \& y$), что неверно в силу выбора функции g .

Предположим, что $g(\tilde{A}) = g(\tilde{B}) = 1$. Так как $v_n(\tilde{A}) = v_n(\tilde{B}) = 0$, то среди значений $g_1(\tilde{A}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{A})$ содержится не более p единиц, как и среди значений $g_1(\tilde{B}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{B})$. Так как $g = g_j$ для некоторого j , $1 \leq j \leq 2p+1$, и $g(\tilde{A}) = 1$, то среди значений $g_1(\tilde{A}), \dots, g_{j-1}(\tilde{A}), g_{j+1}(\tilde{A}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{A})$ содержится не более $p-1$ единицы. Аналогично и для набора $\tilde{B}$. Значит, как минимум две функции среди $g_1, \dots, g_{2p+1}$ равны 0 на наборах $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$. Но тогда обе эти функции должны мажорировать функцию $x_r \& y$, что неверно по доказанным выше утверждениям. Таким образом для любых множеств A и B из $M(n)$, удовлетворяющих условию $A \cap B = \emptyset$, выполняется соотношение $g(\tilde{A}) \neq g(\tilde{B})$.

Ровно на одном из множеств $\{1, \dots, n\}$, $\{n+1, \dots, 2n\}$ функция g равна 1. Аналогично для множеств $\{2, \dots, n+1\}$, $\{n+2, \dots, 2n+1\}$. Значит, существуют два различных множества A и B из $M(n)$, для которых справедливы равенства $g(\tilde{A}) = g(\tilde{B}) = 1$. По доказанному выше данные множества пересекаются. Построим на их основе два множества A' и B' из $M(n)$, для которых $g(\tilde{A}') = g(\tilde{B}') = 1$, и чье пересечение равно одному числу.

Пусть $A \cap B = \{c_1, \dots, c_q\}$ для некоторого $q \geq 1$. Тогда верны равенства $A = \{c_1, \dots, c_q, a_1, \dots, a_{n-q}\}$ и $B = \{c_1, \dots, c_q, b_1, \dots, b_{n-q}\}$, где множества $\{a_1, \dots, a_{n-q}\}$ и $\{b_1, \dots, b_{n-q}\}$ не пересекаются. Через $r_1, \dots, r_{q+1}$ обозначим все числа от 1 до $2n+1$, не входящие в $A \cup B$ (их количество равно $2n+1 - n - (n-q)$, т. е. $q+1$).

Доказательство будем вести индукцией по значению числа q . Если $q = 1$, то A и B и есть искомые множества. Предположим, что мы построили искомые множества для всех чисел s , $1 \leq s < q$. Построим их и для числа q . Для этого рассмотрим множества $A_1 = \{c_1, \dots, c_{q-1}, a_1, \dots, a_{n-q}, r_1\}$ и $B_1 = \{c_q, b_1, \dots, b_{n-q}, r_2, \dots, r_q\}$ и соответствующие им наборы.

	c_1	...	c_{q-1}	a_1	...	a_{n-q}	r_1	c_q	b_1	...	b_{n-q}	r_2	...	r_q	r_{q+1}	$2n+2$
$\tilde{A}_1$	1	...	1	1	...	1	1	0	0	...	0	0	...	0	0	0
$\tilde{B}_1$	0	...	0	0	...	0	0	1	1	...	1	1	...	1	0	0

Так как $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, то ровно на одном из наборов $\tilde{A}_1$ и $\tilde{B}_1$ значение функции g равно 1. Если $g(\tilde{B}_1) = 1$, то $A \cap B = \{c_q\}$ и A и B_1 — искомые множества. Если $g(\tilde{A}_1) = 1$, то $A_1 \cap B = \{c_1, \dots, c_{q-1}\}$ и, по предположению индукции, из множеств A_1 и B можно получить множества A' и B' , для которых $g(\tilde{A}') = g(\tilde{B}') = 1$ и чье пересечение равно одному числу.

Рассмотрим теперь множества A' и B' из $M(n)$, для которых верны равенства $g(\tilde{A}') = g(\tilde{B}') = 1$ и $A' \cap B' = \{c\}$ для некоторого c из множества $\{1, \dots, 2n+1\}$. Тогда $A' = \{c, a_1, \dots, a_{n-1}\}$, $B' = \{c, b_1, \dots, b_{n-1}\}$ и $\{a_1, \dots, a_{n-1}\} \cap \{b_1, \dots, b_{n-1}\} = \emptyset$. Через r_1, r_2 обозначим числа от 1 до $2n+1$, не входящие в $A' \cup B'$. Положим $A'' = \{a_1, \dots, a_{n-1}, r_1\}$, $B'' = \{b_1, \dots, b_{n-1}, r_2\}$.

	a_1	...	a_{n-1}	r_1	b_1	...	b_{n-1}	r_2	c	$2n+2$
$\tilde{A}''$	1	...	1	1	0	...	0	0	0	0
$\tilde{B}''$	0	...	0	0	1	...	1	1	0	0

Так как $A'' \cap B'' = \emptyset$, то ровно на одном из наборов $\tilde{A}''$ и $\tilde{B}''$ значение функции g равно 1. Без ограничения общности будем считать, что $g(\tilde{A}'') = 1$. Для множеств A'' и B' справедливы соотношения $A'' \cap B' = \emptyset$ и $g(\tilde{A}'') = g(\tilde{B}') = 1$. Но это неверно по свойствам функции g . Значит, такой функции g не существует. Поэтому среди функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$ нет функций, которые не мажорируют хотя бы одну из функций $x_1 \& y, \dots, x_{2n+1} \& y$.

Предположим, что $p > n$. Так как каждая из функций g_j , $1 \leq j \leq 2p+1$, мажорирует функцию $x_{i_j} \& y$ для некоторого i_j , $1 \leq i_j \leq 2n+1$, то найдется такое число i , $1 \leq i \leq 2n+1$, что функцию $x_i \& y$ мажорируют несколько функций из множества $g_1, \dots, g_{2p+1}$. Но это неверно по доказанным свойствам для этих функций. Значит, $p < n$.

Так как $p < n$, то среди функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$ найдется функция, которая мажорирует хотя бы две функции из множества $\{x_i \& y \mid i = 1, \dots, 2n+1\}$. Обозначим эту функцию через g' , а мажорируемые ей функции из заданного множества — через $x_{s_1} \& y, \dots, x_{s_d} \& y$, $2 \leq d \leq 2n+1$. Поскольку функции $g_1, \dots, g_{2p+1}$ мажорируют различные функции из рассматриваемого множества, то $d \leq 2n+1 - 2p < 2n$.

Пусть $A, B \in M(n)$, $A \cap B = \emptyset$ и $s_1 \notin A \cup B$. Рассмотрим наборы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, а также набор $\tilde{\gamma}_{s_1}$.

	a_1	$\dots$	a_n	b_1	$\dots$	b_n	s_1	$2n+2$
$\tilde{A}$	1	$\dots$	1	0	$\dots$	0	0	0
$\tilde{B}$	0	$\dots$	0	1	$\dots$	1	0	0
$\tilde{\gamma}_{s_1}$	0	$\dots$	0	0	$\dots$	0	1	1

Предположим, что $g'(\tilde{A}) = 1$ или $g'(\tilde{B}) = 1$. Так как $v_n(\tilde{A}) = v_n(\tilde{B}) = 0$, то среди значений $g_1(\tilde{A}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{A})$ содержится не более p единиц, как и среди значений $g_1(\tilde{B}), \dots, g_{2p+1}(\tilde{B})$. Значит, среди функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$ найдется функция, которая равна 0 на наборах $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$. Тогда эта функция мажорирует функцию $x_{s_1} \& y$. Но функцию $x_{s_1} \& y$ может мажорировать только одна из функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$, которой уже является функция g' . Значит, $g'(\tilde{A}) = g'(\tilde{B}) = 0$. Обобщая данное утверждение, получим, что для любого множества A из $M(n)$, которое удовлетворяет условию $t \notin A$, где $t \in \{s_1, \dots, s_d\}$, справедливо равенство $g'(\tilde{A}) = 0$.

Так как $d < 2n$, то найдется число e , $1 \leq e \leq 2n+1$, такое, что g' не мажорирует функцию $x_e \& y$. Без ограничения общности будем считать, что $e = 2n+1$. Рассмотрим подмножества A и B из $M(n)$, которые не содержат числа $2n+1$ и не пересекаются. Тогда $g'(\tilde{A}) \neq g'(\tilde{B})$. Это утверждение доказывается аналогично соответствующему утверждению для рассмотренной выше функции g .

Как и в случае с функцией g , найдутся два различных пересекающихся подмножества A и B множества $\{1, \dots, 2n\}$, для которых $g(\tilde{A}) = g(\tilde{B}) = 1$. На основе данных множеств можно построить два множества A' и B' , удовлетворяющих условию $g'(\tilde{A}') = g'(\tilde{B}') = 1$ и чье пересечение равно одному числу. Доказательство данного утверждения проводится аналогично доказательству соответствующему утверждению для функции g , но с одним отличием — при доказательстве шага индукции в качестве числа r_{q+1} необходимо взять число $2n+1$.

Рассмотрим теперь подмножества A' и B' из $M(n)$, которые не содержат число $2n+1$ и удовлетворяют равенствам $g'(\tilde{A}') = g'(\tilde{B}') = 1$ и $|A' \cap B'| = 1$. Тогда верно хотя бы одно из соотношений: $\{s_1, s_2\} \not\subseteq A'$, $\{s_1, s_2\} \not\subseteq B'$. Без ограничения общности пусть $s_1 \notin A'$. Тогда $A' \in M(n)$ и $s_1 \notin A'$, и в силу свойств функции g' выполняется равенство $g'(\tilde{A}') = 0$. Пришли к противоречию, а значит каждая из функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$ мажорирует ровно одну функцию из множества $\{x_i \& y \mid i = 1, \dots, 2n+1\}$ и p должно равняться n . Поэтому не может выполняться соотношение (5) и функция W_n не содержится в множества $[A]_\beta$.

Теорема 3.4. Пусть $k = 2^m$, где $m \geq 2$. Тогда для каждого $\mu \geq 3$ справедливо соотношение $\{O^\mu, I^\mu\} \subseteq Q(k, 3)$.

Доказательство. Для каждого подмножества T множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \dots\}$ определим β -замкнутый класс функций k -значной логики $\mathcal{W}^\mu(T)$:

$$\mathcal{W}^\mu(T) = \left[\{S\} \cup \{S^\nu \mid \nu \geq \mu\} \cup \{W_i \mid i \in T\} \right]_\beta.$$

В силу свойств функций S и S^ν , $\nu \geq 3$, верно соотношение $B(\{S, S^\nu\}) = O^\nu$, а в силу свойств функций W_i , $i \geq 3$, — соотношение $B(\{W_i\}) \subseteq O^i$.

Поэтому для всех подмножеств T множества $\{\mu, \mu + 1, \mu + 2, \dots\}$ верно равенство $B(\mathcal{W}^\mu(T)) = O^\mu$. Также очевидно, что $\mathcal{W}^\mu(T) \subset P_{k|3}$.

Рассмотрим различные подмножества $R, Q \subseteq \{\mu, \mu + 1, \mu + 2, \dots\}$. Тогда найдется число n , такое, что $n \in R \setminus Q$ или $n \in Q \setminus R$. Без ограничения общности пусть $n \in R \setminus Q$. Тогда $W_n \in \mathcal{W}^\mu(R)$. Покажем, что $W_n \notin \mathcal{W}^\mu(Q)$.

По определению множеств $\mathcal{W}^\mu(T)$ справедливо соотношение $\mathcal{W}^\mu(Q) \subseteq \mathcal{W}[n]$, где $\mathcal{W}[n] = [\{S\} \cup \{S^\nu \mid \nu \geq 3\} \cup \{W_i \mid i \geq 3, i \neq n\}]$. По лемме 3.11 функция W_n не содержится в множестве $\mathcal{W}[n]$, а значит, $W_n \notin \mathcal{W}^\mu(Q)$. Таким образом, для различных подмножеств R и Q множества $\{\mu, \mu + 1, \mu + 2, \dots\}$ различны и β -замкнутые классы функций $\mathcal{W}^\mu(R)$ и $\mathcal{W}^\mu(Q)$. Так как семейство различных подмножеств множества $\{\mu, \mu + 1, \mu + 2, \dots\}$ континуально, то семейство различных β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием O^μ тоже континуально.

Поскольку класс I^μ является двойственным к классу O^μ , то для него имеет место аналогичное утверждение.

3.4. Полная классификация. Результаты, полученные в теоремах 3.1, 3.2, 3.3 и 3.4, позволяют для каждого класса $\mathcal{B}$ булевых функций определить, является ли семейство β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ конечным или континуальным (тем самым также показано, что такие множества не могут иметь другую мощность). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.5. Пусть $k = 2^m$, $m \geq 2$. Тогда справедливы равенства

$$Q(k, 3) = \{O^\infty, I^\infty\} \cup \{O^\mu, I^\mu \mid \mu \geq 3\},$$

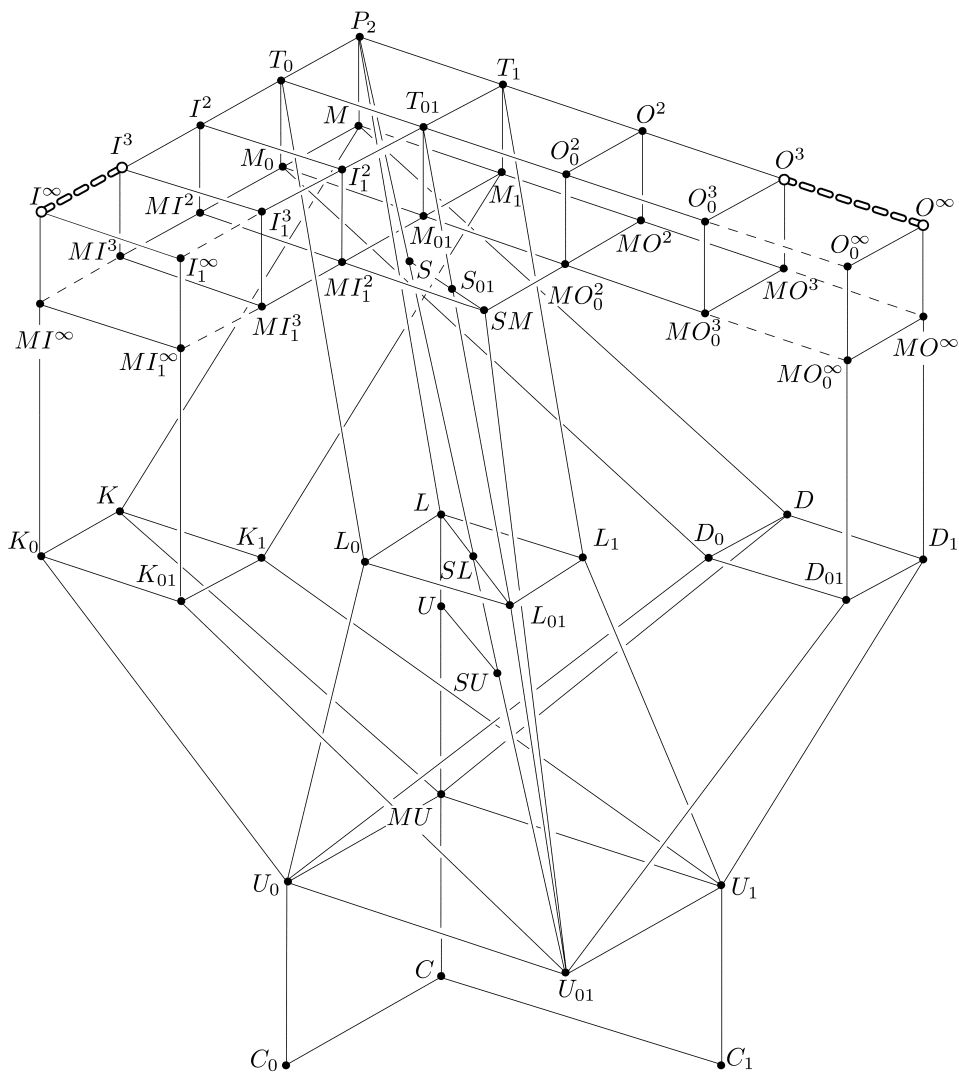
$$C(k, 3) = \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \mid [\mathcal{B}] = \mathcal{B}, \mathcal{B} \notin Q(k, 3)\}.$$

На рис. 1 в диаграмме Поста выделены классы булевых функций, которые содержатся в множестве $Q(k, 3)$ при $k = 2^m$, $m \geq 2$.

3.5. Классы функций с фиксированной областью значений. В предыдущих пунктах данного параграфа рассматривались всевозможные функции k -значной логики, принимающие не более трех значений. При этом континуальные семейства β -замкнутых классов функций с булевым замыканием O^μ , $\mu \geq 3$, и O^∞ были построены для функций, которые принимают значения, соответствующие двоичным представлениям $\langle 0, 1, 1, \dots, 1 \rangle$, $\langle 1, 0, 0, \dots, 0 \rangle$ и $\langle 1, 1, 1, \dots, 1 \rangle$. Для всех попарно различных чисел a, b, c из E_k найдем классификацию семейства β -замкнутых классов функций, которые принимают значения только из множества $\{a, b, c\}$, по его мощности. Для этого введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 3.5. Пусть a, b, c — попарно различные числа из E_k . Обозначим их двоичные представления через $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$, $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$, $\langle c_1, \dots, c_m \rangle$ соответственно. Множество $\{a, b, c\}$ назовем *краевым*, если найдутся такие числа i и j , $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq m$, что верно равенство $\{(a_i, a_j), (b_i, b_j), (c_i, c_j)\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, в противном случае назовем такое множество *центральным*.

Л е м м а 3.12. Пусть $\mathcal{B}$ — один из замкнутых классов O^∞ или O^μ , $\mu \geq 3$, булевых функций. Пусть также $R \subseteq P_k$, $B(R) = \mathcal{B}$, $F \in P_{k|3}$, $b(F) \subset \mathcal{B}$ и $D(F) \subseteq \{a, b, k - 1\}$, где $\{a, b, k - 1\}$ — крайнее множество. Тогда существует функция G из множества $[\{F\}]_\beta$, которая зависит не более чем от 16 переменных и такая, что $F \in [\{G\} \cup R]_\beta$.



Получили, что вектор-функция $\langle f_1, f_2 \rangle$ принимает три значения: $\langle 0, 0 \rangle$, $\langle 0, 1 \rangle$, $\langle 1, 1 \rangle$. Поскольку функция F тоже принимает три значения, то множество функций $\{f_1, f_2\}$ является базой функции F .

Выберем наборы $\tilde{\alpha}_{00}$, $\tilde{\alpha}_{01}$, $\tilde{\alpha}_{11}$ из E_2^{mn} такие, что:

	x_1	$\dots$	x_{mn}	$f_1(x_1, \dots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \dots, x_{mn})$
$\tilde{\alpha}_{00}$	$\alpha_{00,1}$	$\dots$	$\alpha_{00,mn}$	0	0
$\tilde{\alpha}_{01}$	$\alpha_{01,1}$	$\dots$	$\alpha_{01,mn}$	0	1
—	—	$\dots$	—	1	0
$\tilde{\alpha}_{11}$	1	$\dots$	1	1	1

Определим также набор $\tilde{\alpha}_{10} = (1, \dots, 1)$ из E_2^{mn} .

Далее, для каждого числа i , $1 \leq i \leq mn$, определим булеву функцию $u_i(x_1, x_2)$:

$$u_i(a, b) = \alpha_{ab,i}.$$

В силу определения функции u_i и наборов $\tilde{\alpha}_{00}$, $\tilde{\alpha}_{01}$, $\tilde{\alpha}_{10}$ и $\tilde{\alpha}_{11}$ имеет место неравенство $u_i(x_1, x_2) \geq x_1$. Поскольку $\mathcal{B}$ — один из замкнутых классов O^∞ или O^μ , $\mu \geq 3$, то справедливо включение $u_i \in \mathcal{B}$ для всех $i = 1, \dots, mn$.

Так как все функции из множества $\{u_i(x_1, x_2) \mid i = 1, \dots, mn\}$ зависят только от двух переменных, то число различных функций этого множества не превосходит 16. Обозначим всевозможные такие функции через $v_1(x_1, x_2), \dots, v_t(x_1, x_2)$, где $t \leq 16$, а для каждого i , $1 \leq i \leq mn$, через $q(i)$ обозначим число, определяемое из условия $u_i(x_1, x_2) = v_{q(i)}(x_1, x_2)$.

Для каждого j , $1 \leq j \leq t$, положим

$$w_j(x_1, \dots, x_{mn}) = v_j(f_1(x_1, \dots, x_{mn}), f_2(x_1, \dots, x_{mn})).$$

Так как функции $v_1, \dots, v_t$ и f_1, f_2 принадлежат классу $\mathcal{B}$, то функции $w_1, \dots, w_t$ тоже принадлежат данному классу.

Далее рассмотрим функцию G из P_k , имеющую следующее двоичное представление:

$$\hat{G} = \hat{F}(y_{q(1)}, \dots, y_{q(mn)}).$$

По построению компоненты функции G существенно зависят только от переменных из множества $\{y_1, \dots, y_t\}$, поэтому функция G тоже существенно зависит не более чем от t переменных, где $t \leq 16$. Аналогично доказательству леммы 3.8 легко показать, что функция G является искомой.

Для каждой тройки a, b, c попарно различных чисел из множества E_k положим

$$\mathbb{P}_{a,b,c} = \left\{ \mathcal{A} \subseteq \{F \in P_k \mid D(F) \subseteq \{a, b, c\}\} \mid [\mathcal{A}]_\beta = \mathcal{A} \right\},$$

$$\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B}) = \{\mathcal{A} \in \mathbb{P}_{a,b,c} \mid B(\mathcal{A}) = \mathcal{B}\} \text{ для каждого класса } \mathcal{B} \text{ булевых функций.}$$

На основе введенных определений сформулируем следующие утверждения.

Теорема 3.6. Пусть a, b, c — различные числа из множества E_k , $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ — один из классов O^∞ или O^μ , $\mu \geq 3$, булевых функций. Тогда множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$:

- является пустым, если $k - 1 \notin \{a, b, c\}$;
- конечно и не пусто, если $k - 1 \in \{a, b, c\}$ и множество $\{a, b, c\}$ является краевым;
- континуально, если $k - 1 \in \{a, b, c\}$ и множество $\{a, b, c\}$ является центральным.

Доказательство. Пусть сначала $k - 1 \notin \{a, b, c\}$. Предположим, что существует β -замкнутый класс $\mathcal{A}$ из множества $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$. Так как класс $\mathcal{B}$ содержится в классе T_1 булевых функций, то компоненты каждой функции F из $\mathcal{A}$ на единичном наборе должны быть равны единице. Но тогда $k - 1 \in D(F) \subseteq \{a, b, c\}$, что неверно. Значит, $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B}) = \emptyset$.

Пусть теперь $k - 1 \in \{a, b, c\}$. Без ограничения общности будем считать, что $c = k - 1$. Рассмотрим случай, когда множество $\{a, b, k - 1\}$ является краевым. Тогда доказательство конечности множества $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ проводится на основе утверждения леммы 3.12 аналогично доказательству теорем 3.2 и 3.3. Приведем пример β -замкнутого класса из $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$. Положим $I = \{(a, k - 1), (k - 1, k - 1)\}$. Тогда справедливы соотношения*) $U(\mathcal{B}) = \{1, x\}$, $I^{(2)} \neq \emptyset$, $I^{(1)} = \{(k - 1, k - 1)\}$ и $q = k - 1$ для всех $(p, q) \in I$. Поэтому в силу утверждения теоремы 2.3 существует единственный β -замкнутый класс $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ функций из $P_{k|2}$, такой, что $B(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}$ и $\text{Ind}(\mathcal{A}_{\mathcal{B}}) = I$. Очевидно, что класс $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ принадлежит множеству $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ и, следовательно, оно не является пустым.

Для завершения доказательства остается рассмотреть единственный случай, когда множество $\{a, b, k - 1\}$ является центральным. Обозначим двоичные представления чисел a и b через $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ и $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ соответственно. Так как $a \neq k - 1$, то найдется такое число i , $1 \leq i \leq m$, что $a_i = 0$. Если $b_i = 0$, то вследствие неравенства $a \neq b$ найдется число j , $1 \leq j \leq m$, такое, что $a_j \neq b_j$, а если $b_i = 1$, то вследствие неравенства $b \neq k - 1$ найдется число j , $1 \leq j \leq m$, такое, что $b_j \neq 1$. В обоих случаях получаем, что множество $\{(a_i, a_j), (b_i, b_j), (1, 1)\}$ содержит три элемента. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1$, а $j = 2$.

Так как множество $\{a, b, k - 1\}$ является центральным, то вполне неравенство $\{(a_1, a_2), (b_1, b_2), (1, 1)\} \neq \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Значит, $\{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\} = \{(0, 1), (1, 0)\}$ или $\{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\} = \{(0, 0), (1, 0)\}$. Но второй из данных случаев не может иметь места, поскольку в этом случае $\{(a_2, a_1), (b_2, b_1), (1, 1)\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, что неверно. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $a_1 = b_2 = 0$, а $a_2 = b_1 = 1$.

Для каждого $i = 3, \dots, m$ рассмотрим значения a_i и b_i . Если $a_i = b_i = 0$, то верно равенство $\{(a_i, a_1), (b_i, b_1), (1, 1)\} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ и множество $\{a, b, k - 1\}$ краевое. Значит, либо $a_i = b_i = 1$, либо $a_i \neq b_i$.

Приведем пример континуального семейства β -замкнутых классов из множества $\mathbb{P}_{a,b,k-1}(\mathcal{B})$. Для этого будем использовать функции W_n из п. 3.1 (при $\mathcal{B} = O^\infty$) или из п. 3.3 (при $\mathcal{B} = O^\mu$, $\mu \geq 3$). Рассмотрим первый из случаев. Определим функцию V_n для каждого $n \geq 3$. Для каждого i , $1 \leq i \leq m$, положим

$$b_i(V_n) = \begin{cases} w_{n,1}, & \text{если } a_i = 0, b_i = 1; \\ w_{n,2}, & \text{если } a_i = 1, b_i = 0; \\ 1, & \text{если } a_i = 1, b_i = 1. \end{cases}$$

*) Необходимые обозначения введены в п. 2.2.

Тогда $b_1(V_n) = w_{n,1}$, $b_2(V_n) = w_{n,2}$, а $D(V_n) = \{a, b, k-1\}$. Так как функции $w_{n,1}$ и $w_{n,2}$ являются компонентами функции V_n , то, как и в п. 3.1, показывается, что для каждого $n \geq 3$ имеет место соотношение $V_n \notin [\{V_i \mid i \geq 3, i \neq n\}]_\beta$, из чего следует континуальность множества $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$.

Используя результаты теоремы 3.6 докажем следующее утверждение.

Теорема 3.7. Пусть a, b, c — попарно различные числа из множества E_k . Тогда множество $\mathbb{P}_{a,b,c}$:

— конечно и не пусто, если ни одно из чисел 0 и $k-1$ не содержится в множестве $\{a, b, c\}$;

— континуально, если ровно одно из чисел 0 или $k-1$ содержится в множестве $\{a, b, c\}$, а также это множество является центральным;

— счетно в иных случаях.

Доказательство. Предположим, что ни одно из чисел 0 или $k-1$ не содержится в множестве $\{a, b, c\}$. Тогда для любой функции F из P_k , которая принимает значения из этого множества, среди ее компонент найдутся функция, которая не содержится в классе T_0 , и функция, которая не содержится в классе T_1 . Число классов $\mathcal{B}$ булевых функций, которые не содержатся в классе T_0 и в классе T_1 , конечно. По теореме 3.5 каждый такой класс $\mathcal{B}$ принадлежит множеству $C(k, 3)$, а следовательно, множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ является конечным. Поэтому конечно и множество $\mathbb{P}_{a,b,c}$. Также, очевидно, что β -замкнутый класс функций $[\{F_a(x)\}]_\beta$, где функция $F_a(x)$ равна константе a , принадлежит множеству $\mathbb{P}_{a,b,c}$.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел 0 или $k-1$ принадлежит множеству $\{a, b, c\}$. Обозначим двоичные представления чисел a, b и c через $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$, $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$, $\langle c_1, \dots, c_m \rangle$ соответственно. Так как $a \neq b$, то найдется такое число i , $1 \leq i \leq m$, что верно равенство $a_i \neq b_i$. Если $b_i = c_i$, то найдется такое число j , $1 \leq j \leq m$, что $b_j \neq c_j$, а если $a_i = c_i$, то найдется такое число j , $1 \leq j \leq m$, что $a_j \neq c_j$. В каждом из двух случаев множество $R = \{(a_i, a_j), (b_i, b_j), (c_i, c_j)\}$ содержит три элемента.

Предположим, что множество $\{a, b, c\}$ является центральным. Тогда $R = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ или $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$. Так как хотя бы одно из чисел 0 или $k-1$ принадлежит множеству $\{a, b, c\}$, то без ограничения общности будем считать, что $c = k-1$. В этом случае $c_1 = \dots = c_m = 1$ и $(1, 1) \in R$. Значит, $R = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ и $0 \notin \{a, b, c\}$. В силу утверждения теоремы 3.6 множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(O^\infty)$ является континуальным. Значит, континуально и множество $\mathbb{P}_{a,b,c}$.

Остается рассмотреть единственный случай — когда множество $\{a, b, c\}$ является краевым и хотя бы одно из чисел 0 или $k-1$ принадлежит этому множеству. Без ограничения общности будем считать, что $k-1 \in \{a, b, c\}$. Покажем, что для каждого класса $\mathcal{B}$ булевых функций множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ конечно. Рассмотрим три случая.

— Пусть $\mathcal{B} \in C(k, 3)$. Так как $\{F \in P_k \mid D(F) \subseteq \{a, b, c\}\} \subseteq P_{k|3}$, то доказываемое утверждение очевидно;

— пусть $\mathcal{B} \in \{O^\infty\} \cup \{O^\mu \mid \mu \geq 3\}$. Так как число $k-1$ принадлежит множеству $\{a, b, c\}$ и это множество является краевым, то по теореме 3.6 множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ является конечным и непустым;

— пусть $\mathcal{B} \in \{I^\infty\} \cup \{I^\mu \mid \mu \geq 3\}$. По принципу двойственности для такого класса $\mathcal{B}$ справедлива теорема 3.6, если в ней вместо числа $k-1$ рас-

смагивать 0. Так как множество $\{a, b, c\}$ не является центральным, то множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ является либо пустым (если $0 \notin \{a, b, c\}$), либо конечным и непустым (если $0 \in \{a, b, c\}$), что и требовалось показать.

Получили, что для каждого замкнутого класса $\mathcal{B}$ булевых функций множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(\mathcal{B})$ является конечным. Так как семейство замкнутых классов булевых функций счетно, то множество $\mathbb{P}_{a,b,c}$ не более чем счетно. Но по теореме 3.6 множество $\mathbb{P}_{a,b,c}(O^\mu)$ не пусто для каждого $\mu \geq 3$. Значит, множество $\mathbb{P}_{a,b,c}$ не менее чем счетно, а следовательно, оно является счетным.

3.6. Подход к описанию β -замкнутых классов. Хотя семейство β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ является континуальным, можно привести описание некоторых конечных множеств таких классов. Подход к описанию β -замкнутых классов функций из $P_{k|3}$ аналогичен подходу, используемому в пункте 2.2 для описания β -замкнутых классов функций, принимающих не более двух значений: фиксируется класс $\mathcal{B}$ булевых функций и множество I , которое состоит из некоторых подмножеств множества E_k мощности не более трех. Далее рассматривается семейство β -замкнутых классов, которые содержат только функции из множества $\{F \in P_k \mid D(F) = D, D \in I\}$ и имеют булево замыкание $\mathcal{B}$.

Такие семейства β -замкнутых классов могут быть континуальными только в тех случаях, когда $\mathcal{B} \in Q(k, 3)$, а также множеству I принадлежит множество $\{a, b, c\}$, которое является центральным и содержит 0 (для классов I^∞ и I^μ , $\mu \geq 3$) или содержит $k - 1$ (для классов O^∞ и O^μ , $\mu \geq 3$). В остальных случаях рассматриваемые семейства β -замкнутых классов либо не существуют, либо являются конечными и могут быть описаны. В настоящей работе не приводится описание таких семейств, поскольку оно проводится аналогично описанию семейств β -замкнутых классов функций из $P_{k|2}$, но является технически сложным, предполагает рассмотрение большого числа случаев и не дает новых содержательных эффектов.

§ 4. Классы функций из $P_{k|4}$

4.1. Континуальные семейства β -замкнутых классов. В предыдущем параграфе было показано, что для всех $k = 2^m$, $m \geq 2$, множество $Q(k, 3)$ равно $\{O^\infty, I^\infty\} \cup \{O^\mu, I^\mu \mid \mu \geq 3\}$. Поскольку $Q(k, 3) \subseteq Q(k, 4)$, то множеству $Q(k, 4)$ принадлежат все перечисленные классы. Покажем, что ему принадлежат еще и классы $O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu$, $\mu \geq 3$, булевых функций, а также все двойственные им классы. Этот результат и другие результаты данного параграфа были анонсированы в статье [46], и в настоящей работе приводится их подробное доказательство.

В книге [57] для каждого класса $\mathcal{B}$ из множества классов $\{O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty\} \cup \{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu \mid \mu \geq 3\}$ приводится пример порождающей системы, состоящей не более, чем из двух функций. Обозначим функции данной системы через $s_1^\mathcal{B}$ и $s_2^\mathcal{B}$ (если она состоит из одной функции, то в качестве второй функции возьмем произвольную функцию из $\mathcal{B}$). Введем функции $S_1^\mathcal{B}$ и $S_2^\mathcal{B}$ из P_k через их двоичные представления:

$$b_i(S_j^\mathcal{B}) = s_j^\mathcal{B}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, 2.$$

Тогда очевидно, что $\{S_1^\mathcal{B}, S_2^\mathcal{B}\} \subset P_{k|2}$ и $B(\{S_1^\mathcal{B}, S_2^\mathcal{B}\}) = \mathcal{B}$.

Сначала рассмотрим классы $O_0^\infty, MO_0^\infty, MO_0^\infty$ булевых функций. Для этого рассмотрим функции, аналогичные функциям W_n из п. 3.1. Для каждого $n \geq 2$ определим новую функцию W_n через ее двоичное представление $\langle w_{n,1}, \dots, w_{n,m} \rangle$:

$$w_{n,1} = x_1^1 \vee x_1^2 \vee \dots \vee x_1^n \vee y_1^1 \& y_1^2 \& \dots \& y_1^n, \\ w_{n,i} = y_1^1 \vee y_1^2 \vee \dots \vee y_1^n \vee d_n(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n) \text{ для всех } i, 2 \leq i \leq m.$$

Так как каждая из компонент функции W_n зависит только от первых компонент переменных $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$, то в дальнейшем будем обозначать булевы переменные x_1^i, y_1^i через x_i и y_i соответственно, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$w_{n,1} = x_1 \vee \dots \vee x_n \vee y_1 \& \dots \& y_n, \\ w_{n,i} = y_1 \vee \dots \vee y_n \vee d_n(x_1, \dots, x_n) \text{ для всех } i, 2 \leq i \leq m.$$

Для каждого $n \geq 2$ справедливо равенство $B(\{W_n\}) \subseteq MO_0^\infty$. Оно следует из того, что все компоненты функции W_n содержатся в классе O^∞ , являются монотонными и на нулевом наборе равны нулю. Также легко показывается, что для каждого $n \geq 2$ функция W_n принимает четыре значения. Используя эти свойства, докажем следующую лемму.

Л е м м а 4.1. *Для каждого $n \geq 2$ справедливо соотношение*

$$W_n \notin \left[\{S_1^\mathcal{B}, S_2^\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \{O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty\}\} \cup \{W_i \mid i \geq 2, i \neq n\} \right]_\beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.1, поэтому опишем только основные этапы доказательства.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество $\{S_1^\mathcal{B}, S_2^\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \{O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty\}\} \cup \{W_i \mid i \geq 2, i \neq n\}$. По свойствам функций из множества $\mathcal{A}$ выполняется равенство $B(\mathcal{A}) = O^\infty$.

Предположим, что $W_n \in [\mathcal{A}]_\beta$. Тогда справедливо равенство

$$\widehat{W_n} = \widehat{H}(\langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle, \dots, \langle \omega_{m(r-1)+1}, \dots, \omega_{mr} \rangle),$$

где функция H принадлежит множеству $\mathcal{A}$, r — число переменных функции H , а булевы функции $\omega_1, \dots, \omega_{mr}$ принадлежат множеству O^∞ . Если $H \in \{S_1^\mathcal{B}, S_2^\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \{O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty\}\}$, то функция W_n принимает не более двух значений, что неверно. Поэтому $H = W_p$ для некоторого числа $p, p \geq 2, p \neq n$, и $r = 2p$.

Для всех $i, 1 \leq i \leq p$, обозначим функцию $\omega_{m(i-1)+1}$ через g_i , а функцию $\omega_{m(p+i-1)+1}$ — через h_i . Поскольку компоненты функции W_n существенно зависят только от булевых переменных $x_1^1, \dots, x_1^n$ и $y_1^1, \dots, y_1^n$, то будем обозначать эти переменные через $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ соответственно. В данных обозначениях приведенное выше равенство можно записать при помощи эквивалентной системы равенств:

$$\begin{cases} w_{n,1} = g_1 \vee \dots \vee g_p \vee h_1 \& \dots \& h_p; \\ w_{n,i} = h_1 \vee \dots \vee h_p \vee d_p(g_1, \dots, g_p), \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Как и в лемме 3.1, показывается, что ни одна из функций $g_1, \dots, g_p$ не мажорирует ни одну из переменных $y_1, \dots, y_n$, а ни одна из функций $h_1, \dots, h_p$ не мажорирует ни одну из переменных $x_1, \dots, x_n$. Также устанавливается, что каждая из переменных множества $\{x_1, \dots, x_n\}$ мажорируется не более одной из функций $g_1, \dots, g_p$. Значит, $p < n$. Но если выполняется данное соотношение, то легко находится такой набор, на котором функция $w_{n,1}$ равна 0, но функция $h_1 \& \dots \& h_p$ равна 1, что неверно. Поэтому $W_n \notin [\mathcal{A}]_\beta$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь классы $O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu$ булевых функций при $\mu \geq 3$. Для каждого $n \geq 3$ определим функцию W_n , аналогичную соответствующей функции из п. 3.3, через ее двоичное представление:

$$b_1(W_n) = \omega_{2n+2}^3(x_1^1, \dots, x_1^{2n+1}, x_1^{2n+2}), \\ b_i(W_n) = x_1^{2n+2} \vee \omega_{2n+1}^{n+1}(x_1^1, \dots, x_1^{2n+1}), \quad i = 2, \dots, m.$$

Будем обозначать $b_1(W_n)$ через u_n , а $b_i(W_n)$, $i = 2, \dots, m$ — через v_n . Поскольку компоненты функции W_n существенно зависят только от булевых переменных $x_1^1, \dots, x_1^{2n+1}$ и x_1^{2n+2} , то будем обозначать эти переменные через $x_1, \dots, x_{2n+1}$ и y соответственно. Тогда компоненты функции W_n принимают вид

$$u_n = \omega_{2n+2}^3(x_1, \dots, x_{2n+1}, y), \\ v_n = y \vee \omega_{2n+1}^{n+1}(x_1, \dots, x_{2n+1}).$$

Как и в п. 3.3, показывается, что для каждого $n \geq 3$ функция u_n содержится в классе MO_0^n , а функция v_n — в классе MO_0^∞ . Поэтому $B(\{W_n\}) \subseteq MO_0^n$. Также очевидно, что функция W_n принимает четыре значения. На основе данных свойств докажем следующую лемму.

Л е м м а 4.2. Для любого $n \geq 3$ верно соотношение

$$W_n \notin \left[\{S_1^\beta, S_2^\beta \mid \beta \in \{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu \mid \mu \geq 3\}\} \cup \{W_i \mid i \geq 3, i \neq n\} \right]_\beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.11, поэтому опишем только основные этапы доказательства.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество $\{S_1^\beta, S_2^\beta \mid \beta \in \{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu \mid \mu \geq 3\}\} \cup \{W_i \mid i \geq 3, i \neq n\}$. По свойствам функций из множества $\mathcal{A}$ выполняется равенство $B(\mathcal{A}) = O^3$.

Предположим, что $W_n \in [\mathcal{A}]_\beta$. Тогда выполняется равенство

$$\widehat{W_n} = \widehat{H}(\langle q_1, \dots, q_m \rangle, \dots, \langle q_{m(r-1)+1}, \dots, q_{mr} \rangle),$$

где функция H содержится в множестве $\mathcal{A}$, r — число ее переменных, а функции $q_1, \dots, q_{mr}$ принадлежат множеству O^3 . Так как $|D(W_n)| = 4$, то функция H должна принимать как минимум 4 значения. Поэтому $H \notin \{S_1^\beta, S_2^\beta \mid \beta \in \{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu \mid \mu \geq 3\}\}$. Значит, $H = W_p$ для некоторого числа p , $p \geq 3$, $p \neq n$, а следовательно, $r = 2p + 2$.

Для каждого i , $1 \leq i \leq 2p + 1$, обозначим булеву функцию $q_{m(i-1)+1}$ через g_i , а функцию $q_{m(2p+1)+1}$ — через h . В данных обозначениях приведенное выше равенство можно записать при помощи эквивалентной системы

равенств:

$$\begin{cases} u_n = \omega_{2p+2}^3(g_1, \dots, g_{2p+1}, h); \\ v_n = h \vee \omega_{2p+1}^{p+1}(g_1, \dots, g_{2p+1}). \end{cases}$$

Как и в лемме 3.11, несложно показывается, что для каждого $i = 1, \dots, 2n+1$ функция h мажорирует функцию x_i & y и найдется ровно одно число j_i , $1 \leq j_i \leq 2p+1$, такое, что $g_{j_i} \geq x_i$ & y . Далее, при рассмотрении подмножества множества $\{1, \dots, 2n+1\}$ мощности n доказывается, что каждая из функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$ мажорирует хотя бы одну из функций x_1 & $y, \dots, x_{2n+1}$ & y . Поэтому $p < n$. Но в этом случае среди функций $g_1, \dots, g_{2p+1}$ найдется функция, которая мажорирует как минимум две функции из множества $\{x_1$ & $y, \dots, x_{2n+1}$ & $y\}$. Тогда, как и в лемме 3.11, устанавливается, что не выполняется хотя бы одно из равенств вышеприведенной системы. Поэтому функция W_n не содержится в множестве $[\mathcal{A}]_\beta$. Лемма доказана.

Результаты лемм 4.1 и 4.2 позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 4.1. Пусть $k = 2^m$, где $m \geq 2$. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \{O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\} &\subseteq Q(k, 4); \\ \{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu, I_1^\mu, MI^\mu, MI_1^\mu \mid \mu \geq 3\} &\subseteq Q(k, 4). \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.4.

Пусть $\mathcal{B}$ — класс булевых функций из множества $\{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu\}$ для некоторого $\mu \geq 3$. Определим β -замкнутый класс функций k -значной логики $\mathcal{W}(\mathcal{B}, T)$ для каждого подмножества T множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \dots\}$:

$$\mathcal{W}(\mathcal{B}, T) = \left[\{S_1^\mathcal{B}, S_2^\mathcal{B}\} \cup \{W_i \mid i \in T\} \right]_\beta.$$

В силу свойств функций $S_1^\mathcal{B}, S_2^\mathcal{B}$ верно соотношение $B(\{S_1^\mathcal{B}, S_2^\mathcal{B}\}) = \mathcal{B}$, а в силу свойств функций W_i , $i \geq \mu$, — соотношения $B(\{W_i\}) \subseteq MO_0^\mu \subseteq \mathcal{B}$. Поэтому для всех подмножеств T множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \dots\}$ справедливо равенство $B(\mathcal{W}(\mathcal{B}, T)) = \mathcal{B}$. Также очевидно, что $\mathcal{W}(\mathcal{B}, T) \subset P_{k|4}$.

Рассмотрим различные подмножества $R, Q \subseteq \{\mu, \mu+1, \mu+2, \dots\}$. Тогда найдется число n такое, что $n \in R \setminus Q$ или $n \in Q \setminus R$. Без ограничения общности пусть $n \in R \setminus Q$. Тогда $W_n \in \mathcal{W}(\mathcal{B}, R)$. Покажем, что $W_n \notin \mathcal{W}(\mathcal{B}, Q)$.

По определению множеств $\mathcal{W}(\mathcal{B}, T)$ выполнено $\mathcal{W}(\mathcal{B}, Q) \subseteq \mathcal{W}[n]$, где $\mathcal{W}[n] = \left[\{S_1^\mathcal{B}, S_2^\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \{O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu \mid \mu \geq 3\}\} \cup \{W_i \mid i \geq 3, i \neq n\} \right]$. По лемме 4.2 функция W_n не содержится в множестве $\mathcal{W}[n]$, а значит, $W_n \notin \mathcal{W}(\mathcal{B}, Q)$. Таким образом, для различных подмножеств R и Q множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \dots\}$ различны и β -замкнутые классы функций $\mathcal{W}(\mathcal{B}, R)$ и $\mathcal{W}(\mathcal{B}, Q)$. Так как семейство различных подмножеств множества $\{\mu, \mu+1, \mu+2, \dots\}$ континуально, то семейство различных β -замкнутых классов функций из $P_{k|4}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$ тоже континуально.

Если $\mathcal{B}$ — один из классов $O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty$ булевых функций, то соответствующее утверждение для $\mathcal{B}$ доказывается аналогично, но с использованием леммы 4.1.

Также очевидно, что для классов, которые являются двойственными к классам $O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty$ и $O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu$, $\mu \geq 3$, имеет место аналогичное утверждение.

4.2. Конечные множества β -замкнутых классов. Найдем классы $\mathcal{B}$ функций алгебры логики, для которых еще не определена мощность семейства β -замкнутых классов функций из $P_{k|4}$ с булевым замыканием $\mathcal{B}$. Для этого воспользуемся утверждениями теорем 3.2 и 4.1, а также очевидным соотношением $C(k, k) \subseteq C(k, 4)$. Используя описание классов функций алгебры логики, получим, что искомыми классами являются классы $M, M_0, M_1, M_{01}, SM, O^2, O_0^2, MO^2, MO_0^2, I^2, I_0^2, MI^2, MI_0^2$. В настоящем пункте будут рассмотрены все такие классы, за исключением классов O^2 и I^2 , и будет показано, что они содержатся в множестве $C(k, 4)$ для всех $k = 2^m$, $m \geq 2$. Для этого докажем следующее утверждение (оно аналогично утверждениям лемм 3.2, 3.3, 3.4, 3.5).

Лемма 4.3. Пусть $\mathcal{B}$ — один из классов $M, M_0, M_1, M_{01}, SM, O_0^2, MO^2, MO_0^2$ булевых функций, $F \in P_{k|4}$, $b(F) \subseteq \mathcal{B}$, $R \subseteq P_k$ и $B(R) = \mathcal{B}$. Тогда существует функция G из множества $\{F\}_\beta$, которая зависит не более, чем от 64 переменных, и такая, что $F \in \{G\} \cup R|_\beta$.

Доказательство. Если функция F принимает не более трех значений, то существование искомой функции G следует из утверждения леммы 3.9, поскольку класс $\mathcal{B}$ содержится либо в классе M , либо в классе T_{01} .

Пусть функция F принимает четыре значения. Обозначим через n число ее переменных, а через $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ — ее двоичное представление. В силу утверждения леммы 3.7 у функции F существует база, которая состоит либо из двух, либо из трех функций. Рассмотрим каждый из данных случаев по отдельности.

Сначала предположим, что у функции F существует база, которая состоит из двух функций. Пусть без ограничения общности базой является множество $\{f_1, f_2\}$. Тогда вектор-функция $\langle f_1, f_2 \rangle$ принимает все четыре значения. Если $\mathcal{B} = O_0^2$, то $f_1(0, \dots, 0) = f_2(0, \dots, 0) = 0$ и $f_1(1, \dots, 1) = f_2(1, \dots, 1) = 1$. Если $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}, MO^2, MO_0^2\}$, то $\mathcal{B} \subseteq M$. Тогда функции f_1 и f_2 являются монотонными, а поскольку они принадлежат базе, то не являются константами. Поэтому эти функции принадлежат классу T_{01} .

Обозначим нулевой и единичный наборы из множества E_2^{mn} через $\tilde{\alpha}_{00}$ и $\tilde{\alpha}_{11}$ соответственно и специальным образом выберем для функции f_1 и f_2 наборы $\tilde{\alpha}_{01}, \tilde{\alpha}_{10}$ из E_2^{mn} такие, что

	x_1	...	x_{mn}	$f_1(x_1, \dots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \dots, x_{mn})$
$\tilde{\alpha}_{00}$	0	...	0	0	0
$\tilde{\alpha}_{01}$	$\alpha_{01,1}$	...	$\alpha_{01,mn}$	0	1
$\tilde{\alpha}_{10}$	$\alpha_{10,1}$	...	$\alpha_{10,mn}$	1	0
$\tilde{\alpha}_{11}$	1	...	1	1	1

Для этого рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $\mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}$, а также $f_1 \& f_2 \notin \mathcal{B}$.

а) Пусть $\mathcal{B} = O_0^2$. Если у любых двух наборов, на которых функция $f_1 \& f_2$ равна 0, имеется общая нулевая компонента, то эта

функция принадлежит классу O^2 . Но очевидно, что на нулевом наборе она равна 0 и, следовательно, $f_1 \& f_2 \in O_0^2$. Но это неверно. Значит, для функции $f_1 \& f_2$ найдутся такие два набора $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ из E_2^{mn} , которые не содержат общих нулевых компонент, но при этом $f_1(\tilde{\gamma}_1) \& f_2(\tilde{\gamma}_1) = f_1(\tilde{\gamma}_2) \& f_2(\tilde{\gamma}_2) = 0$.

б) Пусть $\mathcal{B} \in \{MO^2, MO_0^2\}$. Так как $f_1 \& f_2 \in M_0$, то, как и в предыдущем случае, показывается, что существуют два набора, $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ из E_2^{mn} , которые не содержат общих нулевых компонент, но при этом $f_1(\tilde{\gamma}_1) \& f_2(\tilde{\gamma}_1) = f_1(\tilde{\gamma}_2) \& f_2(\tilde{\gamma}_2) = 0$.

Без ограничения общности будем считать, что $f_1(\tilde{\gamma}_1) = 0$. Если $f_1(\tilde{\gamma}_2) = 0$, то для функции f_1 найдены два набора, на которых она равна 0, но которые не содержат общих нулевых компонент. Следовательно, $f_1 \notin \mathcal{B}$, что неверно по условиям леммы. Значит, $f_1(\tilde{\gamma}_2) = 1$. Аналогичным образом показывается, что $f_2(\tilde{\gamma}_1) = 1$ и $f_2(\tilde{\gamma}_2) = 0$.

Поэтому если $\mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}$ и функция $f_1 \& f_2$ не содержится в классе $\mathcal{B}$, то в качестве наборов $\tilde{\alpha}_{01}$ и $\tilde{\alpha}_{10}$ выберем рассматриваемые наборы $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$.

2. Пусть $\mathcal{B} = SM$. Так как функции f_1 и f_2 являются самодвойственными, то на двойственных наборах они принимают двойственные значения. Поэтому в качестве наборов $\tilde{\alpha}_{01}$ и $\tilde{\alpha}_{10}$ выберем двойственные друг другу наборы.

3. Во всех остальных случаях наборы $\tilde{\alpha}_{01}$ и $\tilde{\alpha}_{10}$ можно выбрать произвольным образом.

Далее, для каждого числа i , $1 \leq i \leq mn$, определим булеву функцию $u_i(x_1, x_2)$:

$$u_i(a, b) = \alpha_{ab, i}.$$

Так как все функции из множества $\{u_i(x_1, x_2) \mid i = 1, \dots, mn\}$ зависят только от двух переменных и принадлежат множеству T_{01} , то число различных функций этого множества не превосходит 4. Обозначим всевозможные такие функции через $v_1(x_1, x_2), \dots, v_t(x_1, x_2)$, где $t \leq 4$, а для каждого i , $1 \leq i \leq mn$, через $q(i)$ обозначим число, определяемое из условия $u_i(x_1, x_2) = v_{q(i)}(x_1, x_2)$.

Для каждого j , $1 \leq j \leq t$, положим

$$w_j(x_1, \dots, x_{mn}) = v_j(f_1(x_1, \dots, x_{mn}), f_2(x_1, \dots, x_{mn})).$$

Покажем, что все функции $w_1, \dots, w_t$ содержатся в классе $\mathcal{B}$. Для этого достаточно доказать, что для каждого i , $1 \leq i \leq mn$, функция $u_i(f_1, f_2)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $\mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}$, а также $f_1 \& f_2 \notin \mathcal{B}$. Тогда по построению наборы $\tilde{\alpha}_{01}$ и $\tilde{\alpha}_{10}$ не содержат общих нулевых компонент. Также очевидно, что $u_i \in T_{01}$. Поэтому для функции $u_i(f_1, f_2)$ выполняется одно из равенств: $u_i(f_1, f_2) = f_1$, $u_i(f_1, f_2) = f_2$ или $u_i(f_1, f_2) = f_1 \vee f_2$. Поскольку $x \vee y \in \mathcal{B}$, то в каждом из этих вариантов функция $u_i(f_1, f_2)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$.

2. Пусть $\mathcal{B} = SM$. Тогда наборы $\tilde{\alpha}_{01}$ и $\tilde{\alpha}_{10}$ являются двойственными друг другу. Поэтому для функции $u_i(f_1, f_2)$ выполняется либо соотношение $u_i(f_1, f_2) = f_1$, либо $u_i(f_1, f_2) = f_2$. В любом из этих вариантов функция $u_i(f_1, f_2)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$.

3. В остальных случаях выполняется одно из равенств: $u_i(f_1, f_2) = f_1$, $u_i(f_1, f_2) = f_2$, $u_i(f_1, f_2) = f_1 \vee f_2$ или $u_i(f_1, f_2) = f_1 \& f_2$. Так как все рассматриваемые классы $\mathcal{B}$ содержат функцию $x \vee y$, то отдельного внимания требует только вариант, когда $u_i(f_1, f_2) = f_1 \& f_2$. Если $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}\}$, то $x \& y \in \mathcal{B}$, а значит, $f_1 \& f_2 \in \mathcal{B}$. Если же $\mathcal{B} \in \{O_0^2, MO_0^2, MO_0^2\}$, то $f_1 \& f_2 \in \mathcal{B}$, поскольку случай, когда $f_1 \& f_2 \notin \mathcal{B}$, был рассмотрен ранее. Значит, $u_i(f_1, f_2) \in \mathcal{B}$.

Как и при доказательстве лемм 3.3, 3.4, 3.5 и 3.8, рассмотрим функцию G из P_k , имеющую следующее двоичное представление:

$$\widehat{G} = \widehat{F}(y_{q(1)}, \dots, y_{q(mn)}).$$

Аналогично доказательству леммы 3.8 несложно показывается, что выполняется соотношение $\widehat{G}(w_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, w_t(x_1, \dots, x_{mn})) = \widehat{F}(x_1, \dots, x_{mn})$ и функция G является искомой.

Пусть теперь у функции F все базы состоят из трех функций. Тогда очевидно, что $m \geq 3$. Без ограничения общности будем считать, что базой является множество функций $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Так же, как и в случае с базой, состоящей из двух функций, легко показывается, что функции f_1, f_2, f_3 принадлежат классу T_{01} . Поэтому на нулевом наборе значение вектор-функции $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ равно $\langle 0, 0, 0 \rangle$, а на единичном — $\langle 1, 1, 1 \rangle$. Исследуем остальные два значения $\widehat{A} = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ и $\widehat{B} = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ этой вектор-функции. Рассмотрим два случая.

— Пусть хотя бы одно из значений $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ содержит ровно одну единичную компоненту. Без ограничения общности будем считать, что $A_1 = A_2 = 0$ и $A_3 = 1$. Выясним, какими могут быть числа B_1, B_2, B_3 .

$\widehat{0}$	0	0	0
$\widehat{A}$	0	0	1
$\widehat{B}$	B_1	B_2	B_3
$\widehat{1}$	1	1	1

Если $B_3 = 0$, то справедливо хотя бы одно из равенств $B_1 = 1$ и $B_2 = 1$. Пусть без ограничения общности $B_1 = 1$. Тогда вектор-функция $\langle f_1, f_3 \rangle$ принимает четыре значения, а значит, множество $\{f_1, f_3\}$ является базой функции F , что неверно. Поэтому $B_3 = 1$. Так как $\widehat{B} \neq \widehat{A}$ и $\widehat{B} \neq \widehat{1}$, то ровно одна из компонент B_1 и B_2 равна 1;

— пусть оба значения $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ содержат две единичные компоненты. Без ограничения общности будем считать, что $B_1 = 0$, а $B_2 = B_3 = 1$. Выясним, какими могут быть числа A_1, A_2, A_3 .

$\widehat{0}$	0	0	0
$\widehat{A}$	A_1	A_2	A_3
$\widehat{B}$	0	1	1
$\widehat{1}$	1	1	1

Если $A_2 = 0$, то $A_1 = A_3 = 1$. Поэтому вектор-функция $\langle f_1, f_2 \rangle$ принимает четыре значения, а значит, $\{f_1, f_2\}$ является базой функции F , что неверно. Поэтому $A_2 = 1$. Аналогичным образом доказывается, что $A_3 = 1$. Но тогда $A_1 = 0$ и $\widehat{A} = \widehat{B}$, что тоже является неверным. Значит рассматриваемый случай не имеет места.

Таким образом, получили, что для значений $\hat{A}$ и $\hat{B}$ вектор-функции $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$, которые отличны от значений $\hat{0}$ и $\hat{7}$, должны выполняться следующие условия: одно из этих значений содержит ровно одну единичную компоненту, второе — ровно две единичные компоненты, а также у данных значений имеется общая единичная компонента. Таким образом, существуют 6 различных неупорядоченных пар $(\hat{A}, \hat{B})$, которые могут быть получены друг из друга путем перестановки номеров компонент. Так как все такие пары эквивалентны, то рассмотрим только одну из них:

	$f_1(x_1, \dots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \dots, x_{mn})$	$f_3(x_1, \dots, x_{mn})$
$\hat{0}$	0	0	0
$\hat{A}$	0	0	1
$\hat{B}$	0	1	1
$\hat{7}$	1	1	1

Предположим, что $\mathcal{B} = SM$. Рассмотрим произвольный набор, на котором вектор-функция $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ принимает значение $\hat{A}$. Тогда на наборе, двойственном к рассматриваемому, эта вектор-функция принимает значение $\langle 1, 1, 0 \rangle$, которое отлично от $\hat{B}$, что неверно. Поэтому получили, что если $\mathcal{B} = SM$, то у функции F не может существовать базы, состоящей из трех функций.

Пусть далее $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}, O_0^2, MO^2, MO_0^2\}$. Специальным выберем наборы $\tilde{\alpha}_{000}, \tilde{\alpha}_{001}, \tilde{\alpha}_{011}, \tilde{\alpha}_{111}$ из E_2^{mn} , для которых справедливы соотношения

	x_1	$\dots$	x_{mn}	$f_1(x_1, \dots, x_{mn})$	$f_2(x_1, \dots, x_{mn})$	$f_3(x_1, \dots, x_{mn})$
$\tilde{\alpha}_{000}$	0	$\dots$	0	0	0	0
$\tilde{\alpha}_{001}$	$\alpha_{001,1}$	$\dots$	$\alpha_{001,mn}$	0	0	1
$\tilde{\alpha}_{011}$	$\alpha_{011,1}$	$\dots$	$\alpha_{011,mn}$	0	1	1
$\tilde{\alpha}_{111}$	1	$\dots$	1	1	1	1

Для этого рассмотрим различные случаи.

1. Пусть $\mathcal{B} = O_0^2$. Тогда наборы $\tilde{\alpha}_{001}$ и $\tilde{\alpha}_{011}$ выберем произвольным образом.

2. Пусть $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}, MO^2, MO_0^2\}$. Тогда $\mathcal{B} \subseteq M$. Если существуют два сравнимых набора $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ из E_2^{mn} , для которых справедливы равенства $\langle f_1(\tilde{\gamma}_1), f_2(\tilde{\gamma}_1), f_3(\tilde{\gamma}_1) \rangle = \hat{A}$, а $\langle f_1(\tilde{\gamma}_2), f_2(\tilde{\gamma}_2), f_3(\tilde{\gamma}_2) \rangle = \hat{B}$, то выберем их в качестве наборов $\tilde{\alpha}_{001}$ и $\tilde{\alpha}_{011}$. Если таких наборов нет, то наборы $\tilde{\alpha}_{001}$ и $\tilde{\alpha}_{011}$ выберем произвольным образом.

Теперь для каждого числа i , $1 \leq i \leq mn$, определим булеву функцию $u_i(x_1, x_2, x_3)$:

$$u_i(a, b, c) = \begin{cases} \alpha_{abc,i}, & \text{если } \langle a, b, c \rangle \in \{\hat{0}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{7}\}; \\ 1, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Так как все функции из множества $\{u_i(x_1, x_2, x_3) \mid i = 1, \dots, mn\}$ зависят только от трех переменных и принадлежат множеству T_{01} , то число

различных функций этого множества не превосходит 64. Обозначим всевозможные такие функции через $v_1(x_1, x_2, x_3), \dots, v_t(x_1, x_2, x_3)$, где $t \leq 64$, а для каждого i , $1 \leq i \leq mn$, через $q(i)$ обозначим число, определяемое из условия $u_i(x_1, x_2, x_3) = v_{q(i)}(x_1, x_2, x_3)$.

Для каждого j , $1 \leq j \leq t$, положим:

$$w_j(x_1, \dots, x_{mn}) = v_j(f_1(x_1, \dots, x_{mn}), f_2(x_1, \dots, x_{mn}), f_3(x_1, \dots, x_{mn})).$$

Покажем, что все функции $w_1, \dots, w_t$ содержатся в классе $\mathcal{B}$. Для этого достаточно доказать, что для каждого i , $1 \leq i \leq mn$, функция $u_i(f_1, f_2, f_3)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $\mathcal{B} = O_0^2$. Если $f_1 = 1$, то $u_i(f_1, f_2, f_3) = 1$. Поэтому $u_i \geq f_1$ и, в силу свойств класса $\mathcal{B}$, имеет место включение $u_i(f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{B}$.

2. Пусть $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}, MO^2, MO_0^2\}$ и набор $\tilde{\alpha}_{001}$ меньше набора $\tilde{\alpha}_{011}$. Тогда для любых наборов $\tilde{\delta}_1$ и $\tilde{\delta}_2$ таких, что $\tilde{\delta}_1 \leq \tilde{\delta}_2$, справедливо неравенство $\langle f_1(\tilde{\delta}_1), f_2(\tilde{\delta}_1), f_3(\tilde{\delta}_1) \rangle \leq \langle f_1(\tilde{\delta}_2), f_2(\tilde{\delta}_2), f_3(\tilde{\delta}_2) \rangle$. Поэтому $u_i(f_1(\tilde{\delta}_1), f_2(\tilde{\delta}_1), f_3(\tilde{\delta}_1)) \leq u_i(f_1(\tilde{\delta}_2), f_2(\tilde{\delta}_2), f_3(\tilde{\delta}_2))$, следовательно, $u_i(f_1, f_2, f_3) \in M_{01}$. Если $\mathcal{B} \in \{MO^2, MO_0^2\}$, то, как и в предыдущем случае, верно неравенство $u_i(f_1, f_2, f_3) \geq f_1$. Значит, справедливо включение $u_i(f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{B}$. Если же $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}\}$, то это соотношение является очевидным.

3. Пусть $\mathcal{B} \in \{M, M_0, M_1, M_{01}, MO^2, MO_0^2\}$ и не существует сравнимых наборов, на которых значения вектор-функции $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ равны $\hat{A}$ и $\hat{B}$ соответственно. Тогда для любых наборов $\tilde{\delta}_1$ и $\tilde{\delta}_2$ таких, что $\tilde{\delta}_1 \leq \tilde{\delta}_2$, имеет место один из следующих случаев:

- $\langle f_1(\tilde{\delta}_1), f_2(\tilde{\delta}_1), f_3(\tilde{\delta}_1) \rangle = \hat{0}$, $\langle f_1(\tilde{\delta}_2), f_2(\tilde{\delta}_2), f_3(\tilde{\delta}_2) \rangle \in \{\hat{0}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{7}\}$;
- $\langle f_1(\tilde{\delta}_1), f_2(\tilde{\delta}_1), f_3(\tilde{\delta}_1) \rangle = \hat{A}$, $\langle f_1(\tilde{\delta}_2), f_2(\tilde{\delta}_2), f_3(\tilde{\delta}_2) \rangle \in \{\hat{A}, \hat{7}\}$;
- $\langle f_1(\tilde{\delta}_1), f_2(\tilde{\delta}_1), f_3(\tilde{\delta}_1) \rangle = \hat{B}$, $\langle f_1(\tilde{\delta}_2), f_2(\tilde{\delta}_2), f_3(\tilde{\delta}_2) \rangle \in \{\hat{B}, \hat{7}\}$;
- $\langle f_1(\tilde{\delta}_2), f_2(\tilde{\delta}_2), f_3(\tilde{\delta}_2) \rangle = \langle f_1(\tilde{\delta}_1), f_2(\tilde{\delta}_1), f_3(\tilde{\delta}_1) \rangle = \hat{7}$.

Легко видеть, что в каждом из этих случаев имеет место соотношение $u_i(f_1(\tilde{\delta}_1), f_2(\tilde{\delta}_1), f_3(\tilde{\delta}_1)) \leq u_i(f_1(\tilde{\delta}_2), f_2(\tilde{\delta}_2), f_3(\tilde{\delta}_2))$. Поэтому, как и в предыдущем случае, справедливо включение $u_i(f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{B}$.

Рассмотрим функцию G из P_k , имеющую следующее двоичное представление

$$\hat{G} = \hat{F}(y_{q(1)}, \dots, y_{q(mn)}).$$

Как и при рассмотрении случая, когда у функции F существует база из двух функций, несложно показать, что выполняется соотношение $\hat{G}(w_1(x_1, \dots, x_{mn}), \dots, w_t(x_1, \dots, x_{mn})) = \hat{F}(x_1, \dots, x_{mn})$ и функция G является искомой.

Применяя метод, используемый для доказательства теоремы 3.2, и результаты, полученные в лемме 4.3, несложно доказывается следующее утверждение.

Теорема 4.2. Пусть $k = 2^m$, $m \geq 2$. Тогда каждый из классов M , M_0 , M_1 , M_{01} , SM , O_0^2 , MO^2 , MO_0^2 , I_0^2 , MI^2 , MI_0^2 булевых функций содержится в множестве $C(k, 4)$.

Таким образом, среди всех классов булевых функций только для классов O^2 и I^2 булевых функций не найдена классификация по мощности семейства β -замкнутых классов функций из $P_{k|4}$ с данным булевым замыканием. Следующий пункт настоящей работы посвящен исследованию таких семейств классов.

4.3. Семейство β -замкнутых классов с булевым замыканием O^2 .

4.3.1. С л у ч а й $k = 4$. Из результатов теоремы 3.3 известно, что классы O^2 и I^2 принадлежат множеству $C(k, 3)$ для всех $k = 2^m$, $m \geq 2$. Аналогичным образом докажем, что данные классы принадлежат множеству $C(4, 4)$.

Т е о р е м а 4.3. *Справедливо включение $\{O^2, I^2\} \subset C(4, 4)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как классы O^2 и I^2 являются двойственными друг другу, то для доказательства теоремы достаточно показать, что $O^2 \in C(4, 4)$.

Рассмотрим произвольный β -замкнутый класс $\mathcal{A}$ функций из P_4 с булевым замыканием O^2 . В силу утверждения леммы 3.10 в классе $\mathcal{A}$ существует конечное множество R функций такое, что $B(R) = O^2$, и каждая из функций данного множества зависит не более чем от r переменных, где r является константой.

Поскольку у каждой функции F из класса $\mathcal{A}$ число компонент не превосходит двух, то у функции F существует база, состоящая не более чем из двух функций. Значит, в силу утверждения леммы 3.8 для каждой функции F существует функция G_F из $\mathcal{A}$, которая зависит не более чем от 16 переменных и такая, что $F \in [\{G_F\} \cup R]_\beta$.

Как и в теореме 3.2 легко доказывается, что выполнено равенство $\mathcal{A} = [R \cup \{G_F \mid F \in \mathcal{A}\}]_\beta$. Поэтому у класса $\mathcal{A}$ имеется конечный базис, зависящий не более чем от $\max(r, 16)$ переменных. Так как число функций из P_4 , зависящих не более, чем от $\max(r, 16)$ фиксированных переменных, является конечным, то конечно и число различных β -замкнутых классов функций из P_k с булевым замыканием O^2 . Поэтому $O^2 \in C(4, 4)$.

4.3.2. С л у ч а й $k = 2^m$, $m \geq 3$. В настоящем пункте покажем, что при $k = 2^m$, $m \geq 3$, верно соотношение $O^2 \in Q(k, 4)$. Для этого для каждой пары чисел n и a таких, что $1 \leq a \leq n$, определим булеву функцию $\theta_n^a(x_1, \dots, x_n)$:

$$\theta_n^a(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 1, & \text{если в наборе } \tilde{\alpha} \text{ ровно } a \text{ единиц;} \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Далее для каждого $n \geq 4$ определим функцию W_n из P_k , которая зависит от $n^2 + 2$ переменных $x, y, z^1, \dots, z^{n^2}$, через ее двоичное представление $\langle w_{n,1}, \dots, w_{n,m} \rangle$:

$$\begin{aligned} w_{n,1} &= x_1 \vee \overline{y_1} \vee \overline{\theta_{n^2-n}^{n^2-n}(z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^{n^2})}, \\ w_{n,2} &= \overline{x_1} \vee y_1 \vee \overline{\theta_{n^2-n}^{n^2-n}(z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^{n^2})}, \\ w_{n,i} &= \omega_{n^2+2}^{n+3}(x_1, y_1, z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^{n^2}) \text{ при } i = 3, \dots, m, \end{aligned}$$

где через ω_n^a обозначена булева функция, определенная в п. 3.3.

Так как каждая из компонент функции W_n зависит только от первых компонент переменных $x, y, z^1, \dots, z^{n^2}$, то в дальнейшем будем обозначать

булевы переменные x_1 и y_1 через x и y , а z_1^i — через z_i для всех $i = 1, \dots, n^2$. Набор булевых переменных $(z_1, \dots, z_{n^2})$ будем обозначать через $\tilde{z}$. Также для удобства более не будем обозначать нижний индекс у функций θ_n^a и ω_n^a . Тогда компоненты функции W_n имеют вид

$$\begin{aligned} w_{n,1} &= x \vee \bar{y} \vee \overline{\theta^{n^2-n}(\tilde{z})}, \\ w_{n,2} &= \bar{x} \vee y \vee \overline{\theta^{n^2-n}(\tilde{z})}, \\ w_{n,i} &= \omega^{n+3}(x, y, \tilde{z}) \text{ при } i = 3, \dots, m. \end{aligned}$$

Докажем некоторые свойства функций W_n , $n \geq 4$.

1. Выполняется соотношение $b(W_n) \subset O^2$.

Функции $w_{n,1}$ и $w_{n,2}$ мажорируют переменные x и y соответственно. Поэтому они принадлежат классу O^∞ , который содержится в классе O^2 . Значит, $w_{n,1} \in O^2$ и $w_{n,2} \in O^2$.

Функции $w_{n,i}$, $i = 3, \dots, m$, равны функции $\omega^{n+3}(x, y, \tilde{z})$. Рассмотрим два произвольных набора из $E_2^{n^2+2}$, на которых данная функция равна 0. По определению функции $\omega^{n+3}(x, y, \tilde{z})$ среди компонент рассматриваемых наборов содержится не более $n+2$ единиц. Поэтому суммарно в данных наборах не более $2n+4$ единицы. Но при $n \geq 4$ справедливо неравенство $n^2+2 > 2n+4$, а значит, у рассматриваемых наборов есть общая нулевая компонента. Поэтому $w_{n,i} \in O^2$ для всех i , $3 \leq i \leq m$.

2. Справедливо равенство $|D(W_n)| = 4$.

Заметим, что функции $w_{n,1}, \dots, w_{n,m}$ являются симметричными относительно переменных из множества $\{z_1, \dots, z_{n^2}\}$ (т.е. значения данных функций не поменяются при перестановке переменных из этого множества между собой). Таким образом, значения компонент функции W_n определяются значениями переменных x , y и числом δ единиц среди переменных $z_1, \dots, z_{n^2}$. Запишем это в таблицу (см. табл. 3). Из нее видно, что двоичное представление функции W_n принимает только 4 значения. Поэтому столько же значений принимает и функция W_n .

Примером базиса для класса O^2 является (см., например, [57]) множество $\{\bar{x}_1 \vee x_2, x_1 \& x_2 \vee x_1 \& x_3 \vee x_2 \& x_3\}$. По аналогии с функциями S и S^μ , которые были введены в п. 3.3, определим функции $S_1(x)$ и $S_2(x)$ из P_k . Для каждого i , $1 \leq i \leq m$, положим:

$$\begin{aligned} b_i(S_1(x)) &= \bar{x}_1 \vee x_2, \\ b_i(S_2(x)) &= x_1 \& x_2 \vee x_1 \& x_3 \vee x_2 \& x_3. \end{aligned}$$

Очевидно, что каждая из функций S_1 и S_2 принимает ровно два значения, а также что $B(\{S_1, S_2\}) = O^2$.

Л е м м а 4.4. Для каждого $n \geq 4$ справедливо соотношение

$$W_n \notin [\{S_1, S_2\} \cup \{W_i \mid i \geq 4, i \neq n\}]_\beta.$$

До к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество $\{S_1, S_2\} \cup \{W_i \mid i \geq 4, i \neq n\}$. Предположим, что утверждение леммы неверно, и $W_n \in [\mathcal{A}]_\beta$. Это значит, что имеет место соотношение

$$\widehat{W_n} = \widehat{H}(\langle q_1, \dots, q_m \rangle, \dots, \langle q_{m(r-1)+1}, \dots, q_{mr} \rangle), \quad (8)$$

где функция H содержится в множестве $\mathcal{A}$, r — число переменных функции H , а булевы функции $q_1, \dots, q_{mr}$ принадлежат множеству $B(\mathcal{A})$.

Т а б л и ц а 3

x	y	Число δ единиц среди $z_1, \dots, z_{n^2}$	$w_{n,1}$	$w_{n,2}$	$w_{n,i}, i = 3, \dots, m$
0	0	$0 \leq \delta \leq n+2$	1	1	0
0	0	$n+3 \leq \delta \leq n^2 - n - 1$	1	1	1
0	0	$\delta = n^2 - n$	1	1	1
0	0	$n^2 - n + 1 \leq \delta \leq n^2$	1	1	1
0	1	$0 \leq \delta \leq n+1$	1	1	0
0	1	$n+2 \leq \delta \leq n^2 - n - 1$	1	1	1
0	1	$\delta = n^2 - n$	0	1	1
0	1	$n^2 - n + 1 \leq \delta \leq n^2$	1	1	1
1	0	$0 \leq \delta \leq n+1$	1	1	0
1	0	$n+2 \leq \delta \leq n^2 - n - 1$	1	1	1
1	0	$\delta = n^2 - n$	1	0	1
1	0	$n^2 - n + 1 \leq \delta \leq n^2$	1	1	1
1	1	$0 \leq \delta \leq n$	1	1	0
1	1	$n+1 \leq \delta \leq n^2 - n - 1$	1	1	1
1	1	$\delta = n^2 - n$	1	1	1
1	1	$n^2 - n + 1 \leq \delta \leq n^2$	1	1	1

Так как функция W_n принимает 4 значения, а функции S_1 и S_2 принимают 2 значения, то функция H не может быть равна этим функциям. Поэтому $H = W_p$ для некоторого числа p , $p \geq 4$, $p \neq n$, и $r = p^2 + 2$.

По определению функций S_1 , S_2 и по свойствам функций W_n , $n \geq 4$, верно равенство $B(\mathcal{A}) = O^2$. Поэтому все функции $q_1, \dots, q_{m(p^2+2)}$ принадлежат классу O^2 , а так как все компоненты функции W_n существенно зависят только от переменных $x, y, z_1, \dots, z_{n^2}$, то без ограничения общности можно считать, что булевы функции $q_1, \dots, q_{m(p^2+2)}$ зависят только от тех же переменных.

Обозначим функцию q_1 через h_1 , функцию q_{m+1} через h_2 , а для для всех i , $1 \leq i \leq p^2$, обозначим функцию $q_{m(i+1)+1}$ через g_i . В введенных обозначениях соотношение (8) можно записать при помощи эквивалентной системы равенств

$$\begin{cases} w_{n,1} = & w_{p,1}(h_1, h_2, g_1, \dots, g_p) = h_1 \vee \overline{h_2} \vee \overline{\theta^{p^2-p}(g_1, g_2, \dots, g_{p^2})}; & (9) \\ w_{n,2} = & w_{p,2}(h_1, h_2, g_1, \dots, g_p) = \overline{h_1} \vee h_2 \vee \overline{\theta^{p^2-p}(g_1, g_2, \dots, g_{p^2})}; & (10) \\ w_{n,i} = & w_{p,i}(h_1, h_2, g_1, \dots, g_p) = \omega^{p+3}(h_1, h_2, g_1, g_2, \dots, g_{p^2}) \\ & \text{при } i = 3, \dots, m. & (11) \end{cases}$$

Найдем некоторые свойства функций $h_1, h_2, g_1, \dots, g_{p^2}$. Для этого рассмотрим семейство $M(n)$ всех подмножеств множества $\{1, \dots, n^2\}$ мощности n . Каждому множеству $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ из $M(n)$ сопоставим набор из $E_2^{n^2}$, у которого компоненты с номерами $a_1, a_2, \dots, a_n$ равны 1, а все

остальные компоненты равны 0. Такой набор будем обозначать через $\tilde{A}$. Помимо набора $\tilde{A}$ будем также рассматривать набор $\neg\tilde{A}$ из $E_2^{n^2}$, двойственный к $\tilde{A}$.

Пусть $A \in M(n)$. На наборе $(0, 1, \neg\tilde{A})$ значение функции $w_{n,1}$ равно 0. Значит, согласно равенству (9), на данном наборе значение функции $h_1 \vee \vee \overline{h_2} \vee \overline{\theta^{p^2-p}(g_1, \dots, g_{p^2})}$ тоже должно быть равно 0. Поэтому $h_1(0, 1, \neg\tilde{A}) = 0$, а среди функций $g_1, \dots, g_{p^2}$ ровно p функций равны 0 на данном наборе. Индексы данных функций обозначим через $i(A, 1), \dots, i(A, p)$ соответственно, а множество $\bigcup_{t=1}^p i(A, t)$ — через $i(A)$.

Рассмотрим набор $(1, 0, \tilde{A})$. Покажем, что для любого набора $\tilde{\gamma}$ такого, что $\tilde{\gamma} \geq (1, 0, \tilde{A})$, верны равенства $h_1(\tilde{\gamma}) = 1$ и $g_t(\tilde{\gamma}) = 1$ для всех $t \in i(A)$. Предположим, что это не так, т.е. существует набор $\tilde{\gamma}$ из $E_2^{n^2+2}$, для которого справедливо соотношение $\tilde{\gamma} \geq (1, 0, \tilde{A})$ и на котором равна 0 либо функция h_1 , либо некоторая функция g_t при $t \in i(A)$. Но эта функция равна 0 на наборе $(0, 1, \neg\tilde{A})$, который не имеет общих нулевых компонент с набором $\tilde{\gamma}$. Поэтому рассматриваемая нами функция не может содержаться в классе O^2 , что неверно. Получили противоречие. Поэтому справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} h_1 &\geq x \& z_{a_1} \& z_{a_2} \& \dots \& z_{a_n}, \\ g_t &\geq x \& z_{a_1} \& z_{a_2} \& \dots \& z_{a_n} \text{ для всех } t \in i(A). \end{aligned}$$

Далее рассмотрим набор $(1, 0, \neg\tilde{A})$. На нем функция $w_{n,2}$ равна 0. Поэтому аналогично рассмотренному ранее получим, что $h_2(1, 0, \neg\tilde{A}) = 0$ и среди функций $g_1, \dots, g_{p^2}$ ровно p функций тоже равны 0 на данном наборе. Индексы данных функций обозначим через $j(A, 1), \dots, j(A, p)$ соответственно, а множество $\bigcup_{t=1}^p j(A, t)$ — через $j(A)$. Также аналогичным образом получим, что для любого набора $\tilde{\gamma}$ такого, что $\tilde{\gamma} \geq (0, 1, \tilde{A})$, верны равенства $h_2(\tilde{\gamma}) = 1$ и $g_t(\tilde{\gamma}) = 1$ для всех $t \in j(A)$. Поэтому справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} h_2 &\geq y \& z_{a_1} \& z_{a_2} \& \dots \& z_{a_n}, \\ g_t &\geq y \& z_{a_1} \& z_{a_2} \& \dots \& z_{a_n} \text{ для всех } t \in j(A). \end{aligned}$$

Определим набор $\tilde{\alpha} = (1, 1, \tilde{A})$. Он содержит $n + 2$ единицы, и поэтому на нем значение функции $w_{n,3}$ равно 0. Согласно равенству (11) значение функции $\omega^{p+3}(h_1, h_2, g_1, g_2, \dots, g_{p^2})$ на данном наборе тоже должно быть равно нулю. Это означает, что среди значений $h_1(\tilde{\alpha}), h_2(\tilde{\alpha}), g_1(\tilde{\alpha}), g_2(\tilde{\alpha}), \dots, g_{p^2}(\tilde{\alpha})$ должно быть не более $p + 2$ единиц. По доказанному выше на наборе $\tilde{\alpha}$ равны единице функции h_1, h_2 и функции g_t и g_s для всех $t \in i(A)$ и $s \in j(A)$. Так как $|i(A)| = |j(A)| = p$, то среди значений $h_1(\tilde{\alpha}), h_2(\tilde{\alpha}), g_1(\tilde{\alpha}), g_2(\tilde{\alpha}), \dots, g_{p^2}(\tilde{\alpha})$ как минимум $p + 2$ единицы. Значит, их число должно быть равно $p + 2$, но это выполняется только в том случае, когда совпадают множества индексов $i(A)$ и $j(A)$. Без ограничения общности можно считать, что $i(A, t) = j(A, t)$ для всех t , $1 \leq t \leq p$. Поэтому справедливы соотношения

$$g_t \geq (x \vee y) \& z_{a_1} \& z_{a_2} \& \dots \& z_{a_n} \text{ для всех } t \in i(A).$$

Выясним, как связаны множества $i(A)$ и $i(B)$ для множеств $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ из $M(n)$.

Пусть сначала $A \cap B = \emptyset$. Покажем, что $i(A) \cap i(B) = \emptyset$. В наборе $\neg \widetilde{B}$ компоненты с номерами $a_1, \dots, a_n$ равны 1, а поскольку выполнено неравенство $g_t \geq (x \vee y) \& z_{a_1} \& z_{a_2} \& \dots \& z_{a_n}$ для всех $t \in i(A)$, то $g_t(0, 1, \neg \widetilde{B}) = 1$. Но так как выполняется соотношение $g_s(0, 1, \neg \widetilde{B}) = 0$ для всех $s \in i(B)$ (в силу определения множества $i(B)$), то $i(A) \cap i(B) = \emptyset$.

Определим множества индексов $C_r = \{nr + 1, nr + 2, \dots, nr + n\}$ для всех $r = 0, \dots, n - 1$. Для всех r , $0 \leq r \leq n - 1$, мощность множеств $i(C_r)$ равна p , а так как $C_r \cap C_q = \emptyset$ при $r \neq q$, то $i(C_r) \cap i(C_q) = \emptyset$. Поэтому $|\bigcup_{r=0}^{n-1} i(C_r)| = np$. Поскольку множество $\bigcup_{r=0}^{n-1} i(C_r)$ является подмножеством множества $\{1, \dots, p^2\}$, то выполняется неравенство $p^2 \geq np$. Но $p \neq n$, а следовательно, справедливо неравенство $p > n$.

Теперь покажем, что если $|A \cap B| = n - 1$, то $|i(A) \cap i(B)| \geq p - 1$. Пусть множество A равно $\{a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$, а множество B равно $\{a_1, \dots, a_{n-1}, b\}$, где $a_n \neq b$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} h_1 &\geq x \& z_{a_1} \& \dots \& z_{a_{n-1}} \& (z_{a_n} \vee z_b), \\ h_2 &\geq y \& z_{a_1} \& \dots \& z_{a_{n-1}} \& (z_{a_n} \vee z_b), \\ g_t &\geq (x \vee y) \& z_{a_1} \& \dots \& z_{a_{n-1}} \& z_{a_n} \text{ для всех } t \in i(A), \\ g_s &\geq (x \vee y) \& z_{a_1} \& \dots \& z_{a_{n-1}} \& z_b \text{ для всех } s \in i(B). \end{aligned}$$

Обозначим через $\widetilde{AB}$ набор из $E_2^{n^2}$, у которого компоненты с номерами $a_1, \dots, a_n$ и b равны 1, а все остальные компоненты равны 0.

Рассмотрим теперь набор $\widetilde{\beta} = (1, 0, \widetilde{AB})$. Он содержит ровно $n + 2$ единицы и на нем значение функции $w_{n,3}$ равно 0. Значит, согласно равенству (11), значение функции $\omega^{p+3}(h_1, h_2, g_1, g_2, \dots, g_{p^2})$ на данном наборе тоже должно быть равно 0. Это означает, что среди значений $h_1(\widetilde{\beta})$, $h_2(\widetilde{\beta})$, $g_1(\widetilde{\beta})$, $g_2(\widetilde{\beta})$, $\dots$, $g_{p^2}(\widetilde{\beta})$ должно быть не более $p + 2$ единиц. На наборе $\widetilde{\beta}$ равны 1 функция h_1 и функции g_t и g_s для всех $t \in i(A)$ и $s \in i(B)$. Если $|i(A) \cup i(B)| \geq p + 2$, то число функций, которые равны единице на наборе $\widetilde{\beta}$, будет не меньше, чем $p + 3$, что неверно. Поэтому если выполнено $|A \cap B| = n - 1$, то должно выполняться неравенство $|i(A) \cup i(B)| \leq p + 1$. Поскольку $|i(A)| = |i(B)| = p$, то неравенство $|i(A) \cup i(B)| \leq p + 1$ эквивалентно неравенству $|i(A) \cap i(B)| \geq p - 1$.

Определим множества $D_r = \{r + 1, \dots, r + n\}$ для всех $r = 0, \dots, n$. Тогда $|D_r \cap D_{r+1}| = n - 1$ при $r = 0, \dots, n - 1$ и $D_0 \cap D_n = \emptyset$. По индукции докажем, что $|i(D_0) \cap i(D_r)| \geq p - r$ при $r = 1, \dots, n$.

Если $r = 1$, то нужное утверждение следует из того, что $|D_0 \cap D_1| = n - 1$ и доказанного выше неравенства $|i(A) \cap i(B)| \geq p - 1$ при $|A \cap B| = n - 1$.

Предположим, что для всех $q = 1, \dots, r - 1$ утверждение доказано. Покажем, что утверждение верно и при $q = r$.

По предположению индукции верно неравенство $|i(D_0) \cap i(D_{r-1})| \geq p - (r - 1)$. Так как $|D_{r-1} \cap D_r| = n - 1$, то $|i(D_{r-1}) \cap i(D_r)| \geq p - 1$. Если $|i(D_{r-1}) \cap i(D_r)| = p$, то $i(D_{r-1}) = i(D_r)$ и доказываемое неравенство очевидно

по предположению индукции. Если $|i(D_{r-1}) \cap i(D_r)| = p - 1$, то без ограничения общности положим, что $i(D_{r-1}, t) = i(D_r, t)$ для всех t , $1 \leq t \leq p - 1$, а $i(D_{r-1}, p) \neq i(D_r, p)$. Тогда

$$\begin{aligned} |i(D_0) \cap i(D_r)| &= |i(D_0) \cap (\bigcup_{t=1}^p i(D_r, t))| \geq |i(D_0) \cap (\bigcup_{t=1}^{p-1} i(D_r, t))| = \\ &= |i(D_0) \cap (\bigcup_{t=1}^{p-1} i(D_{r-1}, t))| \geq |i(D_0) \cap i(D_{r-1})| - 1 = p - r, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Таким образом, при $r = n$ выполняется соотношение $|i(D_0) \cap i(D_n)| \geq p - n$. Но так как $D_0 \cap D_n = \emptyset$, то верно равенство $i(D_0) \cap i(D_n) = \emptyset$. Значит, $p - n \leq 0$, что противоречит ранее доказанному неравенству $p > n$. Следовательно, $W_n \notin [\mathcal{A}]_\beta$. Лемма доказана.

Применяя метод доказательства, используемый при доказательстве теорем 3.4 и 4.1, и результаты, полученные в лемме 4.4, несложно доказывается следующее утверждение.

Теорема 4.4. Для всех $k = 2^m$, $m \geq 3$, справедливо равенство $\{O^2, I^2\} \subset Q(k, 4)$.

4.4. Полная классификация. Результаты теорем 3.2, 3.5, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 позволяют сформулировать следующие утверждения.

Теорема 4.5. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} Q(4, 4) &= \{O^\infty, O_0^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, I^\infty, I_1^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\} \cup \\ &\cup \{O^\mu, O_0^\mu, MO^\mu, MO_0^\mu, I^\mu, I_1^\mu, MI^\mu, MI_1^\mu \mid \mu \geq 3\}, \\ C(4, 4) &= \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \mid [\mathcal{B}] = \mathcal{B}, \mathcal{B} \notin Q(4, 4)\}. \end{aligned}$$

Теорема 4.6. Пусть $k = 2^m$, $m \geq 3$. Тогда справедливы равенства

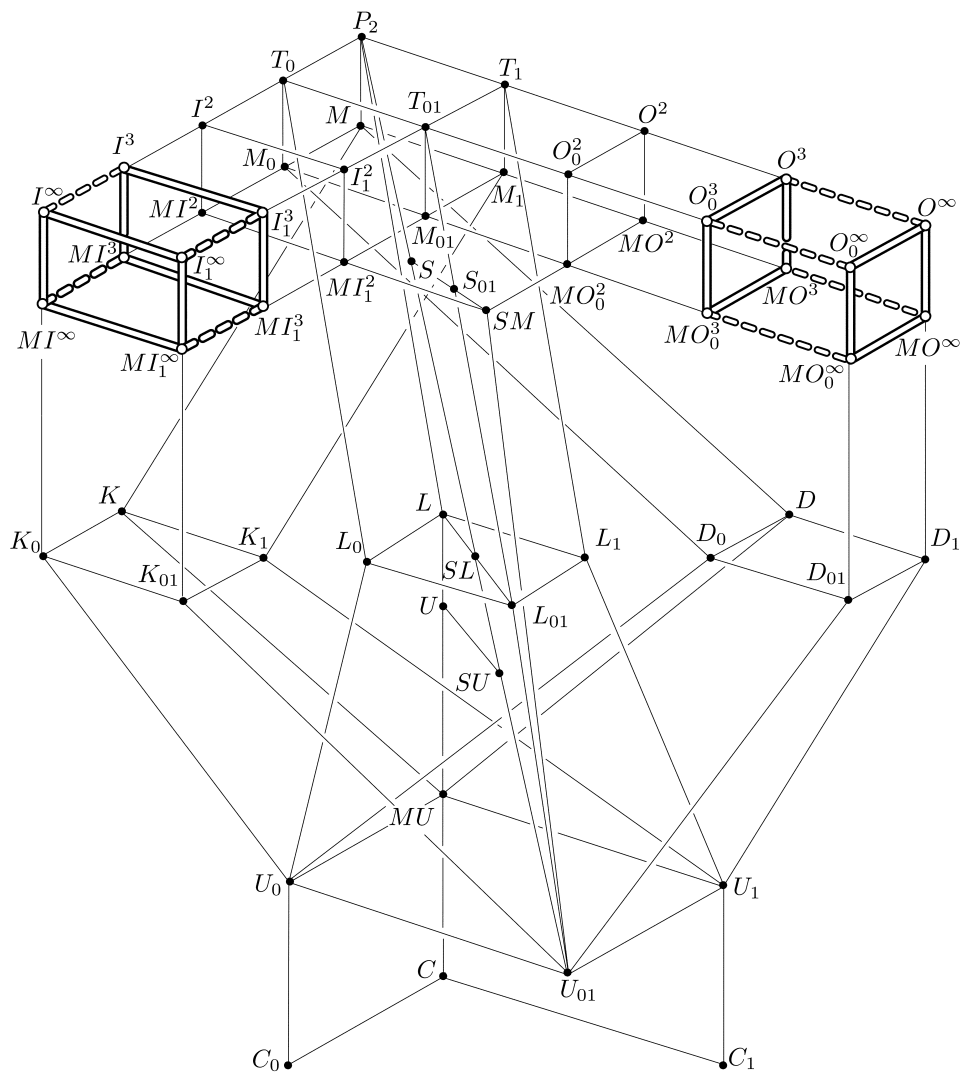
$$\begin{aligned} Q(k, 4) &= Q(4, 4) \cup \{O^2, I^2\}, \\ C(k, 4) &= \{\mathcal{B} \subseteq P_2 \mid [\mathcal{B}] = \mathcal{B}, \mathcal{B} \notin Q(k, 4)\}. \end{aligned}$$

На рис. 2 и 3 в диаграмме Поста выделены классы булевых функций, которые содержатся в множествах $Q(4, 4)$ и $Q(k, 4)$ при $k = 2^m$, $m \geq 3$.

§ 5. Классы функций из P_k

5.1. Континуальные семейства β -замкнутых классов. В предыдущем параграфе для каждого класса $\mathcal{B}$ булевых функций было установлено, содержится ли он во множестве $C(k, 4)$ или $Q(k, 4)$, где $k = 2^m$, $m \geq 2$. В частности, было определено, является ли конечным или континуальным семейство β -замкнутых классов функций из P_4 с булевым замыканием $\mathcal{B}$.

Исследуем теперь множество $Q(k, k)$ при $k = 2^m$, $m \geq 3$. Очевидно, что множеству $Q(k, k)$ принадлежат все классы из множества $Q(k, 4)$. Покажем, что $Q(k, k)$ принадлежат еще и классы O_0^2, MO^2, MO_0^2 булевых функций, а также двойственные им классы.

Рис. 2. Классы булевых функций из множества $Q(4, 4)$

В книге [57] для каждого класса $\mathcal{B}$ из множества классов O_0^2, MO^2, MO_0^2 приводится пример базиса, состоящего из двух функций. Обозначим функции данного базиса через $s_1^{\mathcal{B}}$ и $s_2^{\mathcal{B}}$. Как и в п. 4.1, определим функции $S_1^{\mathcal{B}}$ и $S_2^{\mathcal{B}}$ из P_k через их двоичные представления:

$$b_i(S_j^{\mathcal{B}}) = s_j^{\mathcal{B}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, 2.$$

Тогда очевидно, что $\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}}\} \subset P_{k|2}$ и $B(\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}}\}) = \mathcal{B}$.

Приведем примеры непрерывных семейств β -замкнутых классов функций из P_k с булевыми замыканиями O_0^2, MO^2, MO_0^2 . Для этого для каждого $n \geq 4$ определим функцию W_n из P_k , которая зависит от $n^2 + 2$ перемен-

Тогда компоненты функции W_n примут вид:

$$\begin{aligned} w_{n,1} &= x \vee \omega^{n^2-n+1}(\tilde{z}), \\ w_{n,2} &= y \vee \omega^{n^2-n+1}(\tilde{z}), \\ w_{n,i} &= \omega^{n+3}(x, y, \tilde{z}) \text{ при } i = 3, \dots, m. \end{aligned}$$

Покажем, что $b(W_n) \subset MO_0^2$ для каждого $n \geq 4$. Функции $w_{n,1}$ и $w_{n,2}$ мажорируют переменные x и y соответственно. Также они содержатся в множестве M_{01} и поэтому принадлежат классу MO_0^∞ , который содержится в классе MO_0^2 . Функции $w_{n,i}$, $i = 3, \dots, m$, равны функции $\omega^{n+3}(x, y, \tilde{z})$. Рассмотрим два произвольных набора из $E_2^{n^2+2}$, на которых данная функция равна 0. По определению функции $\omega^{n+3}(x, y, \tilde{z})$ среди компонент рассматриваемых наборов содержится не более $n+2$ единиц. Поэтому суммарно в данных наборах не более $2n+4$ единицы. Но при $n \geq 4$ справедливо неравенство $n^2+2 > 2n+4$, а значит, у рассматриваемых наборов есть общая нулевая компонента. Поэтому $\omega^{n+3}(x, y, \tilde{z}) \in MO_0^2$. Значит, $b(W_n) \subset MO_0^2$.

Л е м м а 5.1. Для каждого $n \geq 2$ справедливо соотношение

$$W_n \notin \left[\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \mid \mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}\} \cup \{W_i \mid i \geq 4, i \neq n\} \right]_\beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 4.4, поэтому опишем только основные этапы доказательства.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество $\{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \mid \mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}\} \cup \{W_i \mid i \geq 4, i \neq n\}$. По свойствам функций из множества $\mathcal{A}$ выполняется равенство $B(\mathcal{A}) = O^2$.

Предположим, что $W_n \in [\mathcal{A}]_\beta$. Тогда справедливо равенство

$$\widehat{W_n} = \widehat{H}(\langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle, \dots, \langle \omega_{m(r-1)+1}, \dots, \omega_{mr} \rangle), \quad (12)$$

где функция H принадлежит множеству $\mathcal{A}$, r — число переменных функции H , а булевы функции $\omega_1, \dots, \omega_{mr}$ принадлежат множеству O^2 . Если $H \in \{S_1^{\mathcal{B}}, S_2^{\mathcal{B}} \mid \mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2\}\}$, то функция W_n принимает не более двух значений, что неверно. Поэтому $H = W_p$ для некоторого числа p , $p \geq 4$, $p \neq n$, и $r = p^2 + 2$.

Поэтому все функции $q_1, \dots, q_{m(p^2+2)}$ принадлежат классу O^2 , а так как все компоненты функции W_n существенно зависят только от переменных $x, y, z_1, \dots, z_{n^2}$, то без ограничения общности можно считать, что булевы функции $q_1, \dots, q_{m(p^2+2)}$ зависят только от тех же переменных.

Обозначим функцию q_1 через h_1 , функцию q_{m+1} через h_2 , а для для всех i , $1 \leq i \leq p^2$, обозначим функцию $q_{m(i+1)+1}$ через g_i . В введенных обозначениях соотношение (12) можно записать при помощи эквивалентной системы равенств:

$$\begin{cases} w_{n,1} = h_1 \vee \omega^{p^2-p+1}(g_1, g_2, \dots, g_{p^2}), \\ w_{n,2} = h_2 \vee \omega^{p^2-p+1}(g_1, g_2, \dots, g_{p^2}), \\ w_{n,i} = \omega^{p+3}(h_1, h_2, g_1, g_2, \dots, g_{p^2}) \text{ при } i = 3, \dots, m. \end{cases}$$

Как и при доказательстве леммы 4.4, показывается, что для каждого множества A различных чисел $a_1, \dots, a_n$ из семейства $\{1, \dots, n^2\}$ справедлива соотношения

$$\begin{aligned} h_1 &\geq x \& z_{a_1} \& z_{a_2} \& \dots \& z_{a_n}, \\ h_2 &\geq y \& z_{a_1} \& z_{a_2} \& \dots \& z_{a_n}. \end{aligned}$$

Причем для каждого такого множества A найдется множество $i(A)$ различных чисел $i(A, 1), \dots, i(A, p)$ из семейства $\{1, \dots, p^2\}$, для которого имеют место соотношения

$$g_t \geq (x \vee y) \& z_{a_1} \& z_{a_2} \& \dots \& z_{a_n} \text{ для всех } t \in i(A).$$

Далее устанавливается, что если $A \cap B = \emptyset$, то $i(A) \cap i(B) = \emptyset$. Следовательно, $p > n$. Если же $|A \cap B| = n - 1$, то $|i(A) \cap i(B)| \geq p - 1$. На основе данного утверждения, при рассмотрении множеств $D_r = \{r+1, \dots, r+n\}$ для всех $r = 0, \dots, n$, несложным образом доказывается, что $|i(D_0) \cap i(D_n)| \geq p - n$. Но так как $D_0 \cap D_n = \emptyset$, то $n \geq p$, что противоречит ранее найденному соотношению для чисел p и n . Значит, $W_n \notin [\mathcal{A}]_\beta$, что и требовалось доказать.

Применяя метод, использованный при доказательстве теоремы 4.1, и результаты леммы 5.1 легко доказывается следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть $k = 2^m$, $m \geq 3$. Тогда справедливы соотношения

$$\{O_0^2, MO^2, MO_0^2, I_0^2, MI^2, MI_0^2\} \subset Q(k, k).$$

Таблица 4

k	r	$\mathcal{B}$
$2^m, m \geq 2$	2	—
$2^m, m \geq 2$	3	$O^\infty \subseteq \mathcal{B} \subseteq O^3$ $I^\infty \subseteq \mathcal{B} \subseteq I^3$
4	4	$MO_0^\infty \subseteq \mathcal{B} \subseteq O^3$ $MI_1^\infty \subseteq \mathcal{B} \subseteq I^3$
$2^m, m \geq 3$	4	$\mathcal{B} \in Q(4, 4)$ $\mathcal{B} \in \{O^2, I^2\}$
$2^m, m \geq 3$	k	$\mathcal{B} \in Q(k, 4)$ $\mathcal{B} \in \{O_0^2, MO^2, MO_0^2, I_0^2, MI^2, MI_0^2\}$

Таблица 5

k	r	$\mathcal{B}$
$2^m, m \geq 2$	$2 \leq r \leq 4$	$\mathcal{B} \notin Q(k, r)$
$2^m, m \geq 3$	k	$\mathcal{B} \in \{P_2, T_0, T_1, T_{01}, S, S_{01}\}$ $\mathcal{B} \in \{L, L_0, L_1, L_{01}, SL\}$ $\mathcal{B} \in \{D, D_0, D_1, D_{01}, K, K_0, K_1, K_{01}\}$ $\mathcal{B} \in \{U, SU, MU, U_0, U_1, U_{01}, C, C_0, C_1\}$

5.2. Классификация семейств β -замкнутых классов по их мощности. Таким образом, в настоящей работе для чисел k и r таких, что $k = 2^m$, $m \geq 2$, $r = 2, 3, 4, k$, и классов $\mathcal{B}$ булевых функций были исследованы мощности семейств β -замкнутых классов функций из P_k , принимающих не более r значений, с булевым замыканием $\mathcal{B}$. Для классов $\mathcal{B}$, приведенных в табл. 4, такие семейства являются континуальными.

Конечность соответствующих семейств β -замкнутых классов была установлена для классов $\mathcal{B}$ булевых функций, приведенных в табл. 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байрамов Р. А. Об одной серии предполных классов в k -значной логике // Кибернетика. — 1967. — № 1. — С. 7–9.
2. Бурле Г. А. Классы k -значной логики, содержащие все функции одной переменной // Дискретный анализ. Вып. 10. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1967. — С. 3–7.
3. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. Голунков Ю. В. Критерий полноты систем операций в операторных алгоритмах, реализующих функции k -значной логики // Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 17. — Казань: Изд-во Казанского университета, 1980. — С. 23–24.
5. Дагаев Д. А. О сложности псевдолинейных функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2010. — № 2. — С. 53–56.
6. Дагаев Д. А. О сложности функций многозначной логики, принимающих два значения // Математические вопросы кибернетики. Вып. 18. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. С. 35–122.
7. Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 4. — С. 397–416.
8. Дудакова О. С. Об одном семействе предполных классов функций k -значной логики, не имеющих конечного базиса // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2006. — № 2. — С. 29–33.
9. Дудакова О. С. О классах k -значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — № 1. С. 31–37.
10. Дудакова О. С. О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 17. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — С. 13–104.
11. Захарова Е. Ю. Об одном достаточном условии полноты в P_k // Проблемы кибернетики. Вып. 16. — М.: Наука, 1966. — С. 239–244.
12. Захарова Е. Ю. Критерий полноты системы функций из P_k // Проблемы кибернетики. Вып. 18. — М.: Наука, 1967. — С. 5–10.
13. Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В. О предполных классах в k -значных логиках // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 186, № 3. — С. 509–512.
14. Касим-Заде О. М. О неявной выразимости булевых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1995. — № 2. — С. 44–49.
15. Касим-Заде О. М. О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Докл. РАН. — 1996. — Т. 348, № 3. — С. 299–301.
16. Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.
17. Кочергин А. В. О глубине функций k -значной логики в бесконечных базисах // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2013. — № 1. — С. 56–59.
18. Кудрявцев В. Б. О свойствах S -систем функций k -значной логики // Дискретный анализ. Вып. 19. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1971. — С. 15–47.
19. Кудрявцев В. Б. Относительно S -систем функций k -значной логики // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 199, № 1. — С. 20–22.
20. Кудрявцев В. Б. О свойствах S -систем функций k -значной логики // J. Inform. Process. Cybern. EIK. — 1973. — Т. 9, № 1/2. — С. 81–105.
21. Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. — М.: Изд-во МГУ, 1982.

22. Кузнецов А. В. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 145–146.
23. Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости // Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — С. 5–33.
24. Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. — 1966. — Т. 5, № 3. — С. 5–24.
25. Мальцев А. И. Итеративные алгебры Поста. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976.
26. Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. Вып. 3. — М.: Наука, 1960. — С. 49–60.
27. Марченков С. С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики. Вып. 36. — М.: Наука, 1979. — С. 5–22.
28. Марченков С. С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики II // Проблемы кибернетики. Вып. 40. — М.: Наука, 1983. — С. 261–266.
29. Марченков С. С. S -классификация идемпотентных алгебр с конечными носителями // Докл. РАН. — 1996. — Т. 348, № 5. — С. 587–589.
30. Марченков С. С. Основные отношения S -классификации функций многозначной логики // Дискретная математика. — 1996. — Т. 8, № 1. — С. 99–128.
31. Марченков С. С. S -классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. — 1997. — Т. 9, № 3. — С. 125–152.
32. Марченков С. С. S -классификация функций трехзначной логики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
33. Марченков С. С., Деметрович Я., Ханнак Л. О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 // Методы дискретного анализа и решение комбинаторных задач. Вып. 34. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980. — С. 38–73.
34. Математика в СССР за 40 лет (1917–1957). Т. I. — М.: Физматгиз, 1959.
35. Михайлович А. В. О замкнутых классах трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями // Вестник МГУ. Серия I. Математика. Механика. — 2008. — № 4. — С. 54–57.
36. Михайлович А. В. О классах функций трехзначной логики, порожденных монотонными симметрическими функциями // Вестник МГУ. Серия I. Математика. Механика. — 2009. — № 1. — С. 33–37.
37. Михайлович А. В. О замкнутых классах функций многозначной логики, порожденных симметрическими функциями // Математические вопросы кибернетики. Вып. 18. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — С. 123–212.
38. Нгуен Ван Хоа. О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики в P_3 // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, № 4. — С. 82–95.
39. Нгуен Ван Хоа. О семействах самодвойственных замкнутых классов k -значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. — 1993. — Т. 5, № 4. — С. 87–108.
40. Нгуен Ван Хоа. Описание замкнутых классов k -значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Докл. АН Беларуси. — 1994. — Т. 38, № 3. — С. 16–19.
41. Нгуен Ван Хоа. Структура симметрических замкнутых классов k -значной логики. — Дисс. ... док. физ. мат. наук: 01.01.09. — Минск, 1995.
42. Орехова Е. А. Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 27–74.
43. Подолько Д. К. О классах функций, замкнутых относительно специальной операции суперпозиции // Вестник МГУ. Серия I. Математика. Механика. — 2013. — № 6. — С. 54–57.
44. Подолько Д. К. Об особенностях специальной операции суперпозиции в многозначной логике // Материалы IX молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 16–21 сентября 2013 г.) / Под ред. А. В. Чашкина. — М.: Изд-во ИПМ РАН, 2013. — С. 92–97.
45. Подолько Д. К. О классах функций k -значной логики, принимающих не более трех значений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2014. — Т. 156. — С. 98–109.
46. Подолько Д. К. О мощности некоторых семейств бета-замкнутых классов функций многозначной логики // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVII Международной конференции (Казань, 16–20 июня 2014 г.) / Под ред. Ю. И. Журавлева. — Казань: Отечество, 2014. — С. 232–234.

47. Подолько Д. К. Об одном континуальном семействе бета-замкнутых классов функций многозначной логики // Прикладная дискретная математика. — 2014. — № 2(24). — С. 12–20.
48. Подолько Д. К. Об одном семействе классов функций, замкнутых относительно усиленной операции суперпозиции // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2015. — № 2. — С. 27–31.
49. Поспелов Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. Издание третье, переработанное и дополненное. — М.: Энергия, 1974.
50. Соловьев В. Д. Замкнутые классы в k -значной логике с операцией разветвления по предикатам // Дискретная математика. — 1990. — Т. 2, № 4. — С. 18–25.
51. Тайманов В. А. О функциональных системах k -значной логики операциями программного типа // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 268, № 6. — С. 1307–1310.
52. Тайманов В. А. Функциональные системы с операциями замыкания программного типа. — Дисс. ... канд. физ. мат. наук: 01.01.09. — Москва, 1984.
53. Тарасова О. С. Классы k -значной логики, замкнутые относительно расширенной операции суперпозиции // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2001. — № 6. — С. 54–57.
54. Тарасова О. С. Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операции суперпозиции и перестановки // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2004. — № 1. — С. 25–29.
55. Тарасова О. С. Классы функций k -значной логики, замкнутые относительно операции суперпозиции и перестановок // Математические вопросы кибернетики. Вып. 13. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — С. 59–112.
56. Трахтенброт Б. А. Асимптотическая оценка сложности логических сетей с памятью // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 2. — С. 281–284.
57. Угольников А. Б. Классы Поста. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008.
58. Угольников А. Б. О некоторых задачах в области многозначных логик // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) / Под ред. О.М. Касим-Заде. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. — С. 18–34.
59. Шоломов Л. А. Основы теории дискретных логических и вычислительных устройств. — СПб.: Лань, 2011.
60. Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 95, № 6. — С. 1152–1156.
61. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике // Труды Матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.
62. Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007.
63. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2008.
64. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
65. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.
66. Bagyinszki J., Demetrovics J. Lineáris osztályok szerkezete primszám értékű logikában // MTA SZTAKI. — 1976. — Т. 16. — С. 25–52.
67. Bagyinszki J., Demetrovics J. The lattice of linear classes in prime-valued logics // Banach Center Publications. Vol. 7. — Warszawa, 1982. P. 105–123.
68. Bulatov A. A. Polynomial reducts of modules I. Rough classification // Mult.-Valued Log. — 1998. — V. 3. — P. 135–154.
69. Bulatov A. A. Polynomial reducts of modules II. Algebras of primitive and nilpotent functions // Mult.-Valued Log. — 1998. — V. 3. — P. 173–193.
70. Bulatov A. A., Lau D., Strauch B. The cardinalities of sublattices of depth 2 in the lattices of clones on a 3-elementary set. — Preprint Univ. Rostock. 1996.
71. Burris S., Willard R. Finitely many primitive positive clones // Proc. of the American Mathematical Society. — 1987. — V. 101. P. 427–430.
72. Demetrovics J., Hannák L. On the cardinality of self-dual closed classes in k -valued logics // MTA SZTAKI Közlemenyek. — 1979. — V. 23. — P. 7–16.
73. Demetrovics J., Hannák L. The cardinality of closed sets in precomplete classes in k -valued logics // Acta Cybernetica. — 1979. V. 4. — P. 273–277.

74. Demetrovics J., Hannák L. The number of reduct of a preprimal algebra // *Algebra Universalis*. — 1983. — V. 16. — P. 178–185.
75. Demetrovics J., Hannák L., Marchenkov S. S. Some remarks on the structure of P_3 // *C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*. — 1980. — V. 2. — P. 215–219.
76. Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L. Near unanimity functions and partial orderings // *Proc. 14 ISMVL*. — Manitoba, 1984. — P. 52–56.
77. Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L. On algebraic properties of monotone clones // *Order*. — 1986. — V. 3. — P. 219–225.
78. Demetrovics J., Hannák L., Rónyai L. On monotone clones // *MTA SZTAKI Tanulmányok*. — 1987. — V. 202. — P. 39–62.
79. Grünwald N. Beschreibung aller abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^2 ist, mit Hilfe von Relationen // *Rostock. Math. Kolloq.* — 1983. — Bd. 23. — S. 27–34.
80. Grünwald N. Bestimmung sämtlicher abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist // *Rostock. Math. Kolloq.* — 1983. — Bd. 23. — S. 5–26.
81. Grünwald N. Strukturaussagen über den Verband der abgeschlossenen Mengen von $P_{k,2}$, insbesondere von $P_{3,2}$. — Diss. A / Universität Rostock. — Rostock, 1984.
82. Lau D. Prävollständige Klassen von $P_{k,l}$. // *J. Inform. Process. Cybern. EIK*. — 1975. — Bd. 11, Nr. 10–12. — S. 624–626.
83. Lau D. Kongruenzen auf gewissen Teilklassen von $P_{k,l}$ // *Rostock. Math. Kolloq.* — 1977. — Bd. 3. — S. 37–43.
84. Lau D. Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k -wertigen Logik // *Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen. d. Math.* — 1978. — Bd. 24. — S. 79–96.
85. Lau D. Über die Anzahl von abgeschlossenen Mengen linearer Funktionen der n -wertigen Logik // *J. Inform. Process. Cybern. EIK*. — 1978. — Bd. 14, Nr. 11. — S. 561–563.
86. Lau D. Die maximalen Klassen von $Pol_k(0)$ // *Rostock. Math. Kolloq.* — 1982. — Bd. 19. — S. 29–47.
87. Lau D. Submaximale Klassen von P_3 // *J. Inform. Process. Cybern. EIK*. 1982. — Bd. 18, Nr. 4/5. — S. 227–243.
88. Lau D. Die maximalen Klassen von $Pol_k\{x, x+1 \bmod k\} | x \in E_k\}$ // *Rostock. Math. Kolloq.* — 1984. — Bd. 25. — S. 23–30.
89. Lau D. Über abgeschlossene Mengen linearer Funktionene in mehrwertigen Logiken // *J. Inform. Process. Cybern. EIK*. — 1988. — Bd. 24, Nr. 7/8. — S. 367–381.
90. Lau D. Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{3,2}$ // *J. Inform. Process. Cybern. EIK*. — 1988. — Bd. 24, Nr. 11/12. — S. 561–572.
91. Lau D. Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{k,2}$. // *J. Inform. Process. Cybern. EIK*. — 1988. — Bd. 24, Nr. 10. — S. 395–513.
92. Lau D. Die maximalen Klassen von $\cap_{a \in Q} Pol_k\{a\}$ für $Q \subseteq E_k$ (Ein Kriterium für endliche semi-primale Algebren mit nur trivialen Unteralgebren) // *Rostock. Math. Kolloq.* — 1995. — Bd. 48. — S. 27–46.
93. Lau D. Die maximalen Klassen von $\cap_{\varrho \in Q} Pol_{3\varrho}$ für $Q \subseteq \mathfrak{B}(\{0, 1, 2\})$, Teil I // *Rostock. Math. Kolloq.* — 1997. — Bd. 51. — S. 111–126.
94. Lau D. Die maximalen Klassen von $\cap_{\varrho \in Q} Pol_{3\varrho}$ für $Q \subseteq \mathfrak{B}(\{0, 1, 2\})$, Teil II // *Rostock. Math. Kolloq.* — 1999. — Bd. 52. — S. 85–105.
95. Lau D. Die maximalen Klassen von $\cap_{\varrho \in Q} Pol_{3\varrho}$ für $Q \subseteq \mathfrak{B}(\{0, 1, 2\})$, Teil III // *Rostock. Math. Kolloq.* — 1999. — Bd. 53. — S. 3–22.
96. Lau D. *Function Algebras on Finite Sets*. — Berlin: Springer Verlag, 2006.
97. Lau D., Schröder B. On the number of closed subsets of linear functions in the 6-valued logic // *Beiträge zur Algebra und Geometrie*. — 1990. — V. 31. — P. 19–32.
98. Lo Czu Kai. On the precompleteness of the classes of functions preserving a partition // *Acta Sci. Natur. Univ. Jilinenis.* — 1963. — No. 2.
99. Lo Czu Kai. Precompleteness of a set and rings of linear functions // *Acta Sci. Natur. Univ. Jilinenis.* — 1963. — No. 2.
100. Lo Czu Kai. Precomplete classes defined by normal k -ary relations in k -valued logics // *Acta Sci. Natur. Univ. Jilinenis.* — 1964. — No. 3. — P. 39–50.
101. Lo Czu Kai, Lju Sju i Hua. Precomplete classes defined by binary relations in many-valued logics // *Acta Sci. Natur. Univ. Jilinenis.* — 1963. — No. 4.
102. Pan Jun-Cze. A solving method for finding all precomplete classes in many-valued logics // *Acta Sci. Natur. Univ. Jilinenis.* — 1962. — V. 2.

103. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. — V. 43, No. 3. — P. 163–185.
104. Post E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Vol. 5. — Princeton Univ. Press. 1941.
105. Rosenberg I. G. La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris, Group 5. — 1965. — T. 260. — P. 3817–3819.
106. Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přív. Věd. — Praha, 1970. — Bd. 80. — S. 3–93.
107. Rosenberg I. G. Completeness, closed classes and relations in multivalued logics // Proc. Internat. Sympos. on multiple-valued logics. — Morgantown, 1974. — P. 1–26.
108. Słupecki J. Kriterion pełności wielowartościowych systemów logiki zdań // C. R. Séanc. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III. — 1939. — T. 32. — P. 102–109.
109. Solvability, provability, definability: the collected works of Emil L. Post / ed. by M. Davis. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1994.
110. Tardos G. A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. — 1986. — V. 3. — P. 211–218.

Поступило в редакцию 25 III 2015