ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 101 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Посадский А.И., Сивакова Т.В., Судаков В.А.

Агрегирование нечетких суждений экспертов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Посадский А.И., Сивакова Т.В., Судаков В.А. Агрегирование нечетких суждений экспертов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 101. 12 с. doi:10.20948/prepr-2019-101
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-101

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.И. Посадский, Т.В. Сивакова, В.А. Судаков

Агрегирование нечетких суждений экспертов

Москва — 2019

Посадский А.И., Сивакова Т.В., Судаков В.А.

Агрегирование нечетких суждений экспертов

В работе предложены два способа агрегирования нечетких суждений экспертов: нечеткая взвешенная сумма на базе операции общения и среднее нечеткое ранжирование. Нечеткие оценки объектов используются для расчета рангов на основе собственного вектора матрицы нечеткого отношения. Задача определения оптимального нечеткого ранжирования сведена к задаче линейного программирования.

Ключевые слова: эксперт, функция принадлежности, нечеткое число, парные сравнения, линейное программирование, собственный вектор

Alexey Igorevich Posadsky, Tatyana Vladimirovna Sivakova, Vladimir Anatolyevich Sudakov

Aggregation of Fuzzy Expert Judgments

Two methods of aggregating fuzzy judgments of experts are proposed in the work: a fuzzy weighted sum based on a generalization operation and an average fuzzy ranking. Fuzzy object scores are used to calculate ranks based on the eigenvector of the fuzzy ratio matrix. The problem of determining the optimal fuzzy ranking is reduced to the linear programming problem.

Key words: expert, membership function, fuzzy number, pairwise comparisons, linear programming, eigenvector

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-01-00520 А.

Оглавление

Введение 3
Нечеткая взвешенная сумма 4
Сравнение нечетких рангов 7
Среднее нечеткое ранжирование 10
Заключение 12
Библиографический список 12

Введение

Суждения экспертов часто носят нечисловой характер. Распространенная ошибка в таких задачах состоит в том, что ответы экспертов рассматривают как числа, приписывая мнению строго определённые численные значения, которые потом обрабатывают с помощью методов прикладной статистики как результаты обычных физико-технических измерений. В случае такой "цифровизации" выводы, полученные в результате обработки данных, могут не иметь отношения к реальности [1]. Кроме того, оценка объектов зачастую дается с некой погрешностью, которую необходимо учитывать. Для учета нечетких суждений целесообразно использование аппарата «мягких» вычислений, теории нечетких множеств.

Рассмотрим задачу, в которой эксперты высказывают нечеткие суждения о конечном множестве объектов оценки. Обычно объекты оцениваются по заданном множеству критериев или эксперт оценивает альтернативу в целом. Сведение нескольких нечётких значений первичных критериев в интегральную нечеткую оценку достаточно подробно было исследовано в работах авторов [2,3]. В сложных задачах поддержки принятия решений достаточно часто необходимо учитывать мнение различных специалистов. Поэтому актуальной является задача сведения нечетких оценок множества экспертов в единую оценку. Эксперты могут иметь нечеткие суждения как по поводу одного критерия, если они обладают схожей специализацией, так и по поводу разных критериев, если они оценивают различные аспекты объекта экспертизы. Простейший вариант решения данной задачи – это дефаззификация оценок. Если дана нечеткая оценка X с функцией принадлежности $\mu(x)$, то дефаззифицированная оценка X^a находится по формуле:

$$X^a = \frac{\int x\mu(x)dx}{\int \mu(x)dx}. \quad (1)$$

После дефаззификации можно воспользоваться массой распространённых методов обработки экспертных суждений [4]. Однако подобный подход теряет существенную информацию. Нечеткая оценка позволяет отразить не только «ценность» значения критерия для объекта экспертизы, но и степень уверенности эксперта в данной оценке.

На рисунке 1 показаны две экспертные оценки, хотя медиана оценки второго эксперта и больше медианы оценки второго эксперта, однако второй эксперт гораздо более уверен в своей оценке, и эту «уверенность» необходимо учитывать.

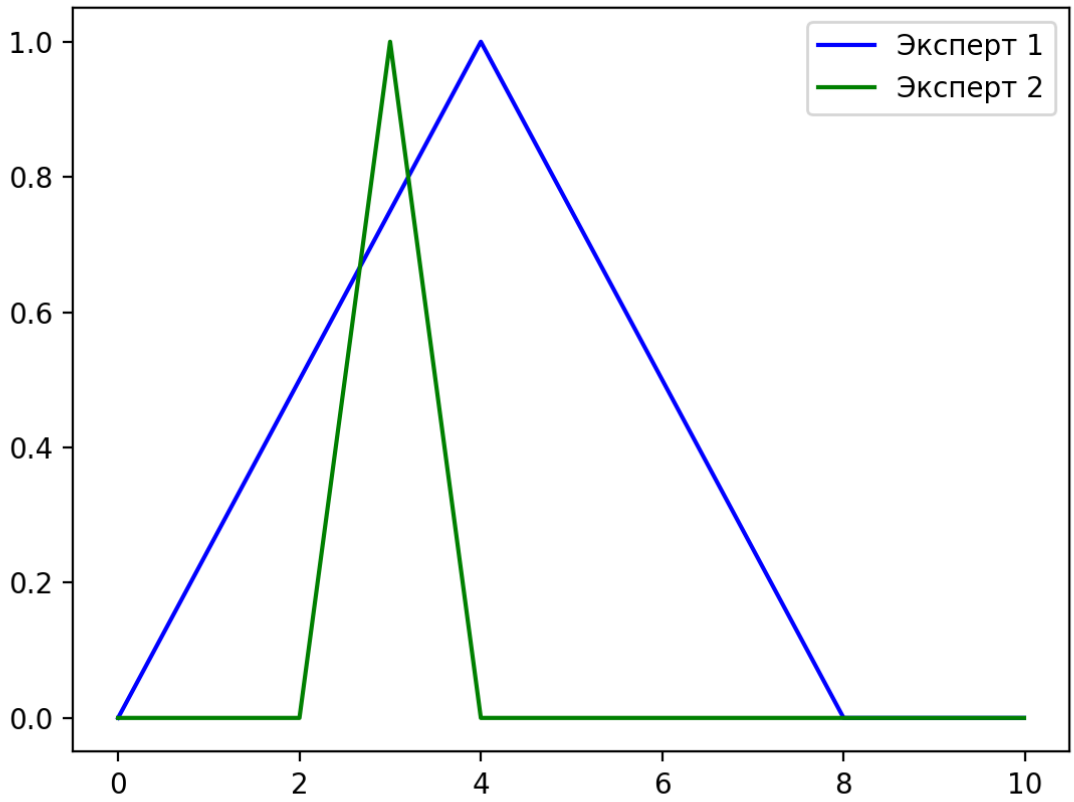

Рис. 1. Различия «размытости» оценок

Нечеткая взвешенная сумма

Простейшим вариантом общей оценки является нахождение средней нечетких оценок. Функция принадлежности общей оценки примет вид:

$$\mu(x^*) = \sup_{\substack{x_1,x_2,\dots x_n: \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = x^*}} \left(\min_i \mu_i(x_i)\right), \tag{2}$$

где $\mu_i(x_i)$ – это функция принадлежности оценки i-го эксперта, n – это число экспертов.

Пример расчета для двух экспертов приведен на рисунке 2.

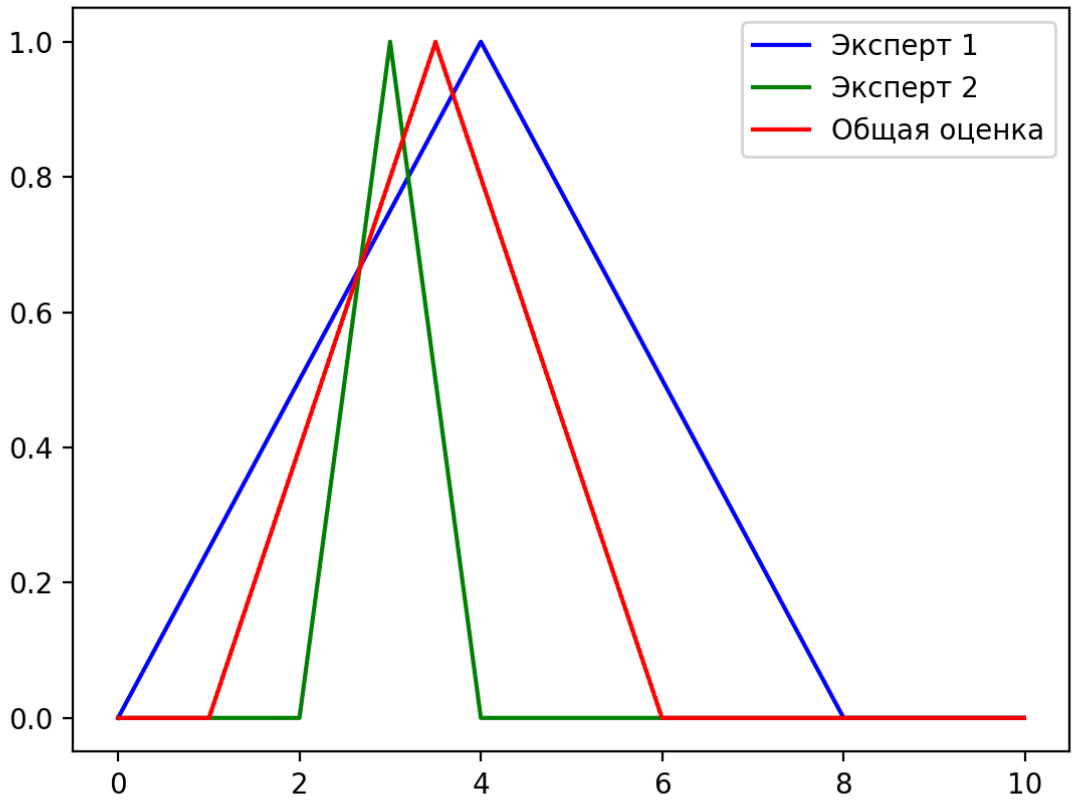

Рис. 2. Средняя нечетких оценок

Экспертам можно придать нечеткие веса. Если в решении задачи задействовано лицо, принимающее решение (ЛПР), то именно ЛПР может задать вес эксперта либо определить решающее правило по его расчету, например, чем большее количество экспертиз провел эксперт, тем больше его вес [5]. Правила расчета весов могут быть более сложными. Для оценки научно-исследовательских работ перспективным является анализ публикационной активности эксперта, определение рейтинга статей, соответствующих тематике проекта. Для оценки программных проектов эффективным является анализ профиля эксперта в системах контроля версий, например, Github. Формальные классификаторы текстов зачастую не отражают истинную тематику, но можно использовать методы глубокого машинного обучения, в частности нейронные сети, для распознавания реальной релевантности материала. Для задания нечеткой компетентности можно использовать модификаторы нечетких значений, например, для нечеткой темы «компетентный эксперт» возможны варианты: «*самый* компетентный эксперт», «*существенно* компетентный эксперт», «*достаточно* компетентный эксперт», «*удовлетворительно* компетентный эксперт» «*мало*компетентный эксперт». Соответствующие функции принадлежности компетентности эксперта

показаны на рисунке 3. Нечеткие веса эксперта могут варьироваться от проекта к проекту, в зависимости от релевантности тематики эксперту.

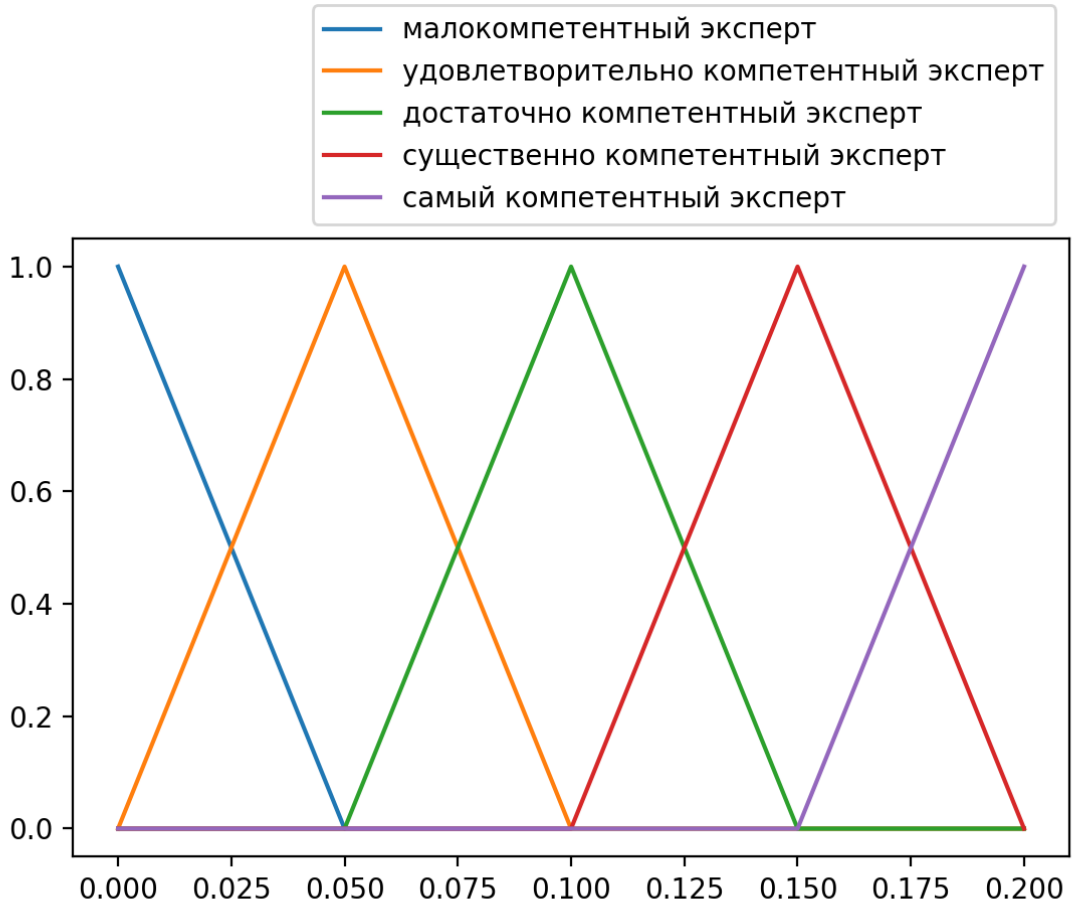

Рис. 3. Функции принадлежности компетентности экспертов

Вычисление итоговой оценки происходит по стандартной формуле взвешенной суммы:

$$X^* = \sum_{i=1}^{n} W_i X_i, \tag{3}$$

где X_i – нечеткая оценка альтернативы, а W_i – нечеткая компетентность эксперта, X^* – итоговая оценка альтернативы.

Правила суммирования и произведения нечетких чисел выполняются на основе принципа общения [6]. Функция принадлежности соответствующей операции:

$$\mu(y^*) = \sup_{\substack{y_1,y_2,\dots y_n: \\ \eta(y_1,y_2,\dots y_n)=y^*}} \left(\Theta_i \mu_i(y_i)\right), \tag{4}$$

где η – операция которую требуется применить (в случае вычисления $W_i X_i$ – это произведение, а для вычисления $\sum_{i=1}^{n} W_i X_i$ – это сумма), y_i – значения, к которым применяется требуемая операция, $\mu_i(y_i)$ – функция принадлежности нечетких значений, $\mu(y^*)$ – функция принадлежности для результата применения операции η. Θ – это операция пересечения для функций принадлежности. В данной работе – это min, однако существуют и другие разновидности данной операции [7].

Пусть «Эксперт 1» удовлетворительно компетентный, а «Эксперт 2» существенно компетентный. Тогда функция принадлежности итоговой оценки (3) будет иметь вид, показанный на рисунке 4.

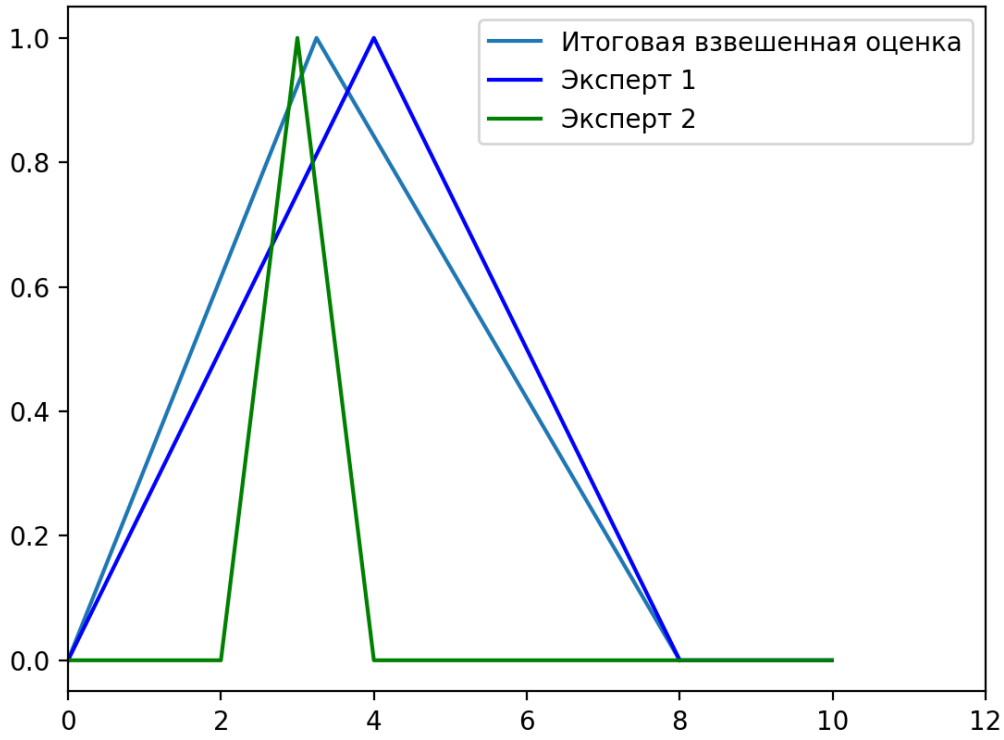

Рис. 4. Взвешенная по компетентности экспертов оценка

Расчет по формуле (2) хорош тем, что не требует привлечения ЛПР, с другой стороны, если ЛПР обладает некими предпочтениями или решающими правилами о компетенциях экспертов, то целесообразней расчет по формуле (3).

Сравнение нечетких рангов

Пусть мы получили нечеткие оценки нескольких объектов. Это могут быть оценки одного эксперта или оценка, полученная путем агрегирования нескольких мнений экспертов. Возникает вопрос: как построить ранжирование объектов? Как определить, какой объект лучше? Вместо дефаззификации, которая используется во многих работах, в данной работе предлагается переход

к парным сравнениям нечетких рангов. Далее будем считать, что чем больше значение оценки, тем объект лучше.

Рассмотрим два объекта: A_i и A_j. Между ними можно определить нечеткое бинарное отношение: $A_i \succcurlyeq A_j$. Оно говорит о том, что объект A_i не хуже, чем объект A_j. Степень уверенности, что два объекта находятся в отношении $\succcurlyeq$, задается числом $r_{ij} \in [0,1]$. Таким образом, можно задать матрицу бинарного отношения:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & & r_{2m} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & & r_{3m} \\ & & & \dots & \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

В общем случае данная матрица не является ни симметричной, ни обратно симметричной. Элементы данной матрицы находятся путем анализа соответствующих объектам A_i и A_j функций принадлежности:

$$r_{ij} = \sup_{\substack{x_i, x_j: \\ x_i \geq x_j}} \left[\min(\mu_i(x_i), \mu_j(x_j))\right]. \quad (6)$$

Итоговые ранги объектов можно найти, используя метод парных сравнений Саати [8]. Метод Саати предполагает использование мультипликативной матрицы: r_{ij} показывают, *во сколько* раз один объект предпочтительней другого, т.е. $r_{ij} \cdot r_{ji} = 1$, но в нашем случае это не так. Проведя простейшие арифметические преобразования, можно добиться выполнения требуемого условия:

$$R^* = \left\| r_{ij}^* = \frac{r_{ij}}{r_{ji}} \right\|. \quad (7)$$

Далее из уравнения:

$$(\lambda I - R^*)u = 0 \quad (8)$$

найдем максимальное собственное значение λ_{max}^* и соответствующий ему вектор факторов влияния u^*. Элемент u_i^* будет итоговым рангом альтернативы A_i. Значение λ_{max}^* позволяет определить противоречивость нечетких отношений предпочтительности C:

$$C = \frac{\lambda_{max}^* - m}{m - 1}. \quad (9)$$

На практике значение C<0.1 говорит об отсутствии существенных противоречий в нечетком ранжировании.

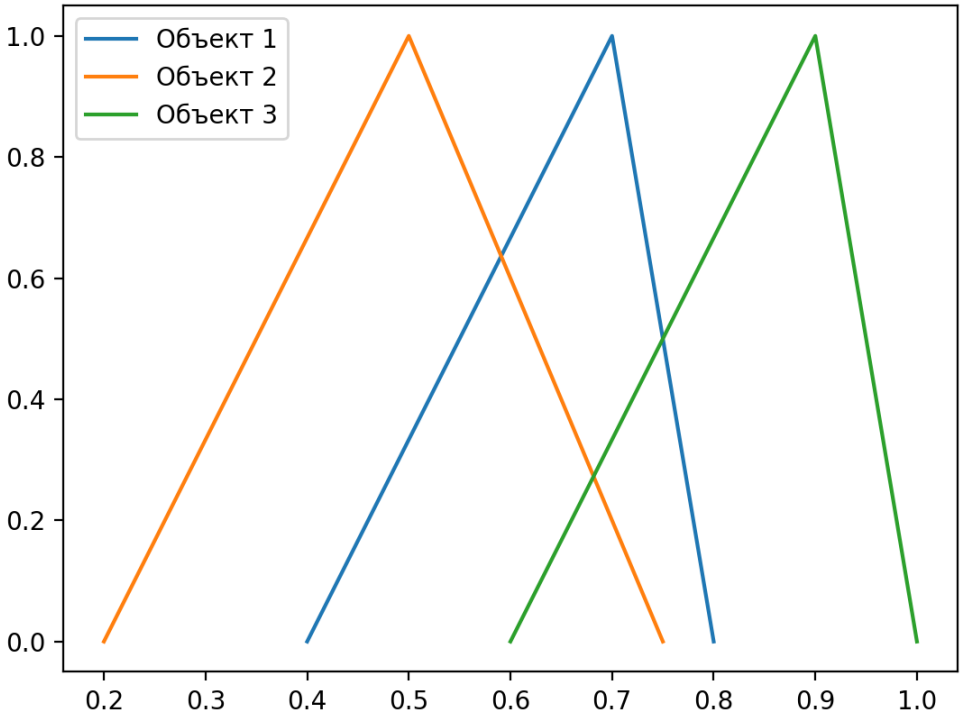

Рис. 5. Нечеткие оценки объектов

На рисунке 5 показаны 3 объекта, для которых были определены нечеткие экспертные оценки. На основании данных оценок по формуле (6) были вычислены элементы матрицы нечеткого бинарного отношения предпочтительности:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 0.64 & 1 & 0.27 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Далее по формуле (7) был осуществлён переход к мультипликативной матрице:

$$R^* = \begin{bmatrix} 1 & 1.57 & 0.5 \\ 0.64 & 1 & 0.27 \\ 2 & 3.67 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Максимальное собственное значение λ^*_{max} = 3.003. Соответствующий собственный вектор u^* = (0.415, 0.251, 0.874). Индекс противоречивости: C=0.0013, что говорит о хорошей согласованности рангов объектов.

В результате, объекты расположились в следующем порядке:

1) объект 3 с рангом 0.874,
2) объект 1 с рангом 0.415,
3) объект 2 с рангом 0.251.

Среднее нечеткое ранжирование

Формулы (2) и (3), предназначенные для агрегирования суждений экспертов, обладают тем недостатком, что результат их применения может быть далек от мнения большинства экспертов. Так происходит, когда существенно высокая или существенно низкая оценка одного эксперта может сильно смещать итоговую оценку.

Чтобы устранить указанные недостатки, предлагается следующий алгоритм:

1) по формуле (6) рассчитываются элементы матриц R_k для каждого k-го эксперта;
2) путем решения оптимизационной задачи находится «медианное» нечеткое отношение R^{v}, которое «близко» мнению большинства экспертов;
3) в формулу (7) подставляются элементы R^{v} вместо элементов R, и таким образом находятся итоговые оценки объектов.

Рассмотрим второй шаг данного алгоритма более подробно.

Пусть нечеткое отношение R^{v} представлено в виде следующей матрицы:

$$R^{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12}^{\mathrm{v}} & r_{13}^{\mathrm{v}} & & r_{1m}^{\mathrm{v}} \\ r_{21}^{\mathrm{v}} & 1 & r_{23}^{\mathrm{v}} & & r_{2m}^{\mathrm{v}} \\ r_{31}^{\mathrm{v}} & r_{32}^{\mathrm{v}} & 1 & & r_{3m}^{\mathrm{v}} \\ & & & \dots & \\ r_{m1}^{\mathrm{v}} & r_{m2}^{\mathrm{v}} & r_{m3}^{\mathrm{v}} & & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Нечеткое отношение для k-го эксперта представлено в виде следующей матрицы:

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & r_{12}^{k} & r_{13}^{k} & & r_{1m}^{k} \\ r_{21}^{k} & 1 & r_{23}^{k} & & r_{2m}^{k} \\ r_{31}^{k} & r_{32}^{k} & 1 & & r_{3m}^{k} \\ & & & \dots & \\ r_{m1}^{k} & r_{m2}^{k} & r_{m3}^{k} & & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

В качестве метрики для расстояния между отношениями R^{v} и R_k используем Манхэттенское расстояние [9]. Оно вычисляется по формуле:

$$d(R^{\text{v}}, R_k) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left| r_{ij}^{k} - r_{ij}^{\text{v}} \right|. \tag{14}$$

Сумма расстояний от всех отношений R_k до R^{v} задает целевую функцию оптимизационной задачи:

$$\min_{r_{ij}^{\text{v}}} \sum_{k=1}^{n} d(R^{\text{v}}, R_k) = \min_{r_{ij}^{\text{v}}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left| r_{ij}^{k} - r_{ij}^{\text{v}} \right|. \tag{15}$$

Такая постановка задачи близка медиане Кемени для случай «четких» ранжирований [10]. Исходная постановка медиана Кемени трудноразрешима в силу бинарных оптимизационных переменных, тогда как в данной постановке ограничение существенно мягче: $r_{ij}^{\text{v}} \in [0,1]$.

Целевая функция (14) нелинейна, но задача легко может быть преобразована к задаче линейного программирования. Введем две новые неотрицательные вещественные переменные: y_{ij}^{+} и y_{ij}^{-}. Для них должно выполняться ограничение:

$$y_{ij}^{+} - y_{ij}^{-} = r_{ij}^{k} - r_{ij}^{\text{v}}. \tag{16}$$

Так как переменные y_{ij}^{+} и y_{ij}^{-} неотрицательные, можно избавиться от модуля:

$$\left| r_{ij}^{k} - r_{ij}^{\text{v}} \right| = \left| y_{ij}^{+} - y_{ij}^{-} \right| = y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-}. \tag{17}$$

В результате преобразованная задача будет записана в виде:

$$\begin{gathered} \min_{\substack{r_{ij}^{\text{v}}, \\ y_{ij}^{+}, y_{ij}^{-}}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left(y_{ij}^{+} + y_{ij}^{-} \right), \\ y_{ij}^{+} - y_{ij}^{-} + r_{ij}^{\text{v}} = r_{ij}^{k}, \\ y_{ij}^{+} \geq 0, y_{ij}^{-} \geq 0, 0 \leq r_{ij}^{\text{v}} \leq 1. \end{gathered} \tag{18}$$

Оптимальное решение оптимизационной задачи не изменится, если для каждой комбинации (*i,j*), y_{ij}^{+} или y_{ij}^{-} будет равен нулю. Если $r_{ij}^{k} - r_{ij}^{\text{v}} < 0$, то $y_{ij}^{+} = 0$, а если $r_{ij}^{k} - r_{ij}^{\text{v}} > 0$, то $y_{ij}^{-} = 0$.

Заключение

Предложенные методики агрегирования нечетких суждений экспертов позволяют сохранить информацию о размытости и неопределенности суждений эксперта до самого последнего этапа принятия решений. Подход на базе нечеткого взвешенного суммирования позволяет учесть степень доверия к эксперту и его квалификацию.

Нечеткое ранжирование на базе экспертных суждений позволяет оценивать степень согласованности полученных результатов. Перспективным в будущих исследования видится вопрос анализа и сопоставлений особых способов вычисления пересечений нечетких множеств как замены операции минимума функции принадлежности. Формализация задачи линейного программирования позволяет эффективно находить аналог медианы Кемени для нечетких суждений.

Библиографический список

1. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: учебник: в 3 ч. Часть 2: Экспертные оценки. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2011. – 486 с.

2. Осипов В.П., Судаков В.А. Многокритериальный анализ решений при нечетких областях предпочтений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. No 6. 16 с. doi:10.20948/prepr-2017-6 URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-6.

3. Dutov V., Nesterov V. A., Sudakov V. A., Sypalo K. I. Fuzzy Preference Domains and Their Use for Selecting an Electronic Flight Bag for Flight Crews // Journal of Computer and Systems Sciences International, 2018, Vol. 57, No. 2, pp. 230–238. ISSN 1064-2307. DOI: 10.1134/S1064230718020065. URL: https://link.springer.com/article/10.1134/S1064230718020065.

4. Литвак Б.Г. Экспертные оценки и принятие решений. М.: Патент, 1996. – 271 с.

5. Осипов В.П., Сивакова Т.В., Посадский А.И., Судаков В.А. Комбинированная методика нечеткого ранжирования альтернатив на основе функций предпочтений // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2019. Т. 15. № 1. С. 87-93.

6. Прикладные нечеткие системы: Пер. с япон. / К.Асаи, Д.Ватада, С.Иваи и др.; под ред. Т.Тэрано, К.Асаи, М.Сугэно. – М.: Мир, 1993. 368 с.

7. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы: Пер. с польск. И. Д. Рудинского. - М.: Горячая линия -Телеком, 2006. - 452 с.

8. Saaty T.L., Vargas L. G. Models, Methods, Concepts and Applications of the Analytic Hierarchy Process. Boston: Kluwer Academic Publishers. 2000.

9. Deza M. Deza, E. Encyclopedia of distances. Fourth edition. Springer, Berlin, 2016. 756 pp.

10. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование: Некоторые приложения. - М.: Советское радио, 1972. - 192 с.