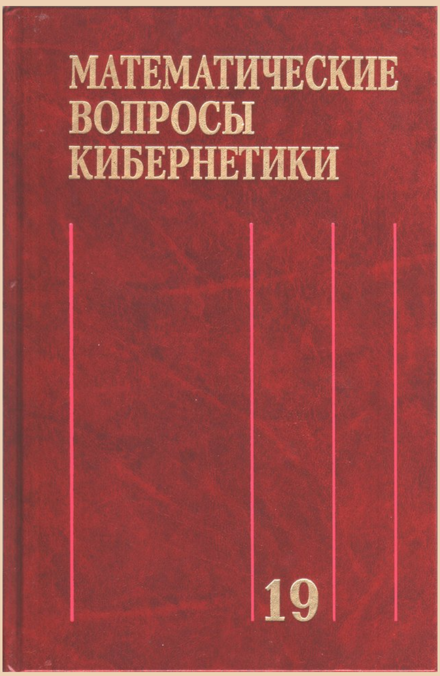

С. С. Марченков

Конечно- и бесконечно-порожденные классы 01-функций трехзначной логики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Марченков С. С. Конечно- и бесконечно-порожденные классы 01-функций трехзначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 19. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. — С. 21–36. URL: http://library.keldysh.ru/mvk.asp?id=2019-21

КОНЕЧНО- И БЕСКОНЕЧНО-ПОРОЖДЕННЫЕ КЛАССЫ 01-ФУНКЦИЙ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ*)

С. С. МАРЧЕНКОВ

(МОСКВА)

Одной из наиболее распространенных классификаций множества P_k функций k-значной логики является классификация, основанная на операции суперпозиции. При $k=2$ эта классификация счетна и полностью описана Э. Постом [31, 32]. При $k \geqslant 3$ данная классификация становится континуальной [20] и ее «исчерпывающее» описание, по-видимому, невозможно. Поэтому при $k \geqslant 3$ исследования решеток $\mathscr{L}_k$ замкнутых классов из P_k идут по пути описания наиболее интересных и значимых фрагментов: максимальных и минимальных элементов, интервалов, а также верхних и нижних конусов, определяемых хорошо известными замкнутыми классами.

Класс P_3 функций трехзначной логики является «наименьшим» классом, в котором можно найти практически все особенности, характерные для функций многозначной логики. В связи с этим решетка $\mathscr{L}_3$ привлекает внимание исследователей гораздо в большей степени, нежели решетки $\mathscr{L}_k$ при $k>3$. Из большого числа работ, посвященных изучению решетки $\mathscr{L}_3$, мы остановимся лишь на некоторых, связанных с тематикой настоящей статьи.

Все предполные классы в P_3 (максимальные элементы решетки $\mathscr{L}_3$) найдены С. В. Яблонским [17, 18]. Следующее продвижение «вглубь» решетки $\mathscr{L}_3$ сделано Д. Лау [26]: она нашла все субмаксимальные классы в P_3 — классы, которые являются предполными в предполных классах (часть из них, впрочем, была известна ранее). Еще один аналогичный шаг в этом направлении представляется слишком трудоемким. Поэтому были выбраны некоторые предполные классы и сделаны попытки описать все (или хотя бы значительную часть) замкнутых классов, содержащихся в этих классах.

Полностью подобная задача для предполного класса линейных функций решена Я. Бадьинским и Я. Деметровичем [22]. Далее, в работе [13] описан счетный фрагмент решетки замкнутых классов, лежащих в предполном классе самодвойственных (относительно перестановки $x+1 \pmod 3$) функций. Сравнительно недавно Д. Н. Жук [3, 4] сумел завершить описание данной решетки. Отметим, что этот результат пока является единственным результатом подобного рода для решеток (замкнутых классов) континуальной мощности.

---

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00958).

Очередным предполным классом, для которого можно ожидать получения подобных результатов, является, по-видимому, класс B Слупецкого [18,19]. Особенность класса B состоит в том, что «основная часть» класса состоит из функций, принимающих ровно два значения. Это обстоятельно позволяет при изучении класса B применять результаты и методы теории булевых функций.

Одним из первых начал исследовать замкнутые классы функций из P_k, принимающие $l<k$ значений («клетки Поста»), И. А. Мальцев [5,6]. В рамках класса B это привело к детальному изучению класса Q квазилинейных функций («клон Бурле») [1,2,7,27] и класса всех функций, принимающих лишь значения 0,1 (в литературе для него принято обозначение $P_{3,2}$; в данной работе этот класс имеет обозначение П). Что касается класса Q, то здесь получен почти окончательный результат — найдены все (их счетное число) замкнутые классы из Q, которые состоят из функций, принимающих лишь значения 0,1 или 0,2 [1,2]. Отметим, что среди этих классов содержатся классы, которые не имеют базисов (конечных или бесконечных).

В серии работ [23–25,27–29] (см. также книгу [30]), относящихся к замкнутым классам из П, в основном рассматривается задача определения конечной/бесконечной порождаемости замкнутых классов, которые имеют вид полного прообраза заданного замкнутого класса булевых функций при гомоморфном отображении класса P_3 на класс P_2 (в терминах настоящей работы — множество всех функций из П с булевыми ограничениями из заданного класса булевых функций). Однако сколько-нибудь существенного продвижения в описании решетки замкнутых классах, лежащих в классе П, пока не получено.

В настоящей работе мы предлагаем следующий подход к описанию данной решетки (он может быть использован и при описании других континуальных решеток замкнутых классов). Необходимо определить все максимальные (по включению) бесконечно-порожденные классы, лежащие в классе П. Это позволит локализовать совокупность всех «плохих» (не имеющих конечных порождающих систем) замкнутых классах, что, по нашему мнению, облегчит дальнейшую работу по описанию искомой решетки классов. В свою очередь, задача определения всех максимальных бесконечно-порожденных классов распадается на две подзадачи. Первая: поиск и формулирование серии достаточных условий конечной порождаемости замкнутых классов. Вторая: поиск и определение собственно максимальных бесконечно-порожденных классов (при доказательстве максимальности найденных классов как раз должны использоваться найденные достаточные условия).

Этот подход, разумеется, не претендует на универсальность, но, по нашему мнению, мог бы значительно помочь в описании решетки замкнутых классов, лежащих в классе П (а также в классе B Слупецкого). Вместе с тем следует отметить, что в этом направлении имеются и альтернативные идеи — укажем на интересные результаты А. В. Михайлович [14–16], которые, правда, пока относятся только к функциям специального вида.

Ниже мы начинаем реализацию намеченного выше плана для класса П. В разделе 2 формулируется несколько достаточных условий конечной порождаемости замкнутых классов. В разделе 3 определяются четыре бесконечно-порожденных замкнутых класса. Два из них (классы Π_1

и Π_2) являются максимальными (их максимальность доказывается на основе сформулированных в разделе 2 достаточных условий). Остальные два, как мы считаем, довольно близки к максимальным. Мы полагаем, что всего в классе Π имеется не более десяти максимальных бесконечно-порожденных замкнутых классов.

Часть из представленных ниже результатов была опубликована в препринте [8].

§ 1. Основные понятия

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$, P_2 — множество всех функций на E_2 (множество булевых функций), $E_3 = \{0, 1, 2\}$, P_3 — множество всех функций на E_3 (множество функций трехзначной логики) и Π — множество всех функций из P_3, которые принимают лишь значения 0 и 1. Если $Q \subseteq P_3$ и n — натуральное число, то через $Q^{(n)}$ обозначаем множество всех функций из Q, зависящих от n переменных.

На множестве P_3 рассматриваем операцию суперпозиции [19], которая включает в себя подстановку функций в функцию, перестановку и отождествление переменных, а также введение и удаление несущественных переменных. Для множества Q через $[Q]$ обозначаем замыкание Q относительно операции суперпозиции. Множества, замкнутые относительно операции суперпозиции, называем замкнутыми классами. Замкнутый класс Q называем *конечно-порожденным*, если существует такое число n, что $Q = [Q^{(n)}]$. В противном случае класс Q называется *бесконечно-порожденным*.

Пусть $f \in \Pi$. *Булевым ограничением* функции f называем ограничение функции f на множество E_2^n. Булево ограничение функции f обозначаем через Bf. Если Q — некоторое множество функций из Π, то посредством BQ будем обозначать множество булевых ограничений всех функций из Q. Очевидно, что булево ограничение функции из класса Π является булевой функцией. Нетрудно также видеть, что для замкнутого класса $Q \subseteq \Pi$ множество BQ представляет собой замкнутый класс булевых функций.

Если f — булева функция и $g_1, \ldots, g_m \in \Pi$, то, очевидно, $f(g_1, \ldots, g_m) \in \Pi$. Поэтому для представления некоторых функций из класса Π будем использовать известные булевы функции $\vee$ (дизъюнкцию), $\cdot$ (конъюнкцию), $\oplus$ (сложение по модулю 2) и $^{-}$ (отрицание).

Пусть $j_0(x)$, $j_1(x)$, $j_2(x)$ — такие функции из класса Π, векторы значений которых имеют вид (100), (010) и (001). В дальнейшем посредством $\varphi(x)$ будет обозначаться одна из функций $j_1(x)$, $j_1(x) \oplus j_2(x)$. Отметим, что $B\varphi(x) = x$.

Хорошо известно (см., например, [19]), что любую функцию $f(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$ из класса P_3 можно представить в виде

$$\sum f(\widetilde{\sigma}) \cdot j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_n}(x_n),$$

где суммирование по модулю 3 проводится по всем наборам $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ из E_3^n. Нетрудно видеть, что для функции f из класса Π это суммирование можно заменить суммированием по модулю 2. Кроме того, если воспользоваться соотношением $j_0(x) = j_1(x) \oplus j_2(x) \oplus 1$ и опустить слагаемые, равные нулю, то получим следующее утверждение.

Лемма 1. *Всякую функцию из класса* П *можно единственным образом представить в виде*

$$c \oplus \sum j_{\sigma_1}(x_{i_1}) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_m}(x_{i_m}), \qquad (1)$$

где суммирование проводится по модулю 2, *переменные* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ *попарно различны,* $c \in \{0, 1\}$ *и* $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \{1, 2\}$.

Посредством $\mathrm{Pol}(f)$ будем обозначать полином (1), построенный для функции f из класса П, а через $\deg(f)$ — степень этого полинома (т. е. максимум из значений m в представлении (1) функции f). Обозначим далее через $\deg_1(f)$ j_1-степень полинома функции f в нелинейных слагаемых — максимальное число сомножителей j_1 в нелинейных слагаемых полинома $\mathrm{Pol}(f)$. Отметим, что из неравенства $\deg_1(f) \geqslant 1$ следует неравенство $\deg(f) \geqslant 2$, однако неравенство $\deg(f) \geqslant 2$ не гарантирует, что $\deg_1(f) \geqslant 1$.

§ 2. Достаточные условия конечной порождаемости замкнутых классов

Назовем булеву функцию $g(x_1, \ldots, x_{m+1})$ *мажоритарной,* если $m \geqslant 2$ и при любом i $(1 \leqslant i \leqslant m+1)$ выполняется тождество

$$g(y, \ldots, y, x_i, y, \ldots, y) = y.$$

Из известной теоремы Бейкера—Пиксли [21] (см. также [10–12]) следует, в частности, что всякий замкнутый класс, содержащий мажоритарную функцию, является конечно-порожденным. Эту теорему (практически с тем же самым доказательством) можно применять и к замкнутым классам, лежащим в П. Однако в этом случае, естественно, необходимо рассматривать не булевы функции, а булевы ограничения функций из П. Таким образом, мы получаем утверждение с достаточно широкой областью действия.

Теорема 1. *Если замкнутый класс* $Q \subseteq$ П *содержит функцию с мажоритарным булевым ограничением, то класс* Q *является конечно-порожденным.*

Введем обозначения для некоторых замкнутых классов булевых функций (см. [9, 12]). Пусть L обозначает множество всех линейных функций (базис класса L образует система функций $\{1, x \oplus y\}$), O^∞ обозначает множество всех функций, удовлетворяющих условию 0^∞, (базисом класса O^∞ является функция $x \vee \bar{y}$) и I^∞ обозначает множество всех функций, удовлетворяющих условию 1^∞, (базисом класса I^∞ является функция $x \cdot \bar{y}$). Как вытекает из описания семейства всех замкнутых классов булевых функций [9, 12], любой замкнутый класс, целиком не лежащий ни в одном из замкнутых классов L, O^∞, I^∞, содержит мажоритарную функцию.

Таким образом, из теоремы 1 следует, что замкнутый класс $Q \subseteq$ П может быть бесконечно-порожденным только в том случае, когда BQ целиком входит в один из замкнутых классов L, O^∞, I^∞.

Лемма 2. *Пусть* $f \in$ П, $Bf \in L$ *и* $deg_1(f) \geqslant 1$. *Тогда в класс* $[\{f\}]$ *входит такая функция* $g_1(x, y)$, *что квадратичная часть ее полинома имеет вид* $\varphi(x) \cdot j_2(y)$. *Если же* $deg_1(f) \geqslant 2$, *то в классе* $[\{f\}]$ *содержится такая функция* $g_2(x, y, z)$, *что кубическая часть ее полинома имеет вид* $\varphi(x) \cdot \varphi(y) \cdot j_2(z)$.

Доказательство. Положим $h(x) = f(x, \ldots, x)$ и $h_1(x) = h(h(x))$. Поскольку $Bf \in L$, функция $h_1(x)$ совпадает с одной из функций $0,\ 1, j_1(x)$, $j_1(x) \oplus j_2(x)$.

Если $\deg_1(f) \geqslant 1$, то $\mathrm{Pol}(f)$ содержит слагаемое вида

$$j_1(x_{k_1}) \cdot \ldots \cdot j_1(x_{k_s}) \cdot j_2(x_{l_1}) \cdot \ldots \cdot j_2(x_{k_t}), \tag{2}$$

где $s, t \geqslant 1$ (ввиду условия $Bf \in L$ при $s \geqslant 2$ не может быть $t = 0$). Будем предполагать, что слагаемое (2) полинома функции f выбрано с наименьшим возможным $s \geqslant 1$, а среди слагаемых с данным s — с наименьшим возможным $t \geqslant 1$. Если заменить в функции f переменной x все переменные $x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}$, переменной y — все переменные $x_{l_1}, \ldots, x_{l_t}$ и переменной z — все остальные переменные, то получится функция $f_1(x, y, z)$, в полином которой, как нетрудно видеть, будет входить слагаемое

$$j_1(x) \cdot j_2(y). \tag{3}$$

Пусть $\sigma(x, y, z)$ — нелинейное слагаемое полинома функции $f_1(x, y, z)$, отличное от (3). Равенство $\sigma(x, y, x) = j_1(x) \cdot j_2(y)$ возможно только при

$$\sigma(x, y, z) \in \{j_1(z) \cdot j_2(y),\ j_1(x) \cdot j_2(y) \cdot j_1(z)\}.$$

Поэтому если полином функции f_1 содержит оба слагаемых $j_1(z) \cdot j_2(y)$, $j_1(x) \cdot j_2(y) \cdot j_1(z)$ либо не содержит ни одного из них, то в полином функции $f_2(x, y) = f_1(x, y, x)$ будет входить слагаемое (3).

Пусть полином функции f_1 не содержит слагаемого $j_1(x) \cdot j_2(y) \cdot j_1(z)$ либо выполняется включение $h_1(y) \in \{0,\ j_1(y)\}$. Тогда слагаемое (3) будет входить в полином функции $f_2(x, y) = f_1(x, y, h_1(y))$. Наконец, если полином функции f_1 содержит слагаемое $j_1(x) \cdot j_2(y) \cdot j_1(z)$, не содержит слагаемого $j_1(x) \cdot j_2(y)$ и $h_1(y) \in \{1,\ j_1(y) \oplus j_2(y)\}$, то слагаемое (3) будет присутствовать в полиноме функции $f_2(x, y) = f_1(h_1(y), y, x)$.

Итак, во всех случаях суперпозициями функции f можно получить такую функцию $f_2(x, y)$, полином которой содержит слагаемое (3). Очевидно, что нелинейная часть полинома функции f_2 имеет вид

$$j_1(x) \cdot j_2(y) \oplus a \cdot j_2(x) \cdot j_1(y) \oplus b \cdot j_2(x) \cdot j_2(y),$$

где $a, b \in \{0, 1\}$. Если $a = 0$, то в качестве функции $g_1(x, y)$ можно взять функцию $f_2(x, y)$. Если $a = 1$ и полином функции $f_2(x, y)$ не содержит слагаемого $j_1(x)$ (соответственно $j_1(y)$), то можно положить $g_1(x, y) = f_2(f_2(x, y), y)$ (соответственно $g_1(x, y) = f_2(y, f_2(x, y))$). Если же в полином функции $f_2(x, y)$ входят оба слагаемых $j_1(x)$, $j_1(y)$, то функция $h_2(x) = f_2(x, x)$ принадлежит множеству $\{0,\ 1,\ j_2(x),\ j_2(x) \oplus 1\}$. Значит, функция $h_3(x) = h_2(h_2(x))$ есть константа. Поэтому булево ограничение функции $h_4(x) = f_2(x, h_3(x))$ отлично от константы. В этом случае, как нетрудно убедиться, можно положить $g_1(x, y) = f_2(h_4(x), y)$.

Перейдем к рассмотрению случая $\deg_1(f) \geqslant 2$. Здесь в полином функции f входит слагаемое вида (2), где $s \geqslant 2$. Выберем слагаемое (2) с наименьшим возможным $s \geqslant 2$, а среди слагаемых с данным s — слагаемое с наименьшим возможным $t \geqslant 1$. Заменим в функции f переменной x переменную x_{k_1}, переменной y — все переменные $x_{k_2}, \ldots, x_{k_s}$, переменной z — все переменные $x_{l_1}, \ldots, x_{l_t}$ и переменной v — все остальные переменные. Получим функцию $f_3(x, y, z, v)$, полином которой по выбору слагаемого (2) будет содержать слагаемое

$$j_1(x) \cdot j_1(y) \cdot j_2(z). \tag{4}$$

Следующий шаг вполне аналогичен соответствующему шагу при получении функции f_2. Поэтому мы лишь кратко обозначим необходимые действия. Рассматриваем нелинейное слагаемое $\sigma(x, y, z, v)$ полинома функции $f_3(x, y, z, v)$, отличное от (4), и замечаем, что равенство $\sigma(x, y, z, x) = j_1(x) \cdot j_1(y) \cdot j_2(z)$ выполняется только при совпадении $\sigma(x, y, z, v)$ с одной из конъюнкций

$$j_1(y) \cdot j_2(z) \cdot j_1(v), \quad j_1(x) \cdot j_1(y) \cdot j_2(z) \cdot j_1(v). \tag{5}$$

Поэтому если полином функции f_3 содержит в качестве слагаемых обе конъюнкции (5) либо не содержит ни одной из них, то в полиноме функции $f_4(x, y, z) = f_3(x, y, z, x)$ будет присутствовать слагаемое (4). Далее, в случае невхождения второй конъюнкции из (5) в полином функции f_3 либо при выполнении включения $h_1(z) \in \{0,\ j_1(z)\}$ слагаемое (4) появится в полиноме функции $f_4(x, y, z) = f_3(x, y, z, h_1(z))$. Если же полином функции f_3 содержит вторую конъюнкцию из (5), не содержит первой конъюнкции и $h_1(z) \in \{1,\ j_1(z) \oplus j_2(z)\}$, то можно положить $f_4(x, y, z) = f_3(h_1(z), y, z, x)$.

Итак, в рассматриваемом случае суперпозициями функции f можно получить такую функцию $f_4(x, y, z)$, в полином которой входит слагаемое (4).

Заметим, что в силу условия $Bf_4 \in L$ (которое есть следствие условия $Bf \in L$ из формулировки леммы) всякое слагаемое третьей степени в полиноме функции f_4, отличное от (4), содержит в качестве сомножителя $j_2(x)$ или $j_2(y)$. Возьмем теперь функцию g_1, которая получается суперпозициями функции f согласно первой части доказательства леммы. Если определить

$$g_2(x, y, z) = f_4(g_1(x, z), g_1(y, z), z),$$

то в силу свойства слагаемых третьей степени полинома функции f_4 кубическая часть полинома функции $g_2(x, y, z)$ будет получаться из слагаемого (4) (полинома функции f_4) подстановкой функций $g_1(x, z)$ и $g_1(y, z)$ вместо переменных x и y соответственно. Таким образом, кубическая часть полинома функции $g_2(x, y, z)$ будет равна $\varphi(x) \cdot \varphi(y) \cdot j_2(z)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть f — такая функция из класса* Π, *что $deg(f) \geqslant 2$ и $deg_1(f) = 0$. Тогда в классе $[\{f\}]$ найдется такая функция $g(x, y)$, что единственным нелинейным слагаемым ее полинома будет $j_2(x) \cdot j_2(y)$.*

Доказательство. Пусть $j_2(x_{i_1}) \cdot \ldots \cdot j_2(x_{i_s})$ — нелинейное слагаемое наименьшей степени в $\mathrm{Pol}(f)$. Заменим в функции f переменную x_{i_1} переменной x, переменные $x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$ — переменной y и все остальные переменные — функцией $f(y, \ldots, y)$. Получим функцию $g(x, y)$. Поскольку $\deg_1(f) = 0$, все нелинейные слагаемые полинома функции f состоят только из сомножителей j_2. Поэтому полином функции $g(x, y)$ будет иметь единственное нелинейное слагаемое $j_2(x) \cdot j_2(y)$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть замкнутый класс $Q \subseteq \Pi$ удовлетворяет соотношению $BQ \subseteq L$, содержит такие функции $l(x, y, z)$ и g, что*

$Bl(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$ и $deg_1(g) \geqslant 1$. Тогда для любой функции $f \in Q$ в классе $[Q^{(3)}]$ найдется такая функция f', что нелинейные части полиномов $Pol(f)$ и $Pol(f')$ совпадают.

Доказательство. В силу леммы 2 класс Q содержит такую функцию $g_1(x, y)$, квадратичная часть полинома которой имеет вид $\varphi(x) \cdot j_2(y)$. Очевидно, можно предполагать, что $\varphi(x) = l(x, x, x)$.

Определим функции $g_2, g_3, \ldots$ по индукции:

$$g_2(x, y_1, y_2) = g_1(g_1(x, y_1), y_2) \quad \text{и}$$
$$g_{m+1}(x, y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}) = g_1(g_m(x, y_1, \ldots, y_m), y_{m+1}).$$

Нетрудно убедиться в том, что $\deg(g_m) = m+1$, $\deg_1(g_m) = 1$ и сумма членов степени $m+1$ в полиноме функции g_m равна $\varphi(x) \cdot j_2(y_1) \cdot \ldots \cdot j_2(y_m)$. Кроме того, каждое нелинейное слагаемое в $\mathrm{Pol}(g_m)$ из j_1-сомножителей может содержать лишь сомножитель $j_1(x)$.

Предположим, что в класс Q входит функция h, для которой $\deg_1(h) \geqslant 2$. Тогда согласно лемме 2 в классе Q найдется функция $h_{2,1}(x, y, z)$, кубическая часть полинома которой имеет вид $\varphi(x) \cdot \varphi(y) \cdot j_2(z)$. Положим

$$h_{1,m}(x, y_1, \ldots, y_m) = g_m(x, y_1, \ldots, y_m),$$
$$h_{k+1,m}(x_1, \ldots, x_{k+1}, y_1, \ldots, y_m) =$$
$$= h_{2,1}(h_{k,m}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m), g_1(x_{k+1}, y_1), y_1).$$

Используя свойства функций g_m и $h_{2,1}$, заключаем, что $\deg(h_{k,m}) = k+m$ и сумма членов степени $k+m$ в $\mathrm{Pol}(h_{k,m})$ равна

$$\varphi(x_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_k) \cdot j_2(y_1) \cdot \ldots \cdot j_2(y_m). \tag{6}$$

Отметим также, что $\deg_1(h_{k,m}) = k$.

Предположим, что в класс Q входит такая функция d, что $\deg(d) \geqslant 2$ и $\deg_1(d) = 0$. Тогда в соответствии с леммой 3 классу Q принадлежит такая функция $d_2(x, y)$, в полиноме которой $j_2(x) \cdot j_2(y)$ является единственным нелинейным слагаемым. Положим при $m \geqslant 2$

$$d_{m+1}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) = g_1(d_m(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}).$$

Легко видеть, что $\deg(d_m) = m$ и единственным слагаемым степени m в $\mathrm{Pol}(d_m)$ является

$$j_2(x_1) \cdot \ldots \cdot j_2(x_m). \tag{7}$$

Кроме того, $\deg_1(d_m) = 0$.

Пусть теперь f — произвольная функция класса Q. Будем предполагать, что полином функции f нелинеен. Рассмотрим сначала случай, когда $\deg_1(f) \geqslant 2$. Тогда по доказанному для любых $k, m \geqslant 1$ классу Q принадлежит функция $h_{k,m}$, в полиноме которой сумма членов степени $k+m$ представима в виде (6). Выделим в полиноме функции f слагаемое вида (6) наибольшей степени и обозначим через h_1 соответствующую этому слагаемому функцию $h_{k,m}$. Положим $f_1 = l(f, h_1, \varphi(x_1))$. Тогда множество нелинейных слагаемых полинома функции f_1 получается из аналогичного множества слагаемых полинома функции f удалением слагаемого вида (6), отвечающего функции h_1. Кроме того, имеем $f = l(f_1, h_1, \varphi(x_1))$.

Таким образом, задачу построения для функции f функции f' мы свели к аналогичной задаче для функции f_1. Однако полином функции f_1 по сравнению с полиномом функции f содержит меньше слагаемых вида (6) максимально возможной степени. Далее поступаем с функцией f_1 так же, как с функцией f. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока в полиноме функции будет содержаться хотя бы одно слагаемое вида (6).

Пусть на некотором этапе получена функция f_t, полином которой нелинеен, но не содержит слагаемых вида (6). Значит, в $\mathrm{Pol}(f_t)$ входит слагаемое вида (7), где $m \geqslant 2$. Выберем наибольшее возможное m. По доказанному в классе Q имеется такая функция d_m, что единственным слагаемым степени m в ее полиноме является слагаемое вида (7). Положив $f_{t+1} = l(f_t, d_m, \varphi(x_1))$, замечаем, что множество нелинейных слагаемых полинома функции f_{t+1} получается из аналогичного множества слагаемых полинома функции f_t удалением слагаемого вида (7), соответствующего функции d_m. Кроме того, $f_t = l(f_{t+1}, d_m, \varphi(x_1))$. Далее продолжаем подобным образом до получения функции f_w с линейным полиномом. Из функции f_w «обратными» преобразованиями (т. е. формулами вида $l(f_{t+1}, d_m, \varphi(x_1))$ и $l(f_{t+1}, h_{k,m}, \varphi(x_1)))$ получаем искомую функцию f'.

В случае $\deg_1(f) = 1$ действуем аналогичным образом, используя вместо функций $h_{k,m}$ функции g_m. Лемма доказана.

Л е м м а 5. *Пусть полином функции f линеен. Тогда эту функцию можно представить в виде суперпозиции функций из множества $[\{f, l(x, y, z)\}]^{(3)}$, где булево ограничение функции l равно $x \oplus y \oplus z$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varphi(x) = l(x, x, x)$. Можно считать, что

$$l(x, y, z) = \varphi(x) \oplus \varphi(y) \oplus \varphi(z).$$

Представим функцию f в виде

$$\varphi_1(x_1) \oplus \ldots \oplus \varphi_k(x_k) \oplus j_2(y_1) \oplus \ldots \oplus j_2(y_m) \oplus c,$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — функции типа $j_1(x)$, $j_1(x) \oplus j_2(x)$ и $c \in E_2$. Можно предполагать, что $k + m \geqslant 4$.

Пусть сначала $k = 0$. Тогда

$$c = f(\varphi(x), \ldots, \varphi(x)), \quad j_2(x) \oplus c = f(x, \varphi(x), \ldots, \varphi(x)),$$

$$\varphi(x) \oplus j_2(y) = l(\varphi(x), j_2(y) \oplus c, c).$$

Суперпозициями последней функции образуем функцию $f_1 = \varphi(x) \oplus \oplus j_2(y_1) \oplus \ldots \oplus j_2(y_m)$. Далее получаем функцию f подстановкой функций $f_1, \varphi(x), c$ в функцию l.

Пусть $m = 0$. Предположим, кроме того, что k четно. Как и выше, получаем $c = f(\varphi(x), \ldots, \varphi(x))$. Замечаем, что при подстановке в функцию f функции $\varphi(x_i)$ вместо всех переменных, отличных от переменных x_i, x_j, образуется функция $\varphi_i(x_i) \oplus \varphi_j(x_j) \oplus c$. С использованием данной функции сводим задачу получения функции f к задаче получения функции

$$l(f(x_1, \ldots, x_k), \varphi_i(x_i) \oplus \varphi_j(x_j) \oplus c, c),$$

которая имеет ровно на два неконстантных слагаемых меньше, чем функция f.

Пусть k нечетно, $k \geqslant 5$. Тогда среди функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ есть по крайней мере три функции одинакового типа. Предположим, например, что это функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Рассмотрим функции

$$f(x_1, x_1, x_1, x_4 \ldots, x_k), \; f(x_2, x_2, x_2, x_4, \ldots, x_k), \; f(x_3, x_3, x_3, x_4 \ldots, x_k),$$

которые обозначим f_1, f_2, f_3. Каждая из этих функций зависит от $k-2$ переменных. Кроме того, как нетрудно видеть, выполняется соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_k) = l(f_1(x_1, x_4, \ldots, x_k), f_2(x_2, x_4, \ldots, x_k), f_3(x_3, x_4, \ldots, x_k)).$$

Таким образом, мы свели задачу к построению аналогичной функции от $k-2$ переменных.

Остается разобрать случай, когда $k, m > 0$. Положим

$$f_1(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k, \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_1)),$$

$$f_2(x, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) = l(f(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m), f_1(x_1, \ldots, x_k), \varphi(x)).$$

Тогда

$$f_1(x_1, \ldots, x_k) = \varphi_1(x_1) \oplus \ldots \oplus \varphi_k(x_k) \oplus c,$$

$$f_2(x, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) = \varphi(x) \oplus j_2(y_1) \oplus \ldots \oplus j_2(y_m).$$

Из функции f_2 подстановкой переменной y и функции $\varphi(y)$ вместо переменных $y_1, \ldots, y_m$ получаем функцию $\varphi(x) \oplus j_2(y)$, а из нее суперпозициями — функцию f_2 (переменные $x_1, \ldots, x_k$ у функции f_2 фиктивны). Окончательно имеем

$$f(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m) = l(f_1(x_1, \ldots, x_k), f_2(x, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m), \varphi(x)).$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть замкнутый класс $Q \subseteq \Pi$ содержит такие функции $l(x, y, z)$ и g, что $Bl(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$, $Bg \in L$ и $deg_1(g) \geqslant 1$. Тогда класс Q является конечно-порожденным.*

Доказательство. Если замкнутый класс BQ булевых функций содержит нелинейную функцию, то ввиду включения $(x \oplus y \oplus z) \in BQ$, класс BQ будет содержать мажоритарную функцию. В этом случае можно применить теорему 1.

Предположим, что $BQ \subseteq L$. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция класса Q, то в силу леммы 4 суперпозициями функций множества $Q^{(3)}$ можно получить такую функцию f', что нелинейные части полиномов $\mathrm{Pol}(f)$ и $\mathrm{Pol}(f')$ совпадают. Положим $\varphi(x) = l(x, x, x)$ и

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = l(f(x_1, \ldots, x_n), f'(x_1, \ldots, x_n), \varphi(x_1)).$$

Тогда полином функции f_1 линеен, и мы можем применить лемму 5. Остается заметить, что $f = l(f', f_1, \varphi(x_1)$. Теорема доказана.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in \Pi$ и $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — булев вектор. Посредством $f_{\widetilde{\sigma}}$ обозначим функцию, которая получается из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$

подстановкой константы 2 вместо всех переменных x_i, для которых $\sigma_i = 1$. Из определения легко следует, что имеет место представление

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee f_{\tilde\sigma} \cdot j_2^{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_2^{\sigma_n}(x_n), \tag{8}$$

где $j_2^0 = \bar{j}_2$, $j_2^1 = j_2$ и дизъюнкция берется по всем булевым векторам $\widetilde{\sigma}$ из E_2^n.

Обозначим через $B_2 f$ множество всех булевых ограничений функций вида $f_{\tilde\sigma}$. Если $Q \subseteq \Pi$, то пусть

$$B_2 Q = \bigcup_{f \in Q} B_2 f.$$

Нетрудно убедиться в том, что если Q — замкнутый класс, то и $B_2 Q$ — замкнутый класс.

Теорема 3. *Если замкнутый класс $Q \subseteq \Pi$ содержит функцию $\varphi(y_1)\cdot j_2(x) \vee \varphi(y_2)\cdot \bar{j}_2(x)$, то класс Q является конечно-порожденным.*

Доказательство. Как всякий замкнутый класс булевых функций, класс $B_2 Q$ имеет конечную порождающую систему $D = \{d_1, \ldots, d_k\}$. Каждая функция системы D получается из подходящей функции класса Q заменой некоторых переменных константой 2 и взятия булева ограничения. Переменные, заменяемые константой 2, можно отождествить. В результате получаем, что для всякой функции $d_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$ из D в классе Q найдется такая функция $g_i(x_1, \ldots, x_{m_i}, y)$, что

$$d_i(x_1, \ldots, x_{m_i}) = B g_i(x_1, \ldots, x_{m_i}, 2).$$

Отсюда следует, что любая функция $g(x_1, \ldots, x_m)$ из $B_2 Q$ является булевым ограничением функции вида $g'(x_1, \ldots, x_m, 2)$, где g' получается суперпозициями функций подходящей системы $G = \{g_1, \ldots, g_k\} \subset Q$.

Пусть теперь $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из Q, $\widetilde{\sigma}$ — булев вектор, отличный от единичного, $i_1, \ldots, i_s$ — номера всех нулевых компонент вектора $\widetilde{\sigma}$. Суперпозициями функций системы G определим такую функцию $f'_{\tilde\sigma}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, y)$, что

$$B f_{\tilde\sigma}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) = B f'_{\tilde\sigma}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, 2)$$

(можно считать, что булевы ограничения функций класса Q также получаются из суперпозиций функций системы G). В случае единичного набора $\widetilde{\sigma}$ функцию $f'_{\tilde\sigma}$ полагаем равной $f(x_1, \ldots, x_1)$. Тогда по выбору функций $f'_{\tilde\sigma}$ будем иметь

$$f_{\tilde\sigma}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) \cdot j_2^{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_2^{\sigma_n}(x_n) = f'_{\tilde\sigma}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, x_k) \cdot j_2^{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_2^{\sigma_n}(x_n),$$

где $k \notin \{i_1, \ldots, i_s\}$. Учитывая полученное соотношение и равенство (8), получаем

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\tilde\sigma} f'_{\tilde\sigma} \cdot j_2^{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_2^{\sigma_n}(x_n).$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается показать, как суперпозициями функции $h(x, y_1, y_2) = \varphi(y_1) \cdot j_2(x) \vee \varphi(y_2) \cdot \bar{j}_2(x)$ определить функции вида

$$\bigvee_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \varphi(y_{\sigma_1 \ldots \sigma_n}) \cdot j_2^{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_2^{\sigma_n}(x_n). \tag{9}$$

Проведем индукцию по n. При $n=1$ функция $h(y_1, y_2, x)$ имеет вид (9). Предполагая, что уже определена функция $h_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{2^n})$ вида (9), в качестве функции $h_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_{2^{n+1}})$ вида (9) берем функцию

$$h(x_{n+1}, h_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{2^n}), h_n(x_1, \ldots, x_n, y_{2^n+1}, \ldots, y_{2^{n+1}})).$$

Теорема доказана.

§ 3. Бесконечно-порожденные замкнутые классы

Обозначим через Π_1 класс всех функций из Π, полиномы которых имеют вид

$$c \oplus j_1(x_{i_1}) \oplus \ldots \oplus j_1(x_{i_k}) \oplus \sum j_2(x_{l_1}) \cdot \ldots \cdot j_2(x_{l_m}), \tag{10}$$

где $c \in \{0, 1\}$. Опираясь на представление (10), нетрудно показать, что класс Π_1 замкнут. Отметим также, что $B\Pi_1 = L$.

Обозначим через Π_2 множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из Π, что либо Bf есть константа, либо найдется такое i, $1 \leqslant i \leqslant n$, что функция f представима в виде

$$\begin{aligned} &j_1(x_i) \cdot h_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \oplus \\ &\quad \oplus j_2(x_i) \cdot h_2(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \oplus h_3(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{11}$$

где $Bh_1, Bh_3 \in \{0, 1\}$ и все слагаемые полиномов $\mathrm{Pol}(h_1)$, $\mathrm{Pol}(h_3)$, отличные от 1, состоят только из множителей j_2.

Нетрудно убедиться в том, что класс Π_2 замкнут. Кроме того, $B\Pi_2$ состоит только из функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной.

Замкнутый класс $Q \subseteq \Pi$ называем максимальным бесконечно-порожденным классом, если класс Q бесконечно-порожденный и всякий замкнутый класс из Π, собственным образом содержащий класс Q, является конечно-порожденным.

Теорема 4. *Классы* Π_1, Π_2 *являются максимальными бесконечно-порожденными замкнутыми классами.*

Доказательство. Рассмотрим класс Π_1. Покажем, что при любом $m \geqslant 1$ справедливо неравенство $[\Pi_1^{(m)}] \neq \Pi_1$. С этой целью заметим, что степень полинома любой функции из $[\Pi_1^{(m)}]$ не превосходит m. Поскольку для любой функции f из Π выполняются равенства $j_1(f) = f$ и $j_2(f) = 0$, из представления (10) легко следует, что полином произвольной функции из класса $[\Pi_1^{(m)}]$ имеет степень не выше m. Таким образом, в множество $\Pi_1 \setminus [\Pi_1^{(m)}]$ входит, например, функция $j_2(x_1) \cdot \ldots \cdot j_2(x_{m+1})$.

Установим максимальность класса Π_1. Пусть Q — замкнутый класс из Π, собственным образом содержащий класс Π_1, и $f \in Q \setminus \Pi_1$. Тогда либо функция Bf нелинейна, либо $\deg_1(f) \geqslant 1$. В первом случае ввиду включения $L \subseteq B\Pi_1$ классу $[\Pi_1 \cup \{f\}]$ будет принадлежать функция с мажоритарным булевым ограничением. Следовательно, класс Q будет конечно-порожденным по теореме 1. Во втором случае замечаем, что классу Π_1 принадлежит функция $j_1(x_1) \oplus j_1(x_2) \oplus j_1(x_3)$. Поэтому конечная порождаемость класс Q вытекает из теоремы 2.

Перейдем к классу Π_2. Покажем, что при любом $m \geqslant 1$ классу $[\Pi_2^{(m)}]$ не принадлежит функция

$$g_m(x, y_1, \ldots, y_m) = j_1(x) \cdot (j_2(y_1) \oplus \ldots \oplus j_2(y_m)),$$

входящая в Π_2.

Очевидно, что $Bg_m = 0$. Предположим, что $g_m \in [\Pi_2^{(m)}]$, и рассмотрим формулу

$$F(x, y_1, \ldots, y_m) = f_0(F_1(x, y_1, \ldots, y_m), \ldots, F_m(x, y_1, \ldots, y_m))$$

наименьшей возможной сложности (по числу входящих в нее символов функций из множества $\Pi_2^{(m)}$), которая реализует такую функцию $f(x, y_1, \ldots, y_m)$, что $Bf \in \{0, 1\}$ и $\mathrm{Pol}(f)$ содержит все слагаемые полинома функции g_m. Считаем, что $F_1, \ldots, F_m$ — либо формулы над $\Pi_2^{(m)}$, либо символы переменных. Обозначим через $f_1, \ldots, f_m$ функции, реализуемые выражениями $F_1, \ldots, F_m$. Функции $f_1, \ldots, f_m$ либо принадлежат классу $[\Pi_2^{(m)}]$, либо являются селекторными функциями. Для функции f_0 возможны два случая.

1. Bf_0 есть константа.

Пусть $f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}$ — все селекторные функции из числа $f_1, \ldots, f_m$. Из условия $Bf_0 \in \{0, 1\}$ следует, что каждое слагаемое в $\mathrm{Pol}(f_0)$, отличное от 1, содержит сомножитель j_2. Следовательно, каждое слагаемое полинома функции f, отличное от 1, будет содержать множитель вида $j_2(f_{i_s})$, где $1 \leqslant s \leqslant k$. Учитывая строение полинома функции g_m, заключаем, что это невозможно при $k < m$. Если же $k = m$, то функция f существенно зависит не более чем от m переменных, что, очевидно, также невозможно.

2. Bf_0 отлично от константы.

Пусть, например, функция $Bf_0(z_1, \ldots, z_m)$ существенно зависит от переменной z_1. Из условия $Bf_0 \neq \mathrm{const}$ и вида функции g_m следует, что $Bf_1 = \mathrm{const}$, т. е. функция f_1 не является селекторной. Поэтому, пользуясь представлением (11) для функции f_0, заключаем, что если $\mathrm{Pol}(f_1)$ не содержит некоторого слагаемого $j_1(x) \cdot j_2(y_i)$, то этим же свойством будет обладать и полином функции f. Значит, $\mathrm{Pol}(f_1)$ должен содержать все слагаемые из $\mathrm{Pol}(g_m)$. Это противоречит минимальности формулы F.

Итак, класс Π_2 является бесконечно-порожденным.

Установим максимальность класса Π_2. Как и в случае класса Π_1, рассмотрим замкнутый класс $Q \supset \Pi_2$ и функцию f из множества $Q \backslash \Pi_2$. Из определения класса Π_2 следует, что $Bf \neq \mathrm{const}$. Пусть сначала функция Bf существенно зависит по крайней мере от двух переменных. Тогда (см. [9,12]) суперпозициями функции f можно получить такую функцию g, что

$$Bg \in \{x \oplus y \oplus z,\ x \vee y,\ x \cdot y\}.$$

В случае $Bg(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$ замечаем, что классу Π_2 принадлежит функция $j_1(x) \cdot j_2(y)$. Поэтому класс Q оказывается конечно-порожденным в силу теоремы 2. Если $Bg(x, y) = x \vee y$, то суперпозицией функций g, $j_1(y_1) \cdot j_2(x)$ и $j_1(y_2) \cdot \bar{j}_2(x)$ (последняя функция тоже входит в класс Π_2) образуем функцию $j_1(y_1) \cdot j_2(x) \vee j_1(y_2) \cdot \bar{j}_2(x)$. Далее применяем теорему 3. Случай $Bg(x, y) = x \cdot y$ сопряжен с предыдущим случаем относительно перестановки $2x + 1$.

Пусть теперь функция $Bg(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит только от одной переменной. Можно считать, что это переменная x_1. Тогда функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$ можно представить в виде

$$j_1(x_1) \cdot h_1(x_2, \ldots, x_n) \oplus j_2(x_1) \cdot h_2(x_2, \ldots, x_n) \oplus h_3(x_2, \ldots, x_n), \qquad (12)$$

где $Bh_1 = 1$ и $Bh_3 = \mathrm{const}$. Обращаясь к представлению (11) для функций класса Π_2 (булевы ограничения которых отличны от константы), заключаем, что слагаемое полинома хотя бы одной из функций h_1, h_3 должно содержать множитель j_1.

Пусть это слагаемое входит в полином функции h_1. Выберем такое слагаемое наименьшей степени (если таких слагаемых несколько, то выбираем слагаемое с наименьшей j_1-степенью). Пусть, например, оно имеет вид

$$j_1(x_2) \cdot \ldots \cdot j_1(x_k) \cdot j_2(x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot j_2(x_{k+m}), \qquad (13)$$

где $k \geqslant 2$ и $m \geqslant 1$. Подставим в функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$ функцию $j_1(x)$ вместо переменной x_1, функцию $j_1(y)$ — вместо переменных $x_2, \ldots, x_k$, переменную z — вместо переменных $x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}$ и константу 0 — вместо остальных переменных. Получим функцию

$$g_1(x, y, z) = j_1(x) \cdot (j_1(y) \cdot j_2(z) \oplus a \cdot j_2(z) \oplus 1) \oplus h_4(y, z),$$

где $a \in \{0, 1\}$ и $Bh_4 = \mathrm{const}$. Из этого условия и определения функции g_1 вытекает, что

$$h_4(y, z) \in \{0,\ 1,\ j_2(z),\ j_2(z) \oplus 1,\ j_1(y) \cdot j_2(z),\ j_1(y) \cdot j_2(z) \oplus 1\}.$$

В силу принадлежности классу Π_2 функций $j_1(v) \oplus 1$ и $j_1(v) \oplus j_2(z)$ можно считать, что функция $h_4(y, z)$ либо равна 0, либо совпадает с функцией $j_1(y) \cdot j_2(z)$.

Предположим сначала, что $h_4(y, z) = 0$. Тогда при $a = 0$ получаем

$$g_1(j_1(x) \oplus 1, y, z) \oplus 1 = j_1(x) \vee j_1(y) \cdot j_2(z).$$

Подставляя в последнюю функцию вместо переменной x функцию $j_1(x) \cdot \bar{j}_2(z)$ (которая входит в класс Π_2), получаем функцию $j_1(x) \cdot \bar{j}_2(z) \vee j_1(y) \cdot j_2(z)$. Далее применяем теорему 3. Если же $a = 1$, то $g_1(x, y, z) = j_1(x) \cdot (j_1(y) \vee \bar{j}_2(z))$. Подстановка в эту функцию вместо переменной x функции $j_1(x) \vee j_2(z)$ (которая входит в класс Π_2) дает функцию $(j_1(x) \vee j_2(z)) \cdot (j_1(y) \vee \bar{j}_2(z))$, которая совпадает с функцией $j_1(x) \cdot \bar{j}_2(z) \vee j_1(y) \cdot j_2(z)$.

Пусть $h_4(y, z) = j_1(y) \cdot j_2(z)$. Тогда подстановка функции $j_1(x) \oplus 1$ вместо переменной x в функцию $g_1(x, y, z)$ дает функцию

$$j_1(x) \cdot (j_1(y) \cdot j_2(z) \oplus a \cdot j_2(z) \oplus 1) \oplus a \cdot j_2(z) \oplus 1$$

и мы вновь легко приходим к случаю $h_4(y, z) = 0$.

Предположим, что в представлении (12) функции g в полином функции h_3 входит сомножитель j_1, но j_1 не входит в полином функции h_1. В полиноме функции h_3 выберем слагаемое вида (13) и, как и выше, осуществим подстановку в функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$ функций $j_1(x), j_1(y)$, переменной z и константы 0. Получим функцию

$$g_2(x, y, z) = j_1(x) \cdot (1 \oplus c_1 \cdot j_2(z)) \oplus j_1(y) \cdot j_2(z) \oplus c_2 \cdot j_2(z) \oplus c_3,$$

где $c_1, c_2, c_3 \in \{0, 1\}$. Можно считать, что $c_2 = c_3 = 0$. Если $c_1 = 1$, то приходим к теореме 3, поскольку

$$g_2(x, y, z) = j_1(x) \cdot \bar{j}_2(z) \vee j_1(y) \cdot j_2(z).$$

Если $c_1 = 0$, то для получения такого же результата осуществляем подстановку функции $j_1(x) \cdot \bar{j}_2(z)$ вместо переменной x в функцию $g_2(x, y, z)$. Теорема доказана.

В связи с теоремой 4 возникает вопрос: насколько «глубоко» в классе П лежат классы Π_1 и Π_2? Иными словами, какова минимальная неуплотняемая цепочка вложенных замкнутых классов, которая начинается классом Π_i и заканчивается классом П? Наиболее простое решение здесь получается для класса Π_1. Определим ΠL как множество всех функций из П, булевы ограничения которых линейны. Без доказательства (его нетрудно построить на основе полученных выше результатов) приведем вид искомой цепочки:

$$\Pi_1 \subset \Pi L \subset \Pi,$$

где класс Π_1 предполон в классе ΠL, а класс ΠL — в классе П.

Продолжая поиск максимальных бесконечно-порожденных замкнутых классов в классе П, обозначим через Π_3 множество всех таких функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из П, что либо $Bf = \mathrm{const}$, либо $Bf(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}$ и $f(a_1, \ldots, a_n) = 1$ для любого набора $(a_1, \ldots, a_n)$ из E_3^n, для которого $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \in E_2^k$ и $1 \in \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$.

Нетрудно убедиться в том, что множество Π_3 является замкнутым классом. Кроме того, имеем $B\Pi_3 = D$, где D — класс всех дизъюнкций (базис класса D образует система функций $\{0, 1, x \vee y\}$).

Утверждение. *Класс Π_3 бесконечно-порожденный.*

Доказательство. Для любого $m \geqslant 1$ положим

$$g_m(x_1, \ldots, x_m) = (j_1(x_1) \vee \ldots \vee j_1(x_m)) \cdot \bar{j}_2(x_1) \cdot \ldots \cdot \bar{j}_2(x_m).$$

Легко видеть, что $g_m \in \Pi_3$. Докажем, что функция g_{m+1} не принадлежит классу $[\Pi_3^{(m)}]$.

Пусть это не так и формула

$$G(x_1, \ldots, x_{m+1}) = f_0(F_1(x_1, \ldots, x_{m+1}), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_{m+1}))$$

над множеством функций $\Pi_3^{(m)}$ реализует функцию g_{m+1} (здесь $f_0 \in \Pi_3^{(m)}$, а выражения $F_1(x_1, \ldots, x_{m+1}), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_{m+1})$ суть либо символы переменных $x_1, \ldots, x_{m+1}$, либо формулы над множеством $\Pi_3^{(m)}$). Через $f_1, \ldots, f_m$ обозначим функции, реализуемые выражениями $F_1, \ldots, F_m$. Будем предполагать, что формула G имеет наименьшую возможную сложность (по числу входящих в нее символов функций).

Очевидно, что равенство $Bf_0 = \mathrm{const}$ выполняться не может. Пусть, например, $Bf_0(y_1, \ldots, y_m) = y_1 \vee \ldots \vee y_k$.

Рассмотрим сначала случай, когда среди выражений $F_1, \ldots, F_k$ есть символы переменных. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ — все такие символы переменных. Если тогда $1 \leqslant i \leqslant k$ и $i \notin \{i_1, \ldots, i_l\}$, то функция f_i принадлежит классу П и, значит, принимает лишь значения 0 и 1. Следовательно, в силу определения класса Π_3 функция g_{m+1} будет принимать значение 1 на любом наборе $(a_1, \ldots, a_{m+1})$, где $1 \in \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}\}$ и $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}) \in E_2^l$. Последнее невозможно в силу определения функции g_{m+1} и в силу неравенств $l \leqslant k \leqslant m$.

Предположим теперь, что все функции $f_1, \ldots, f_k$ принадлежат классу П. Ясно, что булево ограничение хотя бы одной из функций $f_1, \ldots, f_k$ отлично от константы. Пусть, например,

$$Bf_1(x_1, \ldots, x_{m+1}) = x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_l}.$$

Если $l \leqslant m$, то, как и выше, получаем противоречие: значение $g_{m+1}(a_1, \ldots \ldots, a_{m+1})$ будет равно 1, как только $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}) \in \{0, 1\}^l$ и $1 \in \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}\}$. Если же $l = m+1$ (тогда $Bf_1(x_1, \ldots, x_{m+1}) = x_1 \vee \ldots \vee x_{m+1}$), то, как нетрудно видеть, функция g_{m+1} будет обращаться в 1 на любом наборе, на котором обращается в 1 функция f_1. Значит, либо $f_1 \neq g_{m+1}$ (и тогда формула G не может реализовать функцию g_{m+1}), либо $f_1 = g_{m+1}$ и, следовательно, формула G не имеет наименьшей сложности. Противоречие завершает доказательство утверждения.

Неизвестно, является ли класс Π_3 максимальным (в препринте [8] он ошибочно указан среди максимальных). Согласно принципу сопряженности бесконечно-порожденным будет также класс Π_4, сопряженный с классом Π_3 относительно перестановки $2x+1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деметрович Я., Мальцев И. А. О строении клона Бурле на трехэлементном множестве // Препринт ИМ СО АН СССР. — 1987. — № 1. — С. 1–44.
2. Деметрович Я., Мальцев И. А. О строении клона Бурле на трехэлементном множестве // Acta Cybernetica. — 1989. — Т. 9, № 1. — С. 1–25.
3. Жук Д. Н. Предикатный метод построения решетки Поста // Дискретная математика. — 2011. — Т. 23, № 2. — С. 115–128.
4. Жук Д. Н. Решетка замкнутых классов самодвойственных функций трехзначной логики. — М.: Изд-во Московского университета, 2011.
5. Мальцев И. А. Некоторые свойства клеточных подалгебр алгебр Поста и их основных клеток // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11. — С. 571–587.
6. Мальцев И. А. Некоторые свойства клеток алгебр Поста // Дискретный анализ. Вып. 23. — 1973. — С. 24–31.
7. Марченков С. С. О замкнутых классах квазилинейнных функций в P_3 // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. — 1986. — № 17. — С. 1–27.
8. Марченков С. С. О конечной порожденности замкнутых классов предикатов линейного типа в P_3 // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. — 1987. — № 60. — С. 1–25.
9. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
10. Марченков С. С. Функциональные системы с операцией суперпозиции. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
11. Марченков С. С. Конечная порождаемость замкнутых классов булевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. — 2005. — Т. 12, № 1. — С. 101–118.
12. Марченков С. С. Основы теории булевых функций. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014.
13. Марченков С. С., Деметрович Я., Ханнак Л. О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. Вып. 34. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980. — С. 38–73.
14. Михайлович А. В. О замкнутых классах трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — № 4. — С. 54–57.
15. Михайлович А. В. О классах функций трехзначной логики, порожденных монотонными симметрическими функциями // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2009. — № 1. — С. 33–37.

16. Михайлович А. В. О замкнутых классах функций многозначной логики, порожденных симметрическими функциями // Математические вопросы кибернетики. Вып. 18. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — С. 123–212.
17. Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 92, № 6. — С. 1153–1156.
18. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.
19. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
20. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих базиса // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.
21. Baker A., Pixley A. F. Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for algebraic systems // Math. Zeitschrift. — 1975. — Bd. 143. — S. 165–174.
22. Bagyinszki J., Demetrovics J. The lattice of linear classes in prime-valued logics // Banach Center Publ. Vol. 7 — Warzsawa, 1982. — P. 105–123.
23. Burosch G., Dassow J., Harnau W., Lau D. On subalgebras of an algebra of predicates // J. Inf. Process. Cybern. EIK — 1985. — Bd. 21, Nr. 1/2. — S. 9–22.
24. Grünwald N. Bestimmung sämtlicher abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektionen F_8^n ist // Rostock. Math. Kolloq. — 1983. — Bd. 23. — S. 27–34.
25. Grünwald N. Beschreibung aller abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektionen F_8^2 ist, mit Hilfe von Relationen // Rostock. Math. Kolloq. — 1983. — Bd. 23. — S. 5–26.
26. Lau D. Submaximalle Klassen von P_3 // J. Inf. Process. Cybern. EIK — 1982. — Bd. 18, Nr. 4/5. — S. 227–243.
27. Lau D. Abgeschlossene Mengen quasilinearer Funktionen in P_3 // Rostock. Math. Kolloq. — 1985. — Bd. 28. — S. 33–45.
28. Lau D. Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{k,2}$ // J. Inf. Process. Cybern. EIK — 1988. — Bd. 24, Nr. 10. — S. 495–513.
29. Lau D. Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{3,2}$ // J. Inf. Process. Cybern. EIK — 1988. — Bd. 24, Nr. 11/12. — S. 561–572.
30. Lau D. Function Algebras on Finite Sets. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.
31. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. — 1921. — V. 43, No. 3. — P. 163–185.
32. Post E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Vol. 5. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.

Поступило в редакцию 29 I 2015