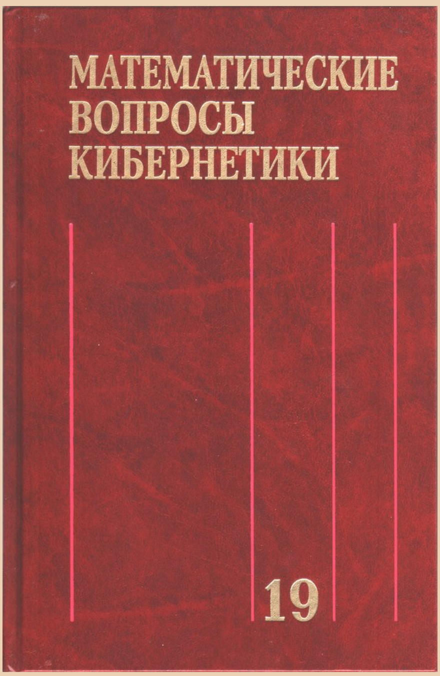

Ю. А. Виноградов

О критерии Слупецкого

О КРИТЕРИИ СЛУПЕЦКОГО*)

Ю. А. ВИНОГРАДОВ

(МОСКВА)

Сформулируем критерий Слупецкого (см., например, [6, с. 64]).

Пусть система B функций из P_k, где $k \geqslant 3$, содержит все функции одной переменной. Тогда для полноты системы B необходимо и достаточно, чтобы B содержала существенную функцию, принимающую все k значений.

Отметим, что в этой формулировке критерия подразумевается, что все функции из системы B являются всюду определенными.

Рассмотрим базис

$$S = \{K'(x,y,z), I_1(x), 0, 1, 2\},$$

где $I_1(x)$, 0, 1, 2 — элементарные функции из P_3 (см., например, [6, с. 45]), а функция $K'(x,y,z)$, определенная только на 6 наборах, задается таблицей**):

Таблица

x	y	z	$K'(x,y,z)$
0	1	0	1
0	2	1	2
1	1	0	0
2	1	0	0
2	2	0	0
2	2	1	1

Полнота***) базиса S в P_3 была установлена в компьютерном синтезе структур, реализующих функции двух переменных (подробнее см. [3]).

*) Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

**) Функция $K'(x,y,z)$ получена из $K(x,y,z)$ (см. [2]) исключением ряда наборов переменных. Суперпозиционные (коммутационные) ограничения для них одинаковы.

***) Вопросы функциональной полноты систем не всюду определенных (частичных) функций в P_k изучались в различных работах другими авторами и ранее. В частности, один из критериев полноты системы частичных функций в P_k получен в работах [4, 5].

Обозначим через S' базис, состоящий из всех одноместных функций в P_3 и не всюду определенной функции $K'(x, y, z)$. Из полноты базиса S непосредственно следует полнота базиса S'.

Отметим, что внимание к области определения базисной функции связано с выяснением функциональных возможностей обычно далеких от классических форм технических базисов. Поскольку именно так — исключением некоторых наборов переменных — чаще всего и проявляет себя в конечнозначных моделях техника реализации.

Поскольку базис S' содержит не всюду определенную функцию, то к нему нельзя применить критерий Слупецкого в явном виде. Однако было бы полезно сформулировать некоторый аналог критерия Слупецкого (или Яблонского [6, с. 65]), который мог бы быть использован в оценке базисов, содержащих и не всюду определенные функции. Сформулируем следующий способ выяснения полноты таких базисов.

1. Если в суперпозициях базисных функций (учитывающих и коммутационные ограничения) не могут быть синтезированы структуры, реализующие все одноместные функции в P_k (или, по Яблонскому: все одноместные функции, принимающие не более $k-1$ значений), то, очевидно, полнотой в P_k базис не обладает.

2. Если же могут быть синтезированы структуры, реализующие функции из пункта 1, а в структурах, реализующих все функции от двух переменных, появляется всюду определенная функция, существенно зависящая от обеих переменных и принимающая все значения из множества $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, то исследуемый базис обладает полнотой в P_k.

Заметим, что такой способ выяснения полноты отличается довольно умеренными требованиями к компьютеру. Причина в том, что нужная «по Слупецкому» функция $f(x_1, x_2)$, как правило, обнаруживается в довольно коротких суперпозициях. Например, в рассмотренных четырехзначных базисах*) она возникала в суперпозициях глубины 3 — всего лишь в третьей сотне из немалого в P_4 ($\approx 4,3 \cdot 10^9$) числа двухместных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов Ю. А. К синтезу четырехзначных КМОП-автоматов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 10. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — С. 245.
2. Виноградов Ю. А. К синтезу трехзначных МОП-структур // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 301–302.
3. Виноградов Ю. А. К синтезу схем в инженерных базисах // Математические вопросы кибернетики. Вып. 19. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. — С. 279–281.
4. Ло Чжукай. Максимальные замкнутые классы в множестве частичных функций многозначной логики // Кибернетич. сб. Новая серия. Вып. 25. — М.: Мир, 1988. — С. 131–141.
5. Ло Чжукай. Теория полноты для частичных функций многозначной логики // Кибернетич. сб. Новая серия. Вып. 25. — М.: Мир, 1988. — С. 142–157.
6. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.

Поступило в редакцию 18 XII 2007

*) Учет особенностей функционирования элементарной КМОП-структуры в P_4 привел к модели (см. [1]), определенной на половине наборов переменных.