



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Капцов Е.И.

Численная реализация
инвариантной схемы для
одномерных уравнений
мелкой воды в лагранжевых
координатах

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Капцов Е.И. Численная реализация инвариантной схемы для одномерных уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 108. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2019-108](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-108)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-108>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

Е. И. Капцов

Численная реализация инвариантной
схемы для одномерных уравнений
мелкой воды в лагранжевых
координатах

Москва — 2019

Е.И. Капцов

Численная реализация инвариантной схемы для одномерных уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах

Обсуждаются подходы к конечно-разностному моделированию уравнений механики сплошной среды. Производится численная реализация новой инвариантной конечно-разностной схемы для одномерных уравнений мелкой воды в лагранжевых (потенциальных) и в массовых лагранжевых координатах, обладающей локальными законами сохранения энергии, массы, движения центра масс и импульса. В качестве тестовых задач рассматриваются известные точные решения одномерных уравнений мелкой воды, не содержащие сильных разрывов. Расчеты по разностным схемам проводятся на примерах нескольких консервативных схем с искусственной вязкостью. Приводятся графики полученных решений и осуществляется контроль законов сохранения на этих решениях.

Ключевые слова: симметрия, группа преобразований, инвариантные разностные схемы, консервативные схемы, законы сохранения, мелкая вода, точное решение.

E.I. Kaptsov

Numerical implementation of an invariant scheme for one-dimensional shallow water equations in Lagrangian coordinates

Various approaches to a finite-difference modeling of continuum mechanics' equations are discussed. The numerical implementation of a new invariant finite-difference scheme for one-dimensional shallow water equations in Lagrangian (potential) and mass Lagrangian coordinates is presented. The new scheme possesses the local conservation laws of energy, mass, center of mass and momentum. Some known exact solutions that do not contain essential discontinuities are considered as test problems. Calculations are carried out for several examples of various conservative schemes with artificial viscosity. The graphic illustrations of the obtained solutions are given where the conservation laws are checked on the solutions.

Key words: symmetry, transformation group, invariant scheme, conservative scheme, conservation law, shallow water, exact solution.

1 Введение

Разнообразие методов конечно-разностного моделирования процессов механики сплошной среды в каждом конкретном случае приводит к проблеме выбора наиболее подходящих для этого случая конечно-разностных схем. При этом требование соблюдения законов сохранения исходных уравнений (сохранения энергии, массы, импульса и др.) всегда остается ключевым. Наличие законов сохранения обусловлено наличием симметрий у исходных уравнений, то есть их инвариантностью относительно некоторой непрерывной группы преобразований. Знание допустимой группы преобразований исходного дифференциального уравнения дает ценную информацию о его качественных особенностях, позволяет находить его законы сохранения, понижать порядок уравнения, получать точные решения [1–3].

Известно, что многие уравнения механики сплошной среды, в том числе уравнения гидродинамики и газовой динамики, записанные в лагранжевых координатах, допускают вариационную формулировку, т. е. могут быть представлены как уравнения Эйлера–Лагранжа для некоторых вариационных функционалов (см., например, [4]; подробный обзор и дополнительные ссылки можно найти в [5]). Законы сохранения таких уравнений могут быть найдены с помощью теоремы Нётер [6, 7]. При этом инвариантность уравнений относительно соответствующих непрерывных групп преобразований является необходимым условием применимости этой теоремы.

Таким образом, критерий инвариантности оказывается весьма существенным при выборе методов конечно-разностного моделирования.

Общей теории и методам построения конечно-разностных схем, обладающих свойством инвариантности, посвящены работы [8, 9]. Разностный аналог теоремы Нётер и примеры его применения в случаях схем для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем можно найти в [10–15]. В работах [16–18] приводится разностный аналог гамильтонова формализма, также позволяющий строить консервативные разностные модели.

В настоящей публикации рассматриваются некоторые конечно-разностные схемы для одномерных уравнений мелкой воды в лагранжевых координатах и в массовых координатах Лагранжа и производится их численная реализация. За основу берется построенная нами в [19] инвариантная конечно-разностная схема для одномерных уравнений мелкой воды на равномерной ортогональной сетке, которая на гладких решениях обладает всеми законами сохранения в случае наклонного профиля дна и законами сохранения массы и энергии в случае произвольного дна. Ранее попытка целенаправленного построения инвариантной схемы для уравнений мелкой воды была осуществлена в работе [20], где была предложена инвариантная схема для двумерного случая в

эйлеровых координатах, построенная на подвижной сетке. Однако построенная в [20] схема не обладает законом сохранения энергии.

Еще одним важным критерием отбора конечно-разностных схем является требование их монотонности. Напомним, что схема называется монотонной, если она сохраняет монотонность начальных данных со временем, что препятствует последующему возникновению осцилляций в решениях. Монотонные схемы обычно строят на основе законов сохранения в интегральной форме так, чтобы они удовлетворяли на разрывах соотношениям Гюгонио [21]. Для монотонных схем характерна точность на разрывных решениях и повышенная точность (второй порядок и выше) на гладких решениях. Впервые критерии сохранения монотонности разностных схем и линейная монотонная схема для одномерных уравнений гидродинамики были предложены С. К. Годуновым в классической работе [22]. Дальнейшее развитие этих идей привело к появлению множества подходов к построению конечно-разностных схем повышенной точности, таких как TVD-схемы [23], WENO-схемы [24] и др. (современный обзор см., например, в работе [21]).

Альтернативный подход к построению конечно-разностных схем, впервые предложенный для уравнений гидродинамики в [25], заключается в введении в исходные уравнения дополнительных диссипативных членов, сглаживающих решения на разрывах. В соответствующих конечно-разностных схемах это, как правило, связано с добавлением искусственной вязкости, сглаживающей скачки давления в областях резких изменений решений. Этот подход, в частности, был использован при реализации классических схем для уравнений газовой динамики [26]. Недостатком использования искусственной вязкости является необратимая потеря информации о точном виде разрывного решения [23], что, естественно, сказывается и на точности решения в области разрыва. В то же время сохранение монотонности схемы при таком подходе не является обязательным, что позволяет при сохранении вполне приемлемой точности избежать значительных алгоритмических усложнений, возникающих при построении монотонных схем повышенной точности.

В схемах с искусственной вязкостью на первый план выходят условия консервативности и полной консервативности [26, 27] конечно-разностных схем. Полностью консервативные схемы, будучи консервативными, удовлетворяют еще дополнительным условиям, выражающим баланс различных компонентов энергии. Примеры полностью консервативных схем можно найти в работах [26–30].

При численном моделировании схемы [19], поскольку для нее критерий монотонности не является основным, будет использован подход, связанный с добавлением искусственной вязкости. Кроме того, во всех рассматриваемых в публикации примерах законы сохранения записываются в дивергентной (ло-

кальной) форме, поэтому важно сделать следующее уточнение. Законы сохранения, представленные в дивергентной форме (в частности, получаемые с помощью теоремы Нётер) сами по себе не несут никакой информации о том, каким именно обобщенным решениям (в том числе и каким интегральным законам сохранения) они соответствуют. Поэтому, хотя на практике дивергентные схемы с искусственной вязкостью дают вполне приемлемые приближения к точным решениям и на разрывах, требовать от них сходимости к каким-либо обобщенным решениям на сильных разрывах не следует [31]. Именно поэтому в настоящей публикации мы ограничиваемся рассмотрением законов сохранения преимущественно на гладких точных решениях.

2 Одномерные уравнения мелкой воды в лагранжевых системах координат

Одномерные уравнения мелкой воды с произвольным профилем дна в координатах Лагранжа сводятся к уравнению [4, 32]

$$x_{tt} - \frac{2x_{ss}}{x_s^3}A(s) + \frac{1}{x_s^2}A'(s) - h'(x) = 0, \quad (1)$$

где $h = h(x)$ — функция, описывающая профиль дна, $x = x(t, s)$ — функция траектории частицы среды, s — лагранжева координата, которая в начальный момент времени удовлетворяет условию $x(0, s) = s$ и которую с помощью преобразования эквивалентности [33] можно связать с начальной массой частицы. Функция $A = A(s)$ определяет распределения энтропии по частицам среды [32] и обычно считается постоянной, что соответствует случаю равномерного распределения.

Далее, во избежание путаницы с лагранжевыми массовыми координатами, запись уравнений в координатах $x = x(s, t)$ будем называть записью в *потенциальных* координатах.

Рассмотрим случай наклонного дна:

$$h(x) = C_1x + C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

В потенциальных координатах он простой заменой

$$x \mapsto x + C_1t^2/2$$

сводится к случаю плоского дна $h(x) = C_2$, и уравнение (1) приводится к форме

$$x_{tt} - \frac{2x_{ss}}{x_s^3}A(s) + \frac{1}{x_s^2}A'(s) = 0, \quad (2)$$

рассмотрением которой в дальнейшем и ограничимся. При этом постоянную C_2 без потери общности можно считать равной нулю.

Уравнение (2) при произвольной функции $A(s)$ допускает 4-параметрическую группу преобразований

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = 3t\partial_t + 2x\partial_x, \quad X_3 = \partial_x, \quad X_4 = t\partial_x. \quad (3)$$

При $A = \text{const}$ алгебра (3) дополняется следующими двумя операторами:

$$X_5 = \partial_s, \quad X_6 = 3s\partial_s + x\partial_x. \quad (4)$$

Подробности групповой классификации уравнений вида (2) по произвольному элементу A можно найти в [32].

Уравнение (2) можно рассматривать как уравнение Эйлера–Лагранжа для следующего лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{x_t^2}{2} - \frac{A(s)}{x_s}. \quad (5)$$

Для симметрий X_1 , X_3 и X_4 при произвольной функции $A(s)$ и для симметрии X_5 при $A = \text{const}$ выполняются условия инвариантности и «дивергентной» инвариантности [2] функционала (5)

$$\begin{aligned} X_k \mathcal{L} + \mathcal{L} (D_t \xi_k^t + D_s \xi_k^s) &= 0, \quad k = 1, 3, \\ X_4 \mathcal{L} + \mathcal{L} (D_t \xi_4^t + D_s \xi_4^s) &= D_t(x), \\ X_5 \mathcal{L} + \mathcal{L} (D_t \xi_5^t + D_s \xi_5^s) &= -A'/x_s, \end{aligned}$$

что является достаточным условием [7] для получения с помощью теоремы Нётер следующих законов сохранения уравнения (2):

1. закон сохранения энергии, соответствующий симметрии X_1 :

$$D_t \left(\frac{A}{x_s} + \frac{x_t^2}{2} \right) + D_s \left(\frac{A x_t}{x_s^2} \right) = 0; \quad (6)$$

2. закон сохранения импульса, соответствующий симметрии X_3 (а также симметрии X_5 при $A = \text{const}$):

$$D_t(x_t) + D_s \left(\frac{A}{x_s^2} \right) = 0; \quad (7)$$

3. закон сохранения движения центра масс, соответствующий симметрии X_4 :

$$D_t(tx_t - x) + D_s \left(\frac{At}{x_s^2} \right) = 0; \quad (8)$$

4. закон сохранения массы, который получается автоматически в силу равенства смешанных производных (рассматриваются гладкие решения):

$$D_t(x_s) - D_s(x_t) = 0. \quad (9)$$

В случае одномерных уравнений гидродинамики и газодинамики расчеты часто удобнее вести в лагранжевых *массовых* координатах [34]. От потенциальной формы записи (2) к ним можно перейти касательным преобразованием

$$x_s = \frac{1}{\rho(t, s)}, \quad x_t = u(t, s) \quad (10)$$

и введением новой зависимой переменной p с помощью уравнения

$$p = A\rho^2, \quad (11)$$

соответствующего уравнению состояния политропного газа при показателе адиабаты $\gamma = 2$ [35].

Таким образом, уравнение (2) (вместе с условием равенства смешанных производных $x_{ts} = x_{st}$) приводится к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho}\right)_t - u_s &= 0, \\ u_t + p_s &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где u — скорость движения частиц среды, ρ — высота столбца жидкости над плоским дном.

Операторы (3) в лагранжевых массовых координатах принимают вид

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = 3t\partial_t + 2x\partial_x - u\partial_u - 2\rho\partial_\rho, \quad X_3 = \partial_x, \quad X_4 = t\partial_x + \partial_u.$$

В случае $A = \text{const}$ к ним добавляются операторы (4), записанные в массовых координатах:

$$X_5 = \partial_s, \quad X_6 = 3s\partial_s + x\partial_x + u\partial_u + 2\rho\partial_\rho.$$

Законы сохранения (6)–(9) для системы (12) соответственно переходят в следующие:

$$D_t\left(\frac{u^2}{2} + A\rho\right) + D_s(A\rho^2u) = 0, \quad (13)$$

$$D_t(u) + D_s(A\rho^2) = 0, \quad (14)$$

$$D_t(tu - x) + D_s(At\rho^2) = 0, \quad (15)$$

$$D_t\left(\frac{1}{\rho}\right) - D_s(u) = 0. \quad (16)$$

3 Конечно-разностные схемы для одномерных уравнений мелкой воды, обладающие законами сохранения

Рассмотрим несколько конечно-разностных схем для одномерных уравнений мелкой воды в лагранжевых массовых координатах, которые мы в дальнейшем будем тестировать.

3.1 Инвариантная схема

В работе [19] с помощью разностного аналога прямого метода [36] нами была получена следующая инвариантная конечно-разностная схема для уравнения (2), заданная на равномерной ортогональной сетке в потенциальных координатах:

$$x_{t\check{t}} + \frac{1}{h_-} \left((\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1} A(s) - (\hat{x}_{\check{s}} \check{x}_{\check{s}})^{-1} A(s_-) \right) = 0, \quad (17)$$

$$\tau_+ = \tau_-, \quad h_+ = h_-.$$

Здесь и далее используются стандартные обозначения, принятые в работах А. А. Самарского (см., например, [34]). Последняя схема обладает разностными аналогами всех законов сохранения (6)–(9) соответственно:

$$D_{-\tau}(x_t^2 + (x_s^{-1} + \hat{x}_s^{-1})A) + D_{-s}((x_t^+ + \check{x}_t^+)(\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1}A) = 0, \quad (18)$$

$$D_{-\tau}(x_t) + D_{-s}((\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1}A) = 0, \quad (19)$$

$$D_{-\tau}(tx_t - x) + D_{-s}(t(\hat{x}_s \check{x}_s)^{-1}A) = 0, \quad (20)$$

$$D_{-\tau}(\hat{x}_s) - D_{-s}(x_t^+) = 0, \quad (21)$$

где $D_{-\tau}$ и D_{-s} обозначают операторы полного разностного дифференцирования влево по времени и по массовой координате.

С помощью разностного аналога замены (10)

$$\hat{x}_s + x_s = \frac{2}{\rho}, \quad x_t = u,$$

трехслойная схема (17) после некоторых стандартных преобразований может быть записана в лагранжевых массовых координатах на двух временных сло-

ях следующим образом:

$$\begin{aligned}
D_{-\tau} \left(\frac{1}{\rho} \right) - D_{-s} \left(\frac{u^+ + \check{u}^+}{2} \right) &= 0, \\
D_{-\tau}(u) + D_{-s}(Q) &= 0, \\
\frac{1}{\sqrt{\hat{p}}} + \frac{1}{\sqrt{p}} &= \frac{2}{\rho\sqrt{A}} \Leftrightarrow x_s^2 = \frac{A}{p}, \\
h_+ = h_-, \quad \tau_+ = \tau_-,
\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\frac{1}{Q} = \frac{4}{\rho\hat{\rho}A} - \frac{2}{\sqrt{p}A} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\hat{\rho}} \right) + \frac{1}{p}. \tag{23}$$

Схема (22) соответствует трем уравнениям (12), (11) а законы сохранения (13)–(16) для нее имеют следующий вид:

$$D_{-\tau} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p\sqrt{A}}{2\sqrt{p} - \rho\sqrt{A}} \right) + D_{-s} \left(\frac{u^+ + \check{u}^+}{2} Q \right) = 0, \tag{24}$$

$$D_{-\tau}(u) + D_{-s}(Q) = 0, \tag{25}$$

$$D_{-\tau}(tu - x) + D_{-s}(tQ) = 0, \tag{26}$$

$$D_{-\tau} \left(\frac{1}{\rho} \right) - D_{-s} \left(\frac{u^+ + \check{u}^+}{2} \right) = 0, \tag{27}$$

где Q дается формулой (23).

3.2 Модифицированная схема Самарского–Попова

Одна из неявных полностью консервативных схем Самарского–Попова [34] для одномерных уравнений газовой динамики, модифицированная для случая уравнений мелкой воды (12), (11), может быть записана следующим образом

$$u_t + \hat{p}_{\bar{s}} = 0, \quad \frac{1}{\rho} = x_s, \tag{28}$$

$$x_t = \frac{\hat{u} + u}{2}, \quad p = A\rho^2.$$

Схема (28), как и предыдущая схема, является инвариантной.

В оригинальную схему Самарского–Попова для одномерных уравнений газовой динамики также входит закон сохранения энергии

$$D_{+\tau} \left(\varepsilon + \frac{u_+^2}{2} \right) + D_{+s} \left(\frac{(u+\hat{u})(p+\hat{p})}{4} \right) = 0, \quad (29)$$

где внутренняя энергия среды ε определяется с помощью уравнения

$$\varepsilon_t = -\hat{p} \left(\frac{1}{\rho} \right)_t, \quad (30)$$

связывающего изменение внутренней энергии с работой сил давления.

В случае мелкой воды, в отличие от оригинальной схемы для уравнений газовой динамики, уравнение энергии (29) уже не является частью схемы и непосредственно не следует из системы (28). Уравнение (29), с учетом (30), можно переписать в виде

$$\frac{\hat{u}_+ + u_+}{2} (u_t^+ + \hat{p}_s) - \hat{p} \left(\left(\frac{1}{\rho} \right)_t - \frac{1}{2} (\hat{u} + u)_s \right) - \frac{1}{4} ((u + \hat{u})p_t)_s \tau = 0, \quad (31)$$

откуда видно, что (29) не выполняется на решениях системы (28) и, строго говоря, не является законом сохранения этой системы. Тем не менее, мы будем использовать уравнения (29) и (30) из оригинальной схемы Самарского–Попова при численных расчетах для контроля сохранения полной энергии на решениях системы.

Заметим, что последний член уравнения (31) можно связать со схемной вязкостью [34], переписав его в следующей эквивалентной форме:

$$-\frac{\tau}{8} D_{+s} \left[\frac{\rho + \hat{\rho}}{\rho \hat{\rho}} (u + \hat{u})(u + \hat{u})_s \right].$$

3.3 Простая явная схема

Рассмотрим еще следующую явную схему, которая аппроксимирует уравнения (12) и записывается в дивергентном виде:

$$\left(\frac{1}{\rho} \right)_t - u_s = 0, \quad u_t + p_s = 0, \quad p = A\rho\hat{\rho}. \quad (32)$$

Первые два уравнения схемы представляют собой соответственно законы сохранения массы и импульса. Также для схемы может быть записан закон сохранения движения центра масс:

$$D_{+\tau}(\check{t}u - x) + D_{+s}(tp) = 0.$$

Закон сохранения энергии для схемы (32) не выполняется: видно (здесь с целью упрощения принято $A = 1$), что его разностный аналог можно записать лишь с невязкой, пропорциональной величине временного слоя τ :

$$\begin{aligned} & D_{+\tau} \left(\frac{u^2}{2} + \rho \right) + D_{+s} (u\rho^- \hat{\rho}^-) = \\ & = u \left(D_{+\tau}(u) + D_{+s}(\rho^- \hat{\rho}^-) \right) - \rho \hat{\rho} \left(D_{+\tau} \left(\frac{1}{\rho} \right) - D_{+s}(u) \right) + \frac{1}{2} u_t^2 \tau. \end{aligned}$$

Данная схема иллюстрирует то обстоятельство, что, не руководствуясь какими-либо критериями построения схем, такими как инвариантность или полная консервативность, может быть достаточно сложно подобрать аппроксимацию системы уравнений, обладающую всеми законами сохранения.

4 Некоторые точные решения

Рассмотрим некоторые точные решения одномерных уравнений мелкой воды, которые не содержат сильных разрывов. При этом во всех случаях в уравнении состояния (11), если не указано специально, будем считать $A = 1$.

1. Известное автомодельное решение задачи об извлечении поршня с постоянной скоростью из среды, имеющей начальные значения параметров u_0 , ρ_0 , приводится, например, в [34]. В этом случае образуется простая волна разрежения, которая стыкуется с двумя тривиальными постоянными решениями. Параметры в области волны разрежения в случае одномерной мелкой воды определяются по формулам

$$\rho(s) = \rho_0 (s/s_0)^{\frac{2}{3}}, \quad u(s) = 2c_0 \left((s/s_0)^{\frac{1}{3}} - 1 \right), \quad (33)$$

где $s_0 = c_0 \rho_0$ и $c_0^2 = 2\rho_0$.

Среди рассматриваемых нами точных решений это единственное решение, имеющее слабые разрывы (в точках стыковки волны разрежения и тривиальных решений).

2. Инвариантное решение, соответствующее подалгебре X_6 алгебры (3), (4) в массовых координатах Лагранжа имеет представление [33]

$$x = s^{1/3} \psi, \quad \rho = 1/x_s = 3s^{2/3}/\psi, \quad u = x_t = s^{1/3} \psi', \quad (34)$$

где функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет уравнению движения частицы в потенциальном поле [37]

$$\psi'' \psi^2 + 12 = 0. \quad (35)$$

Последнее уравнение может быть линеаризовано с помощью касательного преобразования (см. подробности в [37]), но его общее решение через элементарные функции не выражается. Также для уравнения (35) известен первый интеграл

$$\psi'^2 - 24\psi^{-1} = \text{const}$$

и следующее частное решение [37, 38]:

$$\psi(t) = (54t^2)^{1/3}.$$

Заметим, что при постоянном значении t выражения (34) для ρ и u несложными преобразованиями сводятся к (33) и, таким образом, в каждый фиксированный момент времени $t > 0$ приведенное решение описывает некоторую волну разрежения или сжатия.

Физический смысл следующих двух инвариантных решений [33] не столь очевиден, и дифференциальные уравнения, ограничивающие вид входящих в эти решения функций, в элементарных функциях не интегрируются. Тем не менее, они представляют интерес с точки зрения численного анализа разностных схем.

3. Инвариантное решение, которое соответствует подалгебре $X_1 + X_6$, имеет представление

$$x = e^t \psi, \quad \rho = e^{2t} / \psi', \quad u = e^{-2t} (\psi e^{3t} - 3s\psi'),$$

где функция $\psi = \psi(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi''(2 - 9\psi'^3 y^2) - \psi'(3\psi' y + \psi) = 0, \quad y = se^{-3t}.$$

4. Инвариантное решение, соответствующее подалгебре $X_4 + X_2 - X_6$, имеет представление

$$x = t(\ln t + \psi), \quad \rho = 1/\psi', \quad u = 1 + \ln t + \psi - s\psi'/t,$$

где функция $\psi = \psi(y)$ удовлетворяет уравнению

$$(2 - \psi'^3 y^2)\psi'' - \psi'^3 = 0, \quad y = s/t.$$

5. Наконец, рассмотрим точное решение, возникающее при неоднородном распределении энтропии по частицам среды, т. е. при $A(s)' \neq 0$. Это решение (см., например, [39]) описывает разлет в вакуум массы вещества, в которой давление и температура распределены по параболическому закону (с максимумом в центре), а плотность постоянна по пространству и убывает со временем [35].

В этом случае функция $A(s)$ имеет вид

$$A(s) = s^2/2,$$

и параметры ρ и u определяются как

$$\rho(t) = 1/\psi, \quad u(t, s) = s\psi', \quad (36)$$

где функция $\psi = \psi(t) > 0$ удовлетворяет уравнению

$$\psi'' = 2k_0/\psi^2, \quad k_0 = \text{const} < 0.$$

Последнее уравнение уже встречалось ранее в виде (35).

5 Численная реализация разностных схем для уравнений мелкой воды

Ниже приводятся начальные данные и результаты расчетов для конечно-разностных схем, рассмотренных в разделе 3. Начальные и граничные условия формируются на основе перечисленных в предыдущем разделе точных решений. Если точные решения не удастся получить в явном виде или представить в элементарных функциях, то используются методы Рунге–Кутты.

Все рассматриваемые схемы в общем случае не сохраняют монотонность начальных данных, поэтому расчеты по схемам ведутся, когда это целесообразно, с добавлением искусственной линейно-квадратичной вязкости [34]. Для этого давление p заменяется на величину $q = p + \omega$ при

$$\omega = -\nu\rho u_s + \frac{1 + \gamma\kappa h}{2} \frac{\rho u_s^2}{\pi},$$

где $\nu > 0$ и $\kappa > 0$ — коэффициенты вязкости, $\gamma = 2$ — показатель адиабаты.

Для инвариантной схемы (17) вместо непосредственного изменения величины давления p мы добавляем искусственную вязкость к величине Q (23), которая по смыслу как раз соответствует давлению.

Данные, используемые при расчетах, приведены в Таблице 1.

В первой колонке указан номер теста согласно порядку их перечисления в разделе 4.

Во второй колонке указаны начальные условия для решения дифференциальной задачи. В случае, когда точное решение известно, приводятся значения входящих в него констант. В противном случае приведены выбранные начальные данные для ведения расчетов методами Рунге–Кутты. В задаче о волне разрежения u_0 означает скорость поршня, а ρ_0 — начальную высоту

Таблица 1

№	Начальные условия	S	M	ν	t_*	Рис. ρ, u	Рис. ЗС
1	$u_0 = -0.65, \rho_0 = 1$	1.0	151	$0.1h$	0.5	1	6
2	$\psi(0) = 1, \psi'(0) = 3\pi/8$	0.5	101	h	0.081	2	7
3	$\psi(0) = 1, \psi'(0) = 3\pi/8$	0.175	101	$0.1h$	0.078	3	8
4	$\psi(t_0) = 1, \psi'(t_0) = \pi/6, t_0 = 1$	0.5	101	$0.1h$	1.2	4	9
5	$k_0 = -1, t_0 = 0.1, s_0 = 0.1$	1.0	101	$0.1h$	0.428	5	10

столбца жидкости. Параметры t_0 и s_0 указывают начальные сдвиги по времени t и массовой координате s , когда в силу вида точного решения они не могут быть равны нулю.

В третьей и четвертой колонке таблицы указаны общая масса вещества S и количество точек M на каждом временном слое. Величины шагов разностной сетки вычисляются по формулам

$$h = S/(M - 1), \quad \tau = \mu_\tau h,$$

где всюду принято $\mu_\tau = 0.05$.

В пятой колонке указан коэффициент ν линейной вязкости, который берется пропорциональным шагу h и подбирается эмпирически. Для чистоты эксперимента в рамках каждого тестового задания всем схемам устанавливаются одинаковые значения коэффициентов вязкости, причем для квадратичной вязкости всюду взято $\kappa = 4$.

В шестой колонке указано время t_* , для которого приводятся результаты расчетов по тестам.

В последних двух колонках указаны номера рисунков, на которых соответственно приведены решения тестовых задач и значения законов сохранения на этих решениях.

Поясним принципы компоновки приведенных ниже графиков для решений и законов сохранения на примере первого тестового задания. На рис. 1 слева сверху приводится точное решение для высоты столбца жидкости ρ и графики решений, полученные по трем схемам (инвариантной схеме (—□—), явной схеме (—○—) и схеме Самарского–Попова (—★—)). На том же рисунке слева внизу приводятся абсолютные величины отклонений решений, полученных по схемам, от точного решения для ρ . Аналогично, на рис. 1 справа приводятся решения и отклонения от точных решений для скоростей частиц

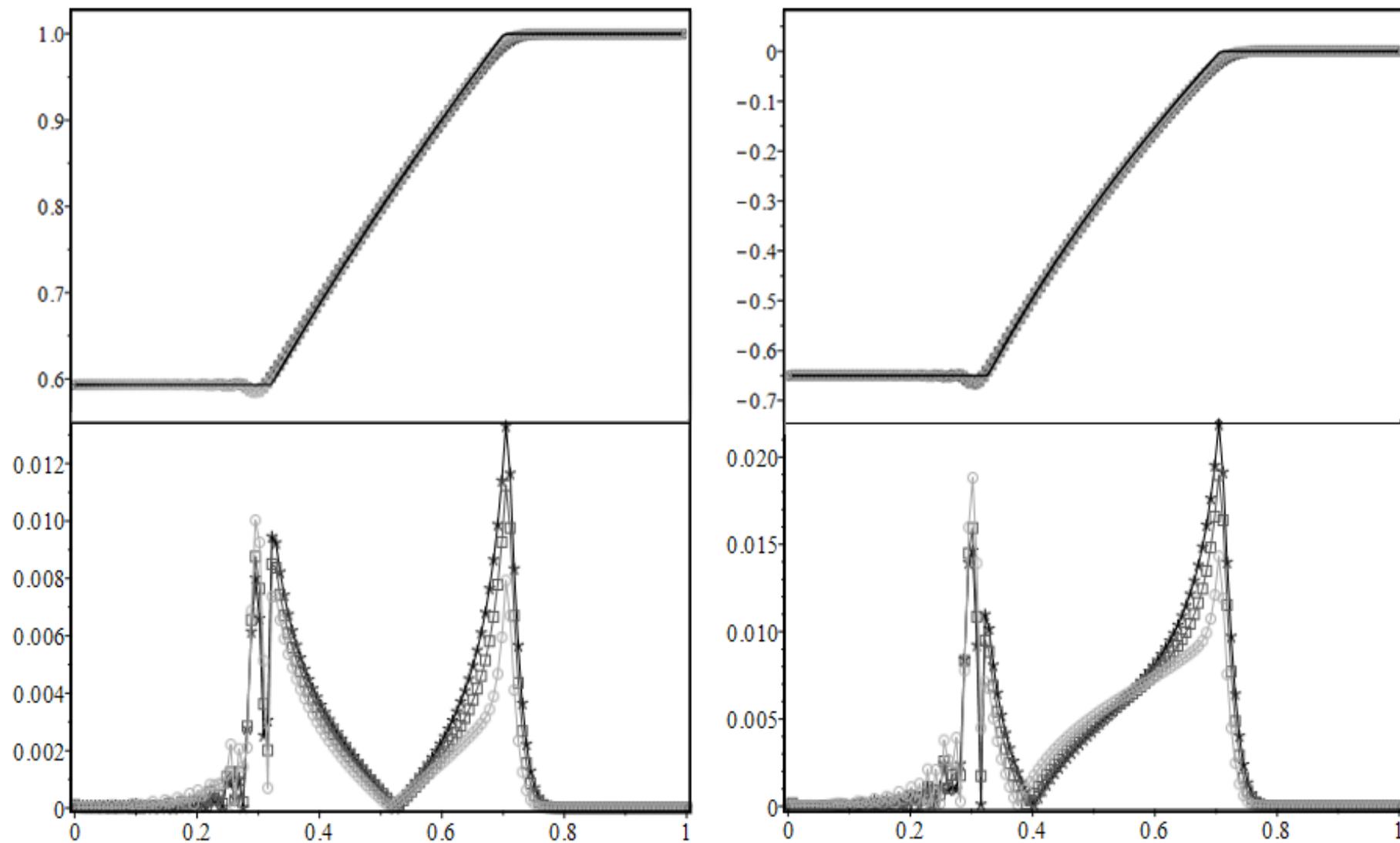


Рис. 1: Решения ρ (слева) и u (справа) первого тестового задания: точное решение (—), инвариатная схема (—□—), явная схема (—○—) и схема Самарского–Попова (—★—)

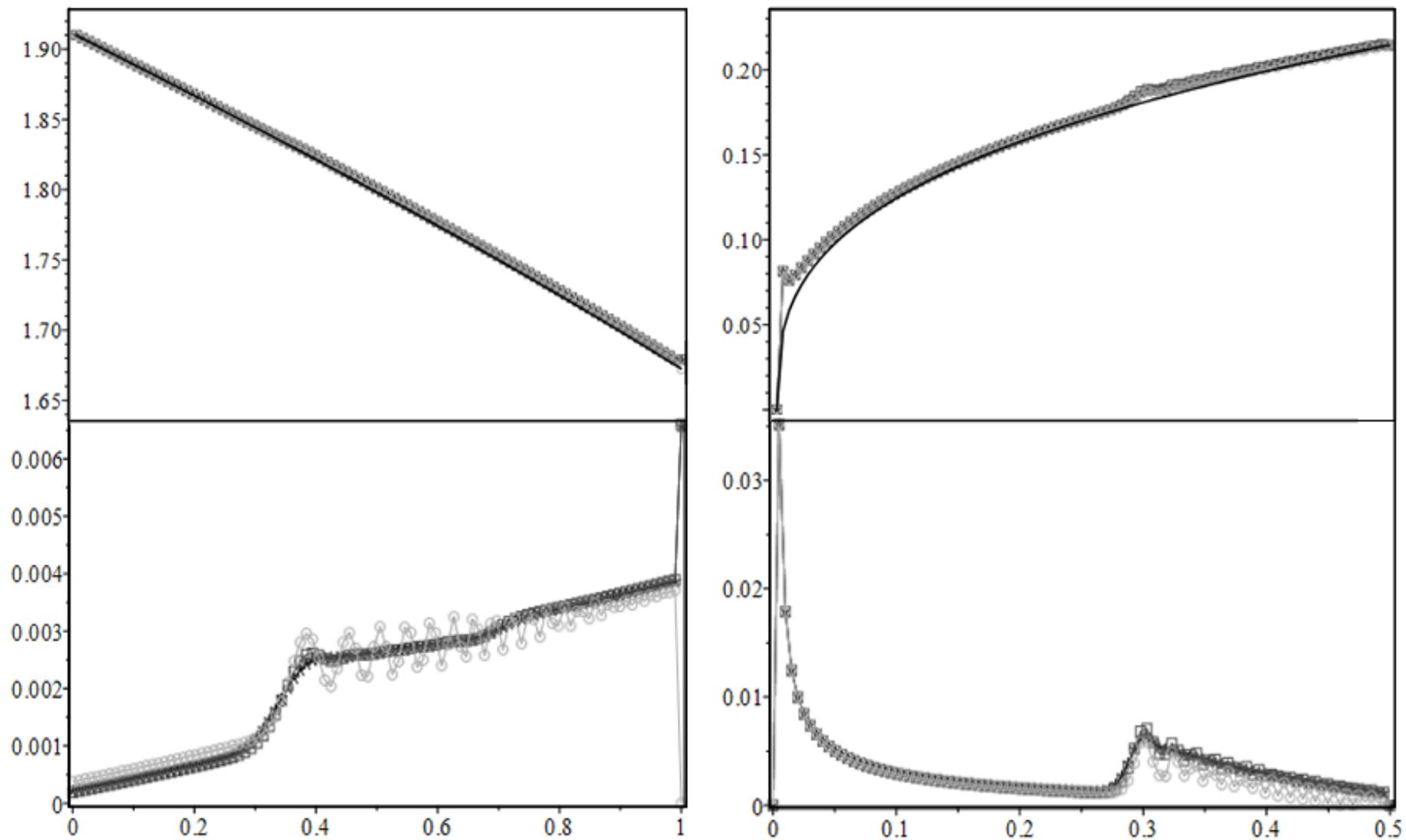


Рис. 2: Решения ρ (слева) и u (справа) второго тестового задания: точное решение (—), инвариатная схема (—□—), явная схема (—○—) и схема Самарского–Попова (—★—)

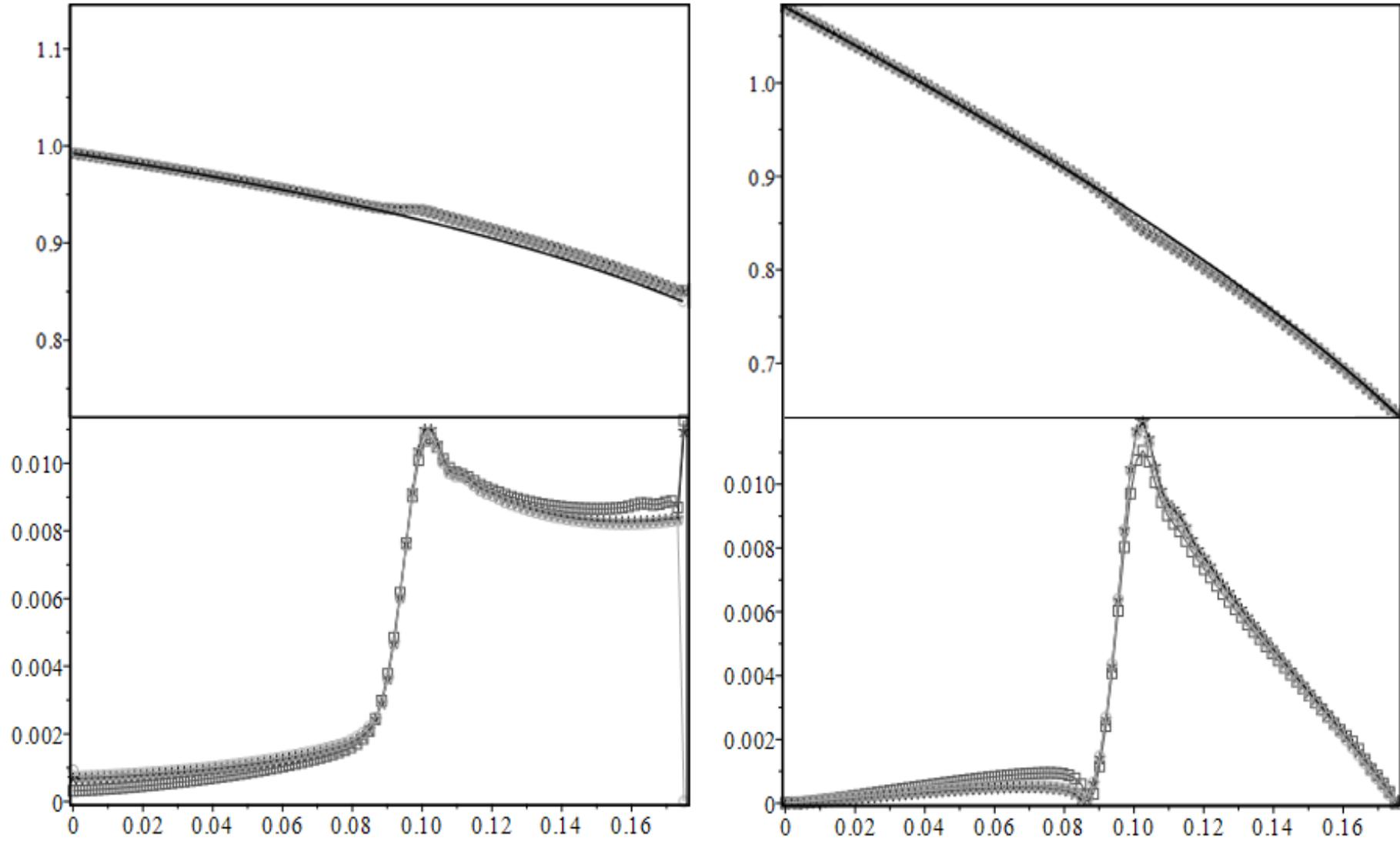


Рис. 3: Решения ρ (слева) и u (справа) третьего тестового задания: точное решение (—), инвариатная схема (—□—), явная схема (—○—) и схема Самарского–Попова (—★—)

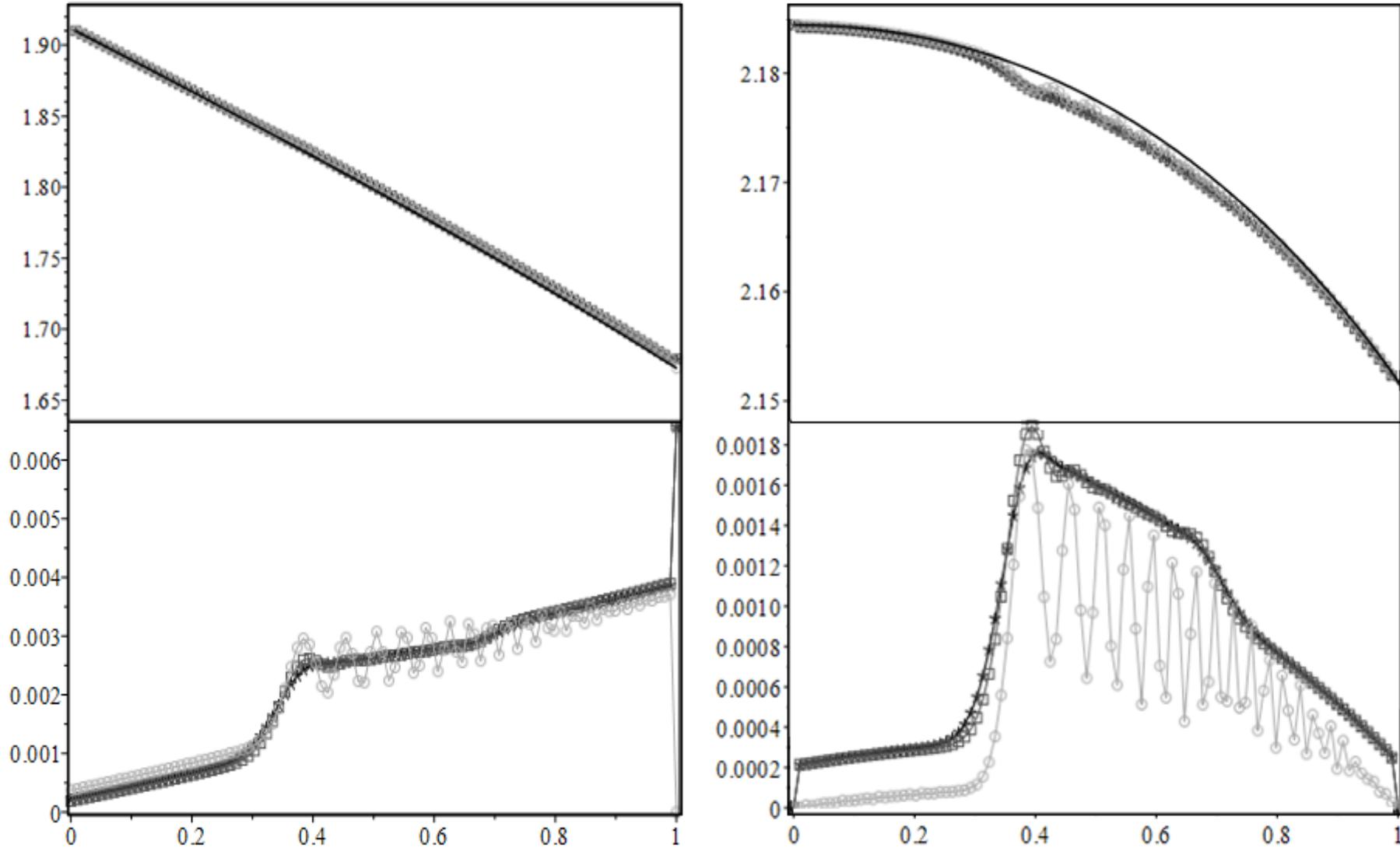


Рис. 4: Решения ρ (слева) и u (справа) четвертого тестового задания: точное решение (—), инвариатная схема (—□—), явная схема (—○—) и схема Самарского–Попова (—★—)

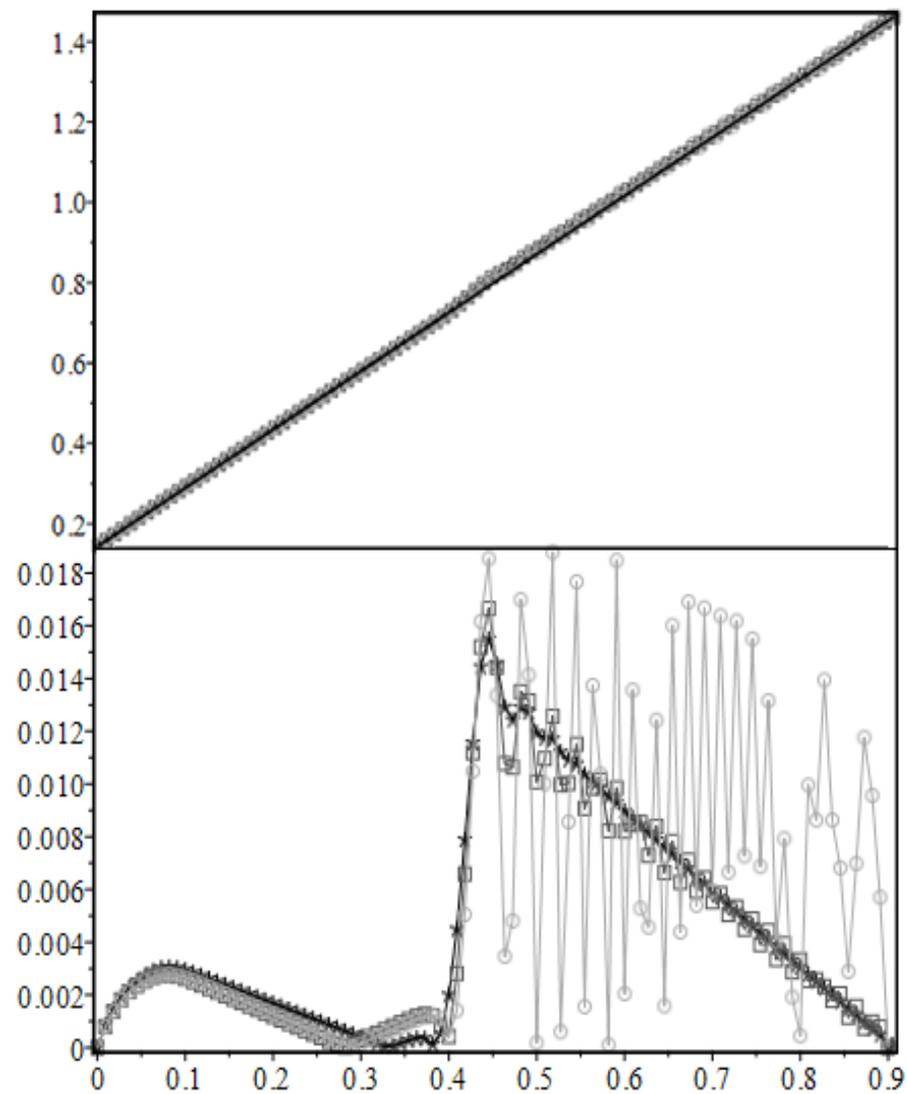
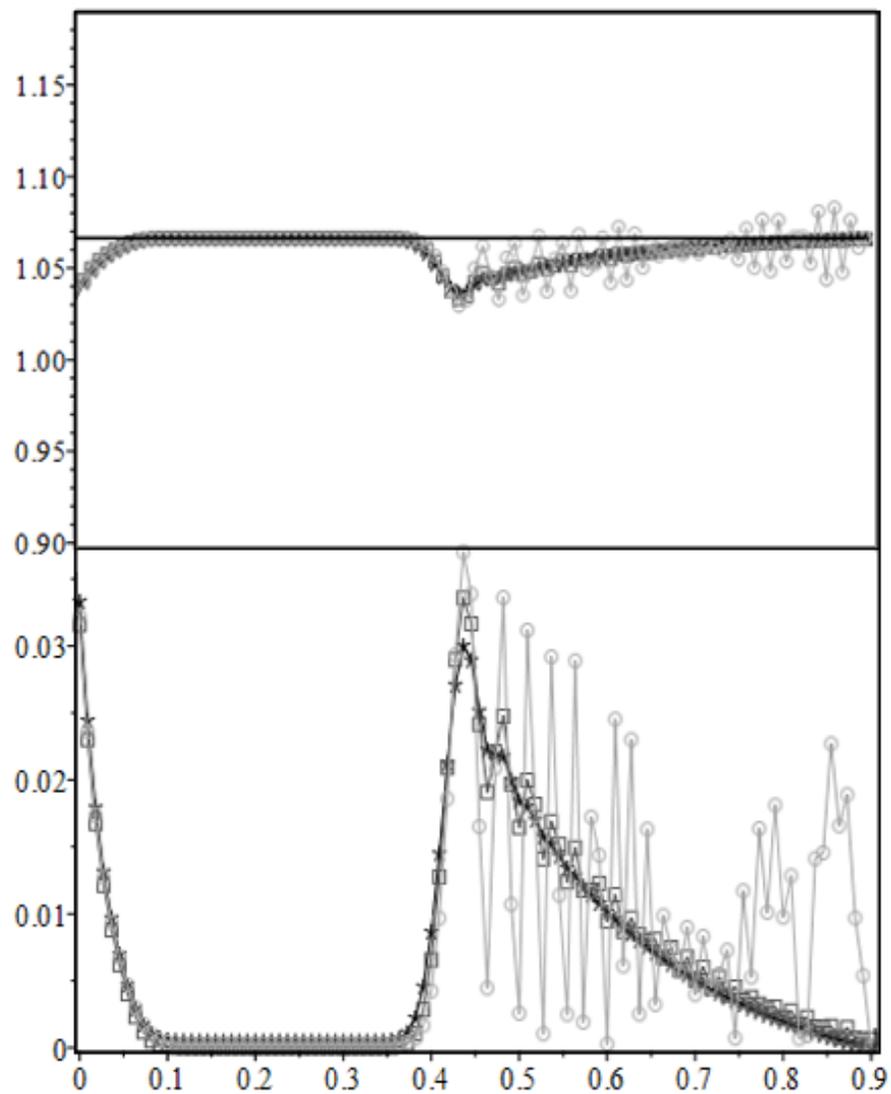


Рис. 5: Решения ρ (слева) и u (справа) пятого тестового задания: точное решение (—), инвариантная схема (—□—), явная схема (—○—) и схема Самарского–Попова (—★—)

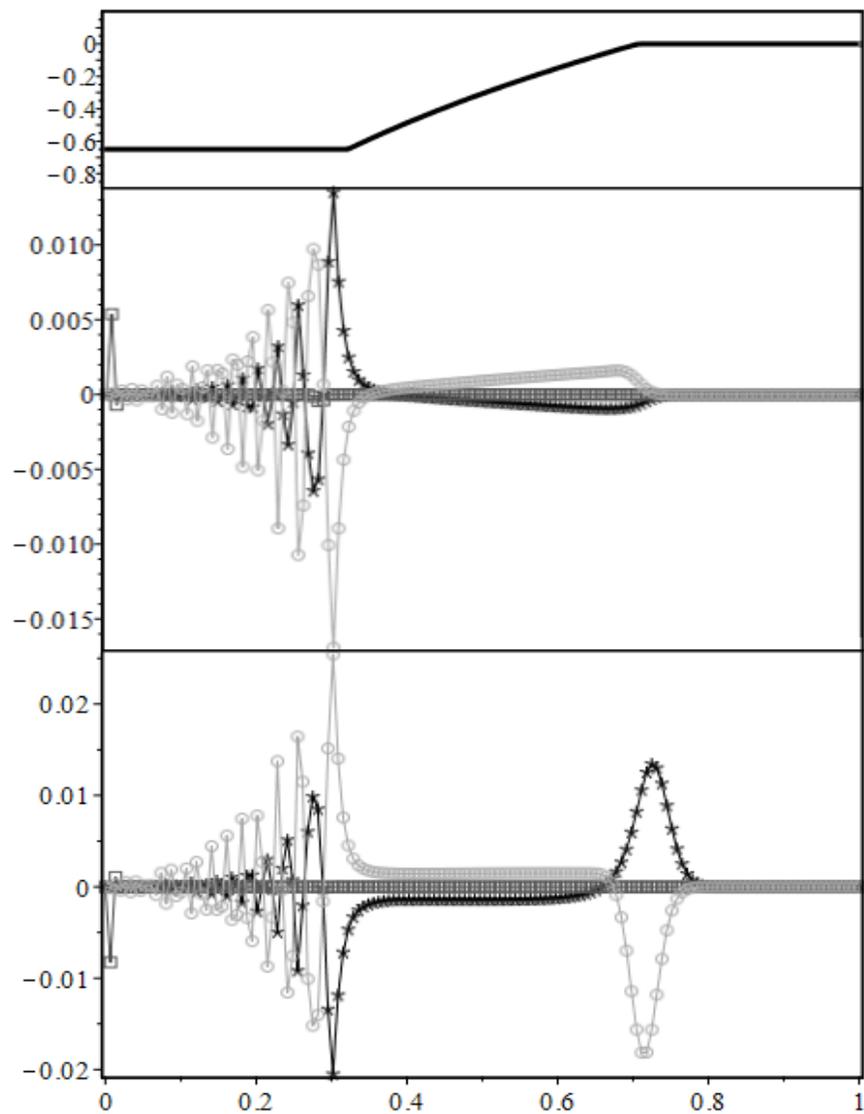


Рис. 6: Значения законов сохранения энергии и импульса на решениях первого тестового задания

Обозначения: инвариантная схема (\square), явная схема (\circ), схема Самарского-Попова (\star)

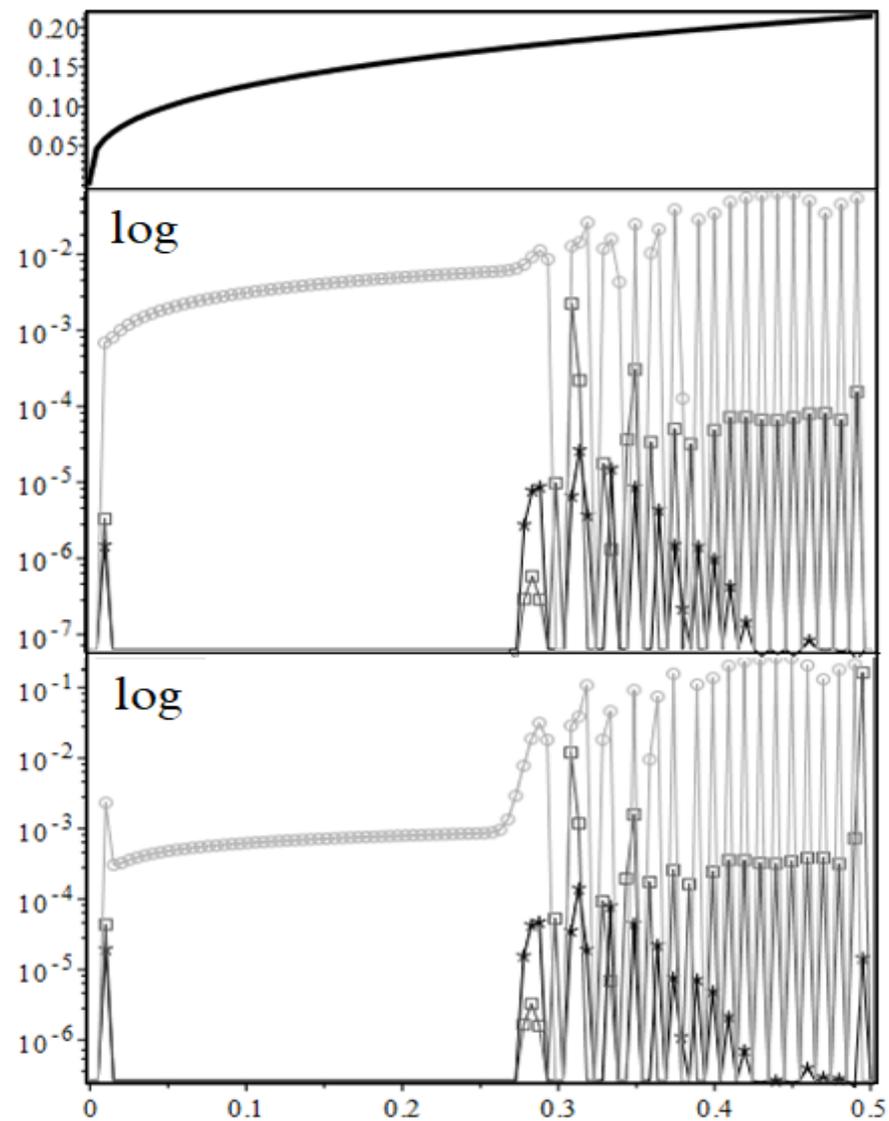


Рис. 7: Значения законов сохранения энергии и импульса на решениях второго тестового задания

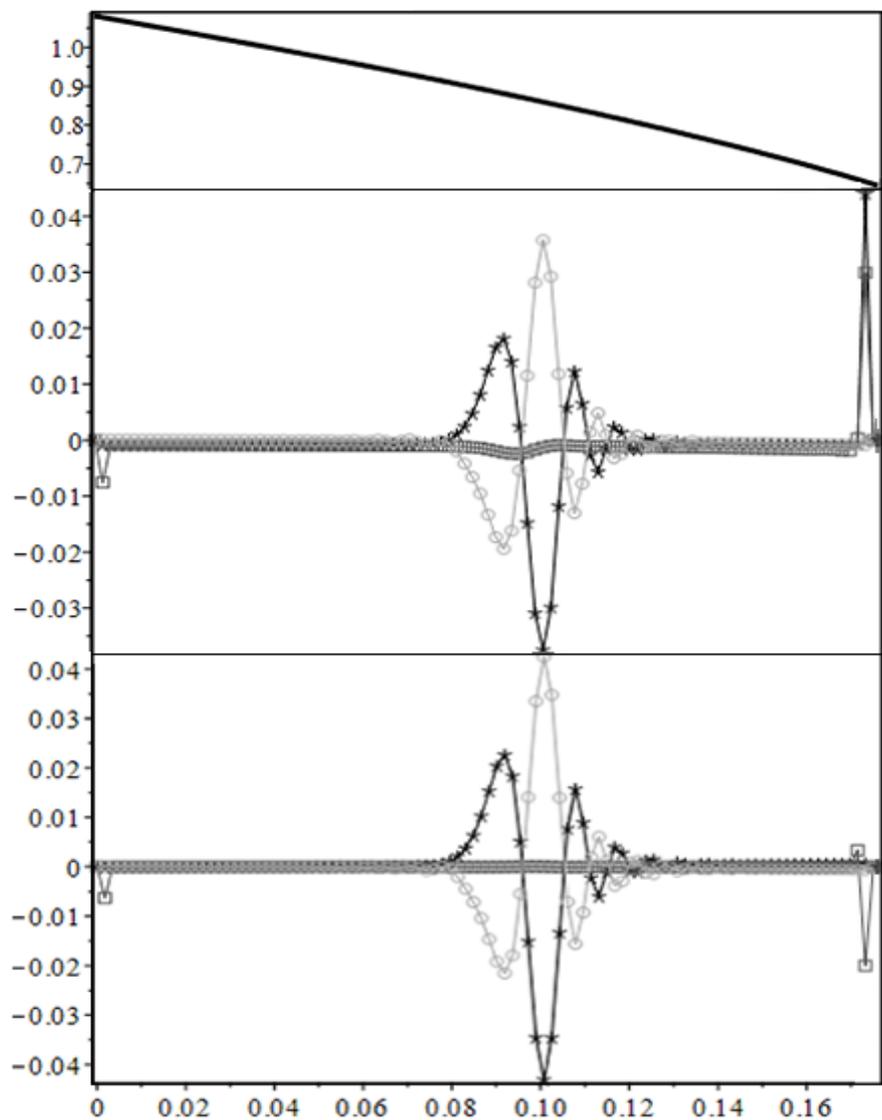


Рис. 8: Значения законов сохранения энергии и импульса на решениях третьего тестового задания

Обозначения: инвариантная схема (\square), явная схема (\circ), схема Самарского-Попова (\star)

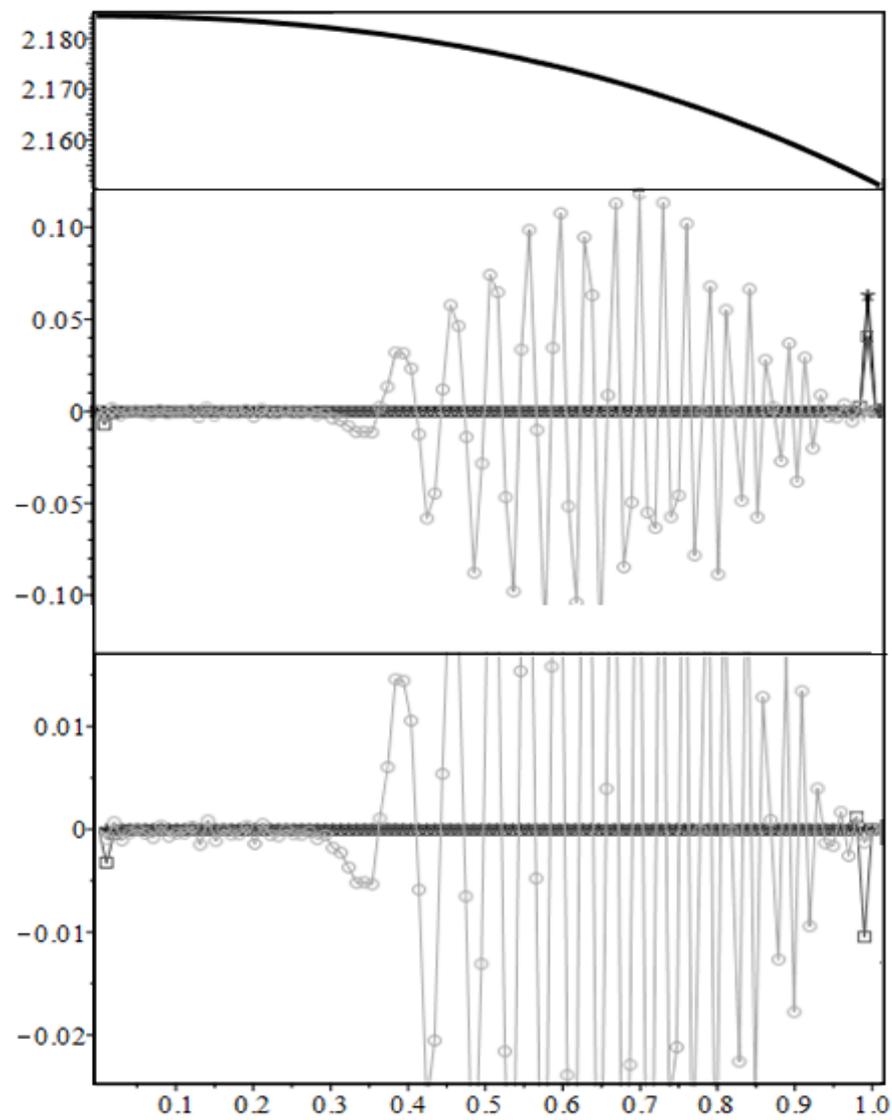


Рис. 9: Значения законов сохранения энергии и импульса на решениях четвертого тестового задания

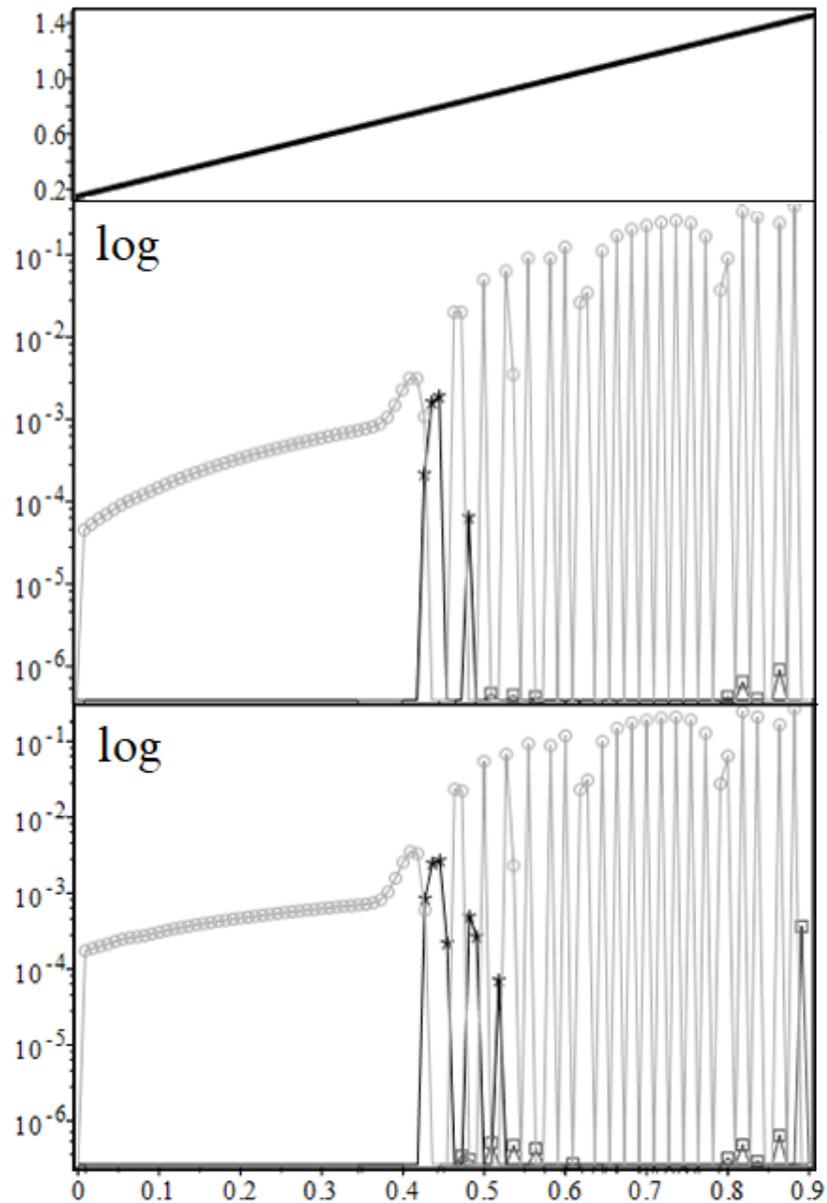


Рис. 10: Значения законов сохранения энергии и импульса на решениях пятого тестового задания. Обозначения: инвариантная схема (\square), явная схема (\circ), схема Самарского–Попова (\star)

среды u . Далее, на рис. 6 приведены (сверху вниз) график точного решения для скоростей u и значения законов сохранения энергии и импульса для трех схем на полученных решениях (изображенных на рис. 1). Значения закона сохранения массы нигде не приводятся, так как в большинстве случаев масса сохраняется схемами достаточно хорошо, и законы сохранения массы имеют на решениях значения близкие к величине погрешности округления.

В нескольких случаях графики законов сохранения для большей наглядности приведены в логарифмическом масштабе и снабжены пометкой “log”.

Рассмотрим графики контроля законов сохранения для задачи о волне разрежения, приведенные на рис. 6. Вблизи начала координат для инвариантной схемы наблюдается небольшой энтропийный след, но дальше осцилляции, в отличие от остальных схем, не распространяются, и законы сохранения энергии и импульса выполняются на решениях с высокой степенью точности. Та же ситуация наблюдается и на рис. 8, 9 и 10, т. е. для всех тестовых задач, кроме задачи №2 (рис. 2 и 7), где вблизи начала координат происходит резкий скачок скорости u .

Анализируя перечисленные графики, можно в целом сказать, что на решениях, не содержащих сильных разрывов, инвариантная схема (17) дает результаты, очень близкие к результатам, получаемым по схеме Самарского–Попова, и при этом ощутимо превосходит явную схему (32), особенно при контроле закона сохранения энергии на решениях.

6 Заключение

Инвариантная схема (17), ранее построенная нами в работе [19] и реализованная численно в настоящей публикации, как выяснилось, в большинстве случаев не уступает модифицированной полностью консервативной схеме Самарского–Попова (28) на решениях, не содержащих сильных разрывов, как в плане точности полученных решений, так и в отношении контроля законов сохранения на этих решениях. Для большей части тестовых заданий (см. рис. 6, 8 и 10) инвариантная схема показывает даже заметно лучшие результаты по законам сохранения энергии и импульса.

Простая явная схема (32), не обладающая законом сохранения энергии, приведенная для сравнения в разделе 3, в ряде случаев значительно проигрывает нашей инвариантной схеме. Заметим, что то же можно сказать и о разрывных решениях: соответствующие тесты (с подходящими параметрами искусственной вязкости) были также проведены автором для пречисленных схем и позволяют прийти к схожим выводам. Напомним, что разрывные точные решения в этой работе не рассматривались, поскольку выполнение дивергентных законов сохранения на таких решениях не гарантировано и, кроме того, схемы с искусственной вязкостью в общем случае на разрывных решениях проигрывают монотонным схемам в точности, поэтому такие решения здесь особого интереса не представляют.

Важным достоинством инвариантных схем (и, в частности, схемы (17)) является возможность их систематического построения с помощью различных стандартных методов. Например, метод конечно-разностных инвариантов [9] позволяет получать инвариантные схемы с помощью стандартного алгоритма, хотя и не гарантирует наличие у них законов сохранения. Для обыкновенных дифференциальных уравнений можно получать интегрируемые ин-

вариантные схемы, обладающие всеми первыми интегралами, используя разностный аналог теоремы Нётер [13]. Схема (17) была построена с помощью комбинации методов: метода конечно-разностных инвариантов, разностного аналога прямого метода [36] и метода неопределенных коэффициентов [31].

При конечно-разностном моделировании различных физических процессов, в том числе процессов механики сплошной среды, выбор критерия инвариантности при конструировании схемы открывает возможности применения широкого спектра связанных с инвариантностью методов построения схем. Найденные таким образом инвариантные схемы сохраняют важные качественные свойства исходных дифференциальных моделей. Подобные схемы трудно получить, прибегая лишь к соображениям интуиции, как мы видели это на примере схемы (32). Это является весомым доводом в пользу учета критерия инвариантности в процессе конечно-разностного моделирования.

Автор благодарен В. А. Дородницыну и С. В. Мелешко за помощь в постановке задач и полезные замечания.

Список литературы

- [1] Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Сиб. отд. АН СССР, 1962.
- [2] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983.
- [3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.
- [4] Kaptsov E. I., Meleshko S. V. Analysis of the One-dimensional Euler-Lagrange equation of continuum mechanics with a Lagrangian of a special form // Applied Mathematical Modelling. — 2019.
- [5] Webb G. M. Magnetohydrodynamics and Fluid Dynamics: Action Principles and Conservation Laws. Lecture Notes in Physics. — Springer, 2018.
- [6] Noether E. Invariante Variations problem // Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, Nachrichten, Mathematisch-Physikalische Klasse Heft 2. — 1918. — P. 235–257. — English translation: Transport Theory and Statist. Phys., 1(3), 1971, 183-207.
- [7] Ибрагимов Н. Х. Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения (Замечания к теореме Э. Нётер) // ТМФ. — 1969. — Vol. 1. — P. 350–359.

- [8] Дородницын В. А. Группы преобразований в сеточных пространствах // Современные проблемы матем. Новейшие достижения. — 1989. — Vol. 34.
- [9] Дородницын В. А. Групповые свойства разностных уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [10] Дородницын В. А. Конечно-разностный аналог теоремы Нетер // Докл. Академии Наук. — 1993. — Т. 328, № 6. — С. 678.
- [11] Dorodnitsyn V. A. Noether-type theorems for difference equations // Applied Numerical Mathematics. — 2001. — Vol. 39, no. 3. — P. 307 – 321. — Themes in Geometric Integration.
- [12] Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V., Winternitz P. Symmetries, Lagrangian Formalism and Integration of Second Order Ordinary Difference Equations // Journal of Nonlinear Mathematical Physics Volume Supplement. — 2003. — 12. — Vol. 10. — P. 41–56.
- [13] Dorodnitsyn V. A. Kozlov R. V. Winternitz P. Continuous symmetries of Lagrangians and exact solutions of discrete equations // Journal of Mathematical Physics. — 2004. — Vol. 45, no. 1. — P. 336–359.
- [14] Дородницын В. А., Капцов Е. И. Дискретизация обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих симметриями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Vol. 53. — P. 1329–1355.
- [15] Дородницын В. А., Капцов Е. И. Инвариантные Разностные Схемы Для Системы Ермакова // Дифференциальные уравнения. — 2016. — 01. — Т. 52. — С. 965–980.
- [16] Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V. First integrals of difference Hamiltonian equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2009. — 10. — Vol. 42. — P. 454007.
- [17] Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V. Invariance and first integrals of continuous and discrete Hamiltonian equations // Journal of Engineering Mathematics. — 2010. — Mar. — Vol. 66, no. 1. — P. 253–270.
- [18] Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V. Lagrangian and Hamiltonian Formalism for Discrete Equations: Symmetries and First Integrals // Symmetries and Integrability of Difference Equations / Ed. by D. Levi, P. Olver, Z. Thomova, P. Winternitz. — London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2011. — P. 7–49.

- [19] Dorodnitsyn V. A., Kaptsov E. I. The Invariant Conservative Finite-Difference Scheme for 1+1 D Shallow Water Equations. — 2019. — in preparation.
- [20] Bihlo A., Popovych R. Invariant Discretization Schemes for the Shallow-Water Equations // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2012. — 01. — Vol. 34.
- [21] Зюзина Н. А., Ковыркина О. А., Остапенко В. В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // Доклады Академии наук. — 2018. — Т. 482. — С. 639–643.
- [22] Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. — 1959. — Т. 47(89), № 3. — С. 271–306.
- [23] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. — 1983. — Vol. 49, no. 3. — P. 357–393.
- [24] Jiang Guang-Shan, Shu Chi-Wang. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes // Journal of Computational Physics. — 1996. — Vol. 126, no. 1. — P. 202–228.
- [25] Neumann J. von, Richtmyer R. D. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks // Journal of Applied Physics. — 1950. — Vol. 21, no. 3. — P. 232–237.
- [26] Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 953–958.
- [27] Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений магнитной гидродинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1970. — Т. 10, № 4. — С. 990–998.
- [28] Еленин Г. Г., Крылов В. В. Полностью консервативная разностная схема для уравнений двухслойной «мелкой воды» в лагранжевых координатах // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 7. — С. 1190–1196.
- [29] Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1987. — Т. 27. — С. 779–784.

- [30] Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией решения / Ю. А. Повещенко, М. Е. Ладонкина, В. О. Подрыга и др. // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2019.
- [31] Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы (введение в теорию). — М.: Наука, 1973.
- [32] Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. — Новосибирск: Наука, 1994.
- [33] Siritwat P., Kaewmanee C., Meleshko S. V. Symmetries of the hyperbolic shallow water equations and the Green-Naghdi model in Lagrangian coordinates // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2016. — Vol. 86. — P. 185–195.
- [34] Попов Ю. П., Самарский А. А. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1992.
- [35] Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [36] Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C. Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations. — New York: Springer, 2010. — Applied Mathematical Sciences, Vol.168.
- [37] Dorodnitsyn V. A. On the Linearization of Second-Order Differential and Difference Equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. — 2006. — 08. — Vol. 2.
- [38] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — 4 изд. — М.: Наука, 1971.
- [39] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — 8 изд. — М.: Наука, 1977. — Т. 1.

Содержание

1	Введение	3
2	Одномерные уравнения мелкой воды в лагранжевых системах координат	5
3	Конечно-разностные схемы для одномерных уравнений мелкой воды, обладающие законами сохранения	8
3.1	Инвариантная схема	8
3.2	Модифицированная схема Самарского–Попова	9
3.3	Простая явная схема	10
4	Некоторые точные решения	11
5	Численная реализация разностных схем для уравнений мелкой воды	13
6	Заключение	23