



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 106 за 2019 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Трапезникова М.А.](#),
[Чурбанова Н.Г.](#), Жураев Г.У.

Применение метода
фиктивных областей для
моделирования течений газа
при малых числах Маха

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Жураев Г.У. Применение метода фиктивных областей для моделирования течений газа при малых числах Маха // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 106. 12 с. doi:[10.20948/prepr-2019-106](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-106)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-106>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.А. Трапезникова, Н.Г. Чурбанова, Г.У. Жураев

**Применение метода
фиктивных областей
для моделирования течений газа
при малых числах Маха**

Москва — 2019

Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Жураев Г.У.

Применение метода фиктивных областей для моделирования течений газа при малых числах Маха

Рассматривается новый подход к моделированию течений слабосжимаемого газа, основанный на квазигазодинамической системе уравнений. Предлагается процедура разбиения давления на две компоненты: среднюю и динамическую. При выводе безразмерной формы уравнений для этих компонент используются различные характерные величины, что позволяет избежать особенностей при числе Маха, стремящемся к нулю. Разрабатывается специальный вычислительный алгоритм, содержащий решение эллиптического уравнения для поправки динамической компоненты давления. Для обеспечения однородности алгоритма применяется метод фиктивных областей. Проведенные тестовые расчёты демонстрируют точность и надёжность предлагаемых методов.

Ключевые слова: течения слабосжимаемого газа, малые числа Маха, квазигазодинамическая система уравнений, раздельное давление, поправки давления

Marina Alexandrovna Trapeznikova, Natalia Gennadiyevna Churbanova, Gairat Umarovich Juraev

Application of the fictitious domains method for the simulation of gas flows at low Mach numbers

A new approach to the simulation of slightly-compressible gas flows based on the quasigasdynamic system of equations is under consideration. The procedure of pressure decomposition into two components — a volume-averaged part and a dynamic part - is proposed. To derive the dimensionless form of the equations, different reference values for these components are used what allows to avoid singularities at Mach number tending to zero. A special computational algorithm including the solution of elliptic equation for the increment of the pressure dynamic component is developed. To ensure homogeneity of the algorithm, the fictitious domain method is used. Test predictions indicate accuracy and robustness of the proposed methods.

Key words: slightly-compressible gas flows, low Mach number, quasigasdynamic system of equations, decomposed pressure, pressure increments

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 18-01-00587-а, 18-51-41001-Узб_т и Гранта Агентства по науке и технологиям Республики Узбекистан № MRU-OT-30/2017.

Введение

Работа посвящена проблеме численного моделирования течений вязкого сжимаемого газа при относительно небольших по сравнению со скоростью звука газодинамических скоростях, то есть при малых числах Маха – $M \leq 0.1$. Медленные течения газа являются основой технологических процессов в некоторых промышленных установках. Описание многих процессов, связанных с моделированием климата и переноса загрязнений воздушными массами, также опирается на исследование течений газа при небольших скоростях. Кроме того, при моделировании течений в пористых средах одной из основных современных тенденций является прямое описание течения флюида в пористых каналах, имеющих сложную геометрию, при помощи газодинамических уравнений. Поэтому расчеты подобного рода течений представляют большой практический интерес и при решении прикладных фильтрационных задач, например, задач, связанных с проблемами добычи углеводородов.

Особенность течений газа при малых числах Маха состоит в том, что они, с одной стороны, близки к течениям жидкости, в них скорость распространения малых возмущений намного больше скорости газа, а с другой стороны, в них проявляется свойство сжимаемости среды. Численное моделирование таких течений сталкивается с многочисленными трудностями, которые возникают, когда сжимаемость значительно проявляется даже при существенно дозвуковой скорости течения. В качестве примеров такого рода задач, в первую очередь, можно назвать задачи свободной и смешанной конвекции при большой разнице максимальной и минимальной температур.

Математическая модель и вычислительный алгоритм должны учитывать особенности поведения давления при малых числах Маха, иначе возможно существенное снижение точности. При стремлении числа Маха к нулю нарушается взаимосвязь давления и плотности. В рассматриваемых задачах газ является слабосжимаемым, то есть, вообще говоря, не наблюдается сильных перепадов плотности даже в тех случаях, когда нельзя пренебречь сжимаемостью среды. При этом давление изменяется более ощутимо. Поэтому, в отличие от традиционного подхода к расчету газодинамических течений, давление, а не плотность должно рассматриваться в качестве основной зависимой переменной при разработке алгоритма.

Реализация подобного подхода была осуществлена в работе [1] для полных уравнений Навье–Стокса. Ниже будет рассмотрена реализация этого подхода для другой модели – квазигазодинамической (КГД) системы уравнений [2].

Квазигазодинамическая система уравнений с расщепленным давлением

Квазигазодинамическая (КГД) система уравнений [2] успешно зарекомендовала себя при решении задач газовой динамики в широком диапазоне чисел Маха. В пространственно-двумерном случае система выглядит следующим образом (в данном случае пренебрегаем смешанными производными):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + P); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + P) + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3 + 3Pu) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 u + Pu); \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + P) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 v + Pv) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^3 + 3Pv); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (u(E+P))}{\partial x} + \frac{\partial (v(E+P))}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 (E+2P) + \frac{P(E+P)}{\rho} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(v^2 (E+2P) + \frac{P(E+P)}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{Уравнения состояния: } P = \rho RT, \quad \varepsilon = \frac{P}{(\gamma-1)\rho} \quad (5)$$

Здесь: ρ – плотность, u и v – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости соответственно, P – давление, $E = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$ – полная энергия, ε – внутренняя энергия. Параметр $\tau = 2\mu/P$, где μ – коэффициент динамической вязкости.

В правой части КГД-уравнений стоят диффузионные члены, которые можно рассматривать как сглаживающие члены, играющие роль искусственной вязкости и позволяющие использовать в разностных схемах центральные разности по пространству.

В работе [3] было еще раз указано на то, что в случае дозвуковых течений ($M \leq 0.1$) слабосжимаемых жидкостей при использовании системы уравнений (1)-(4) могут возникать вычислительные проблемы из-за нарушения взаимосвязи давления и плотности. При больших градиентах давления плотность может меняться незначительно, и уравнения состояния не будут давать требуемой точности.

В [1] был предложен способ обезразмеривания и вычислительный алгоритм, позволяющие избежать указанных трудностей и повысить точность

вычислений. В работе [3] указанные методы были применены к КГД-системе. Далее приведем краткое описание проделанных преобразований.

В течениях слабосжимаемой жидкости при $M \rightarrow 0$ скорость зависит от величины отклонения давления от некоторой средней величины, которая сохраняет свое значение во всей рассматриваемой области. Это отклонение, называемое динамическим давлением (в отличие от среднего давления) пропорционально $\rho_0 U_0^2$, где ρ_0 и U_0 – характерные значения задачи.

При обезразмеривании КГД-системы давление представляется в виде суммы двух составляющих: средней (осредненной по объему - \bar{p}) и динамической (Π) частей:

$$P(t, x) = P_0 \bar{p}(t) + \rho_0 U_0^2 \Pi(t, x). \quad (6)$$

Среднее давление имеет термодинамический смысл, зависит только от времени и постоянно по пространству. Динамическое давление зависит как от пространственных переменных, так и от времени, при этом \bar{p} обезразмеривается на среднюю величину P_0 , а Π – на $\rho_0 U_0^2$. В результате безразмерное давление определяется формулой:

$$p(t, x) = \bar{p}(t) + \gamma M^2 \Pi(t, x). \quad (7)$$

В результате была получена следующая безразмерная форма КГД-уравнений с расщепленным давлением в пространственно-двумерном случае:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = \frac{\gamma M^2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + \Pi) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + \Pi) \right); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + \Pi) + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = \\ & \frac{\gamma M^2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^3 + 3\Pi u) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v^2 + \Pi u) \right) + \end{aligned} \quad (9)$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (3\bar{p}u) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p}v) \right)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial u v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + \Pi) = \quad (10)$$

$$\frac{\gamma M^2}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 v + \Pi u) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^3 + 3\Pi v) \right) +$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}u) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} (3\bar{p}v) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \gamma M^2 (\gamma - 1) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho (u^2 + v^2)}{2} + (\gamma - 1) \frac{\partial}{\partial x} u \left[\gamma M^2 \frac{\rho (u^2 + v^2)}{2} + \frac{\rho \varepsilon}{\gamma - 1} + p \right] + \\
& + (\gamma - 1) \frac{\partial}{\partial y} v \left[\gamma M^2 \frac{\rho (u^2 + v^2)}{2} + \frac{\rho \varepsilon}{\gamma - 1} + p \right] = \\
& = \frac{\gamma M^2 (\gamma - 1)}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[u^2 \left(\gamma M^2 \frac{\rho (u^2 + v^2)}{2} + \frac{\rho \varepsilon}{\gamma - 1} + 2p \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[v^2 \left(\gamma M^2 \frac{\rho (u^2 + v^2)}{2} + \frac{\rho \varepsilon}{\gamma - 1} + 2p \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{(\gamma - 1)}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p}{\rho} \left(\gamma M^2 \frac{\rho (u^2 + v^2)}{2} + \frac{\rho \varepsilon}{\gamma - 1} + p \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{p}{\rho} \left(\gamma M^2 \frac{\rho (u^2 + v^2)}{2} + \frac{\rho \varepsilon}{\gamma - 1} + p \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{11}$$

Уравнения состояния:

$$\rho = \frac{p}{T}, \quad \varepsilon = \frac{T}{\gamma(\gamma - 1)M^2}, \quad p = \bar{p} + \gamma M^2 \Pi. \tag{12}$$

$$\int \Pi dv = 0. \tag{13}$$

Уравнение энергии (11) записано относительно внутренней энергии.

Система с расщеплённым давлением (8)-(13) отличается от исходной квазигазодинамической системы (1)-(4). Расщепление давления на среднюю и динамическую части позволило при обезразмеривании избежать в правой части уравнений умножения на коэффициент $1/M^2$, который создает особенность при стремлении числа Маха к нулю. Следовательно, предложенный алгоритм позволяет проводить расчеты при сколь угодно малых числах Маха, не теряя при этом устойчивости системы благодаря ненулевым диффузионным членам в правой части.

Кроме того, в случае слабосжимаемых газов следует использовать уравнение состояния, выражающее зависимость плотности от давления, а не наоборот, чтобы избежать вычислительных проблем, о которых говорилось выше. В этом случае возникает необходимость в разработке специального алгоритма для расчета давления. Для этого вводится понятие поправок для обеих составляющих давления как разницы между значениями на настоящем и предыдущем слоях по времени:

$$\delta \bar{p} = \bar{p}^{n+1} - \bar{p}^n, \quad \delta \Pi = \Pi^{n+1} - \Pi^n, \quad (14)$$

где n – номер слоя по времени.

Учитывая эти поправки, для полного давления на текущем временном слое ($n+1$) можно написать уравнение:

$$p^{n+1} = p^n + \delta \bar{p} + \gamma M^2 \delta \Pi. \quad (15)$$

В [3] был подробно описан алгоритм расчета поправок, опирающийся на известные методы коррекции давления (или предиктор-корректор). Сначала на каждом временном слое находятся промежуточные значения поправок динамической и средней составляющих частей давления. Для этого решается эллиптическое уравнение относительно промежуточного значения поправки динамического давления:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_h \operatorname{grad}_h (\delta \Pi)^* - \frac{\gamma M^2}{(\Delta t)^2 T^{n+1}} (\delta \Pi)^* = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div}_h (\rho \mathbf{u})^{n+1/2} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{(\delta \bar{p})^*}{T^{n+1}} + \\ + \frac{p^n}{(\Delta t)^2} \left(\frac{1}{T^{n+1}} - \frac{1}{T^n} \right) - \frac{\gamma M^2}{\Delta t \operatorname{Re}} \left[\left(\frac{\tau}{2} (\rho u^2 + \Pi)_{\bar{x}} \right)_x + \left(\frac{\tau}{2} (\rho v^2 + \Pi)_{\bar{y}} \right)_y \right]^n \end{aligned} \quad (16)$$

и уравнение для промежуточного значения поправки среднего давления:

$$\begin{aligned} (\delta \bar{p})^* = - \left(\sum_{\omega} \frac{1}{T^{n+1}} h_1 h_2 \right)^{-1} \left(\Delta t \sum_{\partial \omega} ((\rho \mathbf{u})^{n+1}, \mathbf{n}) h_{\partial \omega} + \sum_{\omega} p^n \left(\frac{1}{T^{n+1}} - \frac{1}{T^n} \right) h_1 h_2 - \right. \\ \left. - \Delta t \frac{\gamma M^2}{\operatorname{Re}} \sum_{\omega} \left[\left(\frac{\tau}{2} (\rho u^2 + \Pi)_{\bar{x}} \right)_x + \left(\frac{\tau}{2} (\rho v^2 + \Pi)_{\bar{y}} \right)_y \right]^n h_1 h_2 \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Далее строится итерационная процедура, требующая нескольких итераций, для достижения заданной точности всех искомым величин (внутренняя энергия, значения импульсов, температура, плотность, промежуточные поправки давления). Для окончательных значений поправок давления при помощи алгебраических преобразований выводятся следующие уравнения:

$$\delta \bar{p} = (\delta \bar{p})^* + \frac{\gamma M^2}{V_{\Omega}} \int_{\Omega} (\delta \Pi)^* dv \quad (18)$$

$$\delta \Pi = (\delta \Pi)^* - \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{\Omega} (\delta \Pi)^* dv. \quad (19)$$

Подробно алгоритм вычислений описан в работе [3].

Метод фиктивных областей

Для реализации сквозного счёта, то есть счёта по всей области без выделения особых областей, например, препятствий с непроницаемыми стенками и задания граничных условий на них, была разработана специальная процедура вычислений. В начале расчётов задаётся так называемая "карта области", то есть каждой расчётной точке приписывается индикатор, указывающий, является ли данная точка регулярной, или находится внутри особой области, или является границей расчетной области (рис.°1). Далее разностные уравнения с использованием индикаторов записываются единым образом по всей расчетной области так, что потоковые члены автоматически становятся равны нулю, если поток вычисляется через непроницаемую стенку. То есть на стенке автоматически выполняется условие непротекания. Аналогично, с помощью индикаторов, можно вычислять и градиент давления на стенке, то есть реализовать условия прилипания, если это необходимо.

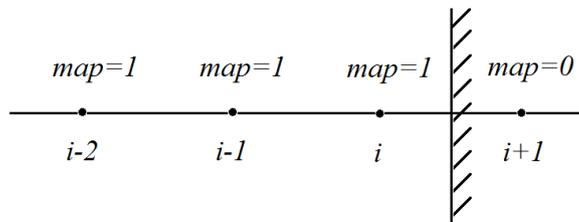


Рис. 1. Иллюстрация задания "карты области"

Если первые производные в уравнениях аппроксимируются центральными разностями, то в соответствии с вышесказанным производные от потоковых членов могут быть записаны следующим образом:

$$\left. \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} \right|_i \sim 0.5 \left(\frac{\text{map}_{i+1} \text{map}_i \left((\rho u^2)_{i+1} + (\rho u^2)_i \right)}{h} - \frac{\text{map}_i \text{map}_{i-1} \left((\rho u^2)_i + (\rho u^2)_{i-1} \right)}{h} \right).$$

Производная от давления записывается в следующем виде:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|_i \sim 0.5 \left(\frac{\text{map}_{i+1} \text{map}_i (\Pi_{i+1} - \Pi_i)}{h} + \frac{\text{map}_i \text{map}_{i-1} (\Pi_i - \Pi_{i-1})}{h} \right).$$

Аналогичные формулы используются и для коэффициентов эллиптического уравнения для поправки давления (16). Применение описанного алгоритма позволяет значительно упростить вычисления, когда необходимо решать эллиптическое уравнение с помощью итерационных методов, так как позволяет проводить итерации целиком по всей расчетной области.

Примеры тестовых расчетов

Приведенный алгоритм был использован для решения нескольких тестовых задач. Число Маха во всех приведенных расчетах задавалось: $M=0.1$.

В первой тестовой задаче рассматривается течение в канале с непроницаемыми стенками. Посередине канал разделяет непроницаемая перегородка, тянущаяся вдоль него до самого конца (рис. 2 (а)).

Скорость входного потока постоянна по всему сечению канала. На стенках и на перегородке заданы условия прилипания, в конце канала: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Число Рейнольдса: $Re=100$.

На рис. 2 (б) представлены профили продольной скорости установившегося течения на выходе из канала:

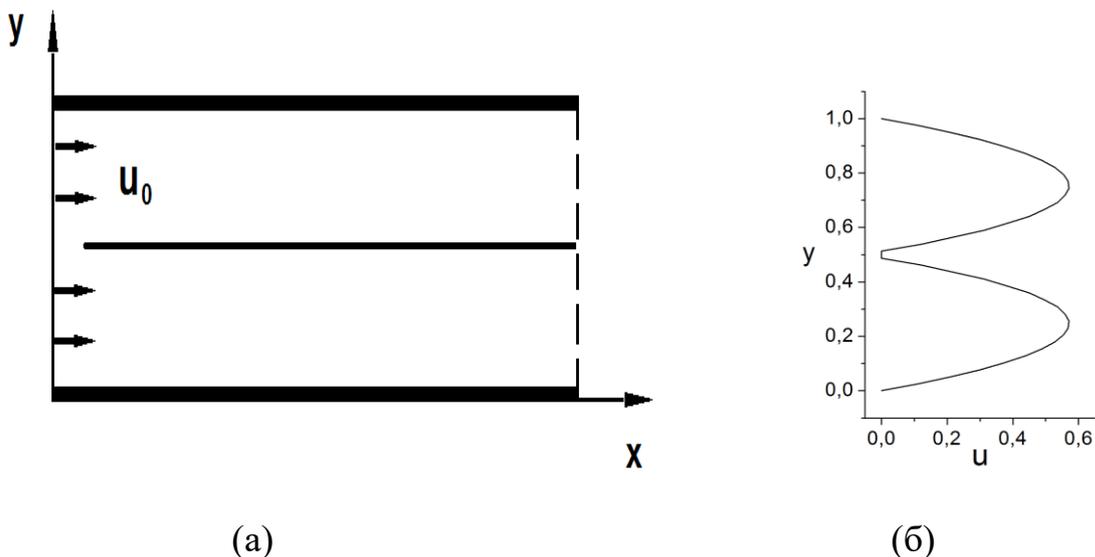


Рис. 2. Течение в канале с перегородкой: (а) постановка задачи, (б) полученный профиль горизонтальной скорости на выходе из канала

Из рисунка видно, что выходная скорость распределена симметрично в обеих подобластях, в каждой из них установилось течение Пуазейля.

Второй тестовой задачей была задача об обтекании несвязанной области сложной формы. Постановка задачи приведена на рисунке 3.

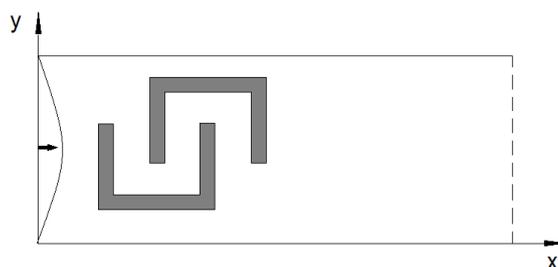


Рис. 3. Постановка задачи об обтекании области сложной формы

Расчетная область представляет собой прямоугольный канал с непроницаемыми стенками. Слева в канал втекает поток, горизонтальная составляющая скорости имеет параболический профиль с максимумом, равным 1.5. Внутри канала имеется непроницаемая область, состоящая из двух несвязанных сегментов. На всех непроницаемых стенках при помощи описанного выше метода фиктивных областей реализуются условия прилипания. Для вытекающего потока ставится условие: $\partial u / \partial x = 0$.

Вычисления велись сквозным счетом по всей области, размер сетки: 300×100 . На рисунках 4 и 5(а-в) приведены поля скоростей по результатам расчётов при разных числах Рейнольдса.

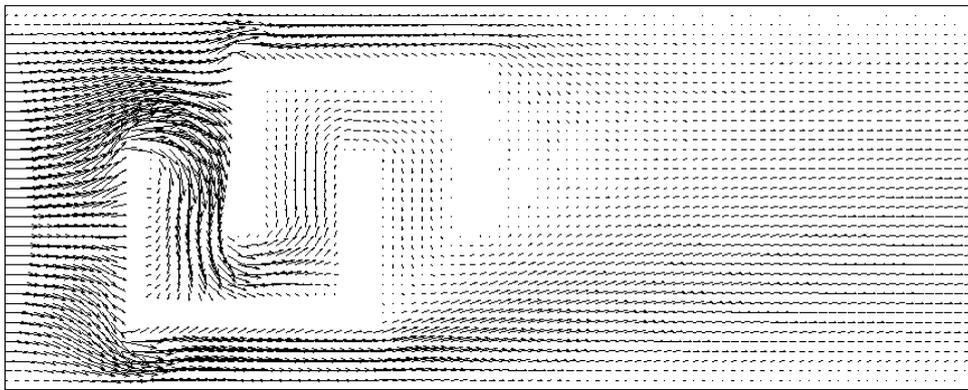
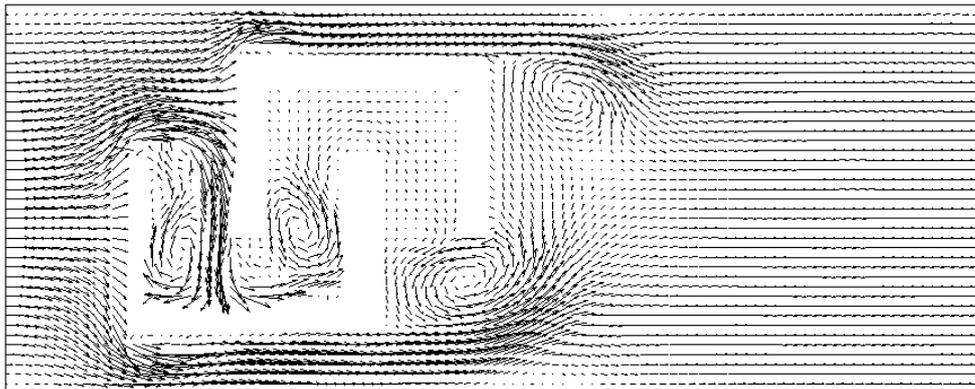
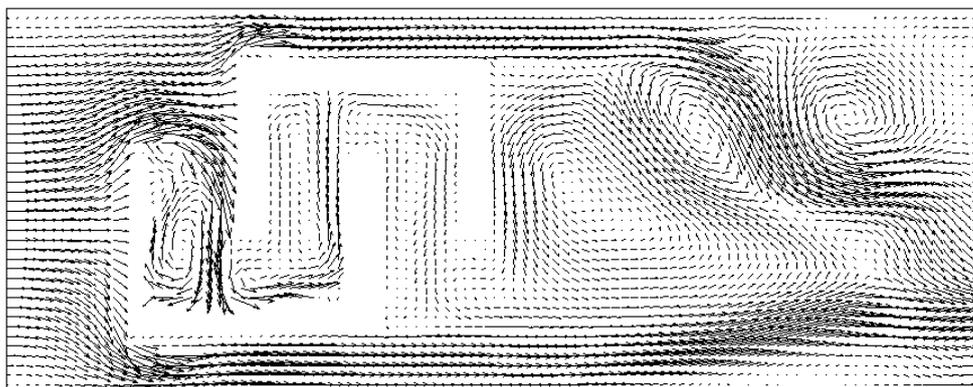


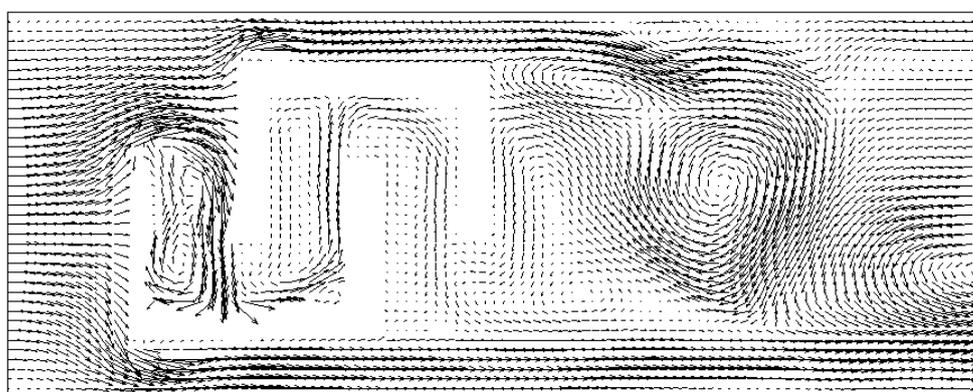
Рис. 4. Течение в канале сложной области, $Re=30$



(а)



(б)



(в)

Рис. 5. Течение в канале сложной области на три последовательных момента времени, $Re=400$

Заключение

В препринте представлен один из возможных подходов к моделированию течений слабосжимаемого газа при малых числах Маха, включая случай $M=0$. Подход основан на квазигазодинамической системе уравнений и использует технику расщепления давления. Этот подход был проиллюстрирован результатами тестовых расчетов и может быть применен также для решения сложных задач, представляющих практический интерес, например при расчетах газодинамических течений в областях сложной формы, в частности, течений в пористых средах.

Библиографический список

1. Churbanov A.G. and Pavlov A.N. A Pressure-Based Algorithm to Solve the Full Navier-Stokes Equations at Low Mach Number, *Computational Fluid Dynamics '98*, Wiley, Chichester, 1998, pp. 894-899.

2. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. - М.: МАКС Пресс, 2004. - 332 с.

3. Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г. Моделирование течений газа при малых числах Маха на основе квазигазодинамической системы уравнений. Вестник АГТУ Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика, 2014, № 3, с. 113-124.

Оглавление

Введение.....	3
Квазигазодинамическая система уравнений с расщепленным давлением	4
Метод фиктивных областей	8
Примеры тестовых расчетов	9
Заключение.....	11
Библиографический список.....	11