



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Алексеев А.К., Бондарев А.Е.

Использование ансамбля
численных решений для
оценки погрешностей
усечения и аппроксимации

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Алексеев А.К., Бондарев А.Е. Использование ансамбля численных решений для оценки погрешностей усечения и аппроксимации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 107. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2019-107](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-107)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-107>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.К. Алексеев, А.Е. Бондарев

**Использование ансамбля численных
решений для оценки погрешностей
усечения и аппроксимации**

Москва — 2019

Алексеев А.К., Бондарев А.Е.

Использование ансамбля численных решений для оценки погрешностей усечения и аппроксимации

Оценены погрешности усечения и погрешности аппроксимации для ансамбля численных решений, полученного методами, использующими независимые алгоритмы и имеющими различные свойства, включая номинальные порядки аппроксимации. Углы между погрешностями аппроксимации расчетов на данном ансамбле достаточно далеки от нуля, что позволяет осуществить апостериорную оценку нормы погрешности аппроксимации решений. Также апостериорную оценку удастся получить с помощью анализа расстояний между решениями. Рассмотрены способы обработки данных, обеспечивающие получение апостериорной оценки нормы погрешности с приемлемыми величинами индекса эффективности. Представлены результаты численных экспериментов для течений сжимаемого невязкого газа. Для получения численных результатов использована концепция обобщенного вычислительного эксперимента, позволяющая одновременное решение одной задачи при вариации определяющих параметров. Здесь в качестве определяющего параметра может рассматриваться выбор солвера. Наблюдаемое поведение погрешностей может быть объяснено с точки зрения феномена теории концентрации меры и алгоритмической случайности.

Ключевые слова: погрешность аппроксимации, погрешность усечения, апостериорная оценка погрешности, концентрация меры, обобщенный вычислительный эксперимент

Alexey Kirillovich Alexeev, Alexander Evgenyevich Bondarev

The features of the of truncation and approximation errors' geometry on the ensemble of numerical solutions

The truncation and approximation errors are estimated for the ensemble of numerical solutions obtained using methods based on the independent algorithms of different properties including nominal convergence orders. The angles between approximation errors of the solutions of considered ensemble are far from zero that enables a posteriori estimation of approximation error norm. Also, an posteriori error estimation may be obtained by the analysis of the distances between solutions. The methods for data treating are considered, which provide a posteriori error norm estimation with the acceptable values of the efficiency index. The results of the numerical tests for flows of inviscid compressible flow are presented. To obtain numerical results, the concept of a generalized computational experiment was used, which allows the simultaneous solution of one problem with variation of the determining parameters. Here, the choice of a solver can be considered as a determining parameter. The observed behavior of errors may be explained form the standpoint of the measure concentration phenomenon and algorithmic randomness.

Key words: approximation error, truncation error, a posteriori error estimation, measure concentration, generalized computational experiment

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 19-01-00402-а.

Введение

Достаточно давно известно, что теория концентрации меры [1-6] имеет существенное значение в статистической термодинамике, как системе многих переменных. С этой точки зрения сеточные функции, используемые при дискретизации многомерных уравнений в частных производных (например, уравнений Эйлера, описывающих невязкое течение газа), представляют собой интересную аналогию, так как для стандартных задач аэрогазодинамики размерность пространства сеточной функции может быть достаточно велика (от $N \sim 10^5 \div 10^6$ и много выше).

Кроме размерности для применимости теории концентрации меры существенна произвольность выбора элементов ансамбля, поэтому необходимо определить степень коррелированности различных ансамблей сеточных функций, полученных независимыми алгоритмами.

Численные решения уравнений аэрогазодинамики, полученные разными методами для одной задачи, описывают единственное решение и в идеале должны быть близки, поэтому соответствующий ансамбль сеточных функций должен проявлять высокую степень корреляции.

Ошибка усечения и погрешность дискретизации, безусловно, также в какой-то степени коррелированы с полем течения, однако в большой степени зависят и от алгоритма расчета.

Локальная погрешность аппроксимации (ошибка усечения) для расчетов, выполненных алгоритмами разного порядка точности, составлена из производных несовпадающего порядка (и с этой точки зрения алгоритмически независима для нетривиальных решений), что дает надежду на то, что соответствующие сеточные функции независимы (алгоритмически случайны).

Погрешность расчета (дискретизации) для решений зависит от ошибки усечения и от ее преобразования и переноса оператором решения задачи. Наличие искусственной вязкости (монотонизаторов) потенциально должно приводить к дополнительной погрешности, связанной с разрывами в поле течения и поэтому сильно коррелированной даже для различных по своей природе алгоритмов.

Степень независимости погрешностей усечения и расчета исследована на примере ансамбля численных решений, полученных различными численными методами, с точки зрения применимости к апостериорной оценке погрешности [7-12]. На примере невязких сверхзвуковых течений сжимаемого газа показана возможность апостериорной оценки погрешности с приемлемым значением индекса эффективности.

1. Свойства погрешностей расчета и усечения

Рассмотрим систему ЧДУ, описывающую течения невязкого сжимаемого газа (уравнения Эйлера), формально обозначив их как $A\tilde{u} = f$. Пусть мы имеем ансамбль численных алгоритмов, аппроксимирующих данную систему. k -й алгоритм определяется дискретным оператором $A_h^k u^{(k)} = f_h$. Значение локальной погрешности аппроксимации $\delta u^{(k)}$ (ошибка усечения) получается из разложения в ряд Тейлора численного решения (сеточной функции) $u^{(k)}$ и подстановки результата в дискретный алгоритм. Источниковый член дифференциального приближения [13] (ошибка усечения) при аппроксимации производных первого порядка имеет вид $\delta u^{(k)} = \sum_{m=j_k}^{\infty} C_m^{(k)} h^m \frac{\partial^{m+1} \tilde{u}}{\partial x^{m+1}}$ (j_k – порядок аппроксимации).

Лагранжева форма ошибки усечения имеет вид $\delta u^{(k)}(\alpha_n) = C^{(k)} h^{j_k} \cdot \partial^{j_k+1} \tilde{u}(x_n + \alpha_n h) / \partial x^{j_k+1}$ (n – номер узла сетки) [14,15]. Лагранжева форма содержит неизвестный параметр $\alpha_n \in [0,1]$. Численные эксперименты для уравнения теплопроводности [14] указывают на то, что лагранжев параметр α_n подчиняется плотности распределения $P(\alpha_n)$, чья форма достаточно универсальна (хотя и негауссова).

Существует ряд численных работ (например, [16]), которые основаны на том, что ошибка расчета (дискретизации) $\Delta u^{(k)} = (u^{(k)} - \tilde{u}_h) = A_h^{-1} \delta u^{(k)}$ (\tilde{u}_h – проекция точного решения u на сетку) считается случайной нормально распределенной величиной.

Поэтому представляет интерес рассмотреть, как соотносятся случайные и детерминированные свойства погрешностей усечения и аппроксимации. Возможно, этот вопрос можно прояснить с помощью теории концентрации меры, связывающей вероятность и геометрию многомерных пространств [2-6]. В данной работе мы рассмотрим применение теории концентрации меры и алгоритмической случайности к задачам оценки погрешности дискретизации.

2. Ортогональность в пространстве большой размерности и оценки погрешности

Как локальная погрешность аппроксимации (усечения) $\delta u^{(i)} \in R^N$, так и погрешность расчета $\Delta u^{(i)} = u^{(i)} - \tilde{u} \in R^N$ принадлежат пространству (сеточных функций) очень высокой размерности, здесь N – это число узлов сетки, умноженное на число газодинамических переменных (для реальных задач от $N \sim 10^6$ и выше).

Известно, что в пространствах достаточно большой размерности N расстояние $d_{1,2}$ между двумя независимыми (произвольно выбранными) векторами $v^{(1)} \in R^N$ и $v^{(2)} \in R^N$ “с вероятностью 1” больше длины этих векторов

$\|v^{(i)}\| \leq d_{1,2}$. Это вызвано тем обстоятельством, что хорда в этих пространствах “почти всегда больше радиуса” [6], а два случайно и независимо выбранных единичных вектора с большой вероятностью ортогональны [2-6], а именно

$$P\{(v^{(1)}, v^{(2)}) > \delta\} < \sqrt{\pi/2} e^{-\delta^2 N/2} \quad (1)$$

(здесь $(v^{(1)}, v^{(2)})$ – скалярное произведение двух векторов).

В случае векторов разной длины можно ввести нормировку и получить

$$P\{(v^{(1)} / \|v^{(1)}\|, v^{(2)} / \|v^{(2)}\|) > \delta\} < \sqrt{\pi/2} e^{-\delta^2 N/2}. \quad (2)$$

Соответственно, два независимо выбранных вектора в пространстве большой размерности также “почти всегда” ортогональны. Таким образом, вполне детерминированные объекты приобретают некоторые статистические свойства, что образует параллель с результатами работ [14, 16], касающихся статистических свойств ошибок усечения и аппроксимации.

2.1 Оценки нормы погрешности аппроксимации в случае ортогональности

Ортогональность погрешности аппроксимации дает возможность апостериорной оценки. Учтем, что разность между численными решениями равна разности между погрешностями дискретизации этих решений $u^{(1)} - u^{(2)} = u^{(1)} - \tilde{u}_h - u^{(2)} + \tilde{u}_h = \Delta u^{(1)} - \Delta u^{(2)}$. Это дает нам возможность численно оценить разности погрешностей аппроксимации.

Если численные решения группируются в окрестности точного, а их погрешности не совпадают по модулю, то погрешности принадлежат вложенным гиперсферам с общим центром в нуле. Если погрешности дискретизации выбраны произвольно на одной гиперсфере, расстояние $d_{1,2} = \|u^{(1)} - u^{(2)}\| = \|\Delta u^{(1)} - \Delta u^{(2)}\|$ между двумя численными решениями $u^{(1)} \in R^N$ и $u^{(2)} \in R^N$ “с вероятностью 1” больше расстояния от точного решения до численного (погрешности дискретизации решения), так, $\Delta u^{(k)}$ “с вероятностью 1” ортогональны, а хорда в этом случае “почти всегда больше радиуса” [6]).

$$d_{1,2} = \|\Delta u^{(1)} - \Delta u^{(2)}\| \geq \|\Delta u^{(k)}\| = \|u^{(k)} - \tilde{u}_h\|, k = 1, 2. \quad (3)$$

Для ортогональных векторов на вложенных гиперсферах разного радиуса это соотношение также должно выполняться (в таком случае расстояние между решениями (гипотенуза) больше любого катета).

Следовательно, концентрация расстояний в пространстве большого размера обеспечивает захват точного решения “с вероятностью 1” для набора независимых погрешностей решений. Таким образом, обоснованием оценки погрешности по ансамблю решений может служить “благословение размерности” (“blessing of dimensionality”), вследствие которого два независимо выбранных вектора в пространстве большой размерности “почти всегда” ортогональны [2-6].

Интересно, что результат (3) очень похож на результаты, получаемые с помощью неравенства треугольника [8]

$$d_{1,2} \geq \|u^{(2)} - \tilde{u}_h\|. \quad (4)$$

Захват решения с помощью неравенства треугольника основывается на знании априорного соотношения норм погрешностей двух численных решений, не предполагает ортогональности их погрешностей и дает мажоранту для погрешности более точного решения $u^{(2)}$.

На ансамбле из M решений возможно расширение оценки погрешности

$$d_{k,\max} = \max \|u^{(k)} - u^{(i)}\|, (i=1, M), \quad (5)$$

$$d_{k,\max} \geq \|\Delta u^{(k)}\|_2. \quad (6)$$

Это расширение представляется тем более надежным, чем больше размер ансамбля, но, соответственно, требующим больших вычислительных ресурсов и наличия большего числа независимых кодов. Если увеличивать ансамбль решений до того момента, когда его поперечник

$$D_{\max} = \max \|u^{(k)} - u^{(i)}\|, (k, i=1, M) \quad (7)$$

перестанет расти, можно получить оценку ошибки для всех решений ансамбля.

2.2 Робастность оценки погрешности аппроксимации в случае нарушения ортогональности

Ключевым фактором для применимости оценки (3) является ортогональность погрешности дискретизации численных решений $\Delta u^{(i)}$. Пусть $\delta u^{(i)}$ и $\delta u^{(k)}$ ортогональны. Из $(\delta u^{(k)}, \delta u^{(m)}) = (\Delta u^{(k)}, (A_{h,k}^*) A_{h,m} \Delta u^{(m)}) = 0$ следует, что в евклидовой метрике $(\Delta u^{(k)}, \Delta u^{(m)}) \neq 0$ (если $(A_{h,k}^*) A_{h,m} \neq E$). Трансформация $\delta u^{(i)}$ оператором решения основной задачи может являться одной из причин неортогональности $\Delta u^{(i)}$.

Другой причиной является то, что в задачах вычислительной аэрогазодинамики для получения монотонного решения на разрывах необходимо наличие схемной или искусственной вязкости (лимитеров). В

окрестности разрыва при наличии монотонности схемы функция $\Delta u^{(k)}$ сильно коррелирована с разрывом и, в случае монотонного решения, качественно представляет собой волну с отрицательной и положительной полуволнами.

Таким образом, можно предположить, что погрешность расчета содержит две компоненты: $\Delta u^{(k)} = \Delta \tilde{u}^{(k)} + \Delta u_{\mu}$. Компоненты ошибки $\Delta \tilde{u}^{(k)}$ ортогональны, компоненты Δu_{μ} в значительной степени согласованы с решением в окрестности разрывов и в большой степени коллинеарны. Соответственно, надеяться на строгую ортогональность $\Delta u^{(i)}$ не приходится, и оценка (3) не обязана выполняться.

С точки зрения выяснения соотношения независимой и коррелированной ошибки представляет интерес расчет “угла между погрешностями”

$$\alpha = \arccos \frac{(\Delta u^{(i)}, \Delta u^{(j)})}{\|\Delta u^{(i)}\| \cdot \|\Delta u^{(j)}\|}.$$

К счастью, неравенство (3) достаточно робастно и выполняется даже при заметном отклонении от ортогональности векторов ошибок, а именно при углах между векторами ошибки $\alpha \geq \alpha_*$, что можно увидеть из элементарных геометрических построений. При равных нормах погрешности $\alpha_* = 60^\circ$, при неравных $\alpha_* > 60^\circ$.

2.3 Оценка погрешности с учетом величины угла между векторами ошибки

Если имеется информация об углах между ошибками α , то наличие вычислимой длины $\|\Delta u^{(i)} - \Delta u^{(j)}\| = \|u^{(i)} - u^{(j)}\|$ позволяет получить оценку сверху на $\|\Delta u^{(i)}\|$, см. рис. 1.

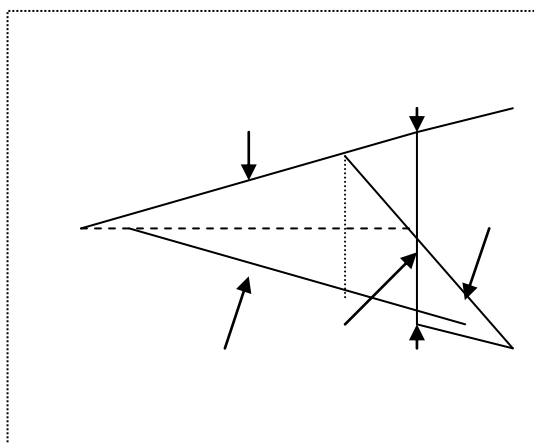


Рис. 1

Пусть нормы погрешностей $\|\Delta u^{(1)}\| = r_1$ и $\|\Delta u^{(2)}\| = r_2$, $r_1 < r_2$, $d = \|\Delta u^{(i)} - \Delta u^{(j)}\| = \|u^{(i)} - u^{(j)}\|$, и угол α между ними известен. Образуем

равнобедренный треугольник с равными сторонами r_1 . Для третьей стороны получим оценку $d' < d \cdot \cos(\varphi)$. Тогда выполняется

$$r_1 = \frac{d'}{2\sin(\alpha/2)} < \frac{d \cdot \cos(\varphi)}{2\sin(\alpha/2)}. \quad (8)$$

Для второй стороны $r_2 = r_1 + d \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\pi - \pi/2 - \pi/2 + \alpha/2)} = r_1 + d \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\alpha/2)}$.

С учетом (8) получим

$$r_2 < \frac{d \cdot \cos(\varphi)}{2\sin(\alpha/2)} + \frac{d \sin(\varphi)}{\sin(\alpha/2)} = \frac{d}{2\sin(\alpha/2)} (\cos(\varphi) + 2\sin(\varphi)). \quad (9)$$

Максимум этого выражения достигается при $\sin(\varphi) = 2\cos(\varphi)$, $tg(\varphi) = 2$, $\varphi_{\max} = \arctan(2)$, $\varphi_{\max} \approx 63.43$. В результате получаем

$r_1 < r_2 < \frac{d}{2\sin(\alpha/2)} (\cos(\varphi_{\max}) + 2\sin(\varphi_{\max}))$, и выполняется следующее соотношение

$$\|\Delta u^{(i)}\|_2 < \frac{\|u^{(1)} - u^{(2)}\|}{2\sin(\alpha/2)} (\cos(\varphi_{\max}) + 2\sin(\varphi_{\max})), (i = 1, 2), \varphi_{\max} = \arctan(2), \quad (10)$$

в приближенной форме имеющее вид

$$\|\Delta u^{(i)}\|_2 < 1.1 \cdot \frac{\|u^{(1)} - u^{(2)}\|}{\sin(\alpha/2)}, (i = 1, 2). \quad (11)$$

Выражение (11) позволяет оценить нормы погрешности ошибки с использованием угла между векторами ошибки α и расстояния между численными решениями $d_{1,2} = \|u^{(1)} - u^{(2)}\|$.

Информацию о величине угла α можно получить из информации по величине угла между локальными погрешностями аппроксимации $\delta u^{(i)}$ и корреляции $\alpha(\beta)$, получаемой при анализе расчетов, соответствующие данные приведены ниже.

3. Алгоритмическая случайность и погрешности расчета

Использование теории концентрации меры для апостериорной оценки

погрешности основано на произвольном независимом выборе $\delta u^{(k)}$ и $\Delta u^{(k)}$ в пространстве большой размерности R^N . С интуитивной точки зрения кажется, что расчет с помощью независимых численных алгоритмов должен обеспечивать независимость $\delta u^{(k)}$, так как $\delta u^{(k)}$ зависит не только от $u^{(k)}$, но и от выбора алгоритма (он определяет число используемых производных). Поэтому здесь независимость выбора мы будем рассматривать с точки зрения алгоритмической случайности. Строка $\delta u^{(k)}$ считается алгоритмически случайной, если она короче любой компьютерной программы, способной её воспроизвести [17, 18, 19].

Приведем некоторые эвристические соображения относительно свойств ошибок усечения.

Дифференциальное представление дает форму погрешности усечения $\delta u^{(k)} = \sum_{m=j_k}^{\infty} C_m^{(k)} h^m \frac{\partial^{m+1} \tilde{u}}{\partial x^{m+1}}$ [13]. Для схем разного порядка аппроксимации этот ряд начинается с производных разного порядка. В общем случае такие ряды линейно независимы (исключение составляют случаи, когда функция экспонента или производные равны нулю).

С другой стороны, преобразование $u^{(k)} \rightarrow \delta u^{(k)}$ содержит бесконечную сумму производных (если исключить решения с нулевыми производными). С этой точки зрения оно требует алгоритма бесконечной длины для получения конечного вектора $\delta u^{(k)}$. Это можно интерпретировать как наличие алгоритмической независимости (“строка короче программы”) [18].

Безусловно, дискретная форма имеет конечный вид (ограничена размерами сетки) $\delta u^{(k)} = \sum_{m=j_k}^M C_m^{(k)} h^m D^{m+1} u^{(k)} = \sum_{m=j_k}^M A^m u^{(k)} = B \cdot u^{(k)}$ и становится бесконечной только в пределе бесконечно мелкой сетки. Однако численные эксперименты подтверждают ортогональность $\delta u^{(k)}$ для течений с различной структурой.

Если трактовать алгоритмическую случайность как произвольный выбор с ограничениями меры ноль (отбрасыванием слишком регулярных векторов) [20], то ансамбль расчетов по алгоритмам с несовпадающим порядком аппроксимации (сеточных функций $u^{(k)}$) соответствует произвольно выбранным $\delta u^{(k)}$.

Что касается погрешностей дискретизации $\Delta u^{(k)} = (u^{(k)} - \tilde{u}) = A_h^{-1} \delta u^{(k)}$, то, как мы обсуждали выше, преобразование независимых $\delta u^{(k)}$ порождает более зависимые $\Delta u^{(k)}$, тем не менее, содержащие независимые компоненты.

Предположение о случайности (например, гауссовом распределении) $\delta u^{(k)}$ или, тем более, $\Delta u^{(k)}$ выглядит необоснованным. Предположение, что $\delta u^{(k)}$ являются алгоритмически случайными (случайными по Колмогорову [18]) выглядит более естественным.

В данной работе мы численно проверим независимость (и алгоритмическую случайность) $\delta u^{(k)}$ и $\Delta u^{(k)}$ через их ортогональность.

4. Численные эксперименты

Рассмотрим ансамбль из M численных решений, полученных на одной сетке с помощью независимых разностных схем (в части случаев – схем разного порядка).

Если предположить, что существует алгоритмическая независимость погрешности дискретизации $\Delta u^{(k)}$ и она обеспечивает произвольность выбора в гиперсфере $\|\Delta u^{(k)}\| \leq r$, то принадлежность погрешности к пространствам очень большой размерности дает возможности для определения нормы погрешности и положения истинного решения, связанные с концентрацией меры.

Ниже представлены результаты оценки величины погрешности расчета и аппроксимации для течений, описываемых двумерными уравнениями Эйлера.

Погрешность дискретизации $\Delta u^{(k)} = u^{(k)} - \tilde{u}_h$ может рассчитываться с помощью решения линеаризованных задач или задач с возмущениями [11, 12]. В данной работе погрешность дискретизации оценивалась как разница численного решения и проекции аналитического решения на расчетную сетку.

Погрешность усечения $\delta u^{(k)}$ оценивалась с помощью постпроцессоров типа описанных в [21].

5. Тестовые задачи

Использовалась следующая система уравнений движения невязкого сжимаемого газа (Эйлера)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U^k)}{\partial x^k} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial(\rho U^i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U^k U^i + P \delta_{ik})}{\partial x^k} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U^k h_0)}{\partial x^k} = 0. \quad (14)$$

Здесь $i, k = 1, 2$, $U^1 = U, U^2 = V$ – компоненты скорости, $h_0 = (U^2 + V^2)/2 + h$, $h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} = \gamma e$, $e = \frac{RT}{\gamma - 1}$, $E = \left(e + \frac{1}{2}(U^2 + V^2) \right)$ – энтальпии и энергии, $P = \rho RT$ – уравнение состояния, $\gamma = C_p / C_v$.

В качестве тестовых примеров были рассмотрены структуры течения, возникающие при взаимодействии ударных волн I и VI типа по классификации Edney [22]. Все течения стационарны, рассчитывались установлением. Для этих задач достаточно просто построить аналитические решения, проекции которых

на расчетную сетку мы рассматриваем как “истинные” решения. Это позволяет оценить погрешность аппроксимации.

Расчеты проводились при $C_p/C_v=1.4$ в достаточно широком диапазоне параметров течения (чисел Маха $M=3\div 5$ и углов отклонения потока $\alpha=10-30^\circ$). На рис. 2 представлено распределение плотности для течения типа Edney-I ($M=4$, углы отклонения потока $\alpha_1=20^\circ$ и $\alpha_2=15^\circ$). На рис. 3 представлено распределение плотности для течения типа Edney-VI ($M=3.5$, последовательные углы отклонений $\alpha_1=15^\circ$ и $\alpha_2=25^\circ$). Поле течения определяется пересекающимися скачками уплотнения и линией контактного разрыва.

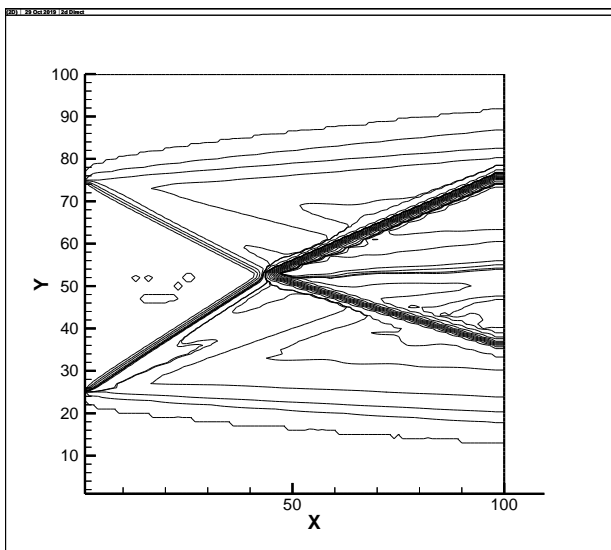


Рис. 2. Изолинии плотности (Edney I)

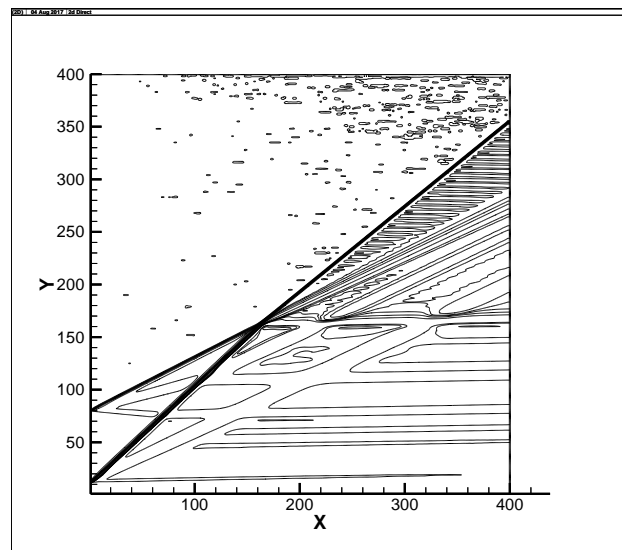


Рис. 3. Изолинии плотности (Edney VI)

6. Результаты расчетов

Проведена серия численных расчетов с использованием алгоритмов разного порядка аппроксимации (от первого до пятого) [23-37] для Edney I и Edney VI на сетках $100*100$ и $400*400$. Ниже представлены данные расчетов для Edney I ($100*100$). Результаты на сетке ($400*400$) и для Edney VI очень похожи.

6.1 Численная оценка погрешности усечения

Погрешность усечения в данной работе оценивалась с помощью постпроцессора типа описанного в [21]. Пусть мы имеем поле течения, рассчитанное с помощью некоторого (возможно, неизвестного) конечно-разностного алгоритма $u_h^{(k)} = (A_h^{(k)})^{-1} f_h$, аппроксимирующего уравнение $Au = f$. Нашей целью является определение погрешности усечения $\delta u^{(k)}$ для этого

расчета. Мы предполагаем существование достаточно гладкой функции $u \in H^m(\Omega)$, совпадающей в узлах с сеточной функцией. Конечные разности разлагаем в ряд Тейлора и получаем реализацию дифференциального представления [13] $Au_h^{(k)} = f_h + \delta u_h^{(k)}$ на данной сетке. Далее мы на рассчитанное поле течения $u_h^{(k)}$ действуем некоторым шаблоном повышенной точности A_h^{high} (постпроцессором)

$$\begin{aligned} A_h^{high} u_h^{(k)} &= A_h^{high} (\tilde{u}_h + \Delta u_h^{(k)}) = \\ &= A_h^{high} (u_h^{(high)} - \Delta u_h^{(high)} + \Delta u_h^{(k)}) = f_h - \delta u_h^{(high)} + A_h^{high} (A_h^{(k)})^{-1} \delta u_h^{(k)}. \end{aligned}$$

Невязка, возникающая при действии шаблона повышенной точности на решение (сеточную функцию), полученное методом пониженной точности, имеет вид

$$\eta_h = A_h^{high} u_h^{(k)} - f_h = -\delta u_h^{(high)} + A_h^{high} (A_h^{(k)})^{-1} \delta u_h^{(k)} \approx -\delta u_h^{(high)} + \delta u_h^{(k)}. \quad (15)$$

Здесь предполагалось, что $A_h^{high} (A_h^{(k)})^{-1} \approx E$ (E – единичная матрица), вследствие того что оба используемых оператора аппроксимируют оператор A .

В результате мы численно получаем невязку η_h , содержащую в себе погрешности усечения как исследуемого алгоритма, так и постпроцессора. Следует отметить, что схема повышенной точности используется здесь только локально (для анализа предварительно рассчитанного поля течения, а не расчета нового), поэтому вопросы ее устойчивости и т. д. нас не интересуют.

В расчетах использованы постпроцессоры, в которых разности аппроксимированы с помощью шаблонов четвертого

$$\frac{-f_{k+2}^n + 8f_{k+1}^n - 8f_{k-1}^n + f_{k-2}^n}{12h_k} \quad (16)$$

и шестого порядка точности

$$\frac{-f_{k+3}^n + 9f_{k+2}^n - 45f_{k+1}^n + 45f_{k-1}^n - 9f_{k-2}^n + f_{k-3}^n}{60h_k}. \quad (17)$$

Оценки, полученные с помощью (16) и (17), достаточно близки даже для схем номинально высокого порядка. Это, вероятно, вызвано тем, что основная погрешность в данных тестах определяется скачками уплотнения и в соответствии с [38, 39] имеет порядок, близкий к единице.

Существуют и более сложные методы оценки погрешности усечения [40, 41], связанные с интерполяцией сеточного решения и ее дифференцированием, но в данной работе использован простейший.

6.2 Оценка углов между векторами ошибки усечения и аппроксимации

На ансамбле решений, полученных с использованием 10 численных алгоритмов [23-37] и нескольких вариантов искусственной вязкости (всего 13 решений), проведена оценка углов между векторами погрешностей усечения $\delta u^{(k)}$ (полученных с помощью постпроцессора шестого порядка) и оценка углов между векторами погрешностей расчета $\Delta u^{(k)}$.

Использовано 9 существенно независимых численных алгоритмов, метод MUSCL [25] реализован двумя очень близкими алгоритмами (отличающимися реализацией распада разрывов на границах ячеек), а именно AUFS [26] и HLLC [37], метод MacCormack [31] реализован с искусственной вязкостью второго, четвертого порядка и без искусственной вязкости.

Анализировался ансамбль численных расчетов поля течения, полученных следующими методами:

схема 1 порядка точности (Courant Isaacson Rees) [23] в варианте [24], обозначенная как CIR,

схема 2 порядка точности, основанная на методе MUSCL [25] (использующая на границах ячеек приближенный алгоритм решения задачи Римана AUFS [26] и обозначенная как AUFS),

схема 2 порядка точности, основанная на методе MUSCL [25] (использующая на границах HLLC [37] и обозначенная как HLLC),

схема 2 порядка точности, основанная на методе релаксации [30] (rel),

схема 2 порядка точности, основанная на методе MacCormack [31], без искусственной вязкости MC_0 , с искусственной вязкостью второго порядка ($\mu = 0.01$) MC_1 и ($\mu = 0.002$) MC_2 , с искусственной вязкостью четвертого порядка ($\mu = 0.01$) MC_4 ,

(схеме МакКормака уделено большое влияние, так как на ней удается продемонстрировать влияние искусственной вязкости. В некоторых случаях (не всегда) она работает и без искусственной вязкости),

схема 2 порядка точности, основанная на методе "two step Lax-Wendroff" [32,33] (LW), с искусственной вязкостью второго порядка ($\mu = 0.01$),

схема 3 порядка точности основанная на модификации метода Chakravarthy-Osher $ord3$ [27,28],

схема 3 порядка точности WENO-3 [36] (W3),

схема 4 порядка точности [29], обозначенная как $ord4$,

схема 5 порядка точности WENO-5 [34,35] (W5).

Углы между векторами погрешностей усечения и погрешностей аппроксимации для различающихся по структуре течений (Edney-I и Edney-VI) близки к 90° (отклонения до 0.5°).

В расчетах использовались следующие ограничители: в программе rel – VanLeer, в AUFS/HLLC, $ord3$, $ord4$, W5 – minmod, в MC – второй и 4 порядок линейного сглаживания, в LW – второй порядок линейного сглаживания. Часть

алгоритмов: CIR, W3, MC (в части расчетов) – искусственной вязкости или лимитеров не использовали.

В методе [31] увеличение вязкости (0, 0.002, 0.01) уменьшает и β и α , что подтверждает связь корреляции $\Delta u^{(i)}$ со сглаживанием. Погрешности при сглаживании четвертого порядка имеют угол к погрешностям, полученным с использованием второго порядка, равный 23.5° . Таким образом, гипотеза (на первый взгляд правдоподобная) о независимости сглаживания разных порядков не подтверждается.

AUFS и HLLC представляют один и тот же алгоритм (MUSCL), но с разными аппроксимациями разрывов. В результате вектора погрешностей почти коллинеарны, что и наблюдается в расчетах.

В табл. 1 представлены величины углов между векторами погрешностей усечения $\beta = \arccos((\delta u^{(k)} \cdot \delta u^{(m)}) / (\|\delta u^{(k)}\| \cdot \|\delta u^{(m)}\|))$, оцененные с помощью постпроцессора 6 порядка для течения типа Edney-I на сетке 100*100.

Таблица 1

Углы между векторами погрешностей усечения $\delta u^{(k)}$

	CIR	Rel	AUFS	HLLC	Ord3	ord4	W3	W5	MC_1	MC_2	LW	MC_0	MC_4
CIR	0	78,2	67,4	67,4	71,5	82,4	70,2	28,9	69,7	77,9	23,6	80,5	77,2
Rel	78,2	0	43,5	45,3	62,9	82,5	44,7	75,5	56,7	65,5	72,2	70,9	57,4
AUFS	67,4	43,5	0	8,8	39,8	72,8	15,2	64,6	37,7	56,1	60,9	65,6	38,6
HLLC	67,4	45,3	8,8	0	39,9	76,5	19,6	64,5	38,5	56,8	61,0	66,1	39,4
ord3	71,5	62,9	39,8	39,9	0	70,8	45,8	70,1	24,0	45,3	66,0	60,2	25,1
ord4	82,4	82,5	72,8	76,5	70,8	0	71,6	82,5	68,2	69,4	80,9	72,9	70,5
W3	70,2	44,7	15,2	19,6	45,8	71,6	0	67,6	43,2	58,5	64,2	66,9	43,9
W5	28,9	75,5	64,6	64,5	70,1	82,5	67,6	0	70,4	79,8	28,9	82,7	76,2
MC_1	69,7	56,7	37,7	38,5	24,0	68,2	43,2	70,4	0	31,2	64,1	47,9	16,9
MC_2	77,9	65,5	56,1	56,8	45,3	69,4	58,5	79,8	31,2	0	75,9	20,2	42,3
LW	23,6	72,2	60,9	61,0	66,0	80,9	64,2	28,9	64,1	75,9	0	80,0	70,4
MC_0	80,5	70,9	65,6	66,1	60,2	72,9	66,9	82,7	47,9	20,2	80,0	0	57,6
MC_4	77,2	57,4	38,6	39,4	25,1	70,5	43,9	76,2	16,9	42,3	70,4	57,6	0
mean	66,2	62,9	52,1	48,6	51,8	75,1	51,0	66,0	47,4	56,6	62,3	64,3	51,3
58,1													

В табл. 2 представлены величины углов между векторами погрешностей аппроксимации $\Delta u^{(k)} = u^{(k)} - \tilde{u}$, $\alpha = \arccos((\Delta u^{(k)} \cdot \Delta u^{(m)}) / (\|\Delta u^{(k)}\| \cdot \|\Delta u^{(m)}\|))$. Погрешность расчета принималась равной разнице между численным и аналитическим решениями.

Таблица 2

Углы между векторами погрешностей аппроксимации $\Delta u^{(k)} = u^{(k)} - \tilde{u}$

	CIR	Rel	AUFS	HLLC	ord3	ord4	W3	W5	MC_1	MC_2	LW	MC_0	MC_4
CIR	0	33.6	36.0	35.2	52.0	58.1	38.1	16.6	51.3	63.4	15.1	67.8	62.8
Rel	33.6	0	23.5	23.1	42.0	48.8	25.5	39.7	37.8	52.5	27.9	59.8	48.9
AUFS	36.0	23.5	0	2.3	27.0	31.9	5.1	38.7	25.4	44.3	28.1	54.9	38.0
HLLC	35.2	23.1	2.3	0	28.1	33.1	6.5	38.1	26.4	45.1	27.3	55.2	38.9
ord3	52.0	42.0	27.0	28.1	0	28.0	26.9	51.9	16.1	35.8	43.6	52.6	27.7
ord4	58.1	48.8	31.9	33.1	28.0	0	30.0	57.5	25.6	35.3	51.0	47.2	33.9
W3	38.1	25.5	5.1	6.5	26.9	30.0	0	40.3	25.2	43.8	30.3	54.4	37.6
W5	16.6	39.7	38.7	38.1	51.9	57.5	40.3	0	53.0	64.5	19.0	68.9	64.1
MC_1	51.3	37.8	25.4	26.4	16.1	25.6	25.2	53.0	0	26.8	43.1	44.1	23.5
MC_2	63.4	52.5	44.3	45.1	35.8	35.3	43.8	64.5	26.8	0	58.3	20.8	37.6
LW	15.1	27.9	28.1	27.3	43.6	51.0	30.3	19.0	43.1	58.3	0	64.8	54.8
MC_0	67.8	59.8	54.9	55.2	52.6	47.2	54.4	68.9	44.1	20.8	64.8	0	52.5
MC_4	62.8	48.9	38.0	38.9	27.7	33.9	37.6	64.1	23.5	37.6	54.8	52.5	0
mean	44.1	38.6	29.6	29.9	35.9	40.1	27.6	46.0	33.2	44.0	38.6	53.6	43.3
42.0													

Данные таблиц 1 и 2 можно использовать для анализа независимости (отклонений от ортогональности) $\delta u^{(k)}$ и $\Delta u^{(k)}$ для набора различных численных алгоритмов.

В целом из данных табл. 1 можно заключить, что погрешности усечения $\delta u^{(i)}$ достаточно часто близки к ортогональным, что может свидетельствовать об их алгоритмической случайности. Данные табл. 2 показывают, что погрешности аппроксимации $\Delta u^{(i)}$ достаточно далеки от ортогональных. Таблицы 1 и 2 показывают, что ошибки независимых алгоритмов иногда могут иметь небольшой угол между собой (AUFS-W3, CIR-W5, CIR-LW, ord3-MC_1), причина чего на данный момент не ясна.

В целом увеличение сглаживания приводит к уменьшению углов между ошибками, что подтверждает предположение о высокой корреляции $\Delta u_{\mu}^{(k)}$.

Средний угол между ошибками усечения в расчетах наблюдается в диапазоне $\bar{\beta} = 58 \div 64$, средний угол между погрешностями расчета $\bar{\alpha} = 30 \div 44$. Практически во всех расчетах угол между погрешностями усечения больше угла между погрешностями расчета $\beta > \alpha$.

Зависимость углов между ошибками аппроксимации от углов между ошибками усечения представлена на рис 4.

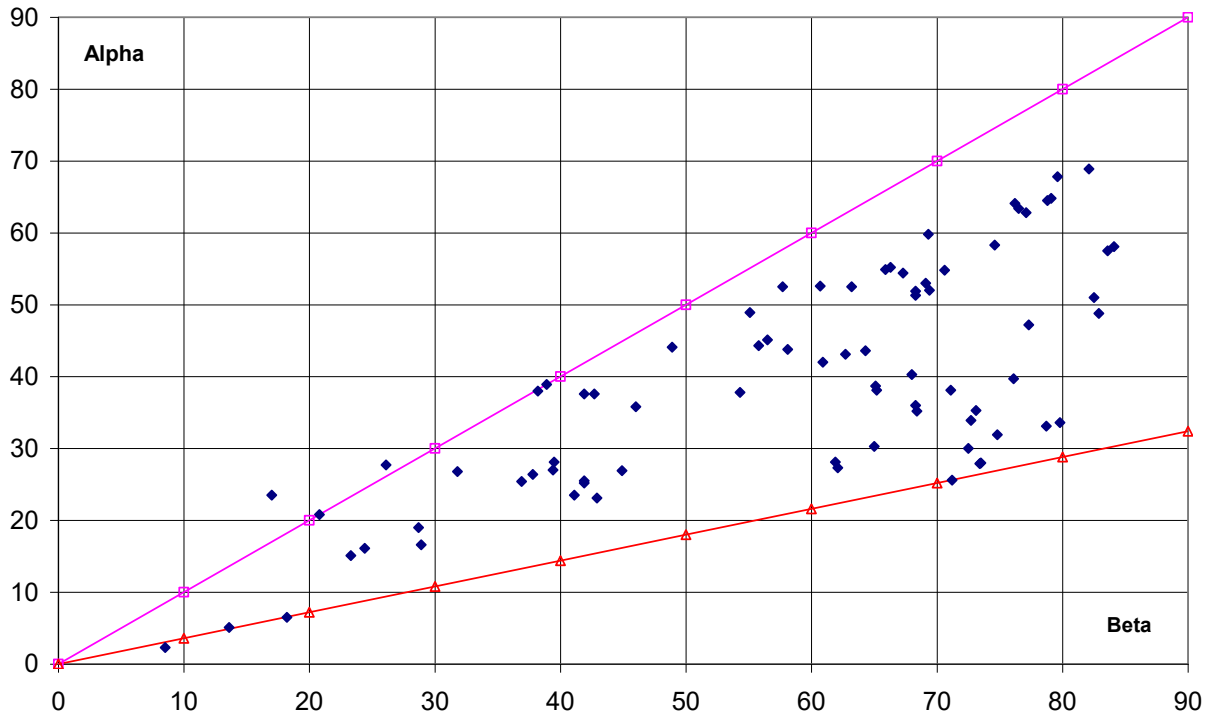


Рис. 4. Зависимость угла между погрешностями расчета от угла между погрешностями усечения

Из рис. 4 видно, что наблюдается корреляция величин углов α между погрешностями расчета $\Delta u^{(i)}$, $\Delta u^{(j)}$ и углов β между погрешностями усечения $\delta u^{(i)}$, $\delta u^{(j)}$, а именно $\alpha(\beta) = c \cdot \beta$, при этом коэффициент наклона принадлежит интервалу $c \in (0.33, 1.0)$. Соотношение $\alpha(\beta) = c \cdot \beta$ позволяет оценивать α по углу между погрешностями усечения β , который рассчитывается достаточно просто. Соответственно, погрешности расчета $\Delta u^{(i)}$ мажорируются расстоянием между решениями в соответствии с (11).

6.3 Оценка нормы погрешности по расстояниям на ансамбле решений

В табл. 3 представлены величины норм разницы погрешностей $\|\Delta u^{(k)} - \Delta u^{(m)}\| = \|u^{(k)} - u^{(m)}\|$. Они используются для оценок погрешности расчета в соответствии с (3) и (5,6).

Таблица 3

Нормы расстояний между решениями $\|\Delta u^{(k)} - \Delta u^{(m)}\| = \|u^{(k)} - u^{(m)}\| = d_{km}$

	CIR	Rel	AUFS	HLLC	ord3	ord4	W3	W5	MC_1	MC_2	LW	MC_0	MC_4
CIR	0	0,152	0,137	0,154	0,203	0,220	0,142	0,075	0,199	0,242	0,072	0,272	0,235
Rel	0,152	0	0,060	0,059	0,125	0,136	0,065	0,177	0,103	0,158	0,107	0,204	0,138
AUFS	0,137	0,060	0	0,007	0,087	0,094	0,015	0,074	0,073	0,138	0,107	0,192	0,111
HLLC	0,154	0,059	0,007	0	0,090	0,098	0,019	0,172	0,076	0,141	0,104	0,193	0,114

ord3	0,203	0,125	0,087	0,090	0	0,090	0,087	0,212	0,055	0,119	0,153	0,191	0,086
ord4	0,220	0,136	0,094	0,098	0,090	0	0,089	0,228	0,077	0,114	0,173	0,171	0,102
W3	0,142	0,065	0,015	0,019	0,087	0,089	0	0,179	0,072	0,137	0,114	0,191	0,110
W5	0,075	0,177	0,074	0,172	0,212	0,228	0,179	0	0,214	0,255	0,094	0,285	0,248
MC_1	0,199	0,103	0,073	0,076	0,055	0,077	0,072	0,214	0	0,089	0,248	0,162	0,069
MC_2	0,242	0,158	0,138	0,141	0,119	0,114	0,137	0,255	0,089	0	0,202	0,085	0,120
LW	0,072	0,107	0,107	0,104	0,153	0,173	0,114	0,094	0,248	0,202	0	0,242	0,185
MC_0	0,272	0,204	0,192	0,193	0,191	0,171	0,191	0,285	0,162	0,085	0,242	0	0,187
MC_4	0,235	0,138	0,111	0,114	0,086	0,102	0,110	0,248	0,069	0,120	0,185	0,187	0

В табл. 4 представлены величины оценок норм погрешностей $\|\delta u^{(k)}\|_{L_2}$ и $\|\Delta u^{(k)}\|_{L_2}$.

Таблица 4

Нормы погрешностей усечения и аппроксимации

	CIR	Rel	AUFS	HLLC	ord3	ord4	W3	W5	MC_1	MC_2	LW	MC_0	MC_4
$\ \delta u^{(k)}\ _{L_2}$	1.91	3.01	2.50	2.51	2.73	3.17	2.65	1.57	2.52	3.58	2.3	4.48	2.85
$\ \Delta u^{(k)}\ _{L_2}$	0.25	0.15	0.16	0.16	0.19	0.17	0.15	0.27	0.16	0.19	0.21	0.23	0.18

Далее проведем анализ оценок погрешности расчета через расстояния между решениями. Используем индекс эффективности апостериорной оценки [7], равный отношению нормы оценки к норме истинной погрешности. Хорошая оценка ошибки должна быть, с одной стороны, больше самой ошибки ($I_{eff} \geq 1$), с другой стороны, не слишком пессимистична. В [7] предлагается $I_{eff} < 3$, однако данная величина относится к конечно-элементному анализу для достаточно регулярных решений. В случае решений с разрывами можно ожидать худших результатов. В случае использования выражения (5) для оценки нормы погрешности индекс эффективности имеет следующую форму:

$$I_{eff,k} = \frac{\max(d_{km})}{\|\Delta u^{(k)}\|} = \frac{\max(d_{km})}{\|u^{(k)} - \tilde{u}\|}. \quad (18)$$

В табл. 5 представлена величина индекса эффективности, рассчитанная по данным табл. 3 и 4 и выражениям (5, 6) и по перечню ансамбля (7). Результаты представляются вполне приемлемыми. Индексы эффективности, полученные по выражениям (5, 6) $I_{eff,k} = \frac{\max(d_{km})}{\|\Delta u^{(k)}\|}$ и по перечню ансамбля

$$I_{eff} = \frac{\max(d_{ij})}{\|\Delta u^{(i)}\|} = \frac{D_{\max}}{\|u^{(i)} - \tilde{u}\|}, \text{ достаточно близки по величине.}$$

**Индексы эффективности апостериорной оценки по выражениям (5, 6)
и по перечислению ансамбля (7)**

	CIR	Rel	AUFS	HLLC	ord3	ord4	W3	W5	MC_1	MC_2	LW	MC_0	MC_4
$\ \Delta u^{(k)}\ _{L_2}$	0.252	0.154	0.156	0.158	0.186	0.171	0.153	0.266	0.164	0.192	0.215	0.23	0.179
$\max_m d_{km}$	0.272	0.204	0.192	0.172	0.212	0.228	0.191	0.285	0.248	0.255	0.248	0.285	0.248
$I_{eff,k}$	1.08	1.32	1.23	1.09	1.14	1.33	1.25	1.07	1.51	1.33	1.15	1.24	1.38
I_{eff}	1.08	1.77	1.74	1.72	1.46	1.59	1.78	1.02	1.66	1.42	1.26	1.18	1.52

6.4 Оценка нормы погрешности с использованием угла между двумя векторами ошибки

В расчетах предполагаемой полной ортогональности между $\delta u^{(i)}$ и $\delta u^{(j)}$ не наблюдается, хотя углы между векторами погрешности β достаточно велики. Вероятной причиной этого является наличие погрешностей постпроцессора, рассчитывающего $\delta u^{(j)}$.

По результатам данных расчетов ортогональности между $\Delta u^{(i)} = u^{(i)} - \tilde{u}$ и $\Delta u^{(j)} = u^{(j)} - \tilde{u}$ не наблюдается, причем $\alpha < \beta$. Вероятной причиной является наличие схемной или искусственной вязкости, обеспечивающих неосциллирующие или слабо осциллирующие решения в окрестностях разрывов решений.

Величина индекса эффективности, рассчитанная по данным табл. 4 и выражению (11), учитывающим углы между ошибками усечения, находится в интервале $I_{eff} \sim 0.9 \div 4.52$.

7. Обсуждение

Как уже говорилось, надеяться на ортогональность $\Delta u^{(i)}$ не приходится, и оценка (3) не обязана выполняться, если не учитывать ее робастность.

Тем не менее, численные эксперименты указывают на то, что для достаточно большого ансамбля численных решений, полученных независимыми методами, максимум расстояния между решениями может служить верхней оценкой погрешности дискретизации.

В целом для индекса эффективности I_{eff} получаются следующие результаты:

- при использовании выражения (3) ($d_{1,2} = \|\Delta u^{(1)} - \Delta u^{(2)}\| \geq \|\Delta u^{(k)}\|, k = 1, 2$)

$$I_{eff} \sim 0.04 \div 1.5$$

- при использовании выражений (5,6)

$$(d_{k,max} = \max \|u^{(k)} - u^{(i)}\|, \geq \|\Delta u^{(k)}\| (i = 1, M)) I_{eff} \sim 1.1 \div 1.5.$$

- при использовании выражения (11) $(1.1 \cdot \frac{\|u^{(1)} - u^{(2)}\|}{\sin(\alpha/2)} > \|\Delta u^{(i)}\|_2, (i=1,2))$

$$I_{eff} \sim 0.9 \div 4.52.$$

Результат апостериорной оценки нормы погрешности с использованием расстояния между решениями в форме (3) на двух решениях зачастую неприемлем ($I_{eff} \sim 0.04 \div 1.5$). Однако при увеличении числа элементов ансамбля выражения (5, 6) позволяют получить качество оценки нормы погрешности хорошего уровня ($I_{eff} \sim 1.1 \div 1.5$). Асимптотически при увеличении ансамбля расчетов оценки (5, 6) становятся близки к результатам, полученным с помощью неравенства треугольника из работы [8]. Использование угла между ошибками усечения позволяет получать результаты приемлемого качества на малом ансамбле решений.

Численные расчеты с учетом погрешностей постпроцессора не противоречат предположению об алгоритмической независимости (и соответствующей ортогональности) погрешностей усечения независимых разностных схем $\delta u^{(k)}$.

Использование ансамбля решений для апостериорной оценки погрешности аппроксимации требует существенных вычислительных ресурсов, однако обладает естественным параллелизмом, позволяющим рассчитывать на эффективную реализацию. Более ограничительной является необходимость в наборе различных численных алгоритмов, однако существующие открытые наборы кодов позволяют преодолеть и это затруднение (например, в [42] использован ансамбль из пяти различных алгоритмов, принадлежащих OpenFoam).

Для получения ансамбля решений весьма эффективным является применение концепции обобщенного вычислительного эксперимента. Основные понятия, методы и примеры практических приложений обобщенного вычислительного эксперимента достаточно подробно изложены в работах [43-46]. Обобщенный вычислительный эксперимент строится на синтезе параллельных технологий, вычислительных алгоритмов и методов визуальной аналитики. При постановке задачи выделяют ряд определяющих параметров, каждый из которых разбивается в определенном диапазоне. Задача математического моделирования решается в каждой точке образованного многомерного пространства. Для решения подобной задачи применяются параллельные технологии, позволяющие вести расчет в многозадачном режиме одной и той же задачи с разными определяющими параметрами. Результатом расчетов являются многомерные объемы данных, для обработки и анализа которых применяются методы визуальной аналитики. Подобный подход может быть весьма эффективен при решении параметрических и обратных задач [43-46]. В данном случае при получении ансамбля решений, образованного независимыми солверами, в качестве определяющего параметра может

использоваться выбор конкретного солвера (численного метода) для решения рассматриваемой задачи, подобно [42, 45].

Выводы

Ансамбль численных решений уравнений Эйлера, полученных независимыми методами, позволяет оценивать величину нормы погрешности аппроксимации через величину поперечника ансамбля. Увеличение числа ансамбля расчетов приводит к улучшению качества оценки погрешности.

На данном ансамбле наблюдаются достаточно большие величины углов между ошибками усечения (в среднем около $\bar{\beta} = 58 \div 64^\circ$) и ошибками аппроксимации (около $\bar{\alpha} = 30 \div 44^\circ$). Расчет ошибки усечения позволяет оценивать углы между векторами погрешности расчета, что дает возможность обойтись всего лишь двумя независимыми решениями при апостериорной оценке погрешности с приемлемыми значениями индекса эффективности.

Возможной причиной наблюдаемых эффектов может служить эффект концентрации меры, проявляющийся вследствие принадлежности погрешностей пространству большого размера, а также алгоритмическая случайность погрешностей усечения при использовании независимых разностных схем.

Библиографический список

1. Киттель Ч. Элементарная статистическая физика, М., 1960.
2. Зорич В.А. Многомерная геометрия, функции очень многих переменных и вероятность. ТВП 59:3 (2014), С. 436-451.
3. Зорич В.А. Геометрия и вероятность / Теория вероятн. и ее примен., 62:2 (2017), С.292-310.
4. Мильман В.Д. Явления, возникающие в высоких размерностях // УМН, 2004, Т. 59, № 1, С.157-168.
5. Gorban A.N., Tyukin I.Y. Blessing of dimensionality: mathematical foundations of the statistical physics of data, arXiv:1801.03421v1, 2018.
6. Sidiropoulos P. N-sphere chord length distribution, arXiv:1411.5639v1, 2014.
7. Repin S.I. A posteriori estimates for partial differential equations. V. 4. Walter de Gruyter, 2008.
8. Alekseev A.K., Bondarev A.E., Navon I.M. On Triangle Inequality Based Approximation Error Estimation // arXiv:1708.04604. 2017.
9. Алексеев А.К. Апостериорная оценка погрешности дискретизации на ансамбле решений и эффект концентрации меры / Тез. докл. X Межд. конф. "Вероятностные методы в дискретной математике", Петрозаводск, 22-26 мая 2019, С. 54-56.

10. Алексеев А.К., Бондарев А.Е. Апостериорная оценка погрешности расчета течения на ансамбле численных решений с использованием теории концентрации меры / Тезисы докладов международной конференции "Аналитические и численные методы решения задач гидродинамики, математической физики и биологии", 26-29 августа 2019, г. Пушкино, С. 26-28.
11. Roy Ch. J. and Raju A. Estimation of Discretization Errors Using the Method of Nearby Problems. *AIAA J.* 45(6): 1232-1243, 2007.
12. Linss T. and Kopteva N. A Posteriori Error Estimation for a Defect-Correction Method Applied to Convection-Diffusion Problems // *Int. J. of Numerical Analysis and Modeling*, V.1, №.1, p.1-16, 2009.
13. Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения, М.: Наука, 1979.
14. Алексеев А.К., Махнев И.Н. Использование Лагранжевых коэффициентов при апостериорной оценке погрешности расчета // *Сибирский журнал вычислительной математики*, Т.12, №4, С.375-388 (2009).
15. Alekseev A.K., Navon I.M. Adjoint Correction and Bounding of Error Using Lagrange Form of Truncation Term // *Computers & Mathematics with Applications*, V.50, Iss.8-9, pp.1311-1332 (2005).
16. Rauser F., Marotzke J, Korn P. Ensemble-type numerical uncertainty quantification from single model integrations // *Journal Comp. Physics*, 2015, V.292, Iss. C, p.30-42.
17. Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия "количество информации" // *Проблемы передачи информации*, Т.1 (1965), вып. 1, С.3-11.
18. Martin-Lof P. Algorithms and Randomness / Review of the International Statistical Institute, 1969, V.37:3.
19. Вьюгин В.В. Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность, М.: МФТИ, 2012.
20. Vanderlooy Stijn, Sprinkhuizen-Kuyper Ida G. An Overview of Algorithmic Randomness and its Application to Reliable Instance Classification, Maastricht Univ., Technical Report, CS 07-02, 2007.
21. Алексеев А.К., Журин С.В. О постпроцессоре для апостериорной оценки погрешности расчета параметров течения // *ЖВМ и МФ.* 2006. Т.46. №9. С.1703-1708.
22. Edney B. Effects of Shock Impingement on the Heat Transfer around Blunt Bodies // *AIAA J.*, 1968, 6(1): 15-21.
23. Courant R., Isaacson E., Rees M. On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences // *Comm. Pure Appl. Math.* 1952. V.5. P.243-255.
24. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.

25. van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // *J. Comput. Phys.* 1979. V.32. P. 101–136.
26. Sun M., Katayama K. An artificially upstream flux vector splitting for the Euler equations // *JCP.* 2003. V.189. P. 305-329.
27. Osher S., Chakravarthy S., Very high order accurate TVD schemes // *ICASE Report.* 1984. N.84-144. P. 229–274.
28. Lin C.-T. et al. High resolution finite volume scheme for the quantum hydrodynamic equations // *JCP.* 2009. V.228. Iss. 5. P.1713-1732.
29. Yamamoto S., Daiguji H. Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations // *Computers and Fluids.* 1993. V. 22. P.259-270.
30. Hy Trac, Ue-Li Pen. A Primer on Eulerian Computational Fluid Dynamics for Astrophysics, arXiv:astro-ph/0210611v2, (2002) pp.1-23.
31. MacCormack R.W. The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering // *AIAA Paper 69-354*, 1969.
32. Lax P. D. & Wendroff B., Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy // *Comm. Pure Appl. Math.*, v.17, 1964, pp.381-398.
33. Richtmyer R.D. A Survey of Difference Methods for Non-Steady Fluid Dynamics, N.C.A.R. Tech. Notes 63-2, 1963.
34. Johnsen Eric, Colonius Tim. Implementation of WENO schemes in compressible multicomponent flow problems // *Journal of Computational Physics* 219(2):715-732 (2006).
35. Antoniou A.S., Karantasis K.I., Polychronopoulos E.D. and Ekaterinaris J.A. Acceleration of a Finite-Difference WENO Scheme for Large-Scale Simulations on Many-Core Architectures // *AIAA 2010 – 0525*.
36. Ha Y, Gardner C.L., Gelb A., and Chi-Wang Shu, Numerical Simulation of High Mach Number Astrophysical Jets with Radiative Cooling // *J. Scientific Computing*, V.24, №.1, 2005.
37. Toro E. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer 2009.
38. Banks J.W., Hittinger J.A.F., Woodward C.S. Numerical error estimation for nonlinear hyperbolic PDEs via nonlinear error transport, *CMAME*, 213 (2012), 1-15.
39. Carpenter M.H. and Casper J.H. Accuracy of Shock Capturing in Two Spatial Dimensions // *AIAA J.*, 37(9): 1072-1079, 1999.
40. Giles M.B., Suli E. Adjoint methods for PDEs: a posteriori error analysis and postprocessing by duality // *Acta numerica.* 2002. V.11. P.145-206.
41. Tyson W.C., Roy C.J., Ollivier-Gooch C.F. A Novel Reconstruction Technique for Finite -Volume Truncation Error Estimation / *AIAA Scitech 2019 Forum*.
42. Alekseev A.K., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E. Verification on the Ensemble of Independent Numerical Solutions, In: Rodrigues J. et al. (eds)

- Computational Science – ICCS 2019. ICCS 2019. Lecture Notes in Computer Science, v.11540. pp. 315-324, Springer, Cham, DOI: 10.1007/978-3-030-22750-0_25
43. Bondarev A.E. On the Estimation of the Accuracy of Numerical Solutions in CFD Problems // ICCS 2019, Lecture Notes in Computer Science (LNCS), V.11540, pp.325–333, 2019. DOI: 10.1007/978-3-030-22750-0_26
 44. Bondarev A.E. On the Construction of the Generalized Numerical Experiment in Fluid Dynamics // *Mathematica Montisnigri*, V.XLII, 2018, p.52-64.
 45. Alekseev A.K., Bondarev A.E., Kuvshinnikov A.E. Comparative analysis of the accuracy of OpenFOAM solvers for the oblique shock wave problem // *Matematica Montisnigri*, 2019, vol.XLV, p.95-105, DOI: 10.20948/mathmontis-2019-45-8
 46. Bondarev A.E. On visualization problems in a generalized computational experiment (2019) // *Scientific Visualization* 11.2: 156-162, DOI: 10.26583/sv.11.2.12

Оглавление

Введение	3
1. Свойства погрешностей расчета и усечения	4
2. Ортогональность в пространстве большой размерности и оценки погрешности.....	4
3. Алгоритмическая случайность и погрешности расчета.....	8
4. Численные эксперименты.....	10
5. Тестовые задачи.....	10
6. Результаты расчетов.....	11
7. Обсуждение.....	18
Выводы	20
Библиографический список.....	20