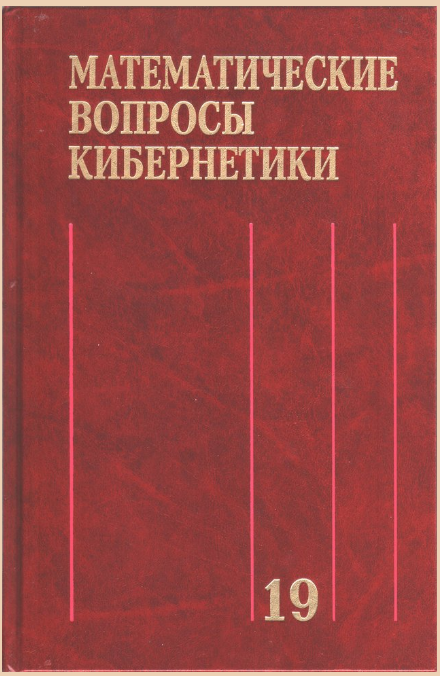

Е. В. Михайлец

Об одной мере сложности неявных представлений функций многозначной логики

ОБ ОДНОЙ МЕРЕ СЛОЖНОСТИ НЕЯВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Е. В. МИХАЙЛЕЦ

(МОСКВА)

Оглавление

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию сложности реализации функций k-значной логики посредством систем неявных уравнений над различными системами функций*) в P_k.

При таком способе реализации функция k-значной логики задается как единственное решение системы функциональных уравнений, левые и правые части которых представляют собой суперпозиции**) функций из некоторой системы A, $A \subseteq P_k$, или тождественные функции.

Вопрос о сложности реализации функций k-значной логики посредством различных видов схем является одним из центральных вопросов в теории управляющих систем. Одни из первых значительных результатов в этой области принадлежат К. Э. Шеннону. Им был предложен новый подход к изучению проблем сложности, основанный на рассмотрении функционалов, характеризующих наибольшую сложность функций из класса K при реализации схемами из класса U управляющих систем. К. Э. Шеннон ввел величину $L_U(K)$, характеризующую сложность реализации любой функции

*) Через P_k обозначается множество всех функций k-значной логики, $k \geqslant 2$.

**) Определения понятий суперпозиции и замыкания по суперпозиции см. в § 1 п. 1.1.

из класса K в классе управляющих систем U, названную функцией Шеннона (в работе [53] им был рассмотрен случай, когда K — класс всех булевых функций от n переменных, а U — класс контактных схем).

В случае двузначной логики основополагающие результаты о поведении функции Шеннона для многих классов управляющих систем принадлежат О. Б. Лупанову [22–26]. В работах [23, 24] О. Б. Лупанов предложил асимптотически наилучшие методы синтеза формул и схем из функциональных элементов и получил асимптотически точные выражения для функций Шеннона при реализации булевых функций формулами и схемами в произвольном конечном полном базисе. Впоследствии асимптотические оценки сложности для различных классов управляющих систем были получены в многочисленных работах учеников и последователей О. Б. Лупанова и других ученых [2, 18, 20, 21, 29, 30, 37–40, 48, 52]. Ряд работ посвящен сложности функций k-значной логики при реализации формулами и схемами из функциональных элементов [4, 6, 7, 19, 33, 34, 36, 41].

В настоящей работе изучается сложность реализации функций k-значной логики посредством неявных представлений над различными системами функций в P_k. В качестве меры сложности неявного представления рассматривается число уравнений в этом представлении.

По-видимому, впервые понятие неявной выразимости было введено А. В. Кузнецовым [17], наряду с понятием параметрической выразимости, как одно из обобщений понятия выразимости функций формулами (суперпозициями).

Рассмотрим систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_p,z)=\psi_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_p,z), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ldots \\ \varphi_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_p,z)=\psi_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_p,z), \end{cases} \tag{1}$$

где функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$, $\psi_1,\ldots,\psi_m$ есть некоторые суперпозиции над заданной системой функций A или тождественные функции. Совокупность переменных системы уравнений (1) включает набор *основных* переменных $x_1,\ldots,x_n$, набор *внутренних* переменных (*параметров*) $y_1,\ldots,y_p$ и *выделенную* переменную z.

Говорят, что система уравнений вида (1) *реализует* функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, $f\in P_k$, если эта система имеет хотя бы одно решение

$$\begin{cases} y_1=g_1(x_1,\ldots,x_n), \\ \qquad\ldots \\ y_p=g_p(x_1,\ldots,x_n), \\ z=f(x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

в функциях от основных переменных, причем во всяком таком решении значение выделенной переменной z определено однозначно и равно $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Система уравнений над системой функций A, реализующая функцию f, называется *параметрическим представлением* функции f над A. При отсутствии параметров ($p=0$) система называется *неявным представлением* функции f над A. При этом функция f, допускающая параметрическое (неявное) представление над системой функций A, называется *параметрически* (*неявно*) *выразимой* над A.

Множество всех функций, параметрически (неявно) выразимых над системой функций A, называется *параметрическим замыканием* (соответственно *неявным расширением*) системы A и обозначается через $P(A)$ (соответственно через $I(A)$). Замыкание системы A по суперпозиции, как обычно, будем обозначать через $[A]$.

Система функций A называется *функционально* (*неявно*, *параметрически*) *полной* в P_k, если ее замыкание по суперпозиции (неявное расширение, параметрическое замыкание) совпадает с P_k.

Легко видеть, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k, являющаяся суперпозицией функций системы A ($f \in [A]$), неявно выразима над A с помощью одного уравнения $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. Следовательно, для любой системы A, $A \subseteq P_k$, операция замыкания по суперпозиции и неявное расширение связаны соотношением $[A] \subseteq I(A)$, т. е. присоединив к системе A вместе со всеми функциями, выразимыми в виде суперпозиции функций из A, все решения систем неявных (не содержащих параметров) уравнений над A, мы получим неявное расширение системы A. Таким образом, понятие неявной выразимости функций k-значной логики представляет собой обобщение понятия выразимости функций суперпозициями.

В силу соотношения $I(A) = I([A])$, справедливого для любой системы A, $A \subseteq P_k$, при исследовании неявной выразимости можно без ограничения общности рассматривать только замкнутые по суперпозиции классы функций k-значной логики.

Проблема неявной полноты в P_k полностью решена при $k=2$ и $k=3$. В отличие от полноты по суперпозиции, в силу особенностей неявной выразимости, при $k \geqslant 3$ подход, основанный на использовании понятия предполного класса, насколько известно, не дал успешных результатов; более успешным оказался подход, основанный на понятии минимального замкнутого по суперпозиции неявно полного класса [9, 32].

Проблему неявной выразимости для случая двузначной логики решил О. М. Касим-Заде [9]. Как следует из работы [9], в P_2 существует ровно один минимальный по включению неявно полный замкнутый по суперпозиции класс — класс всех монотонных булевых функций. Соответственно критерий неявной полноты в P_2 можно сформулировать следующим образом: система булевых функций неявно полна тогда и только тогда, когда ее замыкание по суперпозиции содержит класс всех монотонных функций.

В трехзначной логике проблема неявной полноты в терминах минимальных неявно полных классов была решена Е. А. Ореховой [32]. В работе [32] была найдена система всех минимальных по включению неявно полных замкнутых по суперпозиции классов в P_3, состоящая из 27 различных классов функций.

Позднее О. М. Касим-Заде в работе [14] установил критерий неявной полноты в P_k и доказал конечность системы всех минимальных неявно полных замкнутых по суперпозиции классов в P_k для любых k, $k \geqslant 2$.

Когда проблема неявной и параметрической выразимости в P_2 была полностью решена [9, 17], естественным образом возник вопрос об оценке сложности неявных и параметрических представлений и о построении неявных и параметрических представлений, наилучших с точки зрения той или иной меры сложности (подробнее см. [13]).

Меры сложности для неявных и параметрических представлений можно вводить разными способами. Например, в работе [11] О. М. Касим-Заде рассматривается мера сложности, обобщающая известную меру сложности для суперпозиций (см. [24, 26]) и характеризующая вес (иногда называемый также размером или объемом) неявного представления. Каждой функции из заданной системы A приписывается число — вес этой функции, а каждой суперпозиции функций из A — вес этой суперпозиции, равный сумме весов всех входящих в нее функций из A. Соответствующая мера сложности — *вес* неявного (параметрического) представления над A — вводится как сумма весов всех входящих в него функций, с учетом кратности вхождений.

Наряду с этим одной из наиболее естественных и интересных с различных точек зрения мер сложности для неявных и параметрических представлений является число входящих в них уравнений, именуемое *рангом* представления. Понятие ранга впервые было введено О. М. Касим-Заде (см. [13], а также [11, 12]) в применении к булевым функциям.

Пусть f — произвольная функция из неявного расширения заданной системы функций A в P_k, $f \in I(A)$. *Рангом* $m_A(f)$ *функции* f *над системой* A называется наименьшее число уравнений, достаточное для построения неявного представления функции f над A. Далее традиционным образом вводится функция Шеннона [53], характеризующая сложность реализации самых сложных функций от n переменных из множества $I(A)$. *Ранговой функцией* $m_A(n)$ *системы* A называется наибольшее значение ранга функций f, принадлежащих неявному расширению системы A и существенно зависящих не более чем от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Аналогичным образом вводятся понятия *параметрического ранга**) $M_A(f)$ (сокращенно — *P-ранга*) и *P-ранговой функции* $M_A(n)$, характеризующие сложность параметрических представлений над системой функций A.

Отметим, что для любой системы A, $A \subseteq P_k$, выполняются равенства $m_A(n) = m_{[A]}(n)$, $M_A(n) = M_{[A]}(n)$. Следовательно, при поиске ранговых и P-ранговых функций в P_k без ограничения общности можно предполагать, что рассматриваемые системы функций k-значной логики замкнуты по суперпозиции.

В работе [13] О. М. Касим-Заде исследовал поведение ранговых и P-ранговых функций для всех замкнутых по суперпозиции классов функций двузначной логики. Для ряда классов булевых функций в работе [13] получены точные выражения ранговых и P-ранговых функций, для остальных классов — с точностью до порядка роста относительно числа переменных. При этом во всех случаях порядок роста ранговой функции для систем функций в P_2 оказался либо линейным, либо близким к линейному**), порядок роста P-ранговой функции — не выше линейного (подробнее см. [13]).

В частности, для класса M всех монотонных функций в P_2, являющегося единственным неявно полным замкнутым классом булевых функций,

---

*) Здесь функция f принадлежит параметрическому замыканию $P(A)$ системы функций A.

**) Для классов D_2 и F_i^{μ}, где $i = 2, 3, 6, 7$ и $\mu \geqslant 2$, ранговая функция равна по порядку величине $n \log n$, для остальных классов ранговая функция либо линейна, либо равна 1 (обозначения классов даны по [13, 45]).

не совпадающим с P_2, при всех n имеют место соотношения [13]:

$$m_M(n) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil, \qquad M_M(n) = 2.$$

Поведение ранговых функций для систем функций k-значной логики при $k \geqslant 3$, по-видимому, до сих пор не было изучено.

Отметим, что при любом k, $k \geqslant 2$, для ранговой (следовательно, и P-ранговой) функции произвольной системы A, $A \subseteq P_k$, справедлива тривиальная верхняя оценка*) $m_A(n) \leqslant (k-1)k^n$ (соответственно $M_A(n) \leqslant (k-1)k^n$). Таким образом, ранговая (и P-ранговая) функция любой системы функций k-значной логики имеет не выше, чем экспоненциальный порядок роста.

В двузначной логике порядок роста любой ранговой функции существенно ниже этой оценки. Возникает вопрос, как обстоит дело в k-значных логиках при различных k, $k \geqslant 3$? В частности, можно ли существенно понизить указанную выше экспоненциальную верхнюю оценку, иными словами, существует ли система функций в P_k с экспоненциальным порядком роста ранговой функции? Поиск ответа на данный вопрос естественно начать со случая трехзначной логики.

В настоящей работе рассматривается задача о поведении ранговой функции для различных систем функций трехзначной логики. При этом первоочередной интерес представляют неявно полные классы функций в P_3, т. е. классы, над которыми неявно выразимы все функции трехзначной логики. Среди всех неявно полных замкнутых по суперпозиции классов функций в P_3 наибольший порядок роста ранговой функции достигается на минимальных неявно полных замкнутых классах**).

Текст настоящей работы условно может быть разделен на две части, первая из которых посвящена нахождению при любом значении k, $k \geqslant 2$, ранговой функции для классов функций в P_k, монотонных относительно заданных частичных порядков на множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, а вторая — изучению поведения ранговых функций всех замкнутых по суперпозиции минимальных неявно полных классов в трехзначной логике. Результаты, полученные в первой части работы, используются в доказательствах теорем из второй части.

В первой части работы в рамках теоремы о ранговой функции доказана неявная полнота всякого класса A, $A \subseteq P_k$, функций, монотонных относительно заданной согласованной пары частичных порядков, содержащих хотя бы одну общую пару сравнимых элементов***). В рамках этой теоремы также получено точное выражение для ранговой функции $m_A(n)$ любого такого класса A (линейно зависящее от числа n).

Различные варианты применения основной теоремы из первой части, а также некоторых обобщений этой теоремы, приведены во второй части работы в доказательствах как верхних, так и нижних оценок ранговых функций минимальных неявно полных замкнутых классов функций в P_3.

Во второй части работы получены оценки ранговых функций для всех минимальных неявно полных замкнутых по суперпозиции классов функций

---

*) См. лемму 1.2.7.

**) См. лемму 1.2.5.

***) Определения монотонности см. на с. 43, а также в § 2 п. 2.1.

трехзначной логики. По отношению двойственности 27 минимальных неявно полных замкнутых классов в P_3, описанных Е. А. Ореховой [32], делятся на 6 классов эквивалентности. Так как ранговые функции двойственных*) в P_k систем функций совпадают**), для изучения поведения ранговой функции всех минимальных неявно полных классов в P_3 достаточно рассмотреть шесть классов функций, по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Описание шести минимальных неявно полных замкнутых по суперпозиции классов W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6 в P_3, рассматриваемых в настоящей работе, содержится в § 3 п. 3.1.

В работе установлены оценки ранговой функции для каждого из указанных шести классов. Для классов W_1, W_2, W_3 и W_4 (а также двойственных им классов) порядок роста ранговых функций оказался линейным. При рассмотрении оставшихся классов W_5 и W_6 был обнаружен новый эффект: порядок роста ранговых функций классов W_5 и W_6 оказался экспоненциальным.

Нумерация теорем и лемм, принятая в работе, представляет собой тройку чисел, в которой первое число обозначает номер параграфа, второе — номер пункта, а третье — порядковый номер теоремы или леммы в данном пункте. Нумерация формул представляет собой пару чисел, первое из которых — номер параграфа, а второе — порядковый номер формулы в данном параграфе.

Приведем краткий обзор основных результатов работы. В данном обзоре нумерация всех теорем сквозная. В скобках указаны номера соответствующих теорем в основном тексте статьи. Сначала дадим необходимые определения***).

Зададим на множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ отношение $\mathfrak{M}$ частичного порядка, $k \geqslant 2$. Максимальную длину цепи****) в частично упорядоченном множестве $\langle E_k; \mathfrak{M}\rangle$, будем обозначать через $s(E_k, \mathfrak{M})$.

Пусть помимо частичного порядка $\mathfrak{M}$ на множестве E_k задан еще один частичный порядок $\mathfrak{M}'$. Будем говорить, что порядок $\mathfrak{M}'$ *подчинен* порядку $\mathfrak{M}$ (обозначение $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$), если для любых элементов a, b из E_k, связанных соотношением $a \leqslant_{\mathfrak{M}'} b$, выполняется соотношение $a \leqslant_{\mathfrak{M}} b$. При этом пару порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ будем называть *согласованной* в E_k. Всюду в дальнейшем, говоря о паре порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, будем подразумевать, что она является согласованной, т. е. $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$.

Для любого n, $n \geqslant 1$, распространим отношение порядка $\mathfrak{M}$ на куб*****) E_k^n следующим образом: будем говорить, что выполняется неравенство $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant_{\mathfrak{M}} (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, если при всех i, $i = 1, 2, \ldots, n$, выполняются соотношения $\alpha_i \leqslant_{\mathfrak{M}} \beta_i$.

Пусть U^n — произвольное подмножество куба E_k^n. Пусть в кубе E_k^n задан частичный порядок $\mathfrak{M}$. Тогда можно говорить о частично упорядоченном множестве $\langle U^n; \mathfrak{M}\rangle$ и о соответствующей этому множеству максимальной длине цепи, которую будем обозначать через $s(U^n, \mathfrak{M})$.

---

*) Определение двойственности в P_k см. в § 1 п. 1.1.

**) См. лемму 1.2.6.

***) См. также § 2 п. 2.1.

****) Определения понятий цепи и длины цепи в частично упорядоченном множестве приведены в § 2 п. 2.1.

*****) *Кубом* E_k^n будем называть совокупность всех наборов длины n с компонентами из E_k.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ из P_k. Пусть на области определения E_k^n функции f задан частичный порядок $\mathfrak{M}$, а на области значения E_k функции f — частичный порядок $\mathfrak{M}'$, подчиненный порядку $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$. Функцию $f(\widetilde{x})$ будем называть *монотонной относительно пары порядков* $(\mathfrak{M},\mathfrak{M}')$, если для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из куба E_k^n, связанных соотношением $\widetilde{\alpha}\leqslant_{\mathfrak{M}}\widetilde{\beta}$, выполняется неравенство $f(\widetilde{\alpha})\leqslant_{\mathfrak{M}'}f(\widetilde{\beta})$.

Будем говорить, что функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, $f\in P_k$, *монотонна на множестве* U^n, $U^n\subseteq E_k^n$, *относительно пары порядков* $(\mathfrak{M},\mathfrak{M}')$, если для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из U^n таких, что $\widetilde{\alpha}\leqslant_{\mathfrak{M}}\widetilde{\beta}$, выполняется соотношение $f(\widetilde{\alpha})\leqslant_{\mathfrak{M}'}f(\widetilde{\beta})$.

Рассмотрим для некоторого натурального n непустое семейство M^n функций n переменных из P_k. Пусть функция $\mu(x_1,\ldots,x_n)$ принадлежит M^n. Будем говорить, что семейство функций M^n *обладает свойством**) $\Delta[U^n;\mathfrak{M},\mathfrak{M}']$, если M^n есть совокупность всех функций от n переменных, монотонных на множестве наборов U^n относительно пары порядков $(\mathfrak{M},\mathfrak{M}')$ и совпадающих с функцией μ на множестве $E_k^n\setminus U^n$.

В § 1 даны основные определения и обозначения, касающиеся неявных представлений, ранговых функций, а также вспомогательные утверждения. В частности, доказываются принципы двойственности для неявных представлений и неявных расширений в P_k и несколько лемм о свойствах рангов и ранговых функций.

В первом параграфе также приводятся сравнение понятий выразимости функций суперпозициями, неявной и параметрической выразимости и их свойств, а также ряд известных результатов о функциональной и параметрической полноте в P_k при различных значениях k.

В § 2 для всякого невырожденного класса функций в P_k, монотонных относительно заданной согласованной пары порядков $(\mathfrak{M},\mathfrak{M}')$ на множестве E_k, установлена неявная полнота и получено точное выражение ранговой функции.

Помимо этого, во втором параграфе приведены следствия из данного результата, устанавливающие точные выражения ранговых функций для отдельных частных случаев отношений порядков $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$. Также на основе этого результата доказана теорема о верхней оценке ранговой функции классов, содержащих для всякого натурального n и каждого множества наборов U_i^n из заданного конечного разбиения**) $\{U_i^n\}_{i=1}^{r(n)}$ куба E_k^n систему функций M_i^n, обладающую свойством $\Delta[U_i^n;\mathfrak{M},\mathfrak{M}']$, где $1\leqslant i\leqslant r(n)$.

В п. 2.1 формулируется и доказывается теорема о ранговой функции классов функций в P_k, монотонных относительно согласованной пары порядков, содержащих хотя бы одну общую пару сравнимых элементов. В этом пункте приводится также ряд сопутствующих данной теореме определений, связанных с понятиями частичного порядка и монотонности функций.

Теорема 1 (теорема 2.1.3). *Пусть на множестве E_k, $k\geqslant 2$, заданы частичные порядки $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ такие, что $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$ и $s(E_k,\mathfrak{M}')\geqslant 1$. Пусть A —*

---

*) Зависимость свойства $\Delta[U^n;\mathfrak{M},\mathfrak{M}']$ от функции μ не отражена в обозначении, так как она несущественна для целей настоящей работы.

**) Совокупность $\{U_i\}_{i=1}^r$ попарно непересекающихся подмножеств множества U называется *разбиением* множества U, если их объединение $\bigcup\limits_{i=1}^r U_i$ совпадает с U.

класс всех функций в P_k, *монотонных относительно пары порядков* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$. *Тогда система* A *неявно полна в* P_k *и при всех натуральных* n *ранговая функция системы* A *удовлетворяет равенству:*

$$m_A(n) = \left\lceil \frac{(n+1)s(E_k, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil.$$

Доказательство теоремы 1 состоит из трех частей: обоснования неявной полноты, получения верхней и нижней оценок ранговой функции.

В п. 2.2 приведены некоторые следствия из теоремы 1, а также утверждения, являющиеся в некотором смысле обобщениями этой теоремы.

В случае совпадения частичных порядков $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ ранговая функция класса A функций, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, зависит только от числа n и устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2 (теорема 2.2.1). *Пусть на множестве* E_k, $k \geqslant 2$, *задан частичный порядок* $\mathfrak{M}$, *удовлетворяющий условию* $s(E_k, \mathfrak{M}) \geqslant 1$. *Пусть* A — *класс всех функций в* P_k, *монотонных относительно пары порядков* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$. *Тогда система* A *неявно полна в* P_k *и при всех натуральных* n *для ранговой функции системы* A *выполняется равенство*

$$m_A(n) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil.$$

Для классов монотонных функций, выпускающих по крайней мере одно значение, ранговая функция устанавливается следующей теоремой.

Теорема 3 (теорема 2.2.3). *Пусть на множестве* E_k, $k \geqslant 2$, *задан частичный порядок* $\mathfrak{M}'$, *подчиненный отношению линейного порядка**) *в* E_k *и удовлетворяющий условию* $s(E_k, \mathfrak{M}') \geqslant 1$. *Пусть* A — *класс всех функций в* P_k, *монотонных относительно порядка* $\mathfrak{M}'$, *за исключением, возможно, некоторых констант, отвечающих изолированным***) *точкам порядка* $\mathfrak{M}'$. *Тогда система* A *неявно полна в* P_k *и при всех натуральных* n *для ранговой функции системы* A *выполняется равенство*

$$m_A(n) = \left\lceil \frac{(n+1)(k-1) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil.$$

Теоремы 2 и 3 являются прямыми следствиями из теоремы 1.

В п. 2.2 также вводятся обобщения понятий ранга и ранговой функции, характеризующие число уравнений, достаточное для задания значений***) функций n переменных на некотором подмножестве куба E_k^{n+1}.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция n переменных из неявного расширения произвольной системы функций A в P_k, $f \in I(A)$. *Рангом* $m_A(f, U^{n+1})$ функции f над системой A *относительно подмножества* U^{n+1} в кубе E_k^{n+1} будем называть наименьшее число уравнений, достаточное для задания значений функции f на множестве U^{n+1}. *Ранговой функцией* $m_A(n, U^{n+1})$ системы A *относительно множества* U^{n+1} будем называть максимум рангов

*) *Линейным* на множестве E_k является порядок $0 < 1 < \cdots < k-1$.

**) Значение i, $i \in E_k$, будем называть *изолированной точкой* частичного порядка $\mathfrak{M}$ на множестве E_k, если элемент i несравним ни с одним другим элементом в частично упорядоченном множестве $\langle E_k; \mathfrak{M} \rangle$.

***) Подсистема системы неявных уравнений, реализующей функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, *задает значения* функции f на подмножестве U^{n+1} куба E_k^{n+1}, если для каждого набора $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ из U^{n+1} такого, что $\beta \neq f(\widetilde{\alpha})$, данная подсистема содержит уравнение, обращающееся в неравенство на этом наборе.

относительно множества U^{n+1} всех функций k-значной логики, принадлежащих неявному расширению системы A и существенно зависящих не более чем от n переменных.

Далее на основе теоремы 1 доказываются следующие утверждения.

Теорема 4 (теорема 2.2.4). *Пусть для произвольного натурального числа n в кубе E_k^{n+1} задано подмножество U_k^{n+1}. Пусть на множестве E_k, $k \geqslant 2$, заданы частичные порядки $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ такие, что $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ и $s(E_k, \mathfrak{M}') \geqslant 1$. Пусть A — замкнутый по суперпозиции неявно полный класс функций в P_k, содержащий некоторое семейство M^{n+1} функций от $n+1$ переменной, обладающее свойством $\Delta[U^{n+1}; \mathfrak{M}, \mathfrak{M}']$. Тогда выполняется неравенство*

$$m_A(n, U^{n+1}) \leqslant \left\lceil \frac{s(U^{n+1}, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil.$$

Теорема 5 (теорема 2.2.6). *Пусть для произвольного натурального числа n задано разбиение $\{U_i^{n+1}\}_{i=1}^{r(n)}$ куба E_k^{n+1}. Пусть на множестве E_k задан частичный порядок $\mathfrak{M}$ и частичные порядки $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, r(n)$, такие, что $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}$, $s(E_k, \mathfrak{M}_i) \geqslant 1$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant r(n)$. Пусть A — замкнутый по суперпозиции неявно полный класс функций в P_k, содержащий для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant r(n)$, некоторое семейство функций M_i^{n+1}, обладающее свойством $\Delta[U_i^{n+1}; \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_i]$. Тогда выполняется неравенство*

$$m_A(n) \leqslant \sum_{i=1}^{r(n)} \left\lceil \frac{s(U_i^{n+1}, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}_i)} \right\rceil.$$

В § 3 рассматриваются шесть минимальных неявно полных замкнутых классов функций трехзначной логики W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6 и для каждого из них исследуется поведение ранговой функции. Для классов W_1, W_2, W_4 устанавливаются точные значения соответствующих им ранговых функций, для остальных классов находятся верхние и нижние оценки, которые дают представление о порядке роста ранговой функции. Ранговые функции классов W_5 и W_6 имеют экспоненциальный порядок роста, ранговые функции классов W_1, W_2, W_3, W_4 — линейный порядок роста.

В п. 3.1 формулируется задача о нахождении ранговых функций для минимальных неявно полных классов функций в P_3, дается описание классов W_i, $i = 1, \ldots, 6$, и их свойств, приводятся вспомогательные определения и обозначения, используемые в дальнейших доказательствах.

В п. 3.2 устанавливаются оценки для ранговых функций классов W_1, W_2, W_3, W_4, имеющих линейный порядок роста ранговой функции.

Теорема 6 (теорема 3.2.1). *При всех натуральных значениях n для ранговых функций классов W_1 и W_2 выполняются равенства*

$$m_{W_1}(n) = m_{W_2}(n) = n + 2.$$

При доказательстве теоремы 6 показывается, что классы W_1 и W_2 есть классы всех монотонных функций в P_3, выпускающих значения 2 и 1 соответственно откуда следует, что классы W_1 и W_2 удовлетворяют условиям теоремы 3.

Т е о р е м а 7 (теорема 3.2.2). *При всех натуральных n для ранговой функции класса W_3 выполняются неравенства*

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leqslant m_{W_3}(n) \leqslant \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil + 2.$$

При доказательстве верхней оценки ранговой функции класса W_3 используется теорема 5. При этом для всякого n разбиение куба E_3^{n+1}, фигурирующее в условии теоремы 5, в данном случае есть разбиение на два подмножества: совокупность всех наборов из нулей и единиц и совокупность всех наборов, содержащих двойку.

Нижняя оценка вытекает из теоремы 2, так как класс W_3 содержит только монотонные относительно линейного порядка функции трехзначной логики.

Т е о р е м а 8 (теорема 3.2.3). *При всех натуральных n для ранговой функции класса W_4 выполняется равенство*

$$m_{W_4}(n) = n + 2.$$

Доказательство верхней оценки ранговой функции класса W_4 проводится с применением теоремы 4 и основывается на некоторых свойствах функций из данного класса.

Для получения нижней оценки рассматривается функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ специального вида, удовлетворяющая определенным условиям, и показывается, что любое неявное представление $S(f)$ функции f над классом W_4 состоит из не менее чем $n+2$ уравнений, так как в противном случае найдется блок*) B^{n+1} в кубе E_3^{n+1}, содержащий хотя бы один набор, не являющийся точкой графика функции f и обращающий в равенства все уравнения системы $S(f)$.

В п. 3.3 доказываются теоремы о ранговых функций классов W_5 и W_6, имеющих экспоненциальный порядок роста ранговой функции.

Т е о р е м а 9 (теорема 3.3.1). *При всех натуральных n для ранговой функции класса W_5 выполняются неравенства*

$$2^{(n+1)/2} - 1/2 \leqslant m_{W_5}(n) \leqslant (n+2)2^n.$$

Нижняя оценка ранговой функции класса W_5 устанавливается следующим образом. Сначала доказывается, что все функции из класса W_5 обладают определенными свойствами. Затем строится функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ специального вида и задается некоторое подмножество наборов Q^n в кубе E_k^n. Далее показывается, что для любого неявного представления $S(f)$ функции f над W_5, в силу доказанных ранее свойств класса W_5, число наборов в Q^n не превосходит числа определенных комбинаций уравнений в системе $S(f)$. Из полученного неравенства извлекается нижняя оценка для числа уравнений в системе $S(f)$, а следовательно, и для ранговой функции класса W_5.

---

*) Здесь под *блоком* B^n понимается совокупность всех наборов куба E_3^n, в l фиксированных компонентах содержащих значение 2, а в остальных $n-l$ компонентах — значения из множества $\{0, 1\}$, $0 \leqslant l \leqslant n$. Определение блока см. в § 2 п. 2.1.

Обоснование верхней оценки опирается на теорему 5.

Теорема 10 (теорема 3.3.2). *При любом натуральном n для ранговой функции класса W_6 выполняются неравенства*

$$2^n \leqslant m_{W_6}(n) \leqslant (n+2)2^n.$$

Для получения нижней оценки ранговой функции класса W_6, как и в предыдущей теореме, строится функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ специального вида и задается некоторое подмножество наборов Q^n в кубе E_k^n. Затем на основе определенных свойств функций из класса W_6 показывается, что в любом неявном представлении функции f над W_6 число уравнений не меньше, чем число наборов в Q^n.

При доказательстве верхней оценки используется теорема 5.

§ 1. Основные понятия

1.1. Неявные представления. В настоящей работе мы будем использовать определения и обозначения из работ С. В. Яблонского [43], А. В. Кузнецова [17] и О. М. Касим-Заде [13]. Приведем необходимые понятия.

Следуя [43], будем обозначать через P_k, $k \geqslant 2$, множество всех функций k-значной логики, т. е. для каждого натурального числа n множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, действующих в кубе E_k^n и принимающих значения из множества $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Под *кубом* E_k^n мы будем понимать совокупность всех наборов длины n с компонентами из E_k.

Рассмотрим произвольную систему A функций k-значной логики, $A \subseteq P_k$. *Суперпозицией* функций системы A будем называть:

а) любую функцию, которая получается из функций системы A путем замены переменных, а также добавлением или изъятием любого конечного числа фиктивных переменных;

б) любую функцию, которая получается путем замены переменных из функции

$$f_0(f_1(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}), \ldots, f_s(x_{s1}, \ldots, x_{sn_s})),$$

где $f_0(x_1, \ldots, x_s)$ — суперпозиция функций системы A и $f_i(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})$ либо является суперпозицией функций системы A, либо символом переменной x_i, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Множество всех функций, представимых в виде суперпозиции функций из системы A, как обычно, будем называть *замыканием по суперпозиции* или просто *замыканием* системы функций A и обозначать через $[A]$.

В соответствии с [13, 17] будем называть функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \in P_k$, *явно выразимой* над системой функций A, если функция f представима в виде суперпозиции функций из системы $A \cup \{x\}$, где x — тождественная функция.

Системой неявных уравнений над системой функций A будем называть любую систему уравнений вида:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, y) = \psi_1(x_1, \ldots, x_n, y), \\ \qquad \ldots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n, y) = \psi_m(x_1, \ldots, x_n, y), \end{cases} \tag{1.1}$$

где функции, стоящие в левых и правых частях уравнений, явно выразимы над системой функций A, т. е. функции φ_i, ψ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, либо принадлежат $[A]$, либо являются тождественными функциями.

Если существует такая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \in P_k$, что система неявных уравнений вида (1.1) при любых фиксированных значениях переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет единственное решение $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, то будем говорить, что система уравнений (1.1) *реализует* функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ k-значной логики *неявно выразима* над системой функций A, если существует система неявных уравнений над A вида (1.1), реализующая эту функцию.

Всякую систему неявных уравнений над A вида (1.1), реализующую функцию f, будем называть *неявным представлением* функции f над системой функций A.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция k-значной логики, неявно выразимая над системой функций A. Обозначим через $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ произвольный набор значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$. Наборы вида $(\widetilde{\alpha}, \beta) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$, $(\widetilde{\alpha}, \beta) \in E_k^{n+1}$, будем называть *расширенными наборами* для набора $\widetilde{\alpha}$.

Расширенные наборы вида $(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha}))$ будем называть *точками графика* функции $f(\widetilde{x})$.

Будем говорить, что уравнение, принадлежащее неявному представлению функции $f(\widetilde{x})$ над системой функций A, *запрещает* расширенный набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, не являющийся точкой графика функции $f(\widetilde{x})$, если данное уравнение обращается в неравенство на наборе $(\widetilde{\alpha}, \beta)$.

Множество всех функций k-значной логики, неявно выразимых над системой функций A, назовем *неявным расширением* системы A и будем обозначать через $I(A)$ [13].

Отметим несколько общих свойств неявных расширений. Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит замыканию системы функций A, $f \in [A]$, для нее существует неявное представление над системой A, состоящее из единственного уравнения $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Следовательно, *для любой системы функций A в P_k выполняется соотношение* $[A] \subseteq I(A)$.

Таким образом, понятие неявной выразимости можно считать одним из обобщений понятия выразимости функций суперпозициями и, соответственно, неявное расширение — обобщением операции замыкания по суперпозиции.

Также легко проверяется следующее свойство неявных расширений: *для любых систем функций A_1 и A_2 в P_k, удовлетворяющих условию $A_1 \subseteq A_2$, выполняется соотношение $I(A_1) \subseteq I(A_2)$.*

Из определения неявного представления непосредственно вытекает еще одно свойство неявных расширений: *для любой системы функций A выполняется соотношение $I(A) = I([A])$.*

Благодаря данному свойству при исследовании всевозможных неявных расширений в P_k достаточно ограничиться рассмотрением замкнутых относительно суперпозиции систем функций.

Для формулировки и доказательства следующего факта нам потребуются определение двойственности для функций k-значной логики и знание некоторых свойств двойственных в P_k функций. Напомним необходимые нам понятия, воспользовавшись формулировками из работы [43] С. В. Яблонского.

Пусть $h(x)$ — произвольная подстановка k чисел $0, 1, \ldots, k-1$, т. е.

$$h(x) = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \ldots, & k-1 \\ i_0, & i_1, & \ldots, & i_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Как известно, все подстановки k чисел образуют группу относительно операции умножения подстановок. В частности, для подстановки $h(x)$ существует обратная подстановка $h^{-1}(x)$.

Будем называть функцию k-значной логики

$$f^h(x_1, \ldots, x_n) = h^{-1}(f(h(x_1), \ldots, h(x_n)))$$

двойственной к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \in P_k$, относительно подстановки $h(x)$.

Из определения следует, что если функция f^h двойственна к функции f относительно подстановки $h(x)$, то f двойственна к f^h относительно подстановки $h^{-1}(x)$, т. е. $f^{hh^{-1}} \equiv f$.

Функцию k-значной логики, совпадающую с двойственной к ней относительно подстановки $h(x)$ функцией, будем называть *самодвойственной* относительно подстановки $h(x)$.

Очевидно, что тождественная функция $f(x) = x$ является самодвойственной относительно любой подстановки $h(x)$.

Имеет место *принцип двойственности для суперпозиций* функций k-значной логики (см. [43, 45]): *если f есть суперпозиция некоторых функций $f_1, f_2, \ldots, f_q$, то двойственная функция f^h является суперпозицией, выполненной в том же порядке, двойственных функций $f_1^h, f_2^h, \ldots, f_q^h$.*

Докажем утверждение, называемое *принципом двойственности для неявных представлений* (см. [13]) в k-значной логике P_k.

Лемма 1.1.1. *Пусть A — произвольная система функций в P_k, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из неявного расширения системы A, $f \in I(A)$, $h(x)$ — произвольная подстановка k чисел $0, 1, \ldots, k-1$.*

Для любой системы неявных уравнений над A, реализующей функцию f, соответствующая двойственная относительно подстановки $h(x)$ система неявных уравнений реализует двойственную функцию f^h над двойственной к A системой функций A^h (состоящей из двойственных функций).

Доказательство. Рассмотрим произвольное неявное представление функции $f(\widetilde{x})$ над системой функций A:

$$\begin{cases} \varphi_1(\widetilde{x}, y) = \psi_1(\widetilde{x}, y), \\ \qquad \ldots \\ \varphi_m(\widetilde{x}, y) = \psi_m(\widetilde{x}, y). \end{cases} \tag{1.2}$$

Двойственную систему неявных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1^h(\widetilde{x}, y) = \psi_1^h(\widetilde{x}, y), \\ \qquad \ldots \\ \varphi_m^h(\widetilde{x}, y) = \psi_m^h(\widetilde{x}, y) \end{cases} \tag{1.3}$$

перепишем в следующем виде:

$$\begin{cases} h^{-1}(\varphi_1(h(\widetilde{x}), h(y))) = h^{-1}(\psi_1(h(\widetilde{x}), h(y))), \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ h^{-1}(\varphi_m(h(\widetilde{x}), h(y))) = h^{-1}(\psi_m(h(\widetilde{x}), h(y))), \end{cases} \tag{1.4}$$

где через $h(\widetilde{x})$ будем обозначать набор одноместных функций $(h(x_1), \dots$ $\dots, h(x_n))$. Применив функцию $h(x)$ к левым и правым частям уравнений системы (1.4), получим равносильную систему неявных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(h(\widetilde{x}), h(y)) = \psi_1(h(\widetilde{x}), h(y)), \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ \varphi_m(h(\widetilde{x}), h(y)) = \psi_m(h(\widetilde{x}), h(y)). \end{cases} \tag{1.5}$$

Заметим, что система уравнений (1.5) получается из исходной системы (1.2) посредством подстановки функций $h(x_1), \dots, h(x_n), h(y)$ вместо соответствующих переменных $x_1, \dots, x_n, y$.

Следовательно, для любого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$, система неявных уравнений (1.5) имеет единственное решение $h(y) = f(h(\widetilde{\alpha}))$ и, соответственно, равносильная система уравнений (1.3) имеет единственное решение $y = h^{-1}(f(h(\widetilde{\alpha}))) = f^h(\widetilde{\alpha})$.

С учетом произвольности выбора набора $\widetilde{\alpha}$ заключаем, что система неявных уравнений (1.3) реализует функцию f^h. При этом в силу принципа двойственности для суперпозиций система (1.3) является системой уравнений над двойственной системой функций A^h. Лемма 1.1.1 доказана.

Сформулируем *принцип двойственности для неявных расширений* [13].

Лемма 1.1.2. *Для любой системы функций* A, $A \subseteq P_k$, *и любой подстановки* $h(x)$ *из* k *чисел* $0, 1, \dots, k-1$ *выполняется соотношение*

$$I(A^h) = (I(A))^h.$$

Доказательство. Из леммы 1.1.1 следует, что для любой функции f, неявно выразимой над системой функций A, двойственная к ней функция f^h неявно выразима над системой A^h. Поэтому справедливо соотношение

$$(I(A))^h \subseteq I(A^h). \tag{1.6}$$

В силу произвольности выбора подстановки для системы функций $A^{h^{-1}}$, двойственной к системе A относительно обратной подстановки $h^{-1}(x)$, имеет место аналогичное соотношение $(I(A))^{h^{-1}} \subseteq I(A^{h^{-1}})$.

Применяя его к системе функций A^h и учитывая, что $A^{hh^{-1}} = A$, приходим к соотношению

$$(I(A^h))^{h^{-1}} \subseteq I(A). \tag{1.7}$$

Отметим следующий очевидный факт: если две системы функций k-значной логики A_1 и A_2 связаны соотношением $A_1 \subseteq A_2$, то для любой подстановки $h(x)$ соответствующие двойственные системы функций связаны аналогичным соотношением: $A_1^h \subseteq A_2^h$.

С учетом этого из соотношения (1.7) получаем $I(A^h) \subseteq (I(A))^h$, что вместе с соотношением (1.6) дает искомое равенство $I(A^h) = (I(A))^h$.

Лемма 1.1.2 доказана.

Принцип двойственности для неявных расширений позволяет сузить задачу поиска всевозможных неявных расширений и ограничиться рассмотрением только различных с точностью до двойственности систем функций.

Отдельный интерес для исследования представляют собой системы функций, над которыми можно неявно выразить любую функцию k-значной логики.

Будем называть систему функций A *неявно полной* в P_k, если для любой функции k-значной логики существует неявное представление над системой A, т. е. $I(A) = P_k$.

В настоящей работе мы будем рассматривать только неявно полные замкнутые по суперпозиции системы функций в P_k.

1.2. Сложность неявных представлений. Введем естественную меру сложности неявных представлений: будем понимать под сложностью неявного представления число входящих в него уравнений и будем называть эту величину *рангом представления*. Также введем функцию Шеннона для данной меры сложности, называемую *ранговой функцией*.

Приведем точные определения понятий ранга функции и ранговой функции. Рассмотрим произвольную функцию f из неявного расширения некоторой системы A функций k-значной логики, $f \in I(A)$. Следуя [13], будем называть *рангом* функции f над системой A и обозначать через $m_A(f)$ наименьшее число уравнений, достаточное для построения неявного представления функции f над системой A. *Ранговой функцией* системы A будем называть функцию $m_A(n)$, заданную соотношением

$$m_A(n) = \max m_A(f),$$

где максимум берется по всем функциям k-значной логики, принадлежащим неявному расширению $I(A)$ системы A и существенно зависящим не более чем от n переменных.

Укажем ряд общих свойств ранговых функций. Начнем с описания аналогичных свойств для рангов функций k-значной логики.

Лемма 1.2.1. *Для любой системы функций A, $A \subseteq P_k$, и любой функции f из неявного расширения системы A, $f \in I(A)$, выполняется соотношение*

$$m_A(f) = m_{[A]}(f).$$

Лемма 1.2.1 легко выводится из определения понятия неявного представления.

Также без особого труда проверяется следующее утверждение:

Лемма 1.2.2. *Для любых двух систем функций A и B в P_k, удовлетворяющих условию $A \subseteq B$, и любой функции f, $f \in I(A)$, выполняется неравенство*

$$m_A(f) \geqslant m_B(f).$$

Сформулируем *принцип двойственности для рангов* функций k-значной логики [13].

Лемма 1.2.3. *Для любой системы функций A, $A\subseteq P_k$, любой функции f, $f\in I(A)$, и любой подстановки $h(x)$ из k чисел $0,1,\ldots,k-1$ выполняется соотношение*

$$m_{A^h}(f^h)=m_A(f).$$

Доказательство. Рассмотрим неявное представление функции f над системой функций A, содержащее наименьшее количество уравнений, равное $m_A(f)$.

По лемме 1.1.1 двойственная относительно подстановки $h(x)$ система уравнений реализует функцию f^h над системой функций A^h. Следовательно, минимальное число уравнений, достаточное для неявного представления функции f^h над системой A^h заведомо не превосходит величины $m_A(f)$, т. е.

$$m_{A^h}(f^h)\leqslant m_A(f). \tag{1.8}$$

В силу произвольности выбора подстановки для системы функций $A^{h^{-1}}$ и функции $f^{h^{-1}}$, двойственных соответственно к системе A и функции f относительно обратной подстановки $h^{-1}(x)$, имеет место аналогичное неравенство $m_{A^{h^{-1}}}(f^{h^{-1}})\leqslant m_A(f)$.

Применяя его к системе функций A^h и функции f^h и учитывая, что $A^{h^{-1}h}=A$ и $f^{h^{-1}h}\equiv f$, получаем неравенство $m_A(f)\leqslant m_{A^h}(f^h)$, которое вместе с (1.8) влечет искомое равенство $m_{A^h}(f^h)=m_A(f)$.

Лемма 1.2.3 доказана.

Из описанных выше свойств ранга функции легко выводятся аналогичные свойства ранговых функций.

Лемма 1.2.4. *Для любой системы функций A, $A\subseteq P_k$, при всех натуральных n выполняется соотношение*

$$m_A(n)=m_{[A]}(n).$$

Лемма 1.2.5. *Для любых двух систем функций A и B в P_k, удовлетворяющих условиям $A\subseteq B$ и $I(A)=I(B)$, при всех натуральных n выполняется неравенство*

$$m_A(n)\geqslant m_B(n).$$

Следующее утверждение представляет собой *принцип двойственности для ранговых функций* в P_k [13].

Лемма 1.2.6. *Для любой системы функций A, $A\subseteq P_k$, и любой подстановки $h(x)$ из k чисел $0,1,\ldots,k-1$ при всех натуральных n выполняется соотношение*

$$m_{A^h}(n)=m_A(n).$$

Перечисленные выше свойства значительно облегчают задачу описания поведения ранговых функций, отвечающих всевозможным системам функций в P_k, и позволяют ограничиться рассмотрением замкнутых по суперпозиции и различных с точностью до двойственности систем функций k-значной логики.

Докажем тривиальную верхнюю оценку, справедливую для ранговой функции любой системы функций k-значной логики.

Лемма 1.2.7. *Пусть A — произвольная система функций в P_k. При любом натуральном n для ранговой функции системы A выполняется соотношение*

$$m_A(n) \leqslant (k-1)k^n.$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция n переменных в P_k.

Отметим, что куб E_k^{n+1} содержит k^{n+1} наборов, $(k-1)k^n$ из которых не являются точками графика функции f.

Рассмотрим произвольное неявное представление $S(f)$ функции f над системой функций A. Из определения неявного представления вытекает, что для каждого набора из куба E_k^{n+1}, не являющегося точкой графика функции f, в системе уравнений $S(f)$ найдется уравнение, обращающееся в неравенство на данном наборе.

Следовательно, в системе уравнений $S(f)$ можно выделить подсистему $S'(f)$, содержащую не более чем $(k-1)k^n$ уравнений, которая запрещает все наборы куба E_k^{n+1}, не являющиеся точками графика функции f, и допускает все точки графика функции f из куба E_k^{n+1}. По определению система уравнений $S'(f)$ также является неявным представлением функции f над системой функций A.

Таким образом, для любой функции f от n переменных, $f \in P_k$, можно построить неявное представление над системой функций A, содержащее не более чем $(k-1)k^n$ уравнений.

Отсюда заключаем, что при любом натуральном n ранговая функция системы функций A удовлетворяет неравенству

$$m_A(n) \leqslant (k-1)k^n.$$

Лемма 1.2.7 доказана.

Согласно лемме 1.2.7 ранговая функция всякой системы функций k-значной логики имеет не выше, чем экспоненциальный порядок роста.

Рассмотрим еще одну меру сложности неявных представлений, обобщающую известную меру сложности для суперпозиций (см. [24,26]).

Пусть каждой функции из заданной системы A, $A \subseteq P_k$, приписано натуральное число — вес этой функции, а каждой суперпозиции функций из A — вес этой суперпозиции, равный сумме весов всех входящих в нее функций из A. Вес тождественной функции положим равным единице. Соответствующая мера сложности, называемая *весом* неявного представления над системой функций A, представляет собой сумму весов всех входящих в него функций, с учетом кратности вхождений.

1.3. Параметрическая выразимость. Рассмотрим более подробно понятие параметрической выразимости функций k-значной логики, его свойства и взаимосвязь с понятиями неявной выразимости и выразимости функций суперпозициями.

Определения понятий параметрической выразимости функций k-значной логики, параметрического замыкания $P(A)$ произвольной системы функций A в P_k и параметрической полноты системы функций даны во введении.

Из определений неявной и параметрической выразимости легко вытекают соотношения, связывающие замыкание по суперпозиции, неявное расширение и параметрической замыкание заданной системы функций A в P_k:

$$[A] \subseteq I(A) \subseteq P(A).$$

Таким образом, понятие параметрической выразимости функций k-значной логики представляет собой обобщение понятия неявной выразимости, которое, в свою очередь, является обобщением понятия выразимости функций суперпозициями.

При любом k, $k \geqslant 2$, выразимость функций суперпозициями не эквивалентна неявной выразимости в P_k. В качестве примера, подтверждающего их неэквивалентность, можно привести класс всех функций k-значной логики, монотонных относительно порядка $0 < 1 < \cdots < k-1$. Для всякого k, $k \geqslant 2$, этот класс замкнут по суперпозиции, и в то же время его неявное расширение содержит немонотонные функции (на самом деле имеет место более сильное утверждение: этот класс является неявно полным в P_k — см. теорему 2.2.1 настоящей работы).

При $k \geqslant 3$ неявная выразимость и параметрическая выразимость в P_k также неэквивалентны. Более того, при $k \geqslant 3$ число всевозможных неявных расширений систем функций в P_k равно континууму (см. [8, 13]), в то время как число различных параметрических замыканий в P_k конечно [47]. В работе [17] А. В. Кузнецова приведены также примеры, показывающие неэквивалентность неявной и параметрической выразимости уже в трехзначной логике P_3. Тем не менее в двузначной логике P_2 неявная выразимость эквивалентна параметрической выразимости. Этот факт был установлен О. М. Касим-Заде в работе [9] (см. также [8, 10]).

Отметим различия в терминологии для понятий «неявное расширение» и «параметрическое замыкание». Эти различия не случайны.

Операция параметрического замыкания является операцией замыкания в обычном смысле [3, 15], так как обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

1) для любой системы функций A выполняется соотношение $A \subseteq P(A)$;
2) для любых систем функций A_1 и A_2, удовлетворяющих условию $A_1 \subseteq A_2$, выполняется соотношение $P(A_1) \subseteq P(A_2)$;
3) для любой системы функций A выполняется соотношение $P(P(A)) = P(A)$.

Соответственно операция параметрического замыкания порождает в P_k систему параметрически замкнутых классов. При этом, как несложно проверить, любой параметрически замкнутый класс функций k-значной логики замкнут по суперпозиции, откуда следует, что система всех параметрически замкнутых классов является подсистемой всех замкнутых по суперпозиции классов в P_k.

В свою очередь, при $k \geqslant 3$ операция неявного расширения в P_k не является операцией замыкания в обычном смысле [3, 15], так как не обладает свойством идемпотентности, т. е. при $k \geqslant 3$ для произвольной системы функций A в P_k множество функций $I(I(A))$, вообще говоря, не совпадает с множеством функций $I(A)$. В качестве примера, подтверждающего этот факт, можно привести класс всех одноместных функций в P_4, описанный в работе [31] Е. А. Ореховой.

В дополнение к обзору известных результатов в области неявной выразимости, приведенному во введении, дадим краткое описание известных результатов в исследованиях выразимости функций суперпозициями и параметрической выразимости, а также функциональной и параметрической полноты в P_k.

В случае двузначной логики P_2 полное решение проблемы выразимости функций суперпозициями было найдено Э. Постом [49,50]. Он описал структуру всех замкнутых по суперпозиции классов булевых функций (подробное описание классов Поста и их свойств см. в [45, 50]) и показал, что все они обладают конечным базисом и их число счетно в P_2, а также установил, что система булевых функций полна тогда и только тогда, когда она не входит целиком ни в один из пяти замкнутых классов, образующих систему всех предполных классов в P_2. Независимо от Э. Поста критерий функциональной полноты в P_2 был получен С. В. Яблонским [43]. В дальнейшем С. В. Яблонский описал систему всех предполных классов в трехзначной логике P_3, состоящую из восемнадцати замкнутых классов, и тем самым решил проблему функциональной полноты в P_3 [42, 43]. Кроме того, опираясь на доказательство теоремы Янова—Мучника о существовании в P_k при $k \geqslant 3$ замкнутых классов без конечного базиса [46], С. В. Яблонский показал, что при $k \geqslant 3$ число замкнутых классов в P_k континуально [44]. В P_4 критерий функциональной полноты в терминах предполных классов был установлен А. И. Мальцевым [27].

В работе [16] А. В. Кузнецов доказал, что при любых значениях k число всех предполных в P_k классов конечно. Но способ построения для произвольного k системы всех предполных в P_k классов, приведенный в теореме Кузнецова [16,43,44], имеет слишком высокую алгоритмическую сложность и по сути непригоден для практического применения при больших значениях k. В работе [43] С. В. Яблонским получен более эффективный критерий полноты в P_k, который применим для систем функций, содержащих все функции одной переменной, выпускающие хотя бы одно значение. Данный результат С. В. Яблонского является усилением известной теоремы Слупецкого [54]. Задаче структурного описания системы всех предполных классов в P_k было посвящено немало работ различных авторов. Точку в этом вопросе поставил И. Розенберг [51]. Опираясь на установленный А. В. Кузнецовым факт, что всякий предполный в P_k класс сохраняет некоторый уникальный предикат [28, с. 102–115], И. Розенберг для каждого k описал систему всех предполных в P_k классов в терминах сохранения предикатов.

Решение проблемы параметрической выразимости в двузначной логике P_2 было получено А. В. Кузнецовым [17]. В работе [17] А. В. Кузнецов привел полное описание системы всех параметрически замкнутых классов булевых функций, состоящей из 25 замкнутых по суперпозиции классов Поста [50]. Из данного результата А. В. Кузнецова, в частности, вытекает критерий параметрической полноты в P_2, заключающийся в утверждении, что система булевых функций параметрически полна тогда и только тогда, когда она не входит целиком ни в один из параметрически замкнутых классов Кузнецова (либо ни в один из параметрически предполных классов, образующих подмножество в семействе всех классов Кузнецова). В трехзначной логике P_3 критерий параметрической полноты в терминах параметрически предполных классов был получен А. Ф. Данильченко [5]. В работе [5]

А. Ф. Данильченко была также доказана конечность системы всех параметрически замкнутых классов в P_3. Впоследствии С. Баррис и Р. Уиллард в работе [47] установили конечность числа всех параметрически замкнутых классов в P_k при любых конечных значениях k.

§ 2. Классы монотонных функций в P_k

2.1. Теорема о ранговой функции.

2.1.1. Сопутствующие определения и формулировка теоремы. Напомним определение монотонной в P_k функции.

Будем называть функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ k-значной логики *монотонной*, если для любых двух наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, принадлежащих кубу E_k^n и удовлетворяющих условию $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$, значения функции f на этих наборах удовлетворяют условию $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})$.

В работе [13] О. М. Касим-Заде получил точное выражение для ранговой функции класса всех монотонных булевых функций. Оно задается следующей теоремой.

Теорема 2.1.1 [13]. *Пусть A — класс всех монотонных функций в P_2. При всех натуральных n для ранговой функции класса A выполняется равенство*

$$m_A(n) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil.$$

Впоследствии оказалось, что в k-значной логике ранговая функция класса всех монотонных функций не зависит от числа k и задается тем же выражением, что и в булевом случае:

Теорема 2.1.2. *Пусть A — класс всех монотонных функций в P_k. Тогда класс функций A неявно полон в P_k и при всех натуральных n для ранговой функции класса A выполняется равенство*

$$m_A(n) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1.2 является частным случаем теоремы 2.1.3, доказываемой в настоящей работе.

В k-значной логике можно ввести различные обобщения понятия монотонности функций. В частности, можно рассматривать функции, монотонные относительно произвольных частичных порядков на множестве E_k, и исследовать поведение ранговых функций, отвечающих соответствующим классам монотонных функций. При этом получаются интересные результаты, которые можно использовать для нахождения оценок ранговых функций широкого спектра систем функций k-значной логики.

Приведем точные определения.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный частичный порядок, заданный на множестве E_k. Соответствующее частично упорядоченное множество будем обозначать через $\langle E_k; \mathfrak{M} \rangle$. Для соотношений вида $a < b$ относительно частичного порядка $\mathfrak{M}$, где $a, b \in E_k$, будем использовать запись $a <_{\mathfrak{M}} b$.

Цепью в частично упорядоченном множестве $\langle E_k; \mathfrak{M} \rangle$ будем называть всякую последовательность соотношений следующего вида:

$$a_1 <_{\mathfrak{M}} a_2 <_{\mathfrak{M}} \ldots <_{\mathfrak{M}} a_l,$$

где $a_1, \ldots, \alpha_l$ — различные сравнимые элементы из множества $\langle E_k; \mathfrak{M}\rangle$, $1 \leqslant l \leqslant k$.

Длиной цепи будем называть величину, на единицу меньшую, чем число элементов цепи. Таким образом, длина цепи из l элементов равна $l-1$.

Каждому частичному порядку $\mathfrak{M}$ можно поставить в соответствие максимальную длину цепи в частично упорядоченном множестве $\langle E_k; \mathfrak{M}\rangle$, обозначаемую через $s(E_k, \mathfrak{M})$. Легко видеть, что $0 \leqslant s(E_k, \mathfrak{M}) \leqslant k-1$.

Пусть помимо частичного порядка $\mathfrak{M}$ на множестве E_k задан еще один частичный порядок $\mathfrak{M}'$. Если для любых элементов a, b из множества E_k, удовлетворяющих условию $a \leqslant_{\mathfrak{M}'} b$, выполняется неравенство $a \leqslant_{\mathfrak{M}} b$, то будем говорить, что порядок $\mathfrak{M}'$ *подчинен* порядку $\mathfrak{M}$, и факт подчиненности обозначать через $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$.

Легко видеть, что для частичных порядков $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, удовлетворяющих соотношению $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$, справедливо неравенство $s(E_k, \mathfrak{M}') \leqslant s(E_k, \mathfrak{M})$.

Зафиксируем натуральное число n. Отношение частичного порядка $\mathfrak{M}$, заданное на множестве E_k, можно естественным образом распространить на куб E_k^n. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — наборы длины n в кубе E_k^n. Положим $\widetilde{\alpha} \leqslant_{\mathfrak{M}} \widetilde{\beta}$, если $\alpha_i \leqslant_{\mathfrak{M}} \beta_i$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Таким образом частичный порядок $\mathfrak{M}$ можно задать всюду в кубе E_k^n.

Понятие цепи в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^n; \mathfrak{M}\rangle$ определяется аналогично. Максимальную длину цепи в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^n; \mathfrak{M}\rangle$ будем обозначать через $s(E_k^n, \mathfrak{M})$. Легко видеть, что она равна $ns(E_k, \mathfrak{M})$.

Пусть U^n — произвольное подмножество куба E_k^n. Если всюду в кубе E_k^n задан частичный порядок $\mathfrak{M}$, то можно говорить о частично упорядоченном множестве $\langle U^n; \mathfrak{M}\rangle$ и о соответствующей ему максимальной длине цепи, которую будем обозначать через $s(U^n, \mathfrak{M})$.

Если на множестве E_k задано отношение линейного*) порядка, то максимальную длину цепи в E_k будем обозначать через $s(E_k)$. Соответственно максимальную длину цепи в произвольном подмножестве U^n куба E_k^n будем обозначать через $s(U^n)$.

Рассмотрим произвольную функцию k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f : E_k^n \to E_k$. Зададим на области определения E_k^n функции f частичный порядок $\mathfrak{M}$ (подразумевая, что порядок $\mathfrak{M}$ задается на множестве E_k и описанным выше способом распространяется на куб E_k^n), на области значения E_k функции f — частичный порядок $\mathfrak{M}'$, подчиненный порядку $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$. Всюду в дальнейшем, говоря о паре частичных порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ в E^k, будем предполагать, что она является *согласованной*, т. е. порядок $\mathfrak{M}'$ подчинен порядку $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$.

Будем называть функцию $f(\widetilde{x})$ *монотонной относительно пары порядков* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, если для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из куба E_k^n, удовлетворяющих условию $\widetilde{\alpha} \leqslant_{\mathfrak{M}} \widetilde{\beta}$, имеет место неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant_{\mathfrak{M}'} f(\widetilde{\beta})$. Если при этом $\mathfrak{M}$ есть отношение линейного порядка на множестве E_k, то будем называть функцию f *монотонной относительно частичного порядка* $\mathfrak{M}'$. Если при этом порядок $\mathfrak{M}'$ также является линейным в E_k, то функцию f будем называть *монотонной* в P_k. Очевидно, что в этом случае определе-

*) Всюду в дальнейшем под *линейным порядком* на множестве E_k будем подразумевать порядок $0 < 1 < \ldots < k-1$.

ние функции, монотонной относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, сводится к общепринятому определению монотонной в P_k функции.

Легко видеть, что для любой согласованной пары частичных порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ в E_k класс A всех функций, монотонных относительно $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, замкнут по суперпозиции, $[A] = A$.

Если порядок $\mathfrak{M}'$ является вырожденным, т. е. не содержит ни одной пары сравнимых элементов (при этом величина $s(E_k, \mathfrak{M}')$ равна нулю), то класс функций A тривиален и состоит только из констант $0, 1, \ldots, k-1$. В этом случае неявное расширение $I(A)$ класса функций A содержит только константы и тождественную функцию и при всех натуральных n ранговая функция $m_A(n)$ класса A равна 1.

В дальнейшем всюду в данной работе мы будем накладывать на отношение порядка $\mathfrak{M}'$ условие $s(E_k, \mathfrak{M}') \geqslant 1$, т. е. предполагать, что порядок $\mathfrak{M}'$ невырожден и содержит хотя бы одну пару сравнимых элементов.

В настоящем разделе доказывается, что все классы функций k-значной логики, монотонных относительно произвольной согласованной пары невырожденных порядков, являются неявно полными в P_k, и устанавливается точное выражение для ранговых функций этих классов, зависящее явно только от числа n и от максимальных длин цепей $s(E_k, \mathfrak{M})$ и $s(E_k, \mathfrak{M}')$. В случае равенства максимальных длин цепей, отвечающих порядкам $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, выражение для ранговой функции совпадает с выражением (2.1) из теоремы 2.1.2.

Основной результат данного раздела описывается следующей теоремой.

Теорема 2.1.3. *Пусть на множестве E_k, $k \geqslant 2$, заданы частичные порядки $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ такие, что $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ и $s(E_k, \mathfrak{M}') \geqslant 1$. Пусть A — класс всех функций в P_k, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$. Тогда система A неявно полна в P_k и при всех натуральных n ранговая функция системы A удовлетворяет равенству*

$$m_A(n) = \left\lceil \frac{(n+1)s(E_k, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil.$$

Для доказательства теоремы 2.1.3 нам потребуется ряд вспомогательных определений и утверждений, сформулированных в виде лемм.

Будем называть *l-м слоем* в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^n; \mathfrak{M}\rangle$ совокупность всех наборов $\widetilde{\alpha}$ куба E_k^n, для каждого из которых во множестве $\langle E_k^n; \mathfrak{M}\rangle$ найдется цепь длины l с наибольшим элементом $\widetilde{\alpha}$ и не найдется цепи длины $l+1$ (а следовательно, и цепи большей длины) с наибольшим элементом $\widetilde{\alpha}$.

Легко видеть, что число l принимает значения из диапазона $0 \leqslant l \leqslant ns(E_k, \mathfrak{M})$, где $s(E_k, \mathfrak{M})$ — максимальная длина цепи в $\langle E_k; \mathfrak{M}\rangle$.

Весом набора $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} \in E_k^n$, относительно частичного порядка $\mathfrak{M}$ будем называть номер слоя в $\langle E_k^n; \mathfrak{M}\rangle$, содержащего набор $\widetilde{\alpha}$, и обозначать через $|\widetilde{\alpha}|_{\mathfrak{M}}$.

Будем говорить, что набор $\widetilde{\alpha}'$ *непосредственно предшествует* набору $\widetilde{\alpha}$ относительно частичного порядка $\mathfrak{M}$, где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}' \in E_k^n$, если выполняется неравенство $\widetilde{\alpha}' <_{\mathfrak{M}} \widetilde{\alpha}$ и не найдется набора $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\beta} \in E_k^n$, удовлетворяющего неравенствам $\widetilde{\alpha}' <_{\mathfrak{M}} \widetilde{\beta} <_{\mathfrak{M}} \widetilde{\alpha}$. Наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\alpha}'$ будем также называть *соседними наборами* в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^n; \mathfrak{M}\rangle$.

В дальнейших рассуждениях нам понадобится дополнительная форма записи неявных представлений. Она имеет следующий вид.

Пусть A — произвольная система функций в P_k, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция из неявного расширения системы функций A, $f \in I(A)$. Рассмотрим некоторое неявное представление $S_A(f)$ функции f над системой функций A, содержащее m уравнений, $m \geqslant 1$:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, y) = \psi_1(x_1, \ldots, x_n, y), \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n, y) = \psi_m(x_1, \ldots, x_n, y). \end{cases}$$

Каждому набору $(\widetilde{\alpha}, \beta) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$ куба E_k^{n+1} соответствуют два набора значений вектор-функций, принадлежащих кубу E_k^m:

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = (\varphi_1(\widetilde{\alpha}, \beta), \ldots, \varphi_m(\widetilde{\alpha}, \beta))$$
$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = (\psi_1(\widetilde{\alpha}, \beta), \ldots, \psi_m(\widetilde{\alpha}, \beta)).$$

Таким образом, систему неявных уравнений $S_A(f)$ можно записать в виде уравнения в вектор-функциях:

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y).$$

Из определения понятия неявного представления непосредственно вытекает, что в точках графика $(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha}))$ функции f выполняется равенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha})) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha}))$, а в остальных точках $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ куба E_k^{n+1}, где $\beta \neq f(\widetilde{\alpha})$, — неравенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) \neq \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta)$.

Будем говорить, что вектор-функция $\widetilde{\Phi}$ (вектор-функция $\widetilde{\Psi}$) *монотонна относительно согласованной пары порядков* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, если все ее компоненты $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ (соответственно $\psi_1, \ldots, \psi_m$) являются функциями, монотонными относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$.

Приступим к доказательству теоремы 2.1.3. Обоснование теоремы 2.1.3 разбивается на три части: доказательство неявной полноты, получение верхней и нижней оценок для ранговой функции.

2.1.2. Доказательство неявной полноты. Докажем сначала неявную полноту системы функций A.

Для удобства записи всюду в доказательстве теоремы 2.1.3 и сопутствующих лемм будем использовать дополнительные обозначения s и s' для максимальных длин цепей $s(E_k, \mathfrak{M})$ и $s(E_k, \mathfrak{M}')$ соответственно, т. е. положим $s = s(E_k, \mathfrak{M})$ и $s' = s(E_k, \mathfrak{M}')$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция n переменных в P_k. Покажем, что найдется система неявных уравнений над системой функций A, реализующая функцию f.

Опишем способ, которым мы будем задавать неявное представление функции f над системой A. Достаточно для некоторого натурального числа m задать вектор-функции $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y) = (\varphi_1(\widetilde{x}, y), \ldots, \varphi_m(\widetilde{x}, y))$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y) = (\psi_1(\widetilde{x}, y), \ldots, \psi_m(\widetilde{x}, y))$, действующие из E_k^{n+1} в E_k^m и удовлетворяющие следующим условиям. В точках графика функции f должно выполняться равенство

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha})) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha})),$$

а в остальных точках $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ куба E_k^{n+1}, где $\beta \neq f(\widetilde{\alpha})$, — неравенство:

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) \neq \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta).$$

При этом вектор-функции $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y)$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y)$ должны быть монотонными относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$.

Выберем произвольное достаточно большое натуральное число m. В кубе E_k^m зафиксируем некоторую цепь Σ^m максимальной длины относительно порядка $\mathfrak{M}'$. Длина этой цепи равна ms'. Обозначим наборы цепи Σ^m следующим образом:

$$\widetilde{\sigma}^0 \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\sigma}^1 \leqslant_{\mathfrak{M}'} \ldots \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\sigma}^{ms'}.$$

Так как цепь Σ^m имеет максимальную длину в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^m; \mathfrak{M}'\rangle$, то номер любого набора, принадлежащего цепи Σ^m, совпадает с весом этого набора относительно порядка $\mathfrak{M}'$, т. е. $|\widetilde{\sigma}^i|_{\mathfrak{M}'} = i$, $0 \leqslant i \leqslant ms'$.

Для любой функции f от n переменных в P_k будем строить вектор-функции $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ таким образом, чтобы они принимали в качестве значений только наборы цепи Σ^m, т. е. наборы $\widetilde{\sigma}^i$, $0 \leqslant i \leqslant ms'$. Построение будем проводить индукцией по номеру слоя в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$.

Для удобства записи введем вспомогательные вектор-функции $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{x}, y)$ и $\widetilde{\Psi}'(\widetilde{x}, y)$, действующие из E_k^{n+1} в E_k^m. Определим их также индуктивно. Для всех наборов $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ нулевого слоя множества $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$ положим:

$$\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^0.$$

Далее положим

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta),$$
$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \begin{cases} \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) & \text{при } \beta = f(\widetilde{\alpha}), \\ \widetilde{\sigma}^1 & \text{при } \beta \neq f(\widetilde{\alpha}). \end{cases}$$

Пусть для всякого набора $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ в кубе E_k^{n+1}, вес которого относительно порядка $\mathfrak{M}$ не превосходит l $(|(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}} \leqslant l)$, где $0 \leqslant l \leqslant (n+1)s - 1$, значения $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta)$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta)$ уже заданы и принадлежат цепи Σ^m. Зададим значения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ на наборах $(l+1)$-го слоя. Рассмотрим произвольный набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, принадлежащий $(l+1)$-му слою в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$, т. е. $|(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}} = l+1$.

Зададим сначала значения $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ и $\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ вектор-функций $\widetilde{\Phi}'$ и $\widetilde{\Psi}'$. Определим значение $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ как максимум по всем наборам, непосредственно предшествующим набору $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, значений вектор-функции $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y)$ на этих наборах. Аналогично $\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ определим как максимум по всем наборам, непосредственно предшествующим набору $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, значений вектор-функции $\widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y)$ на этих наборах. Другими словами, положим

$$\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \max \widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}', \beta'),$$
$$\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \max \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}', \beta'),$$

где максимум берется по всем наборам $(\widetilde{\alpha}', \beta')$, непосредственно предшествующим набору $(\widetilde{\alpha}, \beta)$.

По предположению индукции на всех наборах с весом, не превосходящим l в $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$, вектор-функции $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ принимают в качестве значений только наборы цепи Σ^m. Следовательно, на наборах с весом, не превосходящим l в $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$, значения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ сравнимы между собой, как наборы из куба E_k^m, и взятие максимума среди них имеет смысл. Отсюда заключаем, что вектор-функции $\widetilde{\Phi}'$ и $\widetilde{\Psi}'$ определены корректно.

Очевидно, что заданные таким образом значения $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ и $\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ также принадлежат цепи Σ^m. Следовательно, $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^i$ для некоторого i, $0 \leqslant i \leqslant ms'$. Если $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$, положим:

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta),$$
$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \begin{cases} \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) & \text{при } \beta = f(\widetilde{\alpha}), \\ \widetilde{\sigma}^{i+1} & \text{при } \beta \neq f(\widetilde{\alpha}). \end{cases}$$

Если $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) \neq \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$, положим:

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \begin{cases} \widetilde{\sigma}^{i+1} & \text{при } \beta = f(\widetilde{\alpha}), \\ \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) & \text{при } \beta \neq f(\widetilde{\alpha}), \end{cases}$$
$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta).$$

Таким образом последовательно будем задавать значения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ на всех $(n+1)s$ слоях в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$, начиная с нулевого слоя. На наборах одного слоя значения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ будем задавать в произвольном порядке. При заполнении l-го слоя будем переходить к наборам $(l+1)$-го слоя и так далее, пока не зададим значения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ на всех элементах частично упорядоченного множества $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$.

Если в индуктивном процессе на некотором этапе номер набора $\widetilde{\sigma}^i$, присваиваемого значению вектор-функции $\widetilde{\Phi}$ или $\widetilde{\Psi}$, окажется больше, чем ms', то возьмем в качестве m большее натуральное число и проведем построение $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ сначала. В силу произвольности выбора m найдется достаточно большое натуральное число m, при котором вектор-функции $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ будут определены корректно всюду в E_k^{n+1}.

Отметим некоторые свойства вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$.

Лемма 2.1.1. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция n переменных в P_k. Пусть вектор-функции $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y)$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y)$ заданы по функции $f(\widetilde{x})$ описанным выше способом. Тогда для любого набора $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ куба E_k^{n+1} выполняется соотношение $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta)$.*

При этом на наборах $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ куба E_k^{n+1}, являющихся точками графика функции f, $\beta = f(\widetilde{\alpha})$, имеет место равенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta)$.

На остальных наборах $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ куба E_k^{n+1}, $\beta \neq f(\widetilde{\alpha})$, вектор-функции $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ принимают в качестве значений соседние наборы из цепи Σ^m, т. е. если для некоторого i, $0 \leqslant i \leqslant ms(E_k, \mathfrak{M}') - 1$ выполнено $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^i$, то $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^{i+1}$.

Доказательство. При доказательстве леммы 2.1.1 будем использовать индукцию по номеру слоя в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$.

Для наборов $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ нулевого слоя частично упорядоченного множества $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$ ($|(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}} = 0$), из определения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ вытекают равенства: $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^0$ при $\beta = f(\widetilde{\alpha})$, $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^0$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^1$ при $\beta \neq f(\widetilde{\alpha})$. Следовательно, для нулевого слоя утверждение верно.

Допустим, что для наборов с весом, не превосходящим l в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$, где $0 \leqslant l \leqslant (n+1)s - 1$, утверждение леммы верно. Докажем, что оно верно и для наборов с весом $l+1$, т. е. принадлежащих $(l+1)$-му слою.

Рассмотрим произвольный набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, принадлежащий $(l+1)$-му слою множества $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$, $|(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}} = l+1$.

По определению вектор-функций $\widetilde{\Phi}'$ и $\widetilde{\Psi}'$ значения $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ и $\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ представляют собой максимум значений вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ соответственно по всем наборам, непосредственно предшествующим набору $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$.

В частности, из определения следует, что значения вектор-функций $\widetilde{\Phi}'$ и $\widetilde{\Psi}'$ принадлежат цепи Σ^m, т. е. $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^i$ для некоторого номера i, $0 \leqslant i \leqslant ms'$.

Пусть $(\widetilde{\alpha}', \beta')$ и $(\widetilde{\alpha}'', \beta'')$ — наборы куба E_k^{n+1}, непосредственно предшествующие набору $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ относительно порядка $\mathfrak{M}$, на которых достигаются равенства $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}', \beta') = \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$, $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}'', \beta'') = \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$. Очевидно, что $|(\widetilde{\alpha}', \beta')|_{\mathfrak{M}} \leqslant l$ и $|(\widetilde{\alpha}'', \beta'')|_{\mathfrak{M}} \leqslant l$.

По предположению индукции выполняется неравенство

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}', \beta') \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}', \beta').$$

Отсюда с учетом соотношений $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}', \beta') = \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^i$ получаем неравенство $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}', \beta') \geqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\sigma}^i$, которое в силу того факта, что $\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ есть максимум значений вектор-функции $\widetilde{\Psi}$ по всем наборам, непосредственно предшествующим $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, влечет неравенство $\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) \geqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\sigma}^i$.

С другой стороны, из определения вектор-функции $\widetilde{\Phi}'$ вытекает неравенство

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}'', \beta'') \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta),$$

т. е. выполняется соотношение $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}'', \beta'') \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\sigma}^i$.

Отсюда, используя предположение индукции, получаем соотношение $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}'', \beta'') \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\sigma}^{i+1}$, которое в силу равенства $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}'', \beta'') = \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ можно переписать в виде $\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\sigma}^{i+1}$.

Таким образом, заключаем, что при $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^i$, $0 \leqslant i \leqslant ms'$, справедливы неравенства

$$\widetilde{\sigma}^i \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\sigma}^{i+1}. \tag{2.2}$$

Если $\beta = f(\widetilde{\alpha})$, то при $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ по определению вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ выполняются соотношения $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$, $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$, из которых вытекает равенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta)$.

Пусть $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) \neq \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$. В этом случае при $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^i$ в силу соотношений (2.2) справедливо равенство $\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^{i+1}$. Отсюда, учитывая соотношения $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^{i+1}$, $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$, вытекающие из определения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$, получаем равенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta)$.

Теперь рассмотрим случай $\beta \neq f(\widetilde{\alpha})$. В соответствии с определением вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ при $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ выполняются равенства $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^i$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^{i+1}$.

Если $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) \neq \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$, то по определению вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ справедливы равенства $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$, что, с учетом соотношений (2.2), означает выполнение равенств $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^i$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^{i+1}$.

Лемма 2.1.1 доказана.

Лемма 2.1.2. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция n переменных в P_k. Построенные по функции $f(\widetilde{x})$ описанным выше способом вектор-функции $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y) = (\varphi_1(\widetilde{x}, y), \ldots, \varphi_m(\widetilde{x}, y))$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y) = (\psi_1(\widetilde{x}, y), \ldots, \psi_m(\widetilde{x}, y))$ задают неявное представление функции f над классом A всех функций k-значной логики, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$. Оно имеет вид:*

$$\begin{cases} \varphi_1(\widetilde{x}, y) = \psi_1(\widetilde{x}, y), \\ \qquad \ldots \\ \varphi_m(\widetilde{x}, y) = \psi_m(\widetilde{x}, y). \end{cases} \tag{2.3}$$

Доказательство. Докажем монотонность вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$.

Пусть $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ и $(\widetilde{\gamma}, \delta)$ — произвольные наборы в кубе E_k^{n+1}, удовлетворяющие условию $(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant_{\mathfrak{M}} (\widetilde{\gamma}, \delta)$. Если набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ непосредственно предшествует набору $(\widetilde{\gamma}, \delta)$ относительно порядка $\mathfrak{M}$, то неравенства $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}, \delta)$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}, \delta)$ следуют из определения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$.

Пусть набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ не является непосредственно предшествующим набору $(\widetilde{\gamma}, \delta)$ относительно порядка $\mathfrak{M}$. Тогда построим цепь в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$, соединяющую наборы $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ и $(\widetilde{\gamma}, \delta)$ и имеющую вид

$$(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\tau}_0 \leqslant_{\mathfrak{M}} \widetilde{\tau}_1 \leqslant_{\mathfrak{M}} \ldots \leqslant_{\mathfrak{M}} \widetilde{\tau}_r = (\widetilde{\gamma}, \delta),$$

в которой для каждого j, $0 \leqslant j \leqslant r-1$, набор $\widetilde{\tau}_j$ непосредственно предшествует набору $\widetilde{\tau}_{j+1}$ в $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$.

На каждой паре соседних в $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$ наборов $\widetilde{\tau}_j$ и $\widetilde{\tau}_{j+1}$, $0 \leqslant j \leqslant r-1$, выполняются неравенства $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\tau}_j) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\Phi}(\widetilde{\tau}_{j+1})$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\tau}_j) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\Psi}(\widetilde{\tau}_{j+1})$, вытекающие из способа построения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$. Следовательно, для наборов $(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\tau}_0$ и $(\widetilde{\gamma}, \delta) = \widetilde{\tau}_r$ также справедливы неравенства $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}, \delta)$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}, \delta)$.

Таким образом, система (2.3) является системой неявных уравнений над классом функций A. Покажем, что она реализует функцию f.

Для этого достаточно доказать, что в точках графика функции f выполняется равенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y)$, а в остальных точках куба E_k^{n+1} — неравенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y) \neq \widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y)$. Но этот факт непосредственно вытекает из леммы 2.1.1. Лемма 2.1.2 доказана.

Лемма 2.1.2 завершает обоснование неявной полноты системы функций A в P_k.

2.1.3. Верхняя оценка ранговой функции. Перейдем к доказательству верхней оценки. Оно опирается на следующее утверждение.

Лемма 2.1.3. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция n переменных в P_k. Пусть вектор-функции $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y)$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y)$ заданы по функции $f(\widetilde{x})$ описанным выше способом. Тогда для любого набора $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ куба E_k^{n+1} выполняются соотношения:*

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant \left\lceil \dfrac{|(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}}}{2} \right\rceil, \\ |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant \left\lceil \dfrac{|(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}} + 1}{2} \right\rceil. \end{cases}$$

Доказательство. При доказательстве будем использовать индукцию по номеру слоя в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M} \rangle$.

Для наборов $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ нулевого слоя в $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M} \rangle$ ($|(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}'} = 0$) из определения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ вытекают соотношения $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\sigma}^0$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\sigma}^1$, где наборы $\widetilde{\sigma}^0$, $\widetilde{\sigma}^1$ принадлежат цепи максимальной длины Σ^m в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^m; \mathfrak{M}' \rangle$. Соответственно $|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant 0$, $|\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant 1$.

Таким образом, для наборов нулевого слоя в $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M} \rangle$ утверждение леммы выполняется.

Предположим, что лемма 2.1.3 справедлива для всех наборов веса, не превосходящего l, в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M} \rangle$, $0 \leqslant l \leqslant (n+1)s - 1$. Докажем, что она справедлива и для наборов веса $l+1$ в $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M} \rangle$.

Пусть $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ — произвольный набор, принадлежащий $(l+1)$-му слою множества $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M} \rangle$, $|(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}'} = l+1$.

Обозначим через $(\widetilde{\alpha}', \beta')$, $(\widetilde{\alpha}'', \beta'')$ наборы, непосредственно предшествующие набору $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ в $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M} \rangle$, на которых достигаются равенства $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}', \beta') = \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$, $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}'', \beta'') = \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)$.

По предположению индукции имеют место неравенства:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}', \beta')|_{\mathfrak{M}'} \leqslant \left\lceil \dfrac{|(\widetilde{\alpha}', \beta')|_{\mathfrak{M}}}{2} \right\rceil, \\ |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}'', \beta'')|_{\mathfrak{M}'} \leqslant \left\lceil \dfrac{|(\widetilde{\alpha}'', \beta'')|_{\mathfrak{M}} + 1}{2} \right\rceil. \end{cases}$$

При этом $|(\widetilde{\alpha}', \beta')|_{\mathfrak{M}} \leqslant |(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}} - 1$, $|(\widetilde{\alpha}'', \beta'')|_{\mathfrak{M}} \leqslant |(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}} - 1$. Отсюда, с учетом равенств $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}', \beta')$ и $\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}'', \beta'')$, получаем соотношения:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant \left\lceil \dfrac{|(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}} - 1}{2} \right\rceil, \\ |\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant \left\lceil \dfrac{|(\widetilde{\alpha}, \beta)|_{\mathfrak{M}}}{2} \right\rceil. \end{cases} \tag{2.4}$$

Пусть число $|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}$ четно. Тогда неравенства (2.4) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant |(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2, \\ |\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant |(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2. \end{cases} \tag{2.5}$$

Оценим сверху величины $|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$ и $|\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$.

Из определения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ вытекают неравенства:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant |\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} + 1, \\ |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant |\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} + 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Из соотношений (2.5) и (2.6) получаем оценки:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant |(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2 + 1, \\ |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant |(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2 + 1. \end{cases}$$

Покажем теперь, что величина $|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$ не может принимать значение $|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2+1$.

Равенство $|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} = |(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2+1$ возможно только том случае, если в соотношениях (2.5) величина $|\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$ принимает максимальное значение $|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2$.

При доказательстве леммы 2.1.1 попутно было доказано, что для любого набора $(\widetilde{\alpha},\beta)$ куба E_k^{n+1} справедливо неравенство $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)$, из которого вытекает неравенство $|\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant |\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$. Следовательно, при $|\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} = |(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2$ величина $|\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$ также принимает максимальное значение $|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2$ в соответствии с соотношениями (2.5).

В силу того, что все значения вектор-функций $\widetilde{\Phi}'$ и $\widetilde{\Psi}'$ принадлежат цепи Σ^m в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^m; \mathfrak{M}'\rangle$, равенство весов $|\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} = |\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$ влечет равенство значений вектор-функций $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta) = \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)$.

По определению вектор-функции $\widetilde{\Phi}$ при выполнении условия $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta) = \widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)$ справедливо равенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta) = \widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta)$. Следовательно, при $|\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} = |(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2$ величина $|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$ также равна $|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2$ и не может принимать значение $|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2+1$.

Таким образом, при четных значениях $|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}$ для вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ выполняются оценки:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant |(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2, \\ |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant |(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}/2 + 1. \end{cases}$$

Пусть число $|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}$ нечетно. В этом случае неравенства (2.4) принимают вид:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant (|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}} - 1)/2, \\ |\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant (|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}} + 1)/2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Из данных соотношений, с учетом неравенств (2.6), получаем следующие оценки для значений $|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$ и $|\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant (|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}+1)/2, \\ |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant (|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}+1)/2+1. \end{cases}$$

Отметим, что если величина $|\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$ принимает максимальное значение $(|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}+1)/2$, то из оценки для величины $|\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$ в соотношениях (2.7) вытекает неравенство $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta)\neq\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)$.

По определению вектор-функции $\widetilde{\Psi}$ при выполнении условия $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{\alpha},\beta)\neq$ $\neq\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)$ имеет место равенство $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\Psi}'(\widetilde{\alpha},\beta)$. Следовательно, величина $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}$ также равна $(|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}+1)/2$ и не достигает значения $(|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}+1)/2+1$.

Таким образом, при нечетных значениях $|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}$ для вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ справедливы оценки:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant (|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}+1)/2, \\ |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant (|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}+1)/2. \end{cases}$$

Объединяя четный и нечетный случаи, приходим к соотношениям:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant \left\lceil \frac{|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}}{2} \right\rceil, \\ |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant \left\lceil \frac{|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}+1}{2} \right\rceil. \end{cases}$$

Лемма 2.1.3 доказана.

Так как значения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ представляют собой наборы цепи Σ^m в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^m;\mathfrak{M}'\rangle$, а следовательно, сравнимы относительно порядка $\mathfrak{M}'$, то для значений вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ определен максимум в $\langle E_k^m;\mathfrak{M}'\rangle$. Пусть максимальное значение вектор-функции $\widetilde{\Psi}(\widetilde{x},y)$ относительно порядка $\mathfrak{M}'$ достигается на наборе $(\widetilde{\alpha}^*,\beta^*)$ куба E_k^{n+1}.

По лемме 2.1.1 всюду в E_k^{n+1} справедливо неравенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x},y)\leqslant_{\mathfrak{M}'}\widetilde{\Psi}(\widetilde{x},y)$. Следовательно, для любого набора $(\widetilde{\alpha},\beta)$ куба E_k^{n+1} выполняются неравенства $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant_{\mathfrak{M}'}\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)\leqslant_{\mathfrak{M}'}\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}^*,\beta^*)$.

По лемме 2.1.3 имеет место соотношение

$$|\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}^*,\beta^*)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant \left\lceil \frac{|(\widetilde{\alpha}^*,\beta^*)|_{\mathfrak{M}}+1}{2} \right\rceil.$$

Величина $|(\widetilde{\alpha}^*,\beta^*)|_{\mathfrak{M}}$ не превышает максимальной длины цепи в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^{n+1};\mathfrak{M}\rangle$, т. е. $|(\widetilde{\alpha}^*,\beta^*)|_{\mathfrak{M}}\leqslant(n+1)s$. Следовательно,

$$|\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}^*,\beta^*)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant \left\lceil \frac{(n+1)s+1}{2} \right\rceil. \tag{2.8}$$

Вектор $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}^*,\beta^*)$ имеет длину m. Принимая во внимание произвольность выбора m, можно считать, что m есть наименьшее число, достаточное для построения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$, т. е. выполняются соотношения

$$(m-1)s' < |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}^*,\beta^*)|_{\mathfrak{M}'} \leqslant ms'. \tag{2.9}$$

Из соотношений (2.8) и (2.9) вытекает неравенство

$$(m-1)s' < \left\lceil \frac{(n+1)s+1}{2} \right\rceil,$$

или

$$m \leqslant \left\lceil \frac{(n+1)s+1}{2s'} \right\rceil. \tag{2.10}$$

Таким образом, для любой функции от n переменных в P_k найдется неявное представление над классом A всех функций, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, содержащее не более, чем m уравнений, где m удовлетворяет неравенству (2.10).

Следовательно, при всех натуральных n для ранговой функции класса функций A справедливо неравенство

$$m_A(n) \leqslant \left\lceil \frac{(n+1)s(E_k, \mathfrak{M})+1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil. \tag{2.11}$$

Верхняя оценка доказана.

2.1.4. Нижняя оценка ранговой функции. Перейдем к обоснованию нижней оценки.

Зафиксируем некоторую цепь максимальной длины Ω^n в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^n; \mathfrak{M}\rangle$ следующего вида:

$$\widetilde{\alpha}^0 \leqslant_{\mathfrak{M}} \widetilde{\alpha}^1 \leqslant_{\mathfrak{M}} \ldots \leqslant_{\mathfrak{M}} \widetilde{\alpha}^{ns}.$$

Она состоит из $ns+1$ различных наборов, т. е. имеет длину ns.

Зафиксируем цепь максимальной длины Ω в частично упорядоченном множестве $\langle E_k; \mathfrak{M}\rangle$ вида:

$$\beta^0 \leqslant_{\mathfrak{M}} \beta^1 \leqslant_{\mathfrak{M}} \ldots \leqslant_{\mathfrak{M}} \beta^s.$$

Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ k-значной логики, заданную следующим образом. На цепи Ω^n для функции $f(\widetilde{x})$ положим: $f(\widetilde{\alpha}^0) = \beta^1$, $f(\widetilde{\alpha}^1) = \beta^2, \ldots, f(\widetilde{\alpha}^{s-1}) = \beta^s$, далее $f(\widetilde{\alpha}^{s+i}) = \beta^{s-1}$ при четных значениях i, $f(\widetilde{\alpha}^{s+i}) = \beta^s$ при нечетных значениях i, где $0 \leqslant i \leqslant (n-1)s$.

Так как цепь Ω^n имеет максимальную длину в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^n; \mathfrak{M}\rangle$, то номер слоя, содержащего набор α^l цепи Ω^n, совпадает с порядковым номером набора, т. е. $|\alpha^l|_{\mathfrak{M}} = l$, $0 \leqslant l \leqslant ns$.

Для любого набора $\widetilde{\alpha}$, принадлежащего l-му слою в $\langle E_k^n; \mathfrak{M}\rangle$, положим $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha}^l)$, где $\widetilde{\alpha}^l$ — набор цепи Ω^n, принадлежащий l-му слою в $\langle E_k^n; \mathfrak{M}\rangle$, $0 \leqslant l \leqslant ns$.

На основе цепей Ω^n и Ω построим цепь Ω^{n+1} в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$, состоящую из расширенных наборов:

$$\begin{gathered}(\widetilde{\alpha}^0, \beta^0) \leqslant_{\mathfrak{M}} (\widetilde{\alpha}^0, \beta^1) \leqslant_{\mathfrak{M}} (\widetilde{\alpha}^1, \beta^1) \leqslant_{\mathfrak{M}} (\widetilde{\alpha}^1, \beta^2) \leqslant_{\mathfrak{M}} \ldots \leqslant_{\mathfrak{M}} \\ \leqslant_{\mathfrak{M}} (\widetilde{\alpha}^{s-1}, \beta^{s-1}) \leqslant_{\mathfrak{M}} (\widetilde{\alpha}^{s-1}, \beta^s) \leqslant_{\mathfrak{M}} (\widetilde{\alpha}^s, \beta^s) \leqslant_{\mathfrak{M}} (\widetilde{\alpha}^{s+1}, \beta^s) \leqslant_{\mathfrak{M}} \\ \leqslant_{\mathfrak{M}} \ldots \leqslant_{\mathfrak{M}} (\widetilde{\alpha}^{ns}, \beta^s).\end{gathered}$$

Легко видеть, что цепь Ω^{n+1} содержит $(n+1)s+1$ набор, т. е. имеет длину $(n+1)s$. Следовательно, Ω^{n+1} является цепью максимальной длины в $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$.

Для удобства обозначим наборы цепи Ω^{n+1} следующим образом:

$$\widetilde{\gamma}^0 = (\widetilde{\alpha}^0, \beta^0), \widetilde{\gamma}^1 = (\widetilde{\alpha}^0, \beta^1), \ldots, \widetilde{\gamma}^{(n+1)s} = (\widetilde{\alpha}^{ns}, \beta^s).$$

Заметим, что каждый набор $\widetilde{\gamma}^i$ цепи Ω^{n+1} с нечетным номером i является точкой графика функции f, а каждый набор $\widetilde{\gamma}^i$ с четным номером i не является точкой графика функции f, $0 \leqslant i \leqslant (n+1)s$.

По условию теоремы на множестве E_k, помимо порядка $\mathfrak{M}$, задан частичный порядок $\mathfrak{M}'$, подчиненный порядку $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$) и удовлетворяющий условию $s' \geqslant 1$.

Рассмотрим произвольное неявное представление $S_A(f)$ функции $f(\widetilde{x})$ над классом A всех функций k-значной логики, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ в P_k. Пусть оно содержит m, $m \geqslant 1$, уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(\widetilde{x}, y) = \psi_1(\widetilde{x}, y), \\ \qquad \ldots \\ \varphi_m(\widetilde{x}, y) = \psi_m(\widetilde{x}, y). \end{cases}$$

Введем вектор-функции:

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y) = (\varphi_1(\widetilde{x}, y), \ldots, \varphi_m(\widetilde{x}, y)),$$
$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y) = (\psi_1(\widetilde{x}, y), \ldots, \psi_m(\widetilde{x}, y)).$$

Из определения неявного представления следует, что в точках $(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha})) \in E_k^{n+1}$ графика функции f выполняется равенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha})) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, f(\widetilde{\alpha}))$, в остальных точках $(\widetilde{\alpha}, \beta) \in E_k^{n+1}$, $\beta \neq f(\widetilde{\alpha})$, — неравенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) \neq \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta)$.

Таким образом, на наборах $\widetilde{\gamma}^i$ цепи Ω^{n+1} с четными номерами выполняется соотношение $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^i) \neq \widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^i)$, на наборах $\widetilde{\gamma}^i$ с нечетными номерами — соотношение $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^i) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^i)$, $0 \leqslant i \leqslant (n+1)s$.

Учитывая этот факт, а также монотонность вектор-функции $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, заключаем, что в любых двух точках графика функции f, принадлежащих цепи Ω^{n+1}, вектор-функция $\widetilde{\Phi}$ должна принимать различные значения. Аналогично для вектор-функции $\widetilde{\Psi}$. Другими словами, при всех нечетных значениях i из промежутка $0 \leqslant i \leqslant (n+1)s-2$ справедливы неравенства:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{i+2})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^i)|_{\mathfrak{M}'} + 1, \\ |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^{i+2})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^i)|_{\mathfrak{M}'} + 1. \end{cases}$$

Пусть число $(n+1)s$ нечетно. Тогда набор $\widetilde{\gamma}^{(n+1)s}$ является точкой графика функции f. В этом случае имеют место соотношения:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^1)|_{\mathfrak{M}'} + ((n+1)s-1)/2, \\ |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^1)|_{\mathfrak{M}'} + ((n+1)s-1)/2. \end{cases} \tag{2.12}$$

Пусть $(n+1)s$ четно. Тогда точкой графика функции f является набор $\widetilde{\gamma}^{(n+1)s-1}$. Для него выполняются аналогичные соотношения:

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s-1})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^1)|_{\mathfrak{M}'} + ((n+1)s-2)/2, \\ |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s-1})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^1)|_{\mathfrak{M}'} + ((n+1)s-2)/2. \end{cases} \tag{2.13}$$

Так как в четном случае набор $\widetilde{\gamma}^{(n+1)s}$ не является точкой графика функции f, то для него справедливо неравенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s}) \neq \widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s})$.

Принимая во внимание равенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s-1}) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s-1})$ и монотонность вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, заключаем, что выполняется по крайней мере одно из неравенств:

$$|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s-1})|_{\mathfrak{M}'} + 1$$

или

$$|\widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s-1})|_{\mathfrak{M}'} + 1.$$

Не нарушая общности, будем считать, что верно первое из неравенств:

$$|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s-1})|_{\mathfrak{M}'} + 1.$$

Подставляя в него нижнюю оценку для величины $|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s-1})|_{\mathfrak{M}'}$ из соотношений (2.13), получаем неравенство:

$$|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{1})|_{\mathfrak{M}'} + (n+1)s/2.$$

Учитывая соотношения $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{0}) \neq \widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^{0})$, $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{1}) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^{1})$ и монотонность вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, заключаем, что на наборе $\widetilde{\gamma}^{1}$ выполняются неравенства $|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{1})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant 1$ и $|\widetilde{\Psi}(\widetilde{\gamma}^{1})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant 1$.

Следовательно,

$$|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant (n+1)s/2 + 1. \tag{2.14}$$

Объединяя соотношения (2.12) и (2.14) для нечетного и четного случаев, приходим к неравенству:

$$|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s})|_{\mathfrak{M}'} \geqslant \left\lceil \frac{(n+1)s+1}{2} \right\rceil.$$

Вектор $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s})$ имеет длину m. Следовательно, для его веса в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^{n+1}; \mathfrak{M}' \rangle$ справедлива оценка $|\widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}^{(n+1)s})|_{\mathfrak{M}'} \leqslant ms'$.

Из нее вытекает соотношение для числа уравнений в системе $S(f)$:

$$m \geqslant \left\lceil \frac{(n+1)s+1}{2s'} \right\rceil. \tag{2.15}$$

Мы доказали, что для каждого натурального n в P_k найдется функция f от n переменных, число уравнений в любом неявном представлении которой над классом функций A удовлетворяет неравенству (2.15).

Таким образом, при всех натуральных n для ранговой функции системы функций A справедлива оценка:

$$m_A(n) \geqslant \left\lceil \frac{(n+1)s(E_k, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil. \tag{2.16}$$

Объединяя соотношения (2.11) и (2.16), получаем искомое равенство:

$$m_A(n) = \left\lceil \frac{(n+1)s(E_k, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil.$$

Теорема 2.1.3 доказана.

2.2. Следствия и обобщения основной теоремы.

2.2.1. Следствия. Приведем несколько полезных следствий из теоремы 2.1.3. Отметим, что для согласованной пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$, равенство значений максимальной длины цепи $s(E_k, \mathfrak{M}) = s(E_k, \mathfrak{M}')$ равносильно совпадению самих частичных порядков $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$.

Пусть частичные порядки $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ совпадают. Тогда из теоремы 2.1.3 с помощью несложных преобразований получаем следующее утверждение:

Теорема 2.2.1. *Пусть на множестве E_k, $k \geqslant 2$, задан частичный порядок $\mathfrak{M}$, удовлетворяющий условию $s(E_k, \mathfrak{M}) \geqslant 1$. Пусть A — класс всех функций в P_k, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$. Тогда система A неявно полна в P_k и при всех натуральных n для ранговой функции системы A выполняется равенство:*

$$m_A(n) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil.$$

В частности, если порядок $\mathfrak{M}$ представляет собой отношение линейного порядка в E_k, то теорема 2.2.1 превращается в теорему 2.1.2 о ранговой функции класса всех монотонных функций в P_k.

Будем называть число i, $i \in E_k$, *изолированной точкой* частичного порядка $\mathfrak{M}$, заданного на множестве E_k чисел $0, 1, \ldots, k-1$, если в частично упорядоченном множестве $\langle E_k; \mathfrak{M} \rangle$ элемент i несравним ни с одним другим элементом.

Пусть в E_k задана произвольная согласованная пара частичных порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$, причем порядок $\mathfrak{M}'$ содержит изолированные точки.

Рассмотрим систему функций B, состоящую из всех функций k-значной логики, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, кроме, возможно, нескольких констант, соответствующих изолированным точкам порядка $\mathfrak{M}'$, т. е. функций вида $f(\widetilde{x}) \equiv i$, где i — изолированная точка для частичного порядка $\mathfrak{M}'$. Легко видеть, что класс функций B замкнут по суперпозиции. Для ранговой функции класса B справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Пусть на множестве E_k, $k \geqslant 2$, заданы частичные порядки $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, такие что $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ и $s(E_k, \mathfrak{M}') \geqslant 1$. Пусть B — класс всех функций в P_k, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, за исключением, быть может, некоторых констант, соответствующих изолированным точкам частичного порядка $\mathfrak{M}'$. Тогда класс функций B неявно полон и при всех натуральных n ранговая функция класса B совпадает с ранговой функцией класса A всех функций, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$:*

$$m_B(n) = \left\lceil \frac{(n+1)s(E_k, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil.$$

Доказательство. Докажем неявную полноту и верхнюю оценку.

Для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в P_k построим неявное представление $S(f)$ над классом A всех функций, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$. Построение будем проводить так же, как в теореме 2.1.3. Пусть $S(f)$ содержит m, $m \geqslant 1$, уравнений и имеет вид

$$\widetilde{\Phi}(x_1, \ldots, x_n, y) = \widetilde{\Psi}(x_1, \ldots, x_n, y),$$

где

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y) = (\varphi_1(\widetilde{x}, y), \ldots, \varphi_m(\widetilde{x}, y)),$$
$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y) = (\psi_1(\widetilde{x}, y), \ldots, \psi_m(\widetilde{x}, y)).$$

По построению вектор-функции $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ принимают в качестве значений наборы некоторой цепи Σ^m в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^m; \mathfrak{M}' \rangle$, причем цепь Σ^m имеет максимальную длину в $\langle E_k^m; \mathfrak{M}' \rangle$, равную ms', где $s' = s(E_k, \mathfrak{M}')$. Покажем, что наборы цепи Σ^m не содержат в качестве компонент изолированные точки частичного порядка $\mathfrak{M}'$.

Пусть значение c, $c \in E_k$, является изолированной точкой частичного порядка $\mathfrak{M}'$. Допустим, что набор $\widetilde{\sigma}^i$ цепи Σ^m, $1 \leqslant i \leqslant ms'$, содержит значение c в j-й компоненте, $1 \leqslant j \leqslant m$. Тогда все наборы цепи Σ^m содержат значение c в j-й компоненте, так как элемент c несравним ни с одним другим элементом в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^m; \mathfrak{M}' \rangle$. Следовательно, длина цепи Σ^m не превосходит величины $(m-1)s'$. Принимая во внимание условие $s' \geqslant 1$, приходим к противоречию с тем фактом, что цепь Σ^m имеет максимальную длину ms' в $\langle E_k^m; \mathfrak{M}' \rangle$.

Таким образом, функции φ_j, ψ_j, $j = 1, \ldots, m$, стоящие в левых и правых частях уравнений системы $S(f)$, монотонны относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ и выпускают значения, отвечающие изолированным точкам частичного порядка $\mathfrak{M}'$. Следовательно, система $S(f)$ является неявным представлением функции f над классом функций B.

По теореме 2.1.3 число уравнений в системе $S(f)$ удовлетворяет неравенству:

$$m \leqslant \left\lceil \frac{(n+1)s(E_k, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil.$$

Отсюда в силу произвольности выбора функции f вытекают неявная полнота и верхняя оценка ранговой функции системы функций B. Нижняя оценка следует из теоремы 2.1.3 и леммы 1.2.5. Теорема 2.2.2 доказана.

В дальнейшем, говоря о классе A функций, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, мы будем подразумевать, что класс A может не содержать всех констант, соответствующих изолированным точкам порядка $\mathfrak{M}'$. При этом по теореме 2.2.2 к классу A применима теорема 2.1.3, а также все ее следствия.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть отношение линейного порядка в E_k, а $\mathfrak{M}'$ — произвольный частичный порядок, подчиненный линейному порядку, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда класс функций, монотонных относительно порядка $\mathfrak{M}'$, с точностью до наличия констант, отвечающих изолированным точкам порядка $\mathfrak{M}'$, представляет собой класс монотонных функций, возможно, выпускающих одно или несколько значений (общих для всех функций класса). Для данного класса функций справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2.3. *Пусть на множестве E_k, $k \geqslant 2$, задан частичный порядок $\mathfrak{M}'$, подчиненный отношению линейного порядка в E_k и удовлетворяющий условию $s(E_k, \mathfrak{M}') \geqslant 1$. Пусть A — класс всех функций в P_k, монотонных относительно порядка $\mathfrak{M}'$, за исключением, возможно, некоторых констант, отвечающих изолированным точкам порядка $\mathfrak{M}'$. Тогда система A неявно полна в P_k и при всех натуральных n для ранговой функции системы A выполняется равенство*

$$m_A(n) = \left\lceil \frac{(n+1)(k-1) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil.$$

Теорема 2.2.3 является следствием из теоремы 2.1.3, с учетом теоремы 2.2.2 и равенства $s(E_k)=k-1$.

2.2.2. Обобщения. При исследовании поведения ранговой функции в некоторых случаях бывает удобно для каждого числа n разбить множество расширенных наборов E_k^{n+1} на подмножества и для каждого из подмножеств оценить сверху наименьшее число уравнений, достаточное для запрещения всех наборов подмножества, не являющихся точками графика рассматриваемой функции. Сложив полученные оценки, при определенных условиях можно получить верхнюю оценку для ранговой функции.

Чтобы воспользоваться этим методом, введем определения, обобщающие понятие ранговой функции для подмножеств, и докажем несколько вспомогательных утверждений, опираясь на доказательство теоремы 2.1.3.

Рассмотрим при всех натуральных n некоторую систему множеств $\mathfrak{U}=\{U^n\}$, где $U^n\subseteq E_k^n$ для каждого n.

Пусть A — произвольная система функций в P_k. Зафиксируем некоторое число n и рассмотрим функцию от n переменных $f(x_1,\dots,x_n)$ из неявного расширения системы A.

Будем говорить, что система неявных уравнений *задает значения функции* $f(x_1,\dots,x_n)$ на множестве наборов U^{n+1}, если данная система уравнений запрещает все наборы множества U^{n+1}, не являющиеся точками графика функции f, и допускает все точки графика функции f в кубе E_k^{n+1}.

Назовем *рангом* функции f над системой A *относительно множества* U^{n+1} наименьшее число уравнений в неявном представлении f над A, достаточное для задания значений функции f на множестве U^{n+1}. Ранг будем обозначать через $m_A(f,U^{n+1})$.

Для каждого натурального n *ранговой функцией* $m_A(n,U^{n+1})$ системы A *относительно множества* U^{n+1} будем называть максимум рангов относительно множества U^{n+1} всех функций k-значной логики, принадлежащих неявному расширению системы A и существенно зависящих не более чем от n переменных.

Пусть на множестве E_k заданы частичные порядки $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, удовлетворяющие условию $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$. Будем говорить, что функция $f(x_1,\dots,x_n)$, $f\in P_k$, *монотонна на множестве* U^n, $U^n\in E_k^n$, *относительно пары порядков* $(\mathfrak{M},\mathfrak{M}')$, если для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из множества U^n, удовлетворяющих неравенству $\widetilde{\alpha}\leqslant_{\mathfrak{M}}\widetilde{\beta}$, выполняется неравенство $f(\widetilde{\alpha})\leqslant_{\mathfrak{M}'}f(\widetilde{\beta})$.

Рассмотрим для некоторого натурального n непустое семейство M^n функций n переменных из P_k. Будем говорить, что семейство функций M^n *обладает свойством* $\Delta[U^n;\mathfrak{M},\mathfrak{M}']$, если любая функция $f(x_1,\dots,x_n)$ из семейства M^n монотонна на множестве наборов U^n относительно пары порядков $(\mathfrak{M},\mathfrak{M}')$ и совпадает с некоторой функцией $\mu(x_1,\dots,x_n)$ в $E_k^n\setminus U^n$, где $\mu\in M^n$, при этом всякая функция от n переменных, монотонная на U^n и совпадающая с функцией $\mu(x_1,\dots,x_n)$ в $E_k^n\setminus U^n$, принадлежит M^n.

Если порядок $\mathfrak{M}$ является линейным в E_k, то будем обозначать свойство $\Delta[U^n;\mathfrak{M},\mathfrak{M}']$ через $\Delta[U^n;\mathfrak{M}']$. Если порядок $\mathfrak{M}'$ также является линейным в E_k, то будем использовать обозначение $\Delta[U^n]$.

Теорема 2.2.4. *Пусть для произвольного натурального числа n в кубе E_k^{n+1} задано подмножество U_k^{n+1}. Пусть на множестве E_k, $k\geqslant 2$, заданы частичные порядки $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ такие, что $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$ и $s(E_k,\mathfrak{M}')\geqslant 1$.*

Пусть A — замкнутый по суперпозиции неявно полный класс функций в P_k, содержащий некоторое семейство M^{n+1} функций от $n+1$ переменной, обладающее свойством $\Delta[U^{n+1}; \mathfrak{M}, \mathfrak{M}']$. Тогда справедливо неравенство

$$m_A(n, U^{n+1}) \leqslant \left\lceil \frac{s(U^{n+1}, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil.$$

Доказательство. Для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в P_k построим систему неявных уравнений над системой функций A, задающую значения функции f на множестве наборов U^{n+1}.

Зафиксируем некоторое большое натуральное число m. Будем строить искомую систему неявных уравнений в виде уравнения в вектор-функциях:

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y),$$

где

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y) = (\varphi_1(\widetilde{x}, y), \ldots, \varphi_m(\widetilde{x}, y)),$$
$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y) = (\psi_1(\widetilde{x}, y), \ldots, \psi_m(\widetilde{x}, y))$$

— вектор-функции, действующие из E_k^{n+1} в E_k^m.

По условию теоремы, класс A содержит семейство M^{n+1} функций $n+1$ переменной, монотонных на множестве U^{n+1} и совпадающих в $E_k^n \setminus U^n$ с некоторой функцией $\mu(\widetilde{x}, y)$ из множества M^{n+1}. Для всех наборов $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, не принадлежащих множеству U^{n+1}, $(\widetilde{\alpha}, \beta) \in E_k^{n+1} \setminus U^{n+1}$, положим $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = (\mu(\widetilde{\alpha}, \beta), \ldots, \mu(\widetilde{\alpha}, \beta))$.

Значения вектор-функций $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y)$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y)$ на множестве U^{n+1} будем задавать тем же методом, что и в теореме 2.1.3, со следующими отличиями.

В процессе построения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ индукция проводится по номеру слоя в частично упорядоченном множестве $\langle U^{n+1}; \mathfrak{M} \rangle$. Соответственно значения вектор-функций $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y)$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y)$, а также значения вспомогательных вектор-функций $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{x}, y)$ и $\widetilde{\Psi}'(\widetilde{x}, y)$ задаются не на всем множестве E_k^{n+1}, а на подмножестве U^{n+1}. Количество слоев в частично упорядоченном множестве $\langle U^{n+1}; \mathfrak{M} \rangle$ по определению равно максимальной длине цепи в частично упорядоченном множестве $\langle U^{n+1}; \mathfrak{M} \rangle$, т. е. величине $s(U^{n+1}, \mathfrak{M})$. Как и в теореме 2.1.3, все значения вектор-функций $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ на множестве наборов U^{n+1}, $U^{n+1} \subseteq E_k^{n+1}$, принадлежат некоторой фиксированной цепи Σ^m максимальной длины в частично упорядоченном множестве $\langle E_k^m; \mathfrak{M}' \rangle$:

$$\widetilde{\sigma}^0 \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\sigma}^1 \leqslant_{\mathfrak{M}'} \ldots \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\sigma}^{ms(E_k, \mathfrak{M}')}.$$

Лемма 2.2.1. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция n переменных в P_k. Пусть вектор-функции $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, y)$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{x}, y)$ заданы по функции $f(\widetilde{x})$ указанным выше способом. Тогда для любого набора $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ из множества U^{n+1} выполняется соотношение $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) \leqslant_{\mathfrak{M}'} \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta)$.*

При этом на наборах $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ из множества U^{n+1}, являющихся точками графика функции f, $\beta = f(\widetilde{\alpha})$, имеет место равенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta)$.

На остальных наборах $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ множества U^{n+1}, $\beta \neq f(\widetilde{\alpha})$, вектор-функции $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{\Psi}$ принимают в качестве значений соседние наборы цепи Σ^m, т. е. если $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^i$ для некоторого i, $0 \leqslant i \leqslant ms(E_k, \mathfrak{M}') - 1$, то $\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha}, \beta) = \widetilde{\sigma}^{i+1}$.

Лемма 2.2.1 доказывается аналогично лемме 2.1.1 с той лишь разницей, что индукция проводится по номеру слоя в частично упорядоченном множестве $\langle U^{n+1};\mathfrak{M}\rangle$ вместо $\langle E_k^{n+1};\mathfrak{M}\rangle$.

Лемма 2.2.2. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция n переменных в P_k. Вектор-функции*

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{x},y)=(\varphi_1(\widetilde{x},y),\ldots,\varphi_m(\widetilde{x},y)),$$
$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{x},y)=(\psi_1(\widetilde{x},y),\ldots,\psi_m(\widetilde{x},y)),$$

построенные по функции $f(\widetilde{x})$ описанным выше способом, задают систему неявных уравнений над классом функций A. Она имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_1(\widetilde{x},y)=\psi_1(\widetilde{x},y), \\ \qquad\qquad\ldots \\ \varphi_m(\widetilde{x},y)=\psi_m(\widetilde{x},y) \end{cases}$$

и задает значения функции f на множестве U^{n+1}.

Доказательство. Монотонность вектор-функций

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{x},y)=(\varphi_1(\widetilde{x},y),\ldots,\varphi_m(\widetilde{x},y)),$$
$$\widetilde{\Psi}(\widetilde{x},y)=(\psi_1(\widetilde{x},y),\ldots,\psi_m(\widetilde{x},y))$$

на множестве U^{n+1} относительно пары порядков $(\mathfrak{M},\mathfrak{M}')$ доказывается так же, как в лемме 2.1.2.

Таким образом, функции $\varphi_i(\widetilde{x},y)$, $\psi_i(\widetilde{x},y)$, $i=1,\ldots,m$, монотонны на множестве U^{n+1} и совпадают с функцией $\mu(\widetilde{x},y)$ всюду вне множества U^{n+1}. Следовательно, функции φ_i, ψ_i, $i=1,\ldots,m$, принадлежат системе функций M^{n+1}. Так как M^{n+1} является подмножеством системы функций A, то $\varphi_i,\psi_i\in A$ при всех i, $1\leqslant i\leqslant m$.

Таким образом, система уравнений $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x},y)=\widetilde{\Psi}(\widetilde{x},y)$ является системой неявных уравнений над классом функций A.

По лемме 2.2.1 в точках графика функции f, принадлежащих множеству U^{n+1}, выполняется равенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)$, в остальных точках множества U^{n+1} — неравенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)\neq\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)$.

Во всех точках $(\widetilde{\alpha},\beta)$, не принадлежащих U^{n+1}, имеет место тождественное равенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)=\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)=(\mu(\widetilde{\alpha},\beta),\ldots,\mu(\widetilde{\alpha},\beta)$. Следовательно, согласно определению, система уравнений $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x},y)=\widetilde{\Psi}(\widetilde{x},y)$ задает значения функции f на множестве U^{n+1}. Лемма 2.2.2 доказана.

Лемма 2.2.3. *Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция n переменных в P_k. Пусть вектор-функции $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x},y)$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{x},y)$ заданы по функции $f(\widetilde{x})$ описанным выше способом. Тогда для любого набора $(\widetilde{\alpha},\beta)$ из множества U^{n+1} выполняются соотношения:*

$$\begin{cases} |\widetilde{\Phi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}\leqslant\left\lceil\dfrac{|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}}{2}\right\rceil, \\ |\widetilde{\Psi}(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}'}\leqslant\left\lceil\dfrac{|(\widetilde{\alpha},\beta)|_{\mathfrak{M}}+1}{2}\right\rceil. \end{cases}$$

Лемма 2.2.3 доказывается так же, как и лемма 2.1.3, с тем отличием, что в качестве рассматриваемого частично упорядоченного множества берется не $\langle E_k^{n+1};\mathfrak{M}\rangle$, а $\langle U^{n+1};\mathfrak{M}\rangle$.

Все дальнейшие выкладки проводятся так же, как при получении верхней оценки в теореме 2.1.3, но относительно частично упорядоченного множества $\langle U^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$.

Учитывая, что длина максимальной цепи в $\langle U^{n+1}; \mathfrak{M}\rangle$ равна $s(U^{n+1}, \mathfrak{M})$, получаем оценку:

$$m_A(n, U^{n+1}) \leqslant \left\lceil \frac{s(U^{n+1}, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil.$$

Теорема 2.2.4 доказана.

Теорема 2.2.5. *Пусть для произвольного натурального n задано некоторое разбиение $\{U_i^{n+1}\}_{i=1}^{r(n)}$ куба E_k^{n+1}:*

$$E_k^{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{r(n)} U_i^{n+1}.$$

Пусть A — произвольная система функций в P_k. Тогда для ранговой функции системы A справедливо неравенство

$$m_A(n) \leqslant \sum_{i=1}^{r(n)} m_A(n, U_i^{n+1}).$$

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция n переменных из неявного расширения системы функций A, $f \in I(A)$.

Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant r(n)$, найдется система уравнений $S_A(f, U_i^{n+1})$ в некотором неявном представлении функции f над системой функций A, которая задает значения функции f на множестве U_i^{n+1} и содержит наименьшее количество уравнений, равное рангу $m_A(f, U_i^{n+1})$ функции f над A относительно множества U_i^{n+1}.

Рассмотрим систему неявных уравнений $S_A(f)$, полученную объединением всех систем уравнений $S_A(f, U_i^{n+1})$, $i = 1, \ldots, r(n)$. Легко видеть, что система $S_A(f)$ является неявным представлением функции f над системой функций A и содержит $\sum\limits_{i=1}^{r(n)} m_A(f, U_i^{n+1})$ уравнений. Следовательно, справедливо неравенство

$$m_A(f) \leqslant \sum_{i=1}^{r(n)} m_A(f, U_i^{n+1}).$$

С другой стороны, из определения ранговой функции вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{r(n)} m_A(f, U_i^{n+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{r(n)} m_A(n, U_i^{n+1}).$$

Таким образом, для любой функции f от n переменных из неявного расширения системы функций A выполняется неравенство

$$m_A(f) \leqslant \sum_{i=1}^{r(n)} m_A(n, U_i^{n+1}).$$

Следовательно, и для ранговой функции $m_A(n)$ системы A имеет место неравенство

$$m_A(n) \leqslant \sum_{i=1}^{r(n)} m_A(n, U_i^{n+1}).$$

Теорема 2.2.5 доказана.

Теорема 2.2.6. *Пусть для произвольного натурального числа* n *задано разбиение* $\{U_i^{n+1}\}_{i=1}^{r(n)}$ *куба* E_k^{n+1}. *Пусть на множестве* E_k *задан частичный порядок* $\mathfrak{M}$ *и частичные порядки* $\mathfrak{M}_i$, $i=1,\ldots,r(n)$, *такие, что* $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}$, $s(E_k,\mathfrak{M}_i)\geqslant 1$ *при любом* i, $1\leqslant i\leqslant r(n)$. *Пусть* A — *замкнутый по суперпозиции неявно полный класс функций в* P_k, *содержащий для каждого* i, $1\leqslant i\leqslant r(n)$, *некоторое семейство функций* M_i^{n+1}, *обладающее свойством* $\Delta[U_i^{n+1};\mathfrak{M},\mathfrak{M}_i]$. *Тогда выполняется неравенство*

$$m_A(n)\leqslant \sum_{i=1}^{r(n)}\left\lceil \frac{s(U_i^{n+1},\mathfrak{M})+1}{2s(E_k,\mathfrak{M}_i)}\right\rceil.$$

Доказательство теоремы 2.2.6 вытекает непосредственно из теорем 2.2.4 и 2.2.5.

§ 3. Минимальные неявно полные классы в P_3

3.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о поведении ранговой функции для неявно полных классов функций в P_k. По лемме 1.2.4 в данной задаче можно ограничиться исследованием только замкнутых по суперпозиции неявно полных классов.

В работе [14] О. М. Касим-Заде показал, что при любом $k\geqslant 2$ система всех замкнутых по суперпозиции минимальных неявно полных классов функций в P_k конечна. Под минимальными замкнутыми по суперпозиции неявно полными классами подразумеваются такие замкнутые по суперпозиции неявно полные классы функций, которые не содержат других замкнутых по суперпозиции неявно полных классов.

По лемме 1.2.5 максимальный порядок роста ранговой функции среди неявно полных систем достигается именно на множестве всех минимальных неявно полных классов.

Из работы [13] О. М. Касим-Заде следует, что в P_2 существует единственный минимальный замкнутый по суперпозиции неявно полный класс — это класс всех монотонных функций. Его ранговая функция имеет линейный порядок роста и задается выражением из теоремы 2.1.1. Таким образом, порядок роста ранговой функции среди неявно полных систем функций в P_2 не превышает линейного.

Для случая трехзначной логики система всех минимальных неявно полных замкнутых классов найдена Е. А. Ореховой в работе [32]. Е. А. Орехова доказала, что произвольная система функций в P_3 неявно полна тогда и только тогда, когда ее замыкание по суперпозиции целиком содержит хотя бы один из двадцати семи минимальных неявно полных замкнутых классов функций трехзначной логики, и описала указанные двадцать семь классов (см. [32]).

В настоящей работе найдены оценки ранговых функций всех двадцати семи минимальных неявно полных замкнутых классов в P_3. Эти оценки позволяют получить представление о максимальном порядке роста ранговой функции произвольных неявно полных классов в P_3. Из результатов настоящей работы, в частности, следует, что в трехзначной логике P_3 существуют неявно полные классы функций с экспоненциальным порядком роста ранговой функции.

Приведем необходимые определения.

Пусть (a, b, c) — некоторая подстановка чисел 0, 1, 2.

Будем говорить, что функция трехзначной логики *сохраняет двухэлементное подмножество* $\{a, b\}$, $a, b \in E_3$, если на любых наборах, состоящих из a, b, она принимает значения a и b.

Введем в кубе E_3^n следующее отношение эквивалентности. Наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из куба E_3^n будем называть *эквивалентными относительно разбиения* $\{a, b\}\{c\}$, если компоненты наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ с одинаковыми номерами либо одновременно равны c, либо обе принадлежат множеству $\{a, b\}$.

Класс эквивалентности относительно разбиения $\{a, b\}\{c\}$ будем называть *блоком эквивалентных наборов* или просто *блоком*.

Будем говорить, что функция трехзначной логики *сохраняет разбиение* $\{a, b\}\{c\}$, если на любых наборах, эквивалентных относительно этого разбиения, она принимает эквивалентные значения.

Функцию, сохраняющую разбиение $\{a, b\}\{c\}$, будем называть *образно самодвойственной* относительно этого разбиения, если ее образ при отображении $P_3 \to P_2 : \{a \to 0, b \to 0, c \to 1\}$ является самодвойственной функцией в P_2.

Введем обозначения для одноэлементных подмножеств множества E_3: $\mathscr{E}_0 = \{0\}$, $\mathscr{E}_1 = \{1\}$, $\mathscr{E}_2 = \{2\}$.

Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_3 *принадлежит классу* $T^3_{\mathscr{E}_c,1}$, если для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, равных a и b, функция f на всех наборах $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, таких что $\beta_i \neq \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, выпускает по крайней мере одно из значений a или b.

Более полную информацию о классах функций типа T в P_k можно найти в работе С. В. Яблонского [43].

Несложно проверить, что класс функций, сохраняющих подмножество $\{a, b\}$, класс функций, сохраняющих разбиение $\{a, b\}\{c\}$, класс функций, образно-самодвойственных относительно разбиения $\{a, b\}\{c\}$, а также класс функций $T^3_{\mathscr{E}_c,1}$ являются замкнутыми по суперпозиции классами в P_3 для любой подстановки (a, b, c).

В дальнейшем всюду в данной работе под *блоком* мы будем понимать класс эквивалентности относительно разбиения $\{0, 1\}\{2\}$. Все наборы одного блока содержат в некоторых $(n - s)$ фиксированных разрядах значение 2, а в остальных s разрядах — значения 0, 1, образующие все возможные поднаборы в количестве 2^s. Число s, $0 \leqslant s \leqslant n$, будем называть *размерностью блока*. Блок максимальной размерности n будем называть *главным блоком* куба E_3^n. Главный блок в E_3^n содержит все n-мерные наборы из нулей и единиц.

Для задания функций одной и двух переменных в P_3 будем использовать таблицы значений. Приведем примеры.

Таблица 1

а

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	0

б

$x_1 \setminus x_2$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

Табл. 1, а задает функцию $f(x)=x+1$, а табл. 1, б — функцию $\max(x_1, x_2)$.

Для удобства записи в табличном задании функций будем опускать значения аргументов. Например, функции $f(x)=x+1$ и $\max(x_1, x_2)$ можно задать следующей упрощенной таблицей.

Таблица 2

$x+1$	$\max(x_1, x_2)$
1	0 1 2
2	1 1 2
0	2 2 2

Приведем (табл. 3) список всех функций одной и двух переменных в P_3, для которых в данной работе используются условные обозначения.

Таблица 3

$d(x)$	$t(x)$	$p(x)$	$p_1(x)$	$q(x)$	$r(x)$	$r_1(x)$
0	0	0	1	0	2	2
0	1	0	1	2	2	2
1	1	2	2	2	0	1

$K_1(x_1, x_2)$	$D_1(x_1, x_2)$	$K_2(x_1, x_2)$	$D_2(x_1, x_2)$
0 0 0	0 1 1	0 0 0	0 2 2
0 1 1	1 1 1	0 0 0	2 2 2
0 1 1	1 1 1	0 0 2	2 2 2

$\min\limits_{01}(x_1, x_2)$	$\max(x_1, x_2)$	$K_3(x_1, x_2)$	$D_3(x_1, x_2)$
0 0 2	0 1 2	0 0 2	0 1 2
0 1 2	1 1 2	0 1 2	1 1 2
2 2 2	2 2 2	0 0 2	0 0 2

$I(x_1, x_2)$	$J(x_1, x_2)$	$H(x_1, x_2)$	$D_2'(x_1, x_2)$
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 2
0 0 2	0 0 2	0 0 2	0 0 2
0 0 2	0 2 2	2 2 2	2 2 2

Двадцать семь минимальных неявно полных замкнутых классов в P_3, описанных Е. А. Ореховой [32], с точностью до двойственности делятся на шесть типов классов. По лемме 1.2.6 ранговые функции двойственных классов совпадают. Таким образом, достаточно исследовать поведение ранговой функции для шести минимальных неявно полных замкнутых классов, по одному представителю каждого из шести типов.

Табл. 4 содержит описание попарно недвойственных друг другу минимальных неявно полных замкнутых классов W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6. Каждый из классов W_i, $i=1,\ldots,6$, получен замыканием по суперпозиции от соответствующей базисной системы функций, указанной в табл. 4.

Таблица 4

Класс	Порождающая система
W_1	$\{K_1(x,y), D_1(x,y), d(x), 1\}$
W_2	$\{K_2(x,y), D_2(x,y), 0, 2\}$
W_3	$\{\min\limits_{01}(x,y), \max(x,y), I(x,y), 1\}$
W_4	$\{K_3(x,y), D_3(x,y), r_1(x)\}$
W_5	$\{\min\limits_{01}(x,y), \max(x,y), d(x), 1\}$
W_6	$\{\min\limits_{01}(x,y), \max(x,y), r(x), 1\}$

Таблица 5 дает представление о некоторых свойствах классов W_i, $i = 1, \ldots, 6$, таких как наличие констант, сохранение двухэлементного подмножества, сохранение разбиения, удовлетворение условию $T^3_{E_c,1}$, выпускание значений 0, 1 или 2, монотонность, образная самодвойственность.

Таблица 5

Класс	Сод. конст.	Сохр. подмн.	Сохр. разб.	$T^3_{\mathscr{E}_c,1}$	Вып. знач.	Монот.	Обр. сам.
W_1	$0,1$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}\{2\}$	$T^3_{\mathscr{E}_0,1}, T^3_{\mathscr{E}_1,1}$	2	+	–
W_2	$0,2$	$\{0,2\}$	$\{0,2\}\{1\}$	$T^3_{\mathscr{E}_0,1}, T^3_{\mathscr{E}_2,1}$	1	+	–
W_3	$0,1$	$\{0,1\}$	–	$T^3_{\mathscr{E}_2,1}$	–	+	–
W_4	–	–	$\{0,1\}\{2\}$	–	–	–	+
W_5	$0,1$	$\{0,1\}$	$\{0,1\}\{2\}$	–	–	+	–
W_6	$0,1,2$	–	$\{0,1\}\{2\}$	$T^3_{\mathscr{E}_2,1}$	–	–	–

Для классов W_1, W_2, W_3, W_4 в данной работе получены линейные оценки роста ранговой функции, для классов W_5 и W_6 — экспоненциальные.

3.2. Классы с линейной ранговой функцией.

3.2.1. Классы W_1 и W_2. Рассмотрим класс функций W_1, полученный замыканием по суперпозиции от системы функций

$K_1(x,y)$			$D_1(x,y)$			$d(x)$	1
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

,

и класс функций W_2, полученный замыканием по суперпозиции от системы функций

$K_2(x,y)$			$D_2(x,y)$			0	2
0	0	0	0	2	2	0	2
0	0	0	2	2	2	0	2
0	0	2	2	2	2	0	2

.

Классы W_1 и W_1 являются минимальными неявно полными в P_3 [32], и их ранговые функции задаются следующей теоремой.

Теорема 3.2.1. *При всех натуральных значениях n для ранговых функций классов W_1 и W_2 выполняются равенства*

$$m_{W_1}(n) = m_{W_2}(n) = n + 2.$$

Доказательство. Сначала будем проводить доказательство для класса W_1.

Покажем, что все функции трехзначной логики, монотонные и выпускающие значение 2, принадлежат W_1.

Класс функций W_1 содержит функции

$t(x)$	0
0	0
1	0
1	0

.

Действительно, они могут быть получены из базисных функций следующим образом:

$$t(x) = K_1(x, 1),$$
$$0 = d(d(x)).$$

Легко видеть, что функции $K_1(x, y)$ и $D_1(x, y)$ выполняют роль конъюнкции и дизъюнкции для наборов из нулей и единиц. Введем для них дополнительные обозначения. Функцию $K_1(x, y)$ обозначим через $\&_1$, функцию $D_1(x, y)$ — через $\vee_1$.

Рассмотрим функцию:

$$u_\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma = 0, \\ t(x), & \text{если } \sigma = 1, \\ d(x), & \text{если } \sigma = 2. \end{cases}$$

Отметим, что функция $u_\sigma(x)$ обладает свойством: $u_\sigma(x) = 0$ при $x < \sigma$, $u_\sigma(x) = 1$ при $x \geqslant \sigma$, $x, \sigma \in E_3$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция n переменных в P_3, монотонная и выпускающая значение 2.

Если $f(\widetilde{x}) \equiv 0$, то $f(\widetilde{x}) \in W_1$.

Для функции $f(\widetilde{x})$, отличной от константы 0, справедливо представление

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\nolimits_1 \; u_{\sigma_1}(x_1) \,\&_1\, \cdots \,\&_1\, u_{\sigma_n}(x_n), \tag{3.1}$$

где дизъюнкция $\vee_1$ берется по всем наборам $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\widetilde{\sigma} \in E_3^n$, на которых $f(\widetilde{\sigma}) = 1$.

Докажем этот факт. Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\alpha} \in E_3^n$, на котором $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Покажем, что выражение в правой части равенства (3.1) при этом также равно 0.

Действительно, в противном случае найдется набор $\widetilde{\sigma}$ такой, что $f(\widetilde{\sigma}) = 1$ и $u_{\sigma_i}(\alpha_i) = 1$ при всех i, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда в силу описанного выше свойства функции $u_\sigma(x)$ вытекает неравенство $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\sigma}$, которое в совокупности с равенствами $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, $f(\widetilde{\sigma}) = 1$ приводит к противоречию с монотонностью функции f.

Пусть $f(\widetilde{\alpha})=1$. Тогда конъюнкция $u_{\alpha_1}(\alpha_1)\,\&_1\,\cdots\,\&_1\,u_{\alpha_n}(\alpha_n)$ в правой части соотношения (3.1) равна 1 и обращает всю правую часть в единицу.

Таким образом, все монотонные, выпускающие значение 2 функции в P_3 представимы суперпозицией над классом W_1 и, следовательно, принадлежат W_1. Класс W_1 не содержит других функций, так как все базисные функции монотонны и выпускают значение 2.

Обозначим через $\mathfrak{M}'$ отношение частичного порядка $0<1$ на множестве E_3, $s(E_3,\mathfrak{M}')=1$. Очевидно, класс W_1 является классом всех функций в P_3, монотонных относительно частичного порядка $\mathfrak{M}'$. Следовательно, по теореме 2.2.3,

$$m_{W_1}(n)=\left\lceil\frac{2(n+1)+1}{2}\right\rceil=n+2.$$

Докажем аналогичное утверждение для ранговой функции класса W_2.

Легко видеть, что функции

$D_2'(x,y)$			$p(x)$	$q(x)$
0	0	2	0	0
0	0	2	0	2
2	2	2	2	2

принадлежат классу W_2, так как могут быть получены суперпозицией его порождающих функций:

$$p(x)=K_2(x,2),$$

$$q(x)=D_2(x,0)),$$

$$D_2'(x,y)=D_2(p(x),p(y)).$$

Отметим, что функции $K_2(x,y)$ и $D_2'(x,y)$ выполняют роль конъюнкции и дизъюнкции на наборах из нулей и двоек. Будем обозначать функцию $K_2(x,y)$ через $\&_2$, а функцию $D_2'(x,y)$ — через $\vee_2$.

Введем функцию:

$$u'_\sigma(x)=\begin{cases}2, & \text{если } \sigma=0,\\ q(x), & \text{если } \sigma=1,\\ p(x), & \text{если } \sigma=2.\end{cases}$$

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция n переменных в P_3, монотонная и выпускающая значение 1.

Если $f(\widetilde{x})\equiv 0$, то $f(\widetilde{x})\in W_2$.

Если $f(\widetilde{x})$ отлична от константы 0, то справедливо представление

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee\nolimits_2\ u'_{\sigma_1}(x_1)\ \&_2\cdots\&_2\ u'_{\sigma_n}(x_n),$$

где дизъюнкция $\vee_2$ берется по всем наборам $\widetilde{\sigma}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, $\widetilde{\sigma}\in E_3^n$, на которых $f(\widetilde{\sigma})=2$.

Таким образом, класс W_2 является классом всех функций в P_3, монотонных относительно частичного порядка $0<2$ в E_3.

Следовательно, по теореме 2.2.3 справедливо равенство

$$m_{W_2}(n) = n + 2.$$

Теорема 3.2.1 доказана.

3.2.2. К л а с с W_3. Рассмотрим класс функций W_3, полученный замыканием по суперпозиции от системы функций

$\min\limits_{01}(x, y)$	$\max(x, y)$	$I(x, y)$	1
0 0 2	0 1 2	0 0 0	1
0 1 2	1 1 2	0 0 2	1
2 2 2	2 2 2	0 0 2	1

.

Т е о р е м а 3.2.2. *При всех натуральных n для ранговой функции класса W_3 выполняются неравенства*

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leqslant m_{W_3}(n) \leqslant \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil + 2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем верхнюю оценку.

Введем на множестве E_3 частичный порядок $\mathfrak{M}_1$: $0 \leqslant_{\mathfrak{M}_1} 1$ и частичный порядок $\mathfrak{M}_2$: $0 \leqslant_{\mathfrak{M}_2} 2$. Очевидно, $s(E_3, \mathfrak{M}_1) = s(E_3, \mathfrak{M}_2) = 1$.

Зафиксируем произвольное натуральное число n. Обозначим через M_1^n множество всех функций n переменных в P_3, которые одновременно являются монотонными, принимают значения 0, 1 на множестве E_2^n наборов из нулей и единиц и принимают значение 2 на множестве $E_3^n \setminus E_2^n$. Легко проверить, что система функций M_1^n обладает свойством $\Delta[E_2^n; \mathfrak{M}_1]$.

Покажем, что класс функций W_3 содержит систему функций M_1^n. Для доказательства этого факта воспользуемся следующей леммой.

Л е м м а 3.2.1. *Пусть W — замкнутый по суперпозиции неявно полный класс функций в P_3, содержащий функции* $\min\limits_{01}(x, y)$, $\max(x, y)$ *и константы* 0, 1.

Тогда классу W принадлежат все функции трехзначной логики, которые одновременно сохраняют подмножество $\{0, 1\}$, *являются монотонными и принимают значение* 2 *на наборах, содержащих двойку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Отметим, что функция

$p_1(x)$
1
1
2

также принадлежит классу W, так как $p_1(x) = \max(x, 1)$.

Введем для функций $\min\limits_{01}(x, y)$ и $\max(x, y)$ дополнительные обозначения: $\min\limits_{01}(x, y)$ обозначим через $\&_{01}$, а $\max(x, y)$ — через $\vee_{01}$.

Введем также вспомогательную функцию

$$v_\sigma(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{при } \sigma = 0, \\ x & \text{при } \sigma = 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $v_\sigma(x)$ обладает свойством: $v_\sigma(x) = 0$ при $x < \sigma$, $v_\sigma(x) = 1$ при $x \geqslant \sigma$, $x, \sigma \in \{0, 1\}$.

Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \in P_3$, монотонную, сохраняющую подмножество $\{0, 1\}$ и принимающую значение 2 на наборах, содержащих двойку.

Докажем, что для функции $f(\widetilde{x})$ справедливо представление:

$$f(\widetilde{x}) = \bigvee\nolimits_{01} v_{\sigma_1}(x_1) \ \&_{01} \ \cdots \ \&_{01} \ v_{\sigma_n}(x_n) \ \&_{01} \ f(\widetilde{\sigma}), \tag{3.2}$$

где дизъюнкция $\vee_{01}$ берется по всем наборам $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ в булевом кубе E_2^n.

Рассмотрим произвольный набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, состоящий из нулей и единиц, $\widetilde{\alpha} \in E_2^n$. В E_2^n функция f принимает значения 0 и 1, так как, по условию, сохраняет подмножество $\{0, 1\}$. Выражение в правой части равенства (3.2) также принимает значения 0 и 1 в кубе E_2^n, так как является суперпозицией функций, сохраняющих подмножество $\{0, 1\}$.

Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Тогда для любого набора $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ в E_2^n, такого, что $f(\widetilde{\sigma}) = 1$, в силу монотонности функции f, выполняется неравенство $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\sigma}$. При этом найдется номер i, $1 \leqslant i \leqslant n$, такой, что $\alpha_i < \sigma_i$ и, соответственно, $v_{\sigma_i}(\alpha_i) = 0$.

Таким образом, при $f(\widetilde{\alpha}) = 0$ каждое слагаемое в правой части равенства (3.2) содержит элемент, обнуляющий данное слагаемое, и, следовательно, выражение в правой части принимает значение 0.

Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Тогда конъюнкция $v_{\alpha_1}(\alpha_1) \ \&_{01} \ \cdots \ \&_{01} \ v_{\alpha_n}(\alpha_n) \ \&_{01} \ f(\widetilde{\alpha})$ равна 1, и, следовательно, выражение в правой части (3.2) принимает значение 1.

Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha}$, содержащий двойку, $\widetilde{\alpha} \in E_3^n \setminus E_2^n$. В этом случае $f(\widetilde{\alpha}) = 2$ по условию. Несложно проверить, что выражение в правой части равенства (3.2) при этом также равно 2, так как функции $v_\sigma(x)$, $\min\limits_{01}(x, y)$ и $\max(x, y)$ принимают значение 2 на наборах, содержащих двойку.

Таким образом, функция f представима в виде суперпозиции функций системы W и, следовательно, принадлежит системе W.

Лемма 3.2.1 доказана.

Класс функций W_3 содержит функции $\min\limits_{01}(x, y)$, $\max(x, y)$, 0, 1. Следовательно, по лемме 3.2.1 при любом $n \geqslant 1$ класс W_3 содержит систему функций M_1^n.

Обозначим через M_2^n множество всех функций от n переменных в P_3, которые одновременно являются монотонными, принимают значения 0, 2 на множестве наборов $E_3^n \setminus E_2^n$ и значение 0 в кубе E_2^n. Легко видеть, что множество функций M_2^n обладает свойством $\Delta[E_3^n \setminus E_2^n; \mathfrak{M}_2]$.

Докажем, что класс W_3 содержит множество функций M_2^n. При доказательстве будем использовать индукцию по числу n.

База индукции. Покажем, что класс W_3 содержит все функции одной и двух переменных, монотонные, принимающие значения 0 и 2 на наборах, содержащих двойку, и значение 0 на наборах из нулей и единиц. Перечислим все функции одной переменной, удовлетворяющие данным условиям:

0	$p(x)$
0	0
0	0
0	2

,

а также все функции, существенно зависящие от двух переменных, удовлетворяющие данным условиям:

$K_2(x,y)$	$I(x,y)$	$J(x,y)$	$H(x,y)$	$D'_2(x,y)$
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 2
0 0 0	0 0 2	0 0 2	0 0 2	0 0 2
0 0 2	0 0 2	0 2 2	2 2 2	2 2 2

Функция $I(x,y)$ является базисной для класса функций W_3. Остальные функции, приведенные в таблицах выше, представимы в виде суперпозиции функций из W_3 следующим образом:

$$\begin{aligned}
&0 = I(x,1),\\
&p(x) = I(1,x),\\
&D'_2(x,y) = \min_{01}(p(x),p(y)),\\
&K_2(x,y) = I(p(x),p(y)),\\
&J(x,y) = D'_2(I(x,y),I(y,x)),\\
&H(x,y) = D'_2(I(x,y),p(x)).
\end{aligned}$$

Чтобы упростить запись, будем использовать для функций $K_2(x,y)$ и $D'_2(x,y)$, выполняющих роль конъюнкции и дизъюнкции на наборах из нулей и двоек, дополнительные обозначения $\&_2$ и $\vee_2$ соответственно.

Предположение индукции. Предположим, что утверждение верно для всех функций, существенно зависящих не более чем от n переменных, $n \geqslant 2$. Докажем, что оно верно для функций $n+1$ переменной. Для этого достаточно показать, что W_3 содержит все функции $n+1$ переменной в P_3, которые одновременно являются монотонными, принимают значения $0, 2$ на множестве наборов $E_3^{n+1} \backslash E_2^{n+1}$ и значение 0 в кубе E_2^{n+1}.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_{n+1})$ — отличная от нуля функция в P_3, монотонная, принимающая значение 0 на наборах из нулей и единиц и принимающая значения 0 и 2 на наборах, содержащих двойку. Пусть $\{\widetilde{\alpha}^1,\ldots,\widetilde{\alpha}^r\}$ — совокупность всех наборов из множества $E_3^{n+1} \setminus E_2^{n+1}$, на которых функция $f(\widetilde{x})$ принимает значение 2, $1 \leqslant r \leqslant 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Для каждого набора $\widetilde{\alpha}^i = (\alpha_1^i,\ldots,\alpha_{n+1}^i)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, введем функцию $f^i(x_1,\ldots,x_{n+1})$, принимающую значение 2 на всех наборах, больше либо равных $\widetilde{\alpha}^i$, и значение 0 на остальных наборах куба E_3^{n+1}:

$$f^i(\widetilde{x}) = \begin{cases} 2, & \text{если } \widetilde{x} \geqslant \widetilde{\alpha}^i,\\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отметим, что все функции f^i принадлежат системе функций M_2^{n+1}, так как все наборы $\widetilde{\alpha}^i$ содержат хотя бы одну двойку, $i = 1,\ldots,r$. Покажем, что функции f^i, $i = 1,\ldots,r$, принадлежат классу W_3.

Зафиксируем произвольный номер i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Пусть двойка содержится в j-й компоненте набора $\widetilde{\alpha}^i$, т. е. $\alpha_j^i = 2$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant n+1$.

Если $j \neq n+1$, то функцию $f^i(x_1,\ldots,x_{n+1})$ можно представить в следующем виде:

$$f^i(x_1,\ldots,x_{n+1}) = g_1^i(x_1,\ldots,x_n) \ \&_2 \ g_2^i(x_j,x_{n+1}),$$

где функция $g_1^i(x_1,\ldots,x_n)$ зависит от n переменных и принимает значение 2 на всех наборах, больше либо равных $(\alpha_1^i,\ldots,\alpha_n^i)$, и значение 0 на остальных наборах куба E_3^n, а функция $g_2^i(x_j,x_{n+1})$ зависит от двух переменных и принимает значение 2 на всех наборах, больше либо равных $(\alpha_j^i, \alpha_{n+1}^i)$, и значение 0 на остальных наборах куба E_3^2.

Если $j = n+1$, то функцию $f^i(x_1, \ldots, x_{n+1})$ можно представить в виде:

$$f^i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = g_1^i(x_2, \ldots, x_{n+1}) \;\&_2\; g_2^i(x_1, x_{n+1}),$$

где функции g_1^i и g_2^i заданы аналогично: функция $g_1^i(x_2, \ldots, x_{n+1})$ принимает значение 2 на всех наборах, больше либо равных $(\alpha_2^i, \ldots, \alpha_{n+1}^i)$, и значение 0 на остальных наборах куба E_3^n, а функция $g_2^i(x_1, x_{n+1})$ принимает значение 2 на всех наборах, больше либо равных $(\alpha_1^i, \alpha_{n+1}^i)$, и значение 0 на остальных наборах куба E_3^2.

Легко видеть, что функция g_1^i принадлежит системе функций M_2^n и функция g_2^i принадлежит системе функций M_2^2. По предположению индукции функции g_1^i и g_2^i принадлежат классу функций W_3.

Таким образом, все функции f^i, $i = 1, \ldots, r$, принадлежат классу W_3 как суперпозиции функций из W_3.

Покажем, что функция $f(x_1, \ldots, x_{n+1})$ представима следующим образом:

$$f(\widetilde{x}) = f^1(\widetilde{x}) \vee_2 \ldots \vee_2 f^r(\widetilde{x}). \tag{3.3}$$

Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, $\widetilde{\alpha} \in E_3^{n+1}$. Тогда правая часть соотношения (3.3) также равна 0.

Действительно, в противном случае найдется номер i, $1 \leqslant i \leqslant r$, для которого $f^i(\widetilde{\alpha}) = 2$. Отсюда вытекает неравенство $\widetilde{\alpha} \geqslant \widetilde{\alpha}^i$, которое в совокупности с равенствами $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, $f(\widetilde{\alpha}^i) = 2$ приводит к противоречию с монотонностью функции f.

Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 2$, $\widetilde{\alpha} \in E_3^{n+1}$. Тогда $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}^i$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant r$, следовательно, выражение в правой части соотношения (3.3) также принимает значение 2. Отсюда заключаем, что функция f принадлежит классу W_3 как суперпозиция функций из W_3.

Таким образом, для каждого натурального числа n класс функций W_3 содержит множество функций M_1^n, обладающее свойством $\Delta[E_2^n; \mathfrak{M}_1]$, и множество функций M_2^n, обладающее свойством $\Delta[E_3^n \setminus E_2^n; \mathfrak{M}_2]$. Следовательно, по теореме 2.2.6 при всех натуральных n для ранговой функции класса W_3 с учетом равенств $s(E_3, \mathfrak{M}_1) = s(E_3, \mathfrak{M}_2) = 1$ справедлива оценка:

$$m_{W_3}(n) \leqslant \left\lceil \frac{s(E_2^{n+1}) + 1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{s(E_3^{n+1} \setminus E_2^{n+1}) + 1}{2} \right\rceil.$$

Максимальная длина цепи в кубе E_2^{n+1} равна: $s(E_2^{n+1}) = n + 1$. Максимальная длина цепи на множестве наборов, содержащих двойку, равна $s(E_3^{n+1} \setminus E_2^{n+1}) = 2n$. Путем несложных вычислений заключаем, что при всех натуральных n для ранговой функции класса W_3 выполняется неравенство

$$m_{W_3}(n) \leqslant \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil + 2.$$

Докажем нижнюю оценку.

Отметим, что класс функций W_3 содержит только монотонные в P_3 функции, так как его базисные функции монотонны и класс M всех монотонных в P_3 функций замкнут по суперпозиции. Следовательно, имеет место соотношение $W_3 \subseteq M$, которое, в силу леммы 1.2.5, влечет неравенство $m_{W_3}(n) \geqslant m_M(n)$.

Отсюда с учетом теоремы 2.1.2 получаем неравенство, справедливое при всех натуральных n:

$$m_{W_3}(n) \geqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1.$$

Теорема 3.2.2 доказана.

3.2.3. Класс W_4. Рассмотрим класс функций W_4, порожденный следующей системой функций:

$K_3(x,y)$			$D_3(x,y)$			$r_1(x)$
0	0	2	0	1	2	2
0	1	2	1	1	2	2
0	0	2	0	0	2	1

.

Теорема 3.2.3. *При всех натуральных n для ранговой функции класса W_4 выполняется равенство:*

$$m_{W_4}(n) = n + 2.$$

Доказательство. Сначала докажем верхнюю оценку.

Функции $K_3(x_1, x_2)$ и $D_3(x_1, x_2)$ выполняют роль конъюнкции и дизъюнкции на наборах из нулей и единиц и принимают значение 2 при $x_2 = 2$. Введем для них дополнительные обозначения: $\&_3$ для функции $K_3(x_1, x_2)$ и $\vee_3$ для функции $D_3(x_1, x_2)$.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.2.2. *Для каждого натурального числа n класс W_4 содержит все функции n переменных в P_3, одновременно сохраняющие подмножество $\{0,1\}$, монотонные на наборах из нулей и единиц, равные* 2 *на наборах, содержащих двойку в n-й компоненте, и равные* 0 *на остальных наборах, содержащих двойку.*

Доказательство леммы 3.2.2. Отметим, что функции

$r(x)$	$p(x)$	$p_1(x)$
2	0	1
2	0	1
0	2	2

принадлежат классу W_4, так как могут быть получены суперпозицией его базисных функций:

$$\begin{aligned} &p_1(x) = r_1(r_1(x)), \\ &r(x) = p_1(x) \,\&_3\, r_1(x), \\ &p(x) = r(r(x)). \end{aligned}$$

Покажем, что для каждого натурального числа n класс W_4 содержит функции:

$$h_0(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{на наборах из нулей и единиц}, \\ 2 & \text{при } x_n = 2, \\ 0 & \text{на остальных наборах}, \end{cases}$$

$$h_1(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{на наборах из нулей и единиц}, \\ 2 & \text{при } x_n = 2, \\ 0 & \text{на остальных наборах}. \end{cases}$$

Действительно,

$$h_0(x_1, \ldots, x_n) = p(x_1) \ \&_3 \ \cdots \ \&_3 \ p(x_n),$$
$$h_1(x_1, \ldots, x_n) = p_1(x_1) \ \&_3 \ \cdots \ \&_3 \ p_1(x_n).$$

Обозначим через $w_\sigma(x)$ следующую вспомогательную функцию:

$$w_\sigma(x) = \begin{cases} p_1(x), & \text{если } \sigma = 0, \\ x, & \text{если } \sigma = 1. \end{cases}$$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, удовлетворяющая условиям леммы, т. е. f монотонна и принимает значения 0 и 1 в кубе E_2^n, равна 2, если $x_n = 2$, и равна 0, если $x_n \neq 2$, $x_i = 2$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Тогда $f(\widetilde{x})$ представима в виде суперпозиции функций из класса W_4 следующим образом:

$$f(\widetilde{x}) = \bigvee\nolimits_3 \ w_{\sigma_1}(x_1) \ \&_3 \ \cdots \ \&_3 \ w_{\sigma_n}(x_n) \ \&_3 \ h_{f(\tilde{\sigma})}(\widetilde{x}), \tag{3.4}$$

где дизъюнкция $\vee_3$ берется по всем наборам $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, состоящим из нулей и единиц, $\widetilde{\sigma} \in E_2^n$.

Докажем равенство (3.4). Рассмотрим произвольный набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_n)$ из булева куба E_2^n. Правая часть соотношения (3.4) на наборе $\widetilde{\alpha}$ принимает значение 0 или 1 как суперпозиция функций, сохраняющих подмножество $\{0, 1\}$.

Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Допустим, что найдется набор $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\sigma} \in E_2^n$, такой, что соответствующая ему конъюнкция

$$w_{\sigma_1}(\alpha_1) \ \&_3 \cdots \&_3 \ w_{\sigma_n}(\alpha_n) \ \&_3 \ h_{f(\tilde{\sigma})}(\widetilde{\alpha})$$

в правой части (3.4) принимает значение 1.

Несложно проверить, что из равенств $w_{\sigma_1}(\alpha_1) \ \&_3 \cdots \&_3 \ w_{\sigma_n}(\alpha_n) = 1$, $h_{f(\tilde{\sigma})}(\widetilde{\alpha}) = 1$ вытекают соотношения $\widetilde{\sigma} \leqslant \widetilde{\alpha}$, $f(\widetilde{\sigma}) = 1$, противоречащие монотонности функции $f(\widetilde{x})$. Отсюда заключаем, что на наборе $\widetilde{\alpha}$ правая часть соотношения (3.4) равна нулю.

Пусть $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Тогда правая часть соотношения (3.4) также равна единице, так как конъюнкция

$$w_{\alpha_1}(\alpha_1) \ \&_3 \cdots \&_3 \ w_{\alpha_n}(\alpha_n) \ \&_3 \ h_{f(\tilde{\alpha})}(\widetilde{\alpha})$$

принимает значение 1.

Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, принадлежащий множеству $E_3^n \setminus E_2^n$, т. е. содержащий двойку.

Для любого набора $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\sigma} \in E_2^n$, функция $h_{f(\tilde{\sigma})}(\widetilde{x})$ удовлетворяет условиям: $h_{f(\tilde{\sigma})}(\widetilde{\alpha}) = 2$ при $\alpha_n = 2$, и $h_{f(\tilde{\sigma})}(\widetilde{\alpha}) = 0$ при $\alpha_n \neq 2$.

Принимая во внимание, что $K_3(x_1, x_2) = 2$ при $x_2 = 2$, $K_3(x_1, x_2) = 0$ при $x_2 = 0$, заключаем, что в случае $\widetilde{\alpha} \in E_3^n \setminus E_2^n$ правая часть соотношения (3.4) равна 2 при $\alpha_n = 2$ и равна 0 при $\alpha_n \neq 2$, а следовательно, совпадает с $f(\widetilde{\alpha})$.

Таким образом, функция f принадлежит классу W_4, так как для нее справедливо представление (3.4) в виде суперпозиции функций из W_4.

Лемма 3.2.2 доказана.

Для произвольного натурального числа n рассмотрим разбиение куба E_3^n на блоки B_i^n, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$:

$$E_3^n = \bigsqcup_{i=1}^{2^n} B_i^n.$$

Обозначим через M_i^n, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, совокупность всех функций от n переменных из P_3, которые одновременно монотонны на блоке B_i^n, принимают на нем значения 0 и 1, а также удовлетворяют следующему условию. Если наборы блока B_i^n не содержат двойку в n-й компоненте, то функции из M_i^n равны 2 на всех наборах из множества $E_3^n \setminus B_i^n$, содержащих 2 в n-й компоненте, и равны 0 на остальных наборах из $E_3^n \setminus B_i^n$; если наборы блока B_i^n содержат двойку в n-й компоненте, то функции из M_i^n равны 2 на всех наборах из $E_3^n \setminus B_i^n$, не содержащих 2 в n-й компоненте, и равны 0 на остальных наборах из $E_3^n \setminus B_i^n$.

Легко видеть, что для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, множество функций M_i^n обладает свойством $\Delta[B_i^n, \mathfrak{M}']$ относительно частичного порядка $\mathfrak{M}'$ в E_3: $0 \leqslant_{\mathfrak{M}'} 1$.

Лемма 3.2.3. *Для всякого натурального числа n и для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, класс W_4 содержит систему функций M_i^n.*

Доказательство леммы 3.2.3. Для произвольного натурального n в кубе E_3^n зафиксируем блок B_i^n, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$. Если B_i^n является главным блоком в кубе E_3^n, т. е. наборы блока не содержат двоек ($B_i^n = E_2^n$), то утверждение леммы 3.2.3 вытекает непосредственно из леммы 3.2.2.

Пусть наборы блока B_i^n содержат двойки, т. е. B_i^n имеет размерность l, $0 \leqslant l \leqslant n-1$. Тогда наборы блока B_i^n имеют вид $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_{j_s} = 2$, $1 \leqslant s \leqslant n-l$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из соответствующей блоку B_i^n системы функций M_i^n. Рассмотрим функцию:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, \underset{j_1}{2}, \ldots, \underset{j_{n-l}}{2}, \ldots, x_n) & \text{на наборах из } E_2^n, \\ 2 & \text{при } x_n = 2, \\ 0 & \text{на других наборах.} \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $g(\widetilde{x})$ сохраняет подмножество $\{0, 1\}$, является монотонной в булевом кубе E_2^n, принимает значение 2 на наборах, содержащих двойку в n-й компоненте, и принимает значение 0 на остальных наборах, содержащих двойку. Следовательно, по лемме 3.2.2 функция $g(\widetilde{x})$ принадлежит классу W_4.

Покажем, что функцию $f(\widetilde{x})$ можно представить в виде суперпозиции функций из класса W_4 следующим образом:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, r(x_{j_1}), \ldots, r(x_{j_{n-l}}), \ldots, x_n). \tag{3.5}$$

Действительно, возьмем произвольный набор $\widetilde{\alpha}$, принадлежащий блоку B_i^n. Из определения функции $g(\widetilde{x})$ вытекают соотношения:

$$g(\alpha_1, \ldots, \underset{j_1}{0}, \ldots, \underset{j_{n-l}}{0}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \underset{j_1}{2}, \ldots, \underset{j_{n-l}}{2}, \ldots, \alpha_n) = f(\widetilde{\alpha}),$$

следовательно, уравнение (3.5) обращается в равенство на наборе $\widetilde{\alpha}$.

Пусть $\widetilde{\alpha} \in E_3^n \setminus B_i^n$. Тогда выражение в правой части соотношения (3.5) принимает значение из множества $\{0, 2\}$, так как аргумент функции g содержит двойку.

Если наборы блока B_i^n не содержат двойку в n-й компоненте, то по определению функции $g(\widetilde{x})$ выражение в правой части соотношения (3.5) равно 2 при $\alpha_n = 2$ и равно 0 при $\alpha_n \neq 2$.

Если наборы блока B_i^n содержат двойку в n-й компоненте, то выражение в правой части (3.5) равно 2 при $\alpha_n \neq 2$, так как $r(\alpha_n) = 2$, и равно 0 при $\alpha_n = 2$, так как $r(2) = 0$.

Таким образом, представление (3.5) справедливо всюду в E_3^n.

Лемма 3.2.3 доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы, рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ в P_3. Построим неявное представление функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ над классом функций W_4.

По лемме 3.2.3 для каждого блока B_i^{n+1} в кубе E_3^{n+1}, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$, класс W_4 содержит множество функций M_i^{n+1}, обладающее свойством $\Delta[B_i^{n+1}, \mathfrak{M}']$ относительно частичного порядка $0 \leqslant_{\mathfrak{M}'} 1$ в E_3.

Обозначим размерность блока B_i^{n+1} через l_i, $0 \leqslant l_i \leqslant n+1$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$. Длина $s(B_i^{n+1})$ максимальной цепи в блоке B_i^{n+1} совпадает с его размерностью l_i.

Из теоремы 2.2.4 вытекает, что для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$, можно построить систему неявных уравнений $S(f, B_i^{n+1})$ над классом W_4, состоящую из функций системы M_i^{n+1}, задающую значения функции $f(\widetilde{x})$ на блоке B_i^{n+1} и содержащую не более чем $m_{W_4}(n, B_i^{n+1})$ уравнений, где величина $m_{W_4}(n, B_i^{n+1})$ удовлетворяет соотношению:

$$m_{W_4}(n, B_i^{n+1}) \leqslant \left\lceil \frac{l_i+1}{2} \right\rceil.$$

Без ограничения общности можно считать, что все блоки B_i^{n+1}, наборы которых не содержат двойку в $(n+1)$-й компоненте, имеют номера с 1 по 2^n, и, соответственно, блоки, наборы которых содержат двойку в $(n+1)$-й компоненте, имеют номера с 2^n+1 по 2^{n+1}.

Обозначим через U_1^{n+1} множество наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ куба E_3^{n+1}, в которых $\alpha_{n+1} \neq 2$, через U_2^{n+1} множество наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ куба E_3^{n+1}, в которых $\alpha_{n+1} = 2$.

Легко видеть, что выполняются соотношения:

$$E_3^{n+1} = U_1^{n+1} \bigsqcup U_2^{n+1}, \quad U_1^{n+1} = \bigsqcup_{i=1}^{2^n} B_i^{n+1}, \quad U_2^{n+1} = \bigsqcup_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} B_i^{n+1}.$$

Далее для удобства записи введем обозначения:

$$\begin{aligned} m_1 &= \max_{i=1}^{2^n} \left\lceil \frac{l_i+1}{2} \right\rceil, \\ m_2 &= \max_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \left\lceil \frac{l_i+1}{2} \right\rceil. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Таким образом, при любом i из промежутка $1 \leqslant i \leqslant 2^n$ система неявных уравнений $S(f, B_i^{n+1})$ содержит не более чем m_1 уравнений и при любом i из промежутка $2^n+1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$ — не более чем m_2 уравнений.

Пусть для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, система уравнений $S(f, B_i^{n+1})$ имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_{i1}(\widetilde{x}, y) = \psi_{i1}(\widetilde{x}, y), \\ \qquad \ldots \\ \varphi_{im_1}(\widetilde{x}, y) = \psi_{im_1}(\widetilde{x}, y), \end{cases}$$

где функции φ_{ij}, ψ_{ij}, $j = 1, \ldots, m_1$, принадлежат множеству функций M_i^{n+1}. Уравнения в системе $S(f, B_i^{n+1})$ могут повторяться.

Аналогично для каждого i, $2^n + 1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$, система уравнений $S(f, B_i^{n+1})$ имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_{i1}(\widetilde{x}, y) = \psi_{i1}(\widetilde{x}, y), \\ \qquad \dots \\ \varphi_{im_2}(\widetilde{x}, y) = \psi_{im_2}(\widetilde{x}, y), \end{cases}$$

где функции φ_{ij}, ψ_{ij}, $j = 1, \dots, m_2$, принадлежат M_i^{n+1}.

При любом i, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$, систему уравнений $S(f, B_i^{n+1})$ можно записать в виде одного уравнения в вектор-функциях:

$$\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{x}, y) = \widetilde{\psi}_i(\widetilde{x}, y), \tag{3.7}$$

где для значений i из промежутка $1 \leqslant i \leqslant 2^n$ вектор-функции $\widetilde{\varphi}_i$ и $\widetilde{\psi}_i$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_i(\widetilde{x}, y) &= (\varphi_{i1}(\widetilde{x}, y), \dots, \varphi_{im_1}(\widetilde{x}, y)), \\ \widetilde{\psi}_i(\widetilde{x}, y) &= (\psi_{i1}(\widetilde{x}, y), \dots, \psi_{im_1}(\widetilde{x}, y)), \end{aligned}$$

а для значений i из промежутка $2^n + 1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$ соответственно

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_i(\widetilde{x}, y) &= (\varphi_{i1}(\widetilde{x}, y), \dots, \varphi_{im_2}(\widetilde{x}, y)), \\ \widetilde{\psi}_i(\widetilde{x}, y) &= (\psi_{i1}(\widetilde{x}, y), \dots, \psi_{im_2}(\widetilde{x}, y)). \end{aligned}$$

Далее для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant m_1$, построим функции

$$\begin{aligned} \Phi_{1j}(\widetilde{x}, y) &= \varphi_{1j}(\widetilde{x}, y) \ \vee_3 \ \cdots \ \vee_3 \ \varphi_{2^n j}(\widetilde{x}, y), \\ \Psi_{1j}(\widetilde{x}, y) &= \psi_{1j}(\widetilde{x}, y) \ \vee_3 \ \cdots \ \vee_3 \ \psi_{2^n j}(\widetilde{x}, y). \end{aligned}$$

Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant m_2$, построим функции

$$\begin{aligned} \Phi_{2j}(\widetilde{x}, y) &= \varphi_{(2^n+1)j}(\widetilde{x}, y) \ \vee_3 \ \cdots \ \vee_3 \ \varphi_{2^{n+1} j}(\widetilde{x}, y), \\ \Psi_{2j}(\widetilde{x}, y) &= \psi_{(2^n+1)j}(\widetilde{x}, y) \ \vee_3 \ \cdots \ \vee_3 \ \psi_{2^{n+1} j}(\widetilde{x}, y). \end{aligned}$$

Функции Φ_{1j}, Ψ_{1j}, $j = 1, \dots, m_1$, и функции Φ_{2j}, Ψ_{2j}, $j = 1, \dots, m_2$, принадлежат классу W_4, как суперпозиции функций из W_4.

Рассмотрим систему уравнений $S(f, U_1^{n+1})$ следующего вида:

$$\begin{cases} \Phi_{11}(\widetilde{x}, y) = \Psi_{11}(\widetilde{x}, y), \\ \qquad \dots \\ \Phi_{1m_1}(\widetilde{x}, y) = \Psi_{1m_1}(\widetilde{x}, y). \end{cases}$$

Перепишем ее в виде уравнения в вектор-функциях:

$$\widetilde{\Phi}_1(\widetilde{x}, y) = \widetilde{\Psi}_1(\widetilde{x}, y), \tag{3.8}$$

где вектор-функции $\widetilde{\Phi}_1$ и $\widetilde{\Psi}_1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}_1(\widetilde{x}, y) &= (\Phi_{11}(\widetilde{x}, y), \dots, \Phi_{1m_1}(\widetilde{x}, y)), \\ \widetilde{\Psi}_1(\widetilde{x}, y) &= (\Psi_{11}(\widetilde{x}, y), \dots, \Psi_{1m_1}(\widetilde{x}, y)). \end{aligned}$$

Докажем, что система $S(f, U_1^{n+1})$ задает значения функции $f(\widetilde{x})$ на множестве U_1^{n+1} над классом функций W_4.

Напомним, что функции φ_{ij}, ψ_{ij}, $i=1,\ldots,2^n$, $j=1,\ldots,m_1$, монотонны на блоке B_i^{n+1} и принимают на нем значения 0, 1, принимают значение 0 на остальных наборах множества U_1^{n+1} и принимают значение 2 всюду в U_2^{n+1}.

Следовательно, функции $\Phi_{1j}(\widetilde{x},y)$ и $\Psi_{1j}(\widetilde{x},y)$, $j=1,\ldots,m_1$, на каждом из блоков B_i^{n+1}, $1\leqslant i\leqslant 2^n$, совпадают с функциями φ_{ij} и ψ_{ij} соответственно, а всюду в U_2^{n+1} принимают значение 2.

Отсюда вытекает, что для каждого i, $1\leqslant i\leqslant 2^n$, уравнение в вектор-функциях (3.7), соответствующее системе уравнений $S(f,B_i^{n+1})$, и уравнение в вектор-функциях (3.8), соответствующее системе $S(f,U_1^{n+1})$, на одинаковых наборах из блока B_i^{n+1} одновременно обращаются в равенство или неравенство.

На множестве наборов U_2^{n+1} все уравнения системы $S(f,U_1^{n+1})$ обращаются в тождества, т. к. функции в их левых и правых частях принимают значение 2.

Учитывая, что для каждого i, $1\leqslant i\leqslant 2^n$, система уравнений $S(f,B_i^{n+1})$ задает значения функции f на блоке B_i^{n+1}, заключаем, что система уравнений $S(f,U_1^{n+1})$ задает значения функции f на совокупности всех блоков B_i^{n+1}, $i=1,\ldots,2^n$, т. е. всюду на множестве наборов U_1^{n+1}.

Аналогично доказывается, что система уравнений $S(f,U_2^{n+1})$:

$$\begin{cases} \Phi_{21}(\widetilde{x},y)=\Psi_{21}(\widetilde{x},y), \\ \qquad\qquad \ldots \\ \Phi_{2m_2}(\widetilde{x},y)=\Psi_{2m_2}(\widetilde{x},y) \end{cases}$$

задает значения функции $f(\widetilde{x})$ на множестве U_2^{n+1} и все уравнения системы $S(f,U_2^{n+1})$ обращаются в тождества на множестве U_1^{n+1}.

Рассмотрим систему уравнений $S(f)$, полученную объединением систем $S(f,U_1^{n+1})$ и $S(f,U_2^{n+1})$. Легко видеть, что система $S(f)$ является неявным представлением функции f над классом функций W_4 и содержит m_1+m_2 уравнений.

Значения m_1 и m_2 задаются соотношениями (3.6), где l_i есть размерность блока B_i^{n+1}, $1\leqslant i\leqslant 2^{n+1}$.

Среди блоков B_i^{n+1}, $i=1,\ldots,2^n$, в совокупности образующих множество наборов U_1^{n+1}, главный блок E_2^{n+1} имеет максимальную размерность, равную $n+1$. Следовательно,

$$m_1=\left\lceil\frac{n+2}{2}\right\rceil.$$

Все наборы из множества U_2^{n+1} содержат двойку в $(n+1)$-й компоненте. Отсюда видно, что для блоков B_i^{n+1}, $2^n+1\leqslant i\leqslant 2^{n+1}$, входящих во множество U_2^{n+1}, максимально возможное значение размерности равно n. Следовательно,

$$m_2=\left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil.$$

Таким образом, для любой функции n переменных в P_3 существует неявное представление над классом функций W_4, содержащее не более чем m_1+m_2 уравнений, где $m_1+m_2=n+2$.

Следовательно, при любом натуральном n для ранговой функции класса W_4 справедливо неравенство

$$m_{W_4}(n)\leqslant n+2.$$

Верхняя оценка доказана. Перейдем к доказательству нижней оценки.

Отметим несколько свойств функций из класса W_4.

Во-первых, все функции, принадлежащие классу W_4, сохраняют разбиение $\{0,1\}\{2\}$, так как базисные функции класса W_4 сохраняют разбиение $\{0,1\}\{2\}$, а класс функций, сохраняющих разбиение $\{0,1\}\{2\}$, замкнут по суперпозиции.

Во-вторых, все функции класса W_4 являются образно самодвойственными относительно разбиения $\{0,1\}\{2\}$, так как базисные функции образно самодвойственны относительно разбиения $\{0,1\}\{2\}$, а класс всех образно самодвойственных функций замкнут по суперпозиции.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная функция n переменных в P_3, образно самодвойственная относительно разбиения $\{0,1\}\{2\}$.

Будем говорить, что функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ *имеет тип* x, если найдется номер i, $1\leqslant i\leqslant n$, такой, что $f(x_1,\ldots,x_n)=2$ при $x_i=2$, $f(x_1,\ldots,x_n)\neq 2$ при $x_i\neq 2$.

Будем говорить, что функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ *имеет тип* $\overline{x}$, если найдется номер i, $1\leqslant i\leqslant n$, такой, что $f(x_1,\ldots,x_n)=2$ при $x_i\neq 2$, $f(x_1,\ldots,x_n)\neq 2$ при $x_i=2$.

При этом переменную x_i, $1\leqslant i\leqslant n$, будем называть *выделенной переменной*, соответственно, *типа* x либо *типа* $\overline{x}$ для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Из определения следует, что у функции, имеющей тип x либо тип $\overline{x}$, может быть только одна выделенная переменная.

Л е м м а 3.2.4. *Для всякого натурального числа n любая функция от n переменных из класса функций W_4 монотонна на каждом из блоков куба E_3^n и имеет либо тип x, либо тип $\overline{x}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3.2.4. Воспользуемся методом индукции.

Б а з а и н д у к ц и и. Легко видеть, что для базисных функций класса W_4, а также для функций, полученных из базисных путем отождествления или замены переменных, утверждение леммы выполняется.

И н д у к т и в н ы й п е р е х о д. Класс функций W_4 получен замыканием по суперпозиции системы базисных функций. Следовательно, любая функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ из класса W_4 представима суперпозицией над системой базисных функций:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f_0(f_1(x_1,\ldots,x_n),f_2(x_1,\ldots,x_n)),$$

где $f_0(z_1,z_2)$ — одна из базисных функций класса W_4, а $f_1(x_1,\ldots,x_n)$, $f_2(x_1,\ldots,x_n)$ — некоторые суперпозиции над базисными функциями, для которых по предположению индукции утверждение верно, либо переменные.

Зафиксируем произвольный блок B_i^n в кубе E_3^n, $1\leqslant i\leqslant 2^n$. Пусть $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ — наборы из блока B_i^n, связанные соотношением $\widetilde{\alpha}\leqslant\widetilde{\beta}$.

Функции f_1 и f_2 сохраняют разбиение $\{0,1\}\{2\}$, так как принадлежат классу W_4. Следовательно, наборы $(f_1(\widetilde{\alpha}),f_2(\widetilde{\alpha}))$ и $(f_1(\widetilde{\beta}),f_2(\widetilde{\beta}))$ также принадлежат одному и тому же блоку в кубе E_3^2.

При этом по предположению индукции справедливо неравенство

$$(f_1(\widetilde{\alpha}),f_2(\widetilde{\alpha}))\leqslant(f_1(\widetilde{\beta}),f_2(\widetilde{\beta})).$$

Функция f_0 монотонна на каждом из блоков куба E_3^2, так как является одной из функций K_3, D_3 или r_1. Отсюда вытекает неравенство $f(\widetilde{\alpha})\leqslant f(\widetilde{\beta})$.

В силу произвольности выбора блока B_i^n и наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ в нем заключаем, что функция f монотонна на каждом из блоков куба E_3^n.

Покажем, что функция f имеет тип x либо тип $\overline{x}$.

Пусть z_1 является выделенной переменной для функции f_0, а x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, является выделенной переменной для функции f_1. Тогда несложно проверить, что x_i является выделенной переменной и для функции f.

При этом функция f имеет тип x, если обе функции f_0 и f_1 имеют тип x, либо обе имеют тип $\overline{x}$. Функция f имеет тип $\overline{x}$, если одна из функций f_0 и f_1 имеет тип x, а вторая — тип $\overline{x}$.

Если выделенной переменной функции f_0 является z_2, рассуждения аналогичны.

Лемма 3.2.4 доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы, зафиксируем натуральное число n и рассмотрим функцию n переменных из P_3, принимающую значение 1 на наборах куба E_3^n с четным количеством единиц (в том числе на наборах, не содержащих единиц) и значение 2 на наборах куба E_3^n с нечетным количеством единиц. Обозначим ее через $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Отметим некоторые свойства функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Разобьем куб E_3^{n+1} на блоки B_i^{n+1}, $i = 1, \ldots, 2^{n+1}$. Будем считать, что блоки B_i^{n+1}, наборы которых не содержат двойку в $(n+1)$-й компоненте, имеют номера с 1 по 2^n, т. е. $1 \leqslant i \leqslant 2^n$. Соответственно блоки B_i^{n+1}, наборы которых содержат двойку в $(n+1)$-й компоненте, имеют номера с 2^n+1 по 2^{n+1}, т. е. $2^n+1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$. При этом через $B_{2^{n+1}}^{n+1}$ обозначен блок нулевой размерности, состоящий из единственного набора $(2, \ldots, 2)$.

Л е м м а 3.2.5. *В любом блоке B_i^{n+1} куба E_3^{n+1}, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$, найдется цепь максимальной длины l, где l — размерность блока B_i^{n+1}, $0 \leqslant l \leqslant n+1$, на которой чередуются точки графика функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и наборы, не являющиеся точками графика функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, причем наименьшим элементом данной цепи служит набор, не являющийся точкой графика функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3.2.5. Пусть B_i^{n+1} — произвольный блок размерности l в кубе E_3^{n+1}, наборы которого не содержат двойку в $(n+1)$-й компоненте, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, $1 \leqslant l \leqslant n+1$.

Обозначим через B_i^n блок в кубе E_3^n, наборы которого содержат двойки в компонентах с теми же номерами, что и наборы блока B_i^{n+1}, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$. Блок B_i^n имеет размерность $l-1$.

Рассмотрим произвольную цепь Σ^n максимальной длины в блоке B_i^n:

$$\widetilde{\alpha}^0 \leqslant \widetilde{\alpha}^1 \leqslant \cdots \leqslant \widetilde{\alpha}^{l-1},$$

где $\widetilde{\alpha}^j = (\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j)$ — наборы из блока B_i^n куба E_3^n, $j = 0, 1, \ldots, l-1$.

Набор $\widetilde{\alpha}^0$ не содержит единиц, наборы $\widetilde{\alpha}^j$ с четными номерами содержат четное количество единиц, наборы $\widetilde{\alpha}^j$ с нечетными номерами содержат нечетное количество единиц, $0 \leqslant j \leqslant l-1$.

По цепи Σ^n построим цепь Σ^{n+1} из расширенных наборов, принадлежащих блоку B_i^{n+1} куба E_3^{n+1}:

$$(\widetilde{\alpha}^0, 0) \leqslant (\widetilde{\alpha}^0, 1) \leqslant (\widetilde{\alpha}^1, 1) \leqslant \cdots \leqslant (\widetilde{\alpha}^{l-1}, 1).$$

Цепь Σ^{n+1} имеет в блоке B_i^{n+1} максимальную длину l. Из определения функции f вытекает, что на цепи Σ^{n+1} точки графика функции f чередуются с наборами, не являющимися точками графика f, начиная с набора $(\widetilde{\alpha}^0, 0)$, не являющегося точкой графика f.

Пусть B_i^{n+1} — произвольный блок размерности l в кубе E_3^{n+1}, наборы которого содержат двойку в $(n+1)$-й компоненте, $2^n+1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$, $0 \leqslant l \leqslant n$.

Рассмотрим произвольную цепь Ω^{n+1} максимальной длины l в блоке B_i^{n+1}:

$$(\widetilde{\beta}^0, 2) \leqslant (\widetilde{\beta}^1, 2) \leqslant \dots \leqslant (\widetilde{\beta}^l, 2),$$

где $(\widetilde{\beta}^j, 2) = (\beta_1^j, \dots, \beta_n^j, 2)$ — наборы блока B_i^{n+1}, $j = 0, 1, \dots, l$.

Наборы $(\widetilde{\beta}^j, 2)$ с четными номерами j содержат четное количество единиц, с нечетными номерами j — соответственно нечетное количество единиц, $0 \leqslant j \leqslant l$.

Следовательно, в цепи Ω^{n+1} точки графика функции f чередуются с наборами, не являющимися точками графика f, начиная с набора $(\widetilde{\beta}^0, 2)$, не являющегося точкой графика f.

Лемма 3.2.5 доказана.

Из леммы 3.2.5, в частности, вытекает, что любой блок куба E_3^{n+1}, кроме блока $B_{2^{n+1}}^{n+1}$, состоящего из единственного набора $(2, \dots, 2)$, содержит хотя бы одну точку графика функции f.

Л е м м а 3.2.6. *Пусть $S(f)$ — произвольное неявное представление функции $f(x_1, \dots, x_n)$ над классом W_4, B_i^{n+1} — произвольный блок размерности l в кубе E_3^{n+1}, где $1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$, $0 \leqslant l \leqslant n+1$.*

Тогда любая подсистема системы уравнений $S(f)$, задающая значения функции f в блоке B_i^{n+1}, содержит не менее чем $\lfloor l/2 \rfloor + 1$ различных уравнений.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3.2.6. По лемме 3.2.5 блок B_i^{n+1} содержит некоторую цепь Σ максимальной длины l, на которой чередуются точки графика функции f и наборы, не являющиеся точками графика f, причем наименьшим элементом этой цепи служит набор, не являющийся точкой графика функции f.

При $l \leqslant 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть $l \geqslant 2$. Тогда цепь Σ содержит не менее двух различных наборов, не являющихся точками графика функции f.

Покажем, что в системе уравнений $S(f)$ не найдется уравнения, запрещающего одновременно два различных набора цепи Σ из блока B_i^{n+1}, не являющихся точками графика функции f.

Предположим противное. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_{n+1})$ — два различных набора цепи Σ в блоке B_i^{n+1}, не являющиеся точками графика функции f и связанные соотношением $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$.

Допустим, что в системе $S(f)$ найдется уравнение, запрещающее оба набора $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$. Пусть оно имеет вид

$$\varphi(\widetilde{x}, y) = \psi(\widetilde{x}, y).$$

Из леммы 3.2.5 следует, что в цепи Σ найдется набор $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1})$, являющийся точкой графика функции f и связанный с наборами $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ соотношениями $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\gamma} \leqslant \widetilde{\beta}$.

Функции φ и ψ по лемме 3.2.4 монотонны на блоке B_i^{n+1}, при этом сохраняют разбиение $\{0,1\}\{2\}$ и принимают различные значения на наборах $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$.

Отсюда заключаем, что $\varphi(\widetilde{\alpha})=\varphi(\widetilde{\beta})=0$, $\psi(\widetilde{\alpha})=\psi(\widetilde{\beta})=1$ (либо наоборот). Но на наборе $\widetilde{\gamma}$, который удовлетворяет соотношениям $\widetilde{\alpha}\leqslant\widetilde{\gamma}\leqslant\widetilde{\beta}$, значения функций φ и ψ должны совпадать. Приходим к противоречию с монотонностью одной из функций φ или ψ в блоке B_i^{n+1}.

Цепь Σ длины l содержит $\lfloor l/2\rfloor+1$ наборов, не являющихся точками графика функции f.

Таким образом, при любом i, $1\leqslant i\leqslant 2^{n+1}$, для задания значений функции f всюду в блоке B_i^{n+1} необходимо не менее чем $\lfloor l/2\rfloor+1$ различных уравнений системы $S(f)$, где l — размерность блока B_i^{n+1}, $0\leqslant l\leqslant n+1$.

Лемма 3.2.6 доказана.

Рассмотрим произвольное неявное представление $S(f)$ функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ над классом функций W_4 и докажем, что оно состоит из не менее чем $n+2$ уравнений.

Будем рассуждать от противного. Допустим, что система уравнений $S(f)$ содержит $n+1$ уравнение и имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_1(\widetilde{x},y)=\psi_1(\widetilde{x},y), \\ \qquad\qquad \ldots \\ \varphi_{n+1}(\widetilde{x},y)=\psi_{n+1}(\widetilde{x},y), \end{cases}$$

где функции φ_j, ψ_j, $j=0,1,\ldots,n+1$, принадлежат классу W_4.

Докажем, что в этом случае в кубе E_3^{n+1} найдется такой блок B^{n+1}, что для задания значений функции f на всех наборах этого блока недостаточно уравнений системы $S(f)$. Другими словами, найдется блок B^{n+1}, содержащий хотя бы один набор, не являющийся точкой графика функции f, который не запрещается ни одним уравнением системы $S(f)$.

По лемме 3.2.4 каждая из функций φ_j, ψ_j, $j=0,1,\ldots,n+1$, имеет либо тип x, либо тип $\overline{x}$.

Покажем, что для любого j, $1\leqslant j\leqslant n+1$, функции φ_j и ψ_j, стоящие в левой и правой частях j-го уравнения системы $S(f)$, имеют одинаковый тип (x либо $\overline{x}$), а также одинаковую выделенную переменную данного типа.

Зафиксируем в кубе E_3^{n+1} произвольный блок ненулевой размерности B_i^{n+1}, $1\leqslant i\leqslant 2^{n+1}-1$.

Из леммы 3.2.5 вытекает, что блок B_i^{n+1} содержит хотя бы одну точку графика функции f.

Каждая из функций φ_j, ψ_j, $j=0,1,\ldots,n+1$, сохраняет разбиение $\{0,1\}\{2\}$, т. е. либо принимает значения из множества $\{0,1\}$ на всех наборах блока B_i^{n+1}, либо равна двойке всюду в B_i^{n+1}.

Следовательно, для любого j, $1\leqslant j\leqslant n+1$, функции φ_j и ψ_j либо обе принимают значения из множества $\{0,1\}$ на наборах блока B_i^{n+1}, либо обе равны 2 всюду в блоке B_i^{n+1}.

В силу произвольности выбора блока B_i^{n+1}, $1\leqslant i\leqslant 2^{n+1}-1$, заключаем, что для каждого j, $1\leqslant j\leqslant n+1$, функции φ_j и ψ_j либо одновременно имеют тип x, либо одновременно имеют тип $\overline{x}$, а также имеют одинаковую выделенную переменную соответствующего типа.

Таким образом, в дальнейшем можно говорить о *выделенной переменной уравнения* системы $S(f)$, имея в виду выделенную переменную функций, стоящих в его левой и правой частях.

Для удобства записи в системе неявных уравнений $S(f)$ переобозначим переменную y через x_{n+1}.

Каждое из $n+1$ уравнений системы $S(f)$ имеет одну выделенную переменную среди переменных из множества $X=\{x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}\}$.

С помощью отображений $0,1\longmapsto 0$ и $2\longmapsto 1$ для каждого числа i, $1\leqslant i\leqslant 2^{n+1}$, поставим в соответствие блоку B_i^{n+1} куба E_3^{n+1} двоичный набор $\widetilde{\sigma}^i$ длины $n+1$, $\widetilde{\sigma}^i\in E_2^{n+1}$.

Рассмотрим блок B^{n+1} куба E_3^{n+1}, занумерованный двоичным набором $\widetilde{\sigma}=(\sigma_1,\ldots,\sigma_{n+1})$, $\widetilde{\sigma}\in E_2^{n+1}$, где набор $\widetilde{\sigma}$ построен следующим образом.

Для каждого числа j, $1\leqslant j\leqslant n+1$, положим $\sigma_j=0$, если переменная x_j не является выделенной переменной ни одного из уравнений системы $S(f)$, либо если переменная x_j является выделенной переменной типа x для уравнений системы $S(f)$ меньшее либо равное число раз, чем выделенной переменной типа $\overline{x}$.

Положим $\sigma_j=1$, если переменная x_j является выделенной переменной типа x для уравнений системы $S(f)$ большее число раз, чем выделенной переменной типа $\overline{x}$.

Покажем, что система уравнений $S(f)$ не задает значения функции f всюду в блоке B^{n+1}, соответствующем двоичному набору $\widetilde{\sigma}$.

По лемме 3.2.6 для задания значений функции f на всех наборах блока B^{n+1} необходимо не менее чем $\lfloor l/2\rfloor+1$ различных уравнений системы $S(f)$, где l — размерность блока B^{n+1}, $0\leqslant l\leqslant n+1$.

Таким образом, достаточно показать, что число уравнений системы $S(f)$, обращающихся в неравенство хотя бы на одном наборе блока B^{n+1}, меньше величины $\lfloor l/2\rfloor+1$.

Оценим сверху число всех уравнений системы $S(f)$, которые не обращаются в тождественные равенства всюду в блоке B^{n+1}.

Пусть среди всех переменных $x_1,\ldots,x_{n+1}$ выделенными для уравнений системы $S(f)$ являются r переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_r}$, где $1\leqslant r\leqslant n+1$. Обозначим совокупность всех выделенных переменных системы $S(f)$ через X_0, $X_0=\{x_{i_1},\ldots,x_{i_r}\}$, $X_0\subseteq X$.

Каждой переменной x_{i_j} из множества X_0 в системе $S(f)$ соответствует своя подсистема $S_j(f)$, содержащая s_j уравнений с выделенной переменной x_{i_j}, где $1\leqslant s_j\leqslant n+1$, $1\leqslant j\leqslant r$.

Легко видеть, что всякое уравнение системы $S(f)$ принадлежит некоторой подсистеме $S_j(f)$, $1\leqslant j\leqslant r$, и подсистемы, соответствующие различным переменным из множества X_0, не содержат общих уравнений. Следовательно, справедливо соотношение $\sum\limits_{j=1}^{r}s_j=n+1$.

Для каждого числа j, $1\leqslant j\leqslant r$, рассмотрим переменную x_{i_j}, которая является выделенной для подсистемы $S_j(f)$, состоящей из s_j уравнений системы $S(f)$. Для некоторых уравнений подсистемы $S_j(f)$ переменная x_{i_j} имеет тип x, для остальных — тип $\overline{x}$.

Пусть переменная x_{i_j} имеет тип x для не более чем половины уравнений в $S_j(f)$. В этом случае из способа построения набора $\widetilde{\sigma}$ заключаем, что $\sigma_{i_j}=0$. Следовательно, наборы блока B^{n+1} не содержат двойку в компоненте с номером i_j и все уравнения подсистемы $S_j(f)$, имеющие тип $\overline{x}$, обращаются в тождественные равенства всюду в блоке B^{n+1}, так как функции, стоящие в их левых и правых частях, принимают значение 2 на наборах данного блока. Таким образом, число уравнений в $S_j(f)$, не обращающихся в тождество в блоке B^{n+1}, не превосходит величины $s_j/2$.

Пусть переменная x_{i_j} имеет тип x для более чем половины уравнений в подсистеме $S_j(f)$. Тогда $\sigma_{i_j}=1$. Соответственно наборы блока B^{n+1} содержат двойку в компоненте с номером i_j и все уравнения типа x в $S_j(f)$ обращаются в тождества в блоке B^{n+1}. В этом случае число уравнений подсистемы $S_j(f)$, не обращающихся в тождество в блоке B^{n+1}, не превосходит величины $(s_j-1)/2$.

Обозначим через r' число переменных x_{i_j} в подмножестве X_0, имеющих тип x для более чем половины уравнений в соответствующей подсистеме $S_j(f)$ системы уравнений $S(f)$, $1\leqslant j\leqslant r$, $1\leqslant r'\leqslant r$.

Суммируя по всем j, $j=1,\ldots,r$, верхние оценки для числа уравнений в $S_j(f)$, не обращающихся в тождество в блоке B^{n+1}, заключаем, что число всех уравнений системы $S(f)$, не обращающихся в тождество всюду в B^{n+1}, не превосходит величины

$$\left\lfloor \frac{\sum\limits_{j=1}^{r} s_j - r'}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1-r'}{2} \right\rfloor.$$

Таким образом, для доказательства того факта, что система уравнений $S(f)$, содержащая $n+1$ уравнение, не задает значения функции f всюду в блоке B^{n+1}, в силу леммы 3.2.6 достаточно показать, что справедливо неравенство

$$\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{n+1-r'}{2} \right\rfloor - 1. \tag{3.9}$$

Оценим снизу величину l, представляющую собой размерность блока B^{n+1}. Она равна количеству нулей в двоичном наборе $\widetilde{\sigma}$, соответствующем блоку B^{n+1}.

Общее число уравнений в системе $S(f)$ равно $n+1$, т.е. совпадает с числом переменных во множестве $X=\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$. Для каждого числа j, $1\leqslant j\leqslant r$, переменная x_{i_j} из множества X_0 является выделенной для s_j уравнений системы $S(f)$, где $1\leqslant s_j\leqslant n+1$. Следовательно, для всякого j, $1\leqslant j\leqslant r$, во множестве $X=\{x_1,\ldots,x_{n+1}\}$ найдется подмножество X_j, содержащее s_j-1 переменных, которые не являются выделенными ни для одного уравнения системы $S(f)$. Соответствующие им компоненты набора $\widetilde{\sigma}$ равны нулю.

Легко видеть, что совокупность всех подмножеств $\{X_j\}$, $j=0,1,\ldots,r$ образует разбиение множества X всех переменных системы уравнений $S(f)$.

Для каждого числа j, $1\leqslant j\leqslant r$, переменной x_{i_j} из X_0, имеющей тип x для не более чем половины уравнений в отвечающей ей подсистеме $S_j(f)$ системы уравнений $S(f)$, соответствуют s_j нулей набора $\widetilde{\sigma}$ в компонентах с номерами, равными номерам переменных из совокупности $x_{i_j}\cup X_j$.

Переменной x_{i_j} из X_0, имеющей тип x для более чем половины уравнений в отвечающей ей подсистеме $S_j(f)$ системы уравнений $S(f)$, соответствуют s_j-1 нулей набора $\widetilde{\sigma}$ в компонентах с номерами, равными номерам переменных из подмножества X_j.

Отсюда заключаем, что общее число нулей в наборе $\widetilde{\sigma}$, совпадающее с размерностью l блока B^{n+1}, больше либо равно величине $\sum\limits_{j=1}^{r} s_j - r' = n+1-r'$.

Следовательно, выполняется неравенство

$$\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{n+1-r'}{2} \right\rfloor,$$

которое автоматически влечет выполнение неравенства (3.9).

Таким образом, доказано, что неявное представление $S(f)$ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ над классом функций W_4 содержит не менее $n+2$ уравнений. Отсюда в силу произвольности выбора неявного представления вытекает нижняя оценка ранговой функции класса W_4, справедливая при любых натуральных значениях n:

$$m_{W_4}(n) \geqslant n+2.$$

Теорема 3.2.3 доказана.

3.3. Классы с экспоненциальной ранговой функцией.

3.3.1. Класс W_5. Рассмотрим класс функций W_5, полученный замыканием по суперпозиции от системы функций:

$\max(x,y)$	$\min\limits_{01}(x,y)$	$l(x)$	1
0 1 2	0 0 2	0	1
1 1 2	0 1 2	0	1
2 2 2	2 2 2	1	1

.

Теорема 3.3.1. *При всех натуральных n для ранговой функции класса W_5 выполняются неравенства:*

$$2^{(n+1)/2} - 1/2 \leqslant m_{W_5}(n) \leqslant 2 \cdot 3^n.$$

Прежде чем приступить к обоснованию теоремы, докажем вспомогательное утверждение о свойствах функций, принадлежащих классу W_5. Для этой цели нам потребуются дополнительные определения.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция n переменных в P_3.

Будем называть переменную x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *переменной первого типа* для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если функция f не различает 0 и 1 по этой переменной, т. е. для любого набора значений $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n)$ из куба E_3^{n-1} функция f удовлетворяет равенству

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

и если при этом x_i не является переменной второго типа для функции f.

Будем называть переменную x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *переменной второго типа* для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если f принимает значение 2 при $x_i = 2$, т. е. для любого набора значений $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n)$ из куба E_3^{n-1} функция f удовлетворяет равенству

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 2, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_n) = 2.$$

Пусть X — некоторое подмножество множества всех переменных функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет подмножество* $\{0, 1\}$ *по совокупности переменных* X, если на любых наборах куба E_3^n, содержащих 0 и 1 во всех компонентах, соответствующих переменным из X, функция f принимает значения 0 и 1.

Множество всех функций, принадлежащих классу W_5, описывается следующей леммой.

Лемма 3.3.1. *Класс W_5 содержит те и только те функции, которые одновременно удовлетворяют следующим свойствам: монотонные, сохраняющие подмножество $\{0,1\}$, сохраняющие разбиение $\{0,1\}\{2\}$, содержащие только переменные первого и второго типа и сохраняющие подмножество $\{0,1\}$ по совокупности всех переменных второго типа.*

Доказательство леммы. Докажем сначала, что класс W_5 не содержит других функций, кроме тех, которые удовлетворяют условиям леммы.

Легко видеть, что все функции из класса W_5 являются монотонными, сохраняют подмножество $\{0,1\}$, сохраняют разбиение $\{0,1\}\{2\}$, так как базисные функции класса W_5 удовлетворяют этим условиям.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ трехзначной логики, принадлежащую классу функций W_5. Докажем, что функция f содержит только переменные первого и второго типа.

Отметим, что все несущественные переменные функции f являются переменными первого типа.

Действительно, любая фиктивная переменная функции f не различает значения 0 и 1 и при этом не является переменной второго типа для функции f, так как константа 2 не принадлежит классу W_5.

Пусть функция f содержит существенные переменные. В этом случае удалим несущественные переменные функции f и построим схему из функциональных элементов $\mathfrak{S}(f)$ над базисом

$$\{\max(x,y),\ \min_{01}(x,y),\ l(x),\ 1\},$$

реализующую функцию f. Элементы схемы, которым приписаны функции $\max$, $\min\limits_{01}$, l, будем называть элементами типа $\max$, $\min\limits_{01}$, l соответственно.

Рассмотрим произвольную существенную переменную x_i функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, $1\leqslant i\leqslant n$. Если в схеме $\mathfrak{S}(f)$ найдется путь от входа, помеченного переменной x_i, к выходу схемы, не проходящий через элемент типа l, то x_i — переменная второго типа, так как в этом случае путь проходит только через элементы типа $\max$, $\min\limits_{01}$, принимающие значение 2, если хотя бы на один из их входов подается двойка.

Пусть переменная x_i не является переменной второго типа. Тогда любой путь от входа, помеченного переменной x_i, к выходу схемы $\mathfrak{S}(f)$ должен содержать элементы типа l.

Зафиксируем произвольный путь от входа, помеченного x_i, к выходу схемы и некоторый элемент типа l на этом пути и рассмотрим функцию, реализуемую на выходе данного элемента. Она имеет вид $l(f'(x_i,\widetilde{x}'))$, где f' — некоторая функция из класса W_5 и $\widetilde{x}'$ — некоторое подмножество совокупности переменных $\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Функция f' сохраняет разбиение $\{0,1\}\{2\}$, следовательно, для любого набора значений $\widetilde{\alpha}'$ переменных $\widetilde{x}'$ выполняются либо соотношения:

$$f'(0,\widetilde{\alpha}'),f'(1,\widetilde{\alpha}')\in\{0,1\},$$

либо равенства:

$$f'(0,\widetilde{\alpha}')=f'(1,\widetilde{\alpha}')=2.$$

Отсюда заключаем, что $l(f'(0,\widetilde{x}')) = l(f'(1,\widetilde{x}'))$, т. е. функция, реализуемая на выходе рассматриваемого элемента типа l, не различает 0 и 1 по переменной x_i.

Учитывая, что каждый путь от входа x_i к выходу схемы $\mathfrak{S}(f)$ содержит элементы типа l, получаем соотношение:

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Следовательно, переменная x_i является переменной первого типа для функции f.

Далее покажем, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет подмножество $\{0, 1\}$ по совокупности переменных второго типа.

Рассмотрим набор $\widetilde{\alpha}$ куба E_3^n, содержащий значения из множества $\{0, 1\}$ во всех компонентах, соответствующих переменным второго типа функции f. Подадим набор $\widetilde{\alpha}$ на вход схемы $\mathfrak{S}(f)$.

При этом на входы схемы, помеченные переменными второго типа функции f, поступают значения 0 и 1. Для оставшихся переменных любой путь к выходу схемы $\mathfrak{S}(f)$ проходит через элемент типа l, на выходе которого реализуется функция, не принимающая значение 2. Отсюда, а также из того факта, что все элементы схемы $\mathfrak{S}(f)$ помечены функциями, сохраняющими подмножество $\{0, 1\}$, заключаем, что значение $f(\widetilde{\alpha})$, реализуемое на выходе схемы, принадлежит множеству $\{0, 1\}$.

Таким образом, все функции класса W_5 удовлетворяют условиям леммы. Докажем, что любая функция, удовлетворяющая условиям леммы, принадлежит классу W_5.

Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ трехзначной логики, удовлетворяющую условиям леммы. Без ограничения общности будем считать, что $x_1, \ldots, x_s$ — переменные первого типа функции f, а $x_{s+1}, \ldots, x_n$ — переменные второго типа функции f, $0 \leqslant s \leqslant n$ (в частности, переменные первого типа или переменные второго типа могут отсутствовать).

Рассмотрим функцию

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1 + 1, \ldots, x_s + 1, x_{s+1}, \ldots, x_n), & \text{если } \widetilde{x} \in E_2^n, \\ 2 \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь знак $+$ обозначает сложение по модулю 3.

Покажем, что функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу W_5.

Несложно проверить, что функция g является монотонной и принимает значение 2 на наборах, содержащих двойку. По условию леммы функция f обладает свойством: если все переменные второго типа принимают значения из множества $\{0, 1\}$, то значения f также принадлежат множеству $\{0, 1\}$. Отсюда заключаем, что функция g сохраняет подмножество $\{0, 1\}$.

По лемме 3.2.1 класс W_5 содержит все функции трехзначной логики, которые одновременно являются монотонными, сохраняют подмножество $\{0, 1\}$ и принимают значение 2 на наборах, содержащих двойку, так как функции $\max(x, y)$, $\min\limits_{01}(x, y)$, 0 и 1 принадлежат классу W_5. Следовательно, функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу W_5.

Покажем, что для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ справедливо следующее представление в виде суперпозиции функций из класса W_5:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(l(x_1), \ldots, l(x_s), x_{s+1}, \ldots, x_n). \tag{3.10}$$

Пусть $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — произвольный набор куба E_3^n.

Если хотя бы одно из значений $\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n$ равно 2, то в силу свойств функций f и g обе части уравнения (3.10) на наборе $\widetilde{\alpha}$ принимают значение 2.

Если все значения $\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n$ принадлежат множеству $\{0,1\}$, то из определения функции g вытекает равенство

$$g(l(\alpha_1),\ldots,l(\alpha_s),\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n)=f(l(\alpha_1)+1,\ldots,l(\alpha_s)+1,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n),$$

в котором знак $+$ обозначает сложение по модулю 3.

Легко видеть, что при любом i, $1\leqslant i\leqslant s$, значения $l(\alpha_i)+1$ и α_i либо одновременно равны 2, либо оба принадлежат множеству $\{0,1\}$. Отсюда, а также из того факта, что $x_1,\ldots,x_s$ — переменные первого типа для функции f, вытекает равенство:

$$f(l(\alpha_1)+1,\ldots,l(\alpha_s)+1,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_n)=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Таким образом, любая функция трехзначной логики, удовлетворяющая условиям леммы, принадлежит классу W_5.

Лемма 3.3.1 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3.3.1.

Доказательство теоремы. Рассмотрим линейную функцию от n переменных в P_3:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=x_1+\ldots+x_n+1 \pmod 3.$$

Зафиксируем произвольную систему неявных уравнений над классом W_5, реализующую функцию f, и обозначим ее через $S(f)$. Пусть она состоит из m, $m\geqslant 1$, уравнений и имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\ldots,x_n,y)=\psi_1(x_1,\ldots,x_n,y), \\ \qquad\ldots \\ \varphi_m(x_1,\ldots,x_n,y)=\psi_m(x_1,\ldots,x_n,y). \end{cases}$$

Из леммы 3.3.1 следует, что функции, стоящие в левых и правых частях уравнений системы $S(f)$, содержат только переменные первого и второго типа.

Рассмотрим для каждого номера i, $1\leqslant i\leqslant n$, набор вида $(\widetilde{\sigma}^i,0)=(\sigma_1,\ldots$ $\ldots,\sigma_n,0)$ в кубе E_3^{n+1}, заданный следующим образом: $\sigma_i=2$, $\sigma_j=0$ при всех $j=1,\ldots,n$, $j\neq i$.

Все наборы $(\widetilde{\sigma}^i,0)$, $i=1,\ldots,n$, являются точками графика функции $f(\widetilde{x})$. Следовательно, при подстановке любого набора $(\widetilde{\sigma}^i,0)$, $1\leqslant i\leqslant n$, все уравнения системы $S(f)$ обращаются в равенства, что возможно, только если переменная x_i имеет одинаковый тип для функций, стоящих в их левых и правых частях.

Таким образом, при любом j, $1\leqslant j\leqslant m$, каждая из переменных $x_1,\ldots,x_n$ имеет одинаковый тип для функций φ_j и ψ_j, стоящих в левой и правой частях j-го уравнения системы $S(f)$.

Учитывая этот факт в дальнейшем, если будет идти речь о переменных $x_1,\ldots,x_n$ как о переменных первого или второго типа функций, стоящих в левой и правой части некоторого уравнения системы $S(f)$, мы будем использовать выражение *переменные первого или второго типа уравнения* системы $S(f)$.

Зафиксируем произвольный набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в кубе E_3^n. Будем говорить, что система уравнений *задает значение* $f(\widetilde{\alpha})$, если она задает значения функции f на множестве всех расширенных наборов $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, $\beta \in E_3$, соответствующих набору $\widetilde{\alpha}$.

Обозначим через Q совокупность всех наборов длины n, состоящих из нулей и двоек, $Q \subseteq E_3^n$. Множество Q содержит 2^n наборов.

Каждому набору $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из множества Q соответствует подсистема из одного либо двух уравнений системы $S(f)$, задающая значение $f(\widetilde{\alpha})$.

Покажем, что различным наборам из Q соответствуют различные уравнения либо пары уравнений системы $S(f)$.

Зафиксируем произвольный набор $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha} \in Q$.

Рассмотрим случай, когда подсистема системы уравнений $S(f)$, задающая значение $f(\widetilde{\alpha})$, состоит из двух уравнений, каждое из которых запрещает один расширенный набор вида $(\widetilde{\alpha}, \beta)$, $\beta \neq f(\widetilde{\alpha})$.

Случай одного уравнения, запрещающего оба расширенных набора, отвечающих набору $\widetilde{\alpha}$ и не являющихся точками графика функции f, рассматривается аналогично.

Пусть совокупность уравнений системы $S(f)$, задающая значение $f(\widetilde{\alpha})$, имеет вид

$$\varphi_{j_1}(\widetilde{x}, y) = \psi_{j_1}(\widetilde{x}, y), \tag{3.11}$$

$$\varphi_{j_2}(\widetilde{x}, y) = \psi_{j_2}(\widetilde{x}, y), \tag{3.12}$$

где $1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant m$, $j_1 \neq j_2$.

Обозначим через X совокупность переменных из множества $\{x_1, \ldots$ $\ldots, x_n\}$, являющихся переменными первого типа одновременно для обоих уравнений (3.11) и (3.12).

Покажем, что набор $\widetilde{\alpha}$ содержит двойки в тех и только тех компонентах, номера которых совпадают с номерами переменных из множества X.

По лемме 3.3.1 уравнения (3.11) и (3.12) содержат только переменные первого и второго типа.

Пусть $\alpha_i = 2$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Покажем, что x_i не является переменной второго типа для уравнения (3.11).

Действительно, в противном случае функции $\varphi_{j_1}(\widetilde{\alpha}, y)$ и $\psi_{j_1}(\widetilde{\alpha}, y)$ тождественно равны 2 и не зависят существенно от переменной y. Следовательно, уравнение (3.11) не запрещает ни один расширенный набор $(\widetilde{\alpha}, \beta)$ куба E_3^{n+1}, не являющийся точкой графика функции f. Приходим к противоречию.

Аналогично доказывается, что x_i не является переменной второго типа для уравнения (3.12).

Таким образом, если $\alpha_i = 2$, то x_i является переменной первого типа для обоих уравнений (3.11) и (3.12), т. е. принадлежит множеству X, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Далее, пусть переменная x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, принадлежит множеству X. Покажем, что $\alpha_i = 2$.

Допустим, это не так. Тогда $\alpha_i = 0$, так как все компоненты набора $\widetilde{\alpha}$ принадлежат множеству $\{0, 2\}$.

Рассмотрим наборы:

$$\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$\widetilde{\alpha}' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Легко видеть, что функция f принимает различные значения на наборах $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\alpha}'$, $f(\widetilde{\alpha}) \neq f(\widetilde{\alpha}')$.

С другой стороны, так как x_i — переменная первого типа для уравнений (3.11) и (3.12), то выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi_{j_1}(\widetilde{\alpha}, y) &\equiv \varphi_{j_1}(\widetilde{\alpha}', y), \\ \psi_{j_1}(\widetilde{\alpha}, y) &\equiv \psi_{j_1}(\widetilde{\alpha}', y), \\ \varphi_{j_2}(\widetilde{\alpha}, y) &\equiv \varphi_{j_2}(\widetilde{\alpha}', y), \\ \psi_{j_2}(\widetilde{\alpha}, y) &\equiv \psi_{j_2}(\widetilde{\alpha}', y), \end{aligned}$$

из которых следует, что система уравнений (3.11) и (3.12), помимо значения $f(\widetilde{\alpha})$, задает также значение $f(\widetilde{\alpha})'$, совпадающее с $f(\widetilde{\alpha})$. Приходим к противоречию.

Таким образом, различным наборам $\widetilde{\alpha}$ в Q соответствуют различные подмножества переменных X в $\{x_1, \ldots, x_n\}$, а следовательно, и различные подсистемы из одного или двух уравнений системы $S(f)$, задающие значение $f(\widetilde{\alpha})$. Отсюда заключаем, что число наборов во множестве Q не превосходит суммы из числа уравнений системы $S(f)$ и числа всевозможных пар различных уравнений в $S(f)$.

Число уравнений в системе $S(f)$ равно m, $m \geqslant 1$. Число всевозможных пар различных уравнений в системе $S(f)$ равно $m(m-1)/2$. Следовательно, для числа наборов множества Q справедливо соотношение

$$2^n \leqslant \frac{m(m-1)}{2} + m,$$

из которого путем несложных преобразований вытекает соотношение для числа уравнений системы $S(f)$:

$$m \geqslant 2^{(n+1)/2} - \frac{1}{2}. \tag{3.13}$$

Таким образом, для всякого натурального числа n существует функция f от n переменных в P_3, в любом неявном представлении которой над классом функций W_5 число уравнений удовлетворяет соотношению (3.13).

Отсюда заключаем, что при любом натуральном n для ранговой функции класса W_5 выполняется неравенство

$$m_{W_5}(n) \geqslant 2^{(n+1)/2} - \frac{1}{2}.$$

Нижняя оценка доказана. Докажем верхнюю оценку.

Для любого натурального числа n рассмотрим разбиение куба E_3^n на блоки B_i^n, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$, наборов, эквивалентных относительно разбиения $\{0, 1\}\{2\}$:

$$E_3^n = \bigsqcup_{i=1}^{2^n} B_i^n.$$

Зафиксируем произвольный блок B_i^n, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$ в кубе E_3^n и обозначим через M_i^n совокупность всех функций от n переменных, монотонных на блоке B_i^n, принимающих значения 0 и 1 всюду в B_i^n, значение 0 на наборах множества $E_3^n \setminus B_i^n$, меньше либо равных наибольшему набору блока B_i^n, состоящему из единиц и двоек, и значение 2 на остальных наборах множества $E_3^n \setminus B_i^n$. Легко видеть, что совокупность функций M_i^{n+1} обладает свойством $\Delta[B_i^{n+1}, \mathfrak{M}']$ относительно частичного порядка $0 \leqslant_{\mathfrak{M}'} 1$ на множестве $E_3 = \{0, 1, 2\}$.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из множества M_i^{n+1}. Легко видеть, что x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, является переменной первого типа для функции f, если наборы блока B_i^n содержат двойку в j-й компоненте, в противном случае x_j является переменной второго типа для функции f. При этом функция f сохраняет подмножество $\{0, 1\}$ по совокупности переменных второго типа при их наличии, так как на всех наборах, не содержащих двоек в компонентах с номерами переменных второго типа функции f, по определению принимает значения 0, 1. Несложно также проверить, что функция f монотонна, сохраняет подмножество $\{0, 1\}$ и разбиение $\{0, 1\}\{2\}$. Отсюда заключаем, что функция f удовлетворяет условиям леммы 3.3.1.

Таким образом, для любого i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, выполняется соотношение $M_i^n \subseteq W_5$. Следовательно, по теореме 2.2.6 при любом натуральном n для ранговой функции класса W_5 справедливо неравенство:

$$m_{W_5}(n) \leqslant \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \left\lceil \frac{s(B_i^{n+1}) + 1}{2s(E_3, \mathfrak{M}')} \right\rceil. \tag{3.14}$$

Максимальная длина цепи $s(E_3, \mathfrak{M}')$ в частично упорядоченном множестве $\langle E_3; \mathfrak{M}' \rangle$ равна 1. Максимальная длина цепи $s(B_i^{n+1})$ в блоке B_i^{n+1}, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$, равна размерности данного блока. Число блоков размерности l, $0 \leqslant l \leqslant n+1$, в кубе E_3^{n+1} равно величине $\binom{n+1}{l}$.

Таким образом, соотношение (3.14) для ранговой функции класса W_5 принимает следующий вид:

$$m_{W_5}(n) \leqslant \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} \left\lceil \frac{l+1}{2} \right\rceil. \tag{3.15}$$

Оценим сверху выражение в правой части неравенства (3.15):

$$\sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} \left\lceil \frac{l+1}{2} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} \leqslant \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil 2^{n+1} \leqslant 2^n(n+2).$$

Отсюда заключаем, что при любом натуральном n ранговая функция класса W_5 удовлетворяет неравенству

$$m_{W_5}(n) \leqslant 2^n(n+2).$$

Теорема 3.3.1 доказана.

Отметим, что из теоремы 3.3.1 непосредственно вытекает нижняя экспоненциальная оценка для функции Шеннона, характеризующей весовую сложность класса W_5.

3.3.2. Класс W_6. Рассмотрим класс функций W_6, полученный замыканием по суперпозиции от системы функций, заданной следующей таблицей:

$\max(x,y)$	$\min\limits_{01}(x,y)$	$r(x)$	1
0 1 2	0 0 2	2	1
1 1 2	0 1 2	2	1
2 2 2	2 2 2	0	1

.

Теорема 3.3.2. *При любом натуральном n для ранговой функции класса W_6 выполняются неравенства*

$$2^n \leqslant m_{W_6}(n) \leqslant (n+2)2^n.$$

Доказательство. Сначала докажем нижнюю оценку.

Покажем, что для всякого натурального n в P_3 существует функция n переменных, любое неявное представление которой над классом функций W_6 содержит не менее, чем 2^n уравнений.

Обозначим через Q множество всех наборов куба E_3^n, состоящих из нулей и двоек, т. е. положим:

$$Q = \{\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \mid \widetilde{\sigma} \in E_3^n, \sigma_i \in \{0, 2\}, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Рассмотрим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ трехзначной логики, заданную следующим образом:

$$f(\widetilde{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \widetilde{x} \in Q, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажем, что в любом неявном представлении функции f над классом W_6 число уравнений больше либо равно числу наборов во множестве Q.

Зафиксируем произвольную систему неявных уравнений $S(f)$ над классом W_6, реализующую функцию f.

Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — произвольные наборы из множества Q. Рассмотрим соответствующие им расширенные наборы $(\widetilde{\alpha}, 0)$ и $(\widetilde{\beta}, 0)$ из куба E_3^{n+1}.

Наборы $(\widetilde{\alpha}, 0)$ и $(\widetilde{\beta}, 0)$ не являются точками графика функции f. Следовательно, для каждого из них в системе $S(f)$ найдется уравнение, запрещающее данный набор.

Докажем, что уравнения системы $S(f)$, запрещающие наборы $(\widetilde{\alpha}, 0)$ и $(\widetilde{\beta}, 0)$, различны между собой.

Предположим противное. Допустим, что в системе неявных уравнений $S(f)$ найдется уравнение, запрещающее одновременно оба расширенных набора $(\widetilde{\alpha}, 0)$ и $(\widetilde{\beta}, 0)$.

Сначала рассмотрим случай, когда наборы $(\widetilde{\alpha}, 0)$ и $(\widetilde{\beta}, 0)$ несравнимы.

Пусть уравнение системы $S(f)$, запрещающее наборы $(\widetilde{\alpha}, 0)$ и $(\widetilde{\beta}, 0)$, имеет вид:

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, y) = \psi_1(x_1, \ldots, x_n, y). \tag{3.16}$$

В уравнении (3.16) для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, проведем следующие замены переменных и подстановки констант.

Если $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$, то вместо переменной x_i подставим константу 0.

Если $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 2$, то вместо переменной x_i подставим переменную z_1.

Если $\alpha_i = 2$, $\beta_i = 0$, то вместо переменной x_i подставим переменную z_2.

Если $\alpha_i = 2$, $\beta_i = 2$, то вместо переменной x_i подставим константу 2.

Вместо переменной y подставим константу 0.

После проведенных подстановок исходное уравнение сводится к уравнению в функциях двух переменных:

$$\varphi_1'(z_1, z_2) = \psi_1'(z_1, z_2). \tag{3.17}$$

Отметим, что класс функций W_6 содержит все три константы 0, 1 и 2.

Действительно, константа 1 принадлежит базисной системе функций класса W_6, а константы 0 и 2 можно получить суперпозицией базисных функций: $r(1) \equiv 2$, $r(2) \equiv 0$.

Таким образом, функции φ_1' и ψ_1' принадлежат классу W_6, так как являются суперпозициями функций из класса W_6. При этом функции φ_1' и ψ_1' удовлетворяют следующим условиям.

В точках $(0, 2)$ и $(2, 0)$ уравнение (3.17) обращается в неравенство, так как функции φ_1' и ψ_1' при подстановке наборов $(0, 2)$ и $(2, 0)$ принимают такие же значения, как функции φ_1 и ψ_1 в исходном уравнении (3.16) при подстановке наборов $(\widetilde{\alpha}, 0)$ и $(\widetilde{\beta}, 0)$ соответственно.

Покажем, что в точках $(1, 2)$ и $(2, 1)$ уравнение (3.17) должно обращаться в равенство.

Действительно, значения функций φ_1' и ψ_1' в точках $(1, 2)$ и $(2, 1)$ совпадают со значениями функций φ_1 и ψ_1 в некоторых точках $(\widetilde{\gamma}, 0)$ и $(\widetilde{\delta}, 0)$ соответственно, где наборы $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\delta}$ принадлежат кубу E_3^n и содержат единицу.

По определению функция f принимает значение 0 на наборах, содержащих единицу. Отсюда заключаем, что расширенные наборы $(\widetilde{\gamma}, 0)$ и $(\widetilde{\delta}, 0)$ являются точками графика функции f и при подстановке в исходное уравнение (3.16) обращают его в равенство.

Таким образом, функции $\varphi_1'(z_1, z_2)$ и $\psi_1'(z_1, z_2)$ принадлежат классу W_6, принимают одинаковые значения в точках $(1, 2)$, $(2, 1)$ и различные значения в точках $(0, 2)$, $(2, 0)$. Докажем, что одновременное выполнение этих условий невозможно.

Отметим, что функции φ_1' и ψ_1' в точках $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ не принимают значение 2.

В самом деле, допустим, $\varphi_1'(0, 2) = 2$. Функции класса W_6 сохраняют разбиение $\{0, 1\}\{2\}$, следовательно, $\varphi_1'(1, 2) = \varphi_1'(0, 2) = 2$. С другой стороны, $\psi_1'(1, 2) = \varphi_1'(1, 2) = 2$ по условию, и $\psi_1'(0, 2) = \psi_1'(1, 2) = 2$, так как функция ψ_1' сохраняет разбиение $\{0, 1\}\{2\}$.

Получаем $\varphi_1'(0,2)=\psi_1'(0,2)=2$, что противоречит условию $\varphi_1'(0,2)\neq$ $\neq\psi_1'(0,2)$.

В остальных случаях доказательство проводится аналогично.

Далее, все функции класса W_6 принадлежат классу $T^3_{\mathcal{E}_2,1}$, так как порождающие функции класса W_6 принадлежат $T^3_{\mathcal{E}_2,1}$.

Согласно определению, функция n переменных из P_3 принадлежит классу $T^3_{\mathcal{E}_2,1}$ тогда и только тогда, когда для любых чисел $a_1,\ldots,a_n$, равных 0 и 1, эта функция на всех наборах $\widetilde{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ таких, что $b_i\neq a_i$, $i=1,2,\ldots,n$, выпускает по крайней мере одно из значений 0 или 1.

Для функций $\varphi_1'(z_1,z_2)$ и $\psi_1'(z_1,z_2)$ положим $a_1=0$, $a_2=1$. Тогда на множестве наборов $\{(1,0),(1,2),(2,0),(2,2)\}$ функции φ_1' и Ψ_1' выпускают хотя бы одно из значений 0 или 1. Но это невозможно, так как $\varphi_1'(1,2)=\psi_1'(1,2)$, $\varphi_1'(2,0)\neq\psi_1'(2,0)$ и в точках $(1,2)$, $(2,0)$ функции φ_1' и ψ_1' равны 0 или 1. Приходим к противоречию.

Таким образом, для несравнимых наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из множества Q уравнения системы $S(f)$, обращающиеся в неравенства на соответствующих расширенных наборах $(\widetilde{\alpha},0)$ и $(\widetilde{\beta},0)$, различны.

Рассмотрим случай, когда $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ сравнимы, $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\in Q$. Без ограничения общности будем считать, что $\widetilde{\alpha}\leqslant\widetilde{\beta}$.

Как и в первом случае, предположим, что в системе неявных уравнений $S(f)$ найдется уравнение, запрещающее одновременно оба набора $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$. Пусть оно имеет вид

$$\varphi_2(x_1,\ldots,x_n,y)=\psi_2(x_1,\ldots,x_n,y). \tag{3.18}$$

Для каждого i, $1\leqslant i\leqslant n$, проведем в уравнении (3.18) указанные ниже замены переменных и подстановки констант.

Если $\alpha_i=0$, $\beta_i=0$, то вместо переменной x_i подставим константу 0.

Если $\alpha_i=0$, $\beta_i=2$, то вместо переменной x_i подставим переменную z.

Если $\alpha_i=2$, $\beta_i=2$, то вместо переменной x_i подставим константу 2.

В результате проведенных операций получим уравнение

$$\varphi_2'(z,y)=\psi_2'(z,y), \tag{3.19}$$

в котором функции φ_2' и ψ_2' принадлежат классу функций W_6 и удовлетворяют следующим условиям.

В точках $(0,0)$ и $(2,0)$ уравнение (3.19) обращается в неравенство, так как значения функций φ_2' и ψ_2' в точках $(0,0)$ и $(2,0)$ совпадают с соответствующими значениями функций φ_2 и ψ_2 в точках $(\widetilde{\alpha},0)$ и $(\widetilde{\beta},0)$, не являющихся точками графика функции $f(\widetilde{x})$.

В точках $(2,1)$ и $(1,0)$ уравнение (3.19) обращается в равенство, так как значения функций φ_2' и ψ_2' в этих точках совпадают со значениями функций φ_2 и ψ_2 в точках $(\widetilde{\beta},1)$ и $(\widetilde{\sigma},0)$ соответственно, где $\widetilde{\sigma}$ — некоторый набор куба E_3^n, содержащий единицу.

Легко видеть, что расширенные наборы $(\widetilde{\beta},1)$ и $(\widetilde{\sigma},0)$ являются точками графика функции $f(\widetilde{x})$ и, следовательно, обращают в равенство исходное уравнение (3.18).

Далее, функции φ_2' и ψ_2' сохраняют разбиение $\{0,1\}\{2\}$. Отсюда и из равенств

$$\varphi_2'(1,0)=\psi_2'(1,0),$$
$$\varphi_2'(2,1)=\psi_2'(2,1)$$

вытекает, что функции φ_2' и ψ_2' не принимают значение 2 в точках $(0,0)$, $(1,0),(2,0),(2,1)$.

С другой стороны, функции φ_2' и ψ_2' принадлежат классу функций $T^3_{\mathcal{E}_2,1}$. Следовательно, на множестве наборов $\{(1,0),(1,2),(2,0),(2,2)\}$ функции φ_2' и ψ_2' выпускают хотя бы одно из значений 0 или 1. Но учитывая соотношения

$$\varphi_2'(1,0)=\psi_2'(1,0),$$
$$\varphi_2'(2,0)\neq\psi_2'(2,0),$$

а также тот факт, что значения φ_2' и ψ_2' в точках $(1,0),(2,0)$ принадлежат $\{0,1\}$, заключаем, что хотя бы одна из функций φ_2', ψ_2' принимает оба значения 0 и 1 в точках $(1,0),(2,0)$. Приходим к противоречию.

Таким образом, доказано, что в любом неявном представлении функции f над системой функций W_6 число уравнений больше либо равно числу наборов во множестве Q.

Принимая во внимание, что множество Q содержит 2^n наборов, получаем соотношение:

$$m_{W_6}(n)\geqslant 2^n,$$

справедливое при любом натуральном n.

Нижняя оценка доказана.

Перейдем к доказательству верхней оценки.

Для любого натурального числа n рассмотрим разбиение куба E_3^n на блоки B_i^n, $i=1,2,\ldots,2^n$, наборов, эквивалентных относительно разбиения $\{0,1\}\{2\}$:

$$E_3^n=\bigsqcup_{i=1}^{2^n}B_i^n.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3.3.2. *При любом натуральном n для каждого блока B_i^n, $1\leqslant i\leqslant 2^n$ в кубе E_3^n класс функций W_6 содержит все функции от n переменных, монотонные на блоке B_i^n, принимающие значения* 0 *и* 1 *на наборах блока B_i^n и значение* 2 *на наборах множества $E_3^n\setminus B_i^n$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный блок B_i^n, $1\leqslant i\leqslant 2^n$, в кубе E_3^n. Пусть он имеет размерность l, $0\leqslant l\leqslant n$.

При $l\geqslant 1$ для удобства записи будем считать, что все отличные от двойки компоненты наборов блока B_i^n находятся в первых l позициях, т. е. наборы блока B_i^n имеют вид $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, где $\alpha_j\in\{0,1\}$ при $1\leqslant j\leqslant l$ и $\alpha_j=2$ при $l+1\leqslant j\leqslant n$. Такое предположение не нарушит общности рассуждений.

Будем проводить доказательство для случая $l\geqslant 1$, но оно применимо и при $l=0$, если считать, что первые l компонент наборов в записи функций отсутствуют.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция в P_3, монотонная на блоке B_i^n, принимающая значения 0, 1 в B_i^n и значение 2 в $E_3^n \backslash B_i^n$.

Рассмотрим функцию

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_l, 2, \ldots, 2) & \text{при } x_j \in \{0, 1\},\ j = 1, 2, \ldots, n, \\ 2 & \text{на наборах, содержащих } 2. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $g(\widetilde{x})$ является монотонной, сохраняет подмножество $\{0, 1\}$ и принимает значение 2 на наборах куба E_3^n, содержащих двойку.

Функции $\min\limits_{01}(x, y)$, $\max(x, y)$, 0 и 1 принадлежат классу функций W_6. Следовательно, по лемме 3.2.1 класс W_6 содержит все функции в P_3, которые одновременно являются монотонными, сохраняют подмножество $\{0, 1\}$ и принимают значение 2 на наборах, содержащих двойку, в том числе и функцию $g(\widetilde{x})$.

Покажем, что функция $f(\widetilde{x})$ представима следующим образом:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_l, r(x_{l+1}), \ldots, r(x_n)). \tag{3.20}$$

Действительно, пусть набор $\widetilde{\alpha}$ принадлежит блоку B_i^n куба E_3^n.

В этом случае $\widetilde{\alpha}$ имеет вид $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 2, \ldots, 2)$, где значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ принадлежат множеству $\{0, 1\}$. Из определения функции $g(\widetilde{x})$ вытекают соотношения

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 0, \ldots, 0) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, 2, \ldots, 2) = f(\widetilde{\alpha}).$$

Следовательно, на наборе $\widetilde{\alpha}$ уравнение (3.20) обращается в равенство.

Пусть набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ не принадлежит блоку B_i^n.

В этом случае найдется номер j, $l+1 \leqslant j \leqslant n$, такой что $\alpha_j \neq 2$. Соответственно $r(\alpha_j) = 2$, и из определения функции $g(\widetilde{x})$ вытекает соотношение

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_l, r(\alpha_{l+1}), \ldots, r(\alpha_n)) = 2.$$

С другой стороны, $f(\widetilde{\alpha}) = 2$ по условию.

Отсюда заключаем, что равенство (3.20) справедливо всюду в E_3^n.

Таким образом, функция $f(\widetilde{x})$ представима в виде суперпозиции функций класса W_6, а следовательно, принадлежит W_6.

Лемма 3.3.2 доказана.

Для каждого блока B_i^{n+1} в кубе E_3^{n+1}, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$, обозначим через M_i^{n+1} совокупность всех функций от $n+1$ переменной, монотонных на блоке B_i^{n+1}, принимающих значения 0 и 1 всюду в B_i^{n+1} и значение 2 в $E_3^{n+1} \backslash B_i^{n+1}$.

По лемме 3.3.2 для любого i, $1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}$, выполняется соотношение $M_i^{n+1} \subseteq W_6$. При этом совокупность функций M_i^{n+1} обладает свойством $\Delta[B_i^{n+1}, \mathfrak{M}']$ относительно частичного порядка $0 \leqslant_{\mathfrak{M}'} 1$ на множестве $E_3 = \{0, 1, 2\}$.

Следовательно, при любом натуральном n класс функций W_6 удовлетворяет условиям теоремы 2.2.6 и для ранговой функции класса W_6 выполняется неравенство

$$m_{W_6}(n) \leqslant \sum_{i=1}^{2^{n+1}} \left\lceil \frac{s(B_i^{n+1}) + 1}{2s(E_3, \mathfrak{M}')} \right\rceil.$$

Оценивая сверху выражение в правой части данного неравенства, как и в случае верхней оценки (3.14) для ранговой функции класса W_5, приходим к неравенству

$$m_{W_6}(n) \leqslant 2^n(n+2),$$

верному для любого натурального n.

Теорема 3.3.2 доказана.

Легко видеть, что из теоремы 3.3.2 следует нижняя экспоненциальная оценка для функции Шеннона, характеризующей весовую сложность класса W_5.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Октаю Мурадовичу Касим-Заде за постановку задачи, постоянное внимание к работе и неоценимую моральную поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев А. Е. О сложности монотонных функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1985. — № 4. — С. 83–87.
2. Андреев А. Е. О синтезе схем из функциональных элементов в полных монотонных базисах // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 114–139.
3. Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984.
4. Гашков С. Б. О параллельном вычислении некоторых классов многочленов с растущим числом переменных // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1990. — № 2. — С. 88–92.
5. Данильченко А. Ф. О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 4. — С. 397–416.
6. Захарова Е. Ю. Реализация функций из P_k формулами // Математические заметки. — 1972. — Т. 11, № 1. — С. 99–108.
7. Захарова Е. Ю., Яблонский С. В. Некоторые свойства невырожденных суперпозиций в P_k // Математические заметки. — 1972. — Т. 12, № 1. — С. 3–12.
8. Касим-Заде О. М. О неявной выразимости булевых функций // Сибирский журнал исследования операций. — 1994. — Т. 1, № 1. — С. 79–80.
9. Касим-Заде О. М. О неявной выразимости булевых функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 1995. — № 2. — С. 44–49.
10. Касим-Заде О. М. О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр // Докл. РАН. — 1996. — Т. 348, № 3. — С. 299–301.
11. Касим-Заде О. М. О ранге параметрических и неявных представлений булевых функций // Второй сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике. Тезисы докладов. Ч. II. — Новосибирск, 1996. — С. 115–116.
12. Касим-Заде О. М. О сложности параметрических представлений функций алгебры логики // Тезисы докладов XI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Ульяновск, 10–14 июня 1996 г.). — М.: Изд-во РГГУ, 1996. — С. 86–88.
13. Касим-Заде О. М. Об одной метрической характеристике неявных и параметрических представлений булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука. Физматлит, 1996. — С. 133–188.
14. Касим-Заде О. М. О неявной полноте в k-значной логике // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. — 2007. — № 3. — С. 9–13.
15. Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.
16. Кузнецов А. В. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 2. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 145–146.
17. Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод. — М.: Наука, 1979. — С. 5–33.

18. Л о ж к и н С. А. Новые, более точные оценки функций Шеннона для сложности управляющих систем // Дискретный анализ и исследование операций. — 1995. — Т. 2, № 3. — С. 77–78.
19. Л о ж к и н С. А. О сложности реализации функций k-значной логики формулами и квазиформулами // Тезисы докладов XI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Ульяновск, 10–14 июня 1996 г.). — М.: Изд-во РГГУ, 1996. — С. 125–127.
20. Л о ж к и н С. А. Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. — М.: Наука. Физматлит, 1996. — С. 190–214.
21. Л о ж к и н С. А. Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем. — Дисс. ...док. физ.-мат. наук / МГУ им. М. В. Ломоносова. — Москва, 1997.
22. Л у п а н о в О. Б. О синтезе контактных схем // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 119, № 1. — С. 23–26.
23. Л у п а н о в О. Б. Об одном методе синтеза схем // Известия вузов. Радиофизика. — 1958. — Т. 1, № 1. — С. 120–140.
24. Л у п а н о в О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. — М.: Физматгиз, 1960. — С. 61–80.
25. Л у п а н о в О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. — М.: Физматгиз, 1963. — С. 63–97.
26. Л у п а н о в О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
27. М а л ь ц е в А. И. Итеративные алгебры Поста. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976.
28. Математика в СССР за сорок лет (1917–1957). Т. I. — М.: Физматгиз, 1959.
29. Н е ч и п о р у к Э. И. О синтезе логических сетей в неполных и вырожденных базисах // Проблемы киберенетики. Вып. 14. — М.: Наука, 1965. — С. 111–160.
30. Н е ч и п о р у к Э. И. О реализации дизъюнкции и конъюнкции в некоторых монотонных базисах // Проблемы киберенетики. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 291–293.
31. О р е х о в а Е. А. Об одном критерии неявной полноты в k-значной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — С. 77–90.
32. О р е х о в а Е. А. Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 27–74.
33. О р л о в В. А. Реализация функций из P_k схемами в произвольном базисе из функциональных элементов // Докл. РАН. — 1998. — Т. 359, № 3. — С. 308–309.
34. О р л о в В. А. Об оптимальности почти всех базисов из P_k // Докл. РАН. — 1998. — Т. 363, № 5. — С. 602–603.
35. Р а ц а М. Ф. О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского // Проблемы кибернетики. Вып. 21. — М.: Наука, 1969. — С. 185–214.
36. Т к а ч е в Г. А. О сложности реализации одной последовательности функций k-значной логики // Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 1977. — № 1. — С. 45–57.
37. У г о л ь н и к о в А. Б. Синтез схем и формул в неполных базисах // Препринт ИПМ АН СССР. — 1980. — № 112.
38. У г о л ь н и к о в А. Б. О реализации функций из замкнутых классов схемами из функциональных элементов в полном базисе // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 271, № 1. — С. 49–51.
39. У г о л ь н и к о в А. Б. О реализации функций из замкнутых классов схемами из функциональных элементов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 89–113.
40. У г о л ь н и к о в А. Б. О глубине формул в неполных базисах // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 242–245.
41. У г о л ь н и к о в А. Б. О сложности реализации формулами одной последовательности функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 174–176.
42. Я б л о н с к и й С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 95, № 6. — С. 1152–1156.
43. Я б л о н с к и й С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.
44. Я б л о н с к и й С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Высшая школа, 2008.

45. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
46. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 44–46.
47. Burris S., Willard R. Finitely many primitive positive clones // Proc. of the American Mathematical Society. — 1987. — V. 101, No. 3. — P. 427–430.
48. Pippenger N. J. The complexity of monotone Boolean functions // Math. Systems Theory. — 1978. — V. 11. — P. 289–316.
49. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. — V. 43, No. 3. — P. 163–185.
50. Post E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Vol. 5. — Princeton Univ. Press, 1941.
51. Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přiv. Věd., Praha, 1970. — Bd. 80. — S. 3–93.
52. Savage J. E. The complexity of computing. — New York: Robert E. Kreiger Publishing Company, 1987. [Имеется перевод: Сэвидж Дж. Э. Сложность вычислений. — М.: Факториал, 1998].
53. Shannon C. E. The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. — 1949. — V. 28, No. 1. — P. 59–98 [Имеется перевод: Шеннон К. Синтез двухполюсных переключательных схем // Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963. — С. 59–101.].
54. Slupecki J. Kryterium pelnosci wielowartosciowych systemow logiki zdan // Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. Cl. III. — 1939. — T. 32. — P. 102–128.

Поступило в редакцию 24 XI 2014