



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 11 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брагин М.Д., Рогов Б.В.

Бикомпактные схемы для
многомерных уравнений
гиперболического типа на
декартовых сетках с
адаптацией к решению

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брагин М.Д., Рогов Б.В. Бикомпактные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа на декартовых сетках с адаптацией к решению // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 11. 27 с. doi:[10.20948/prepr-2019-11](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-11)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-11>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

М. Д. Брагин, Б. В. Рогов

**Бикомпактные схемы для многомерных
уравнений гиперболического типа
на декартовых сетках с адаптацией к решению**

Москва — 2019

Брагин М. Д., Рогов Б. В.

Бикомпактные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа на декартовых сетках с адаптацией к решению

Для уравнений гиперболического типа построены высокоточные бикомпактные схемы на декартовых сетках с адаптацией к решению. Подробно описан алгоритм реализации бикомпактных схем на таких сетках. Предложен новый критерий адаптации сетки к решению. Бикомпактные схемы с этим критерием адаптации проверены на двумерной задаче о переносе финитного импульса и двумерной задаче Седова о сильном взрыве в идеальном газе. Показано, что конструкция бикомпактных схем допускает счет на сетках данного класса, обеспечивая при этом хорошую точность вычисляемого решения.

Ключевые слова: бикомпактные схемы, высокоточные схемы, гиперболические уравнения, сетки с адаптивным измельчением.

Michael Dmitrievich Bragin, Boris Vadimovich Rogov

Bicompact schemes for multidimensional hyperbolic equations on Cartesian meshes with solution-based AMR

High-order bicompact schemes for hyperbolic equations on Cartesian meshes with solution-based adaptive mesh refinement are constructed. The algorithm for implementation of these schemes on such meshes is described in detail. A new solution-based criteria of mesh refinement is proposed. Bicompact schemes with this refinement criteria are tested on the two-dimensional problem of compactly supported pulse advection and the two-dimensional Sedov blast wave problem. It is shown, that the design of bicompact schemes allows them to be implemented on meshes of such class with good accuracy of the computed solution ensured.

Keywords: bicompact schemes, high-order schemes, hyperbolic equations, adaptive mesh refinement.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-31-00045.

Введение

Разработка высокоточных схем для численного решения уравнений в частных производных, в том числе уравнений гиперболического типа, до сих пор остается актуальным направлением вычислительной математики. Высокий порядок точности (от трех и выше) позволяет достигать заданной погрешности на менее подробных сетках, что особенно важно при решении многомерных задач [1]. В некоторых приложениях, например, аэроакустике [1, 2], теории упругости [3, 4] и электродинамике [5], требуется аккуратный расчет эволюции возмущений волнового характера на большие расстояния и времена, и здесь высокоточные схемы также оказываются намного предпочтительнее схем низкого порядка.

В работах [6–9] развит новый класс высокоточных схем для систем нестационарных многомерных квазилинейных уравнений гиперболического типа. Аппроксимация пространственных производных в этих схемах является компактной, но при этом она включает в себя лишь два целых узла, поэтому схемы [6–9] называются бикompактными.

Бикompактные схемы сочетают в себе несколько положительных свойств. Эти схемы имеют четвертый порядок аппроксимации по пространству, который может быть повышен до шестого, восьмого и так далее (см. [10]). Вместе с тем, разностный порядок уравнений бикompактных схем по независимым пространственным переменным совпадает с порядком решаемых уравнений в частных производных, что обеспечивает совпадение числа граничных условий в разностной и точной постановках задачи. Бикompактные схемы консервативны и обладают возможностью выбора метода интегрирования по времени, так как эти схемы выводятся при помощи метода конечных объемов и метода прямых. Кроме того, бикompактные схемы сохраняют свой высокий порядок аппроксимации по пространству на существенно неравномерных сетках, поскольку пространственный шаблон этих схем занимает одну ячейку сетки. По своим дисперсионным и диссипативным свойствам бикompактные схемы превосходят [10, 11] многие хорошо известные конечно-разностные и компактные схемы. Наконец, бикompактные схемы могут быть эффективно реализованы бегущим счетом, включая его параллельный вариант [12]. Данное сочетание свойств составляет конкурентное преимущество бикompактных схем среди других высокоточных схем.

Однако в настоящий момент применимость бикompактных схем ограничена вычислительными областями простейшей формы (прямоугольниками, параллелепипедами), а также декартовыми сетками. Эту проблему

можно решить двумя способами: либо построить бикомпактные схемы на неструктурированных сетках, либо применить известный и хорошо разработанный подход декартовых сеток с адаптивным измельчением [13, 14] (в англоязычной литературе AMR, adaptive mesh refinement), обретший немалую популярность в недавнее время [15–21]. Последний способ представляется более привлекательным, так как он сводится по сути к более сложной реализации уже известных схем и не требует построения новых.

Задача обобщения бикомпактных схем на декартовы сетки с адаптивным измельчением (далее мы будем называть их также адаптивными декартовыми сетками или декартовыми сетками с адаптацией) разбивается на две последовательные подзадачи: обобщение на декартовы сетки с адаптацией к решению и обобщение на декартовы сетки с адаптацией к границам вычислительной области. Целью настоящей работы будет принципиальное решение первой подзадачи в том случае, когда вычислительная область по-прежнему имеет простейшую форму. Мы рассмотрим только бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации по пространству, хотя все рассуждения и построения этой работы можно перенести на бикомпактные схемы более высоких порядков.

Препринт организован следующим образом. В разделе 1 описываются бикомпактные схемы и их реализация на декартовых сетках без адаптации. В разделе 2 описывается алгоритм счета по бикомпактным схемам на декартовых сетках с адаптацией к решению, предлагается новый критерий адаптации сетки к решению. В разделе 3 бикомпактные схемы на декартовых сетках с адаптацией к решению тестируются на двумерной задаче о переносе финитного импульса и двумерной задаче Седова о сильном взрыве в идеальном газе.

1. Бикомпактные схемы на обычных декартовых сетках

Рассмотрим систему двумерных однородных квазилинейных уравнений гиперболического типа в простейшей вычислительной области D :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\mathbf{Q}) &\equiv \partial_t \mathbf{Q} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{Q}) + \partial_y \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \\ (x, y) \in D &= (0, x_{\max}) \times (0, y_{\max}), \quad t \in (0, t_{\max}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_m) = \mathbf{Q}(x, y, t)$ — искомый вектор консервативных переменных, $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ и $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ — векторы физических потоков в направлении осей Ox и Oy соответственно, символ $\partial_x \equiv \partial/\partial x$. Мы полагаем, что при $t = 0$, а также на границе ∂D области D поставлены некоторые краевые условия, для которых решение системы (1) существует и единственно

в $\bar{D} \times [0, t_{\max}]$, $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Прежде чем продолжить наше изложение, объясним, почему для рассмотрения была выбрана система именно двумерных уравнений, а не одномерных или трехмерных. Двумерный случай хорош по двум причинам.

1. Он сложнее одномерного случая в мере, достаточной для того, чтобы на его примере можно было изучить все важные особенности и проблемы реализации бикомпактных схем на адаптивных декартовых сетках.
2. Он проще трехмерного случая тем, что не обременен весьма громоздкой трехмерной конечно-разностной математикой.

Запишем нерасщепленную (по x, y) базовую бикомпактную схему четвертого порядка аппроксимации по x, y [7] для системы уравнений (1):

$$\begin{cases} A_0^y A_0^x (\mathbf{Q}_C^{n+1} - \mathbf{Q}_C^n) + \tau A_0^y \Lambda_1^x \mathbf{F}_C^{n+1} + \tau \Lambda_1^y A_0^x \mathbf{G}_C^{n+1} = \mathbf{0}, \\ A_0^y \Lambda_1^x (\mathbf{Q}_C^{n+1} - \mathbf{Q}_C^n) + \tau A_0^y \Lambda_2^x \mathbf{F}_C^{n+1} + \tau \Lambda_1^y \Lambda_1^x \mathbf{G}_C^{n+1} = \mathbf{0}, \\ \Lambda_1^y A_0^x (\mathbf{Q}_C^{n+1} - \mathbf{Q}_C^n) + \tau \Lambda_1^y \Lambda_1^x \mathbf{F}_C^{n+1} + \tau \Lambda_2^y A_0^x \mathbf{G}_C^{n+1} = \mathbf{0}, \\ \Lambda_1^y \Lambda_1^x (\mathbf{Q}_C^{n+1} - \mathbf{Q}_C^n) + \tau \Lambda_1^y \Lambda_2^x \mathbf{F}_C^{n+1} + \tau \Lambda_2^y \Lambda_1^x \mathbf{G}_C^{n+1} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2)$$

Поясним обозначения в схеме (2). В замкнутой области \bar{D} введена обычная, то есть не адаптивная, декартова сетка $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, где

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \{x_0, x_{1/2}, x_1, x_{3/2}, x_2, \dots, x_{N_x}\}, & x_0 &= 0, & x_{N_x} &= x_{\max}, \\ h_{x, j+1/2} &= x_{j+1} - x_j \equiv h_x - \text{шаг по } x, & x_{j+1/2} &= \frac{x_j + x_{j+1}}{2}; \\ \Omega_y &= \{y_0, y_{1/2}, y_1, y_{3/2}, y_2, \dots, y_{N_y}\}, & y_0 &= 0, & y_{N_y} &= y_{\max}, \\ h_{y, k+1/2} &= y_{k+1} - y_k \equiv h_y - \text{шаг по } y, & y_{k+1/2} &= \frac{y_k + y_{k+1}}{2}. \end{aligned}$$

Временной отрезок $t \in [0, t_{\max}]$ разбит на множество слоев

$$\{t^0, t^1, \dots, t^{N_t}\}, \quad t^0 = 0, \quad t^{N_t} = t_{\max}, \quad \tau^{n+1/2} = t^{n+1} - t^n \equiv \tau - \text{шаг по } t.$$

Буквой C обозначен мультииндекс $(j + 1/2, k + 1/2)$, $j = \overline{0, N_x - 1}$, $k = \overline{0, N_y - 1}$, $n = \overline{0, N_t - 1}$. Сеточная вектор-функция \mathbf{Q}^n аппроксимирует точное решение системы уравнений (1) в узлах сетки Ω в момент времени $t = t^n$. Разностные операторы $A_0^d, \Lambda_1^d, \Lambda_2^d$, $d \in \{x, y\}$ определяются для произвольной сеточной функции U формулами:

$$\begin{aligned} A_0^x U_{j+1/2, k'} &= \frac{U_{j, k'} + 4U_{j+1/2, k'} + U_{j+1, k'}}{6}, & \Lambda_1^x U_{j+1/2, k'} &= \frac{U_{j+1, k'} - U_{j, k'}}{h_x}, \\ \Lambda_2^x U_{j+1/2, k'} &= \frac{4(U_{j, k'} - 2U_{j+1/2, k'} + U_{j+1, k'})}{h_x^2}, \end{aligned}$$

$$A_0^y U_{j',k+1/2}^y = \frac{U_{j',k}^y + 4U_{j',k+1/2}^y + U_{j',k+1}^y}{6}, \quad \Lambda_1^y U_{j',k+1/2}^y = \frac{U_{j',k+1}^y - U_{j',k}^y}{h_y},$$

$$\Lambda_2^y U_{j',k+1/2}^y = \frac{4(U_{j',k}^y - 2U_{j',k+1/2}^y + U_{j',k+1}^y)}{h_y^2},$$

где индексы $j' \in \{j, j + 1/2, j + 1\}$, $k' \in \{k, k + 1/2, k + 1\}$. Векторы потоков в схеме (2) вычисляются так: $\mathbf{F}_{j',k'}^{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{j',k'}^{n+1})$, $\mathbf{G}_{j',k'}^{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{Q}_{j',k'}^{n+1})$.

Помимо нерасщепленной схемы (2) нас будет интересовать ее более экономичный вариант с локально-одномерным (далее LOD-) расщеплением по x, y [22–24], см. также [25]:

$$\begin{cases} A_0^x \left(\mathbf{Q}_{j+1/2,k'}^{[x]} - \mathbf{Q}_{j+1/2,k'}^{[x*]} \right) + \tau \Lambda_1^x \mathbf{F}_{j+1/2,k'}^{[x]} = \mathbf{0}, \\ \Lambda_1^x \left(\mathbf{Q}_{j+1/2,k'}^{[x]} - \mathbf{Q}_{j+1/2,k'}^{[x*]} \right) + \tau \Lambda_2^x \mathbf{F}_{j+1/2,k'}^{[x]} = \mathbf{0}; \\ A_0^y \left(\mathbf{Q}_{j',k+1/2}^{[y]} - \mathbf{Q}_{j',k+1/2}^{[y*]} \right) + \tau \Lambda_1^y \mathbf{G}_{j',k+1/2}^{[y]} = \mathbf{0}, \\ \Lambda_1^y \left(\mathbf{Q}_{j',k+1/2}^{[y]} - \mathbf{Q}_{j',k+1/2}^{[y*]} \right) + \tau \Lambda_2^y \mathbf{G}_{j',k+1/2}^{[y]} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{Q}^{[d]}$ и $\mathbf{Q}^{[d*]}$, $d \in \{x, y\}$ — вспомогательные сеточные функции, для которых имеют место связи

$$\mathbf{Q}^{[x*]} = \mathbf{Q}^n, \quad \mathbf{Q}^{[y*]} = \mathbf{Q}^{[x]}, \quad \mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^{[y]}. \quad (4)$$

Векторы потоков в схеме (3) вычисляются аналогично схеме (2). Индексы j', k' в (3) могут принимать не только строго внутренние значения, но и граничные, в зависимости от постановки граничных условий для системы уравнений (1).

LOD-расщепление можно применять по-разному: либо сначала решать одномерные уравнения вдоль x , а затем вдоль y , как это указано в связях (4); либо, наоборот, сначала по y , затем по x (в связях (4) тогда необходимо поменять местами буквы x и y в верхних индексах); либо находить результирующее решение \mathbf{Q}^{n+1} как полусумму от решений, полученных при помощи первых двух несимметризованных вариантов расщепления. Последний симметризованный вариант схемы расщепления с полусуммой позволяет повысить порядок аппроксимации по t до второго.

Полностью дискретные бикомпактные схемы (2), (3) получаются из соответствующих полудискретных схем путем аппроксимации производных по t неявным методом Эйлера. Интегрирование этих полудискретных схем при помощи DIRK-методов более высокого порядка дает бикомпактные схемы повышенной точности по t . Если порядок выбранного DIRK-метода равен $p \geq 2$, то погрешность аппроксимации нерасщепленной бикомпакт-

ной схемы составляет $\mathbf{O}(\tau^p, h^4)$, в то время как погрешность бикompактной LOD-схемы составляет $\mathbf{O}(\tau, h^4)$ при несимметризованном расщеплении и $\mathbf{O}(\tau^2, h^4)$ при симметризованном, где $h = \max\{h_x, h_y\}$.

Хорошо известно, что реализация многостадийных DIRK-методов высокого порядка сводится к композиции неявных методов Эйлера с надлежаще подобранными стадийными временными шагами и входными данными. Точно так же реализация бикompактных схем повышенной точности по t сводится к композиции базовых бикompактных схем. Поэтому для изучения реализации всех бикompактных схем достаточно проанализировать схемы (2), (3).

Если матрицы Якоби $\mathbf{A}(\mathbf{Q}) = \partial_{\mathbf{Q}}\mathbf{F}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{B}(\mathbf{Q}) = \partial_{\mathbf{Q}}\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ не являются ни положительно, ни отрицательно определенными для любых \mathbf{Q} , допускаемых системой (1), то реализация схем (2), (3) требует применения процедуры глобального потокового расщепления Лакса-Фридрихса. Эта процедура основана на использовании векторов

$$\mathbf{F}^{\pm}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2}\mathbf{F}(\mathbf{Q}) \pm C_2^x \mathbf{Q}, \quad \mathbf{G}^{\pm}(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2}\mathbf{G}(\mathbf{Q}) \pm C_2^y \mathbf{Q},$$

где параметры потокового расщепления C_2^d , $d \in \{x, y\}$ подбираются так, чтобы неравенства для матриц Якоби

$$\partial_{\mathbf{Q}}\mathbf{F}^+(\mathbf{Q}), \partial_{\mathbf{Q}}\mathbf{G}^+(\mathbf{Q}) > 0, \quad \partial_{\mathbf{Q}}\mathbf{F}^-(\mathbf{Q}), \partial_{\mathbf{Q}}\mathbf{G}^-(\mathbf{Q}) < 0$$

были справедливы для всех значений точного решения системы (1), которые достигаются в \bar{D} в некоторой окрестности рассматриваемого момента времени. При расчете перехода со слоя t^n на слой t^{n+1} параметры потокового расщепления предлагается вычислять явно при помощи следующих оценок:

$$\begin{aligned} C_2^x &= \frac{1 + 2\delta}{2} V_{\max}^x, & V_{\max}^x &= \max_{\substack{s=1, m \\ (x, y) \in \Omega}} |\lambda_s(\mathbf{Q}^n(x, y); \mathbf{A})|, \\ C_2^y &= \frac{1 + 2\delta}{2} V_{\max}^y, & V_{\max}^y &= \max_{\substack{s=1, m \\ (x, y) \in \Omega}} |\lambda_s(\mathbf{Q}^n(x, y); \mathbf{B})|, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\lambda_s(\mathbf{Q}; \mathbf{X})$ — s -е собственное значение матрицы $\mathbf{X}(\mathbf{Q})$, $\delta > 0$ — «запас положительной/отрицательной знакоопределенности» матриц $\partial_{\mathbf{Q}}\mathbf{F}^{\pm}, \partial_{\mathbf{Q}}\mathbf{G}^{\pm}$.

Наконец, опишем реализацию схем (2), (3). Переход со слоя t^n на слой t^{n+1} осуществляется в несколько этапов:

1. По формуле (5) вычисляются параметры C_2^d , $d \in \{x, y\}$.
2. Векторы \mathbf{F} , \mathbf{G} в (2), (3) заменяются на соответствующие им расщепленные потоки \mathbf{F}^{\pm} , \mathbf{G}^{\pm} при том или ином выборе знаков. Для опреде-

ленности, возьмем $\mathbf{F} = \mathbf{F}^+$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}^+$; прочие варианты рассматриваются аналогично.

3. Ячейки $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ сетки Ω обходятся двойным циклом по j, k , $j = \overline{0, N_x - 1}$, $k = \overline{0, N_y - 1}$. В каждой из них уравнения выбранной схемы разрешаются относительно неизвестных значений \mathbf{Q} в узлах $(x_{j+1/2}, y_{k+1/2})$, $(x_{j+1/2}, y_{k+1})$, $(x_{j+1}, y_{k+1/2})$, (x_{j+1}, y_{k+1}) . В схеме (2) для этого используется, например, метод Ньютона или метод итерированной приближенной факторизации [26]. В схеме (3) применяется метод Ньютона, при этом за один обход ячеек вычисляется только $\mathbf{Q}^{[x]}$ (или только $\mathbf{Q}^{[y]}$, это зависит от варианта расщепления). Для вычисления оставшегося $\mathbf{Q}^{[y]}$ (или $\mathbf{Q}^{[x]}$) выполняется еще один обход.
4. Знаки потокового расщепления меняются на противоположные, теперь $\mathbf{F} = \mathbf{F}^-$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}^-$. В качестве начального условия (то есть вместо \mathbf{Q}^n) берется решение, полученное на этапах 2–3.
5. Ячейки сетки Ω обходятся двойным циклом по j, k в противоположном порядке, $j = \overline{N_x - 1, 0}$, $k = \overline{N_y - 1, 0}$. Аналогично этапу 3, в каждой из них уравнения выбранной схемы разрешаются относительно неизвестных значений \mathbf{Q} в узлах $(x_{j+1/2}, y_{k+1/2})$, $(x_{j+1/2}, y_k)$, $(x_j, y_{k+1/2})$, (x_j, y_k) .
6. Искомое решение \mathbf{Q}^{n+1} полагается равным решению, найденному на этапах 4–5, индекс n увеличивается на единицу, и мы возвращаемся к этапу 1.

Если для счета по t используется DIRK-метод высокого порядка, то на этапах 3, 5 выполняются все его стадии. Более того, при LOD-расщеплении сначала выполняются все стадии для $\mathbf{Q}^{[x]}$ (или $\mathbf{Q}^{[y]}$), и только после этого выполняются все стадии уже для $\mathbf{Q}^{[y]}$ (или $\mathbf{Q}^{[x]}$). Другими словами, переключение стадий DIRK вложено в переключение направлений LOD-расщепления (если оно есть), которое само вложено в переключение знаков расщепленных потоков.

Из вышеприведенного описания очевидно, что реализация схем (2), (3) сводится к последовательному обходу ячеек, в каждой из которых искомое решение вычисляется локально. Приступая к обсчету очередной ячейки, мы всегда будем знать искомое решение на двух ее гранях с общей вершиной, что гарантируется процедурой потокового расщепления и порядком обхода ячеек.

Таким образом, тот факт, что пространственный шаблон бикомпактных схем занимает одну ячейку, вкупе с локальной разрешимостью этих схем делает их очень удобными для расчетов на адаптивных декартовых сетках.

2. Бикомпактные схемы на декартовых сетках с адаптацией к решению

Всюду далее мы будем рассматривать декартовы сетки с адаптацией к решению в замкнутой области \bar{D} простейшей формы, хотя построения и рассуждения настоящего раздела могут быть частично распространены и на декартовы сетки с адаптацией к границе (например, структуры данных и алгоритмы обхода ячеек).

Опишем сперва конструкцию адаптивных декартовых сеток и связанные с ними структуры данных. Наши рассуждения будут почти полностью следовать работе [27].

Предполагается, что в \bar{D} введена достаточно грубая обычная декартова сетка Ω (см. раздел 1). Мы делаем ее адаптивной: в начале или в процессе счета каждая из ее ячеек может разбиться (измельчиться) на четыре новые ячейки пополам по каждому направлению; каждая из этих четырех новых ячеек может разбиться еще на четыре аналогичным образом и так далее. Разбиваемая ячейка называется ячейкой-родителем, а появляющиеся из нее четыре новые ячейки называются ее ячейками-потомками. Число рекурсивных измельчений, потребовавшееся для получения ячейки, называется ее рангом $R \geq 0$. Например, исходные грубые ячейки имеют ранг $R = 0$, их однократное измельчение дает ячейки ранга $R = 1$, которые разбиваются уже на ячейки ранга $R = 2$ и так далее. Ранги ячеек ограничены сверху, $R \leq R_{\max}$. Линейные размеры ячейки ранга R выражаются через линейные размеры породившей ее ячейки нулевого ранга по очевидным формулам:

$$h_x(R) = 2^{-R}h_x(0), \quad h_y(R) = 2^{-R}h_y(0).$$

Уточним, что в процессе счета ячейки-потомки некоторой ячейки-родителя могут объединиться обратно в эту ячейку-родителя, но ячейкам нулевого ранга объединяться друг с другом не допускается. Пример адаптивного измельчения ячейки нулевого ранга изображен на рис. 1 слева.

Для представления двумерных адаптивных декартовых сеток уместно использовать леса 4-деревьев (в англоязычной литературе quadtree, далее просто дерево). Каждое дерево имеет своим корнем соответствующую ему ячейку нулевого ранга; ее потомки, потомки ее потомков и так далее составляют все остальные узлы этого дерева. Пример дерева ячеек изображен на рис. 1 справа, ребра дерева окрашены в красный цвет.

Если ячейка не имеет потомков, то она называется расчетной. Расчетные ячейки являются листьями деревьев, и именно к ним применяется

численная схема. Деревья ячеек описывают полную историю измельчения сетки: они содержат не только расчетные ячейки, но и все породившие их ячейки вплоть до нулевого ранга.

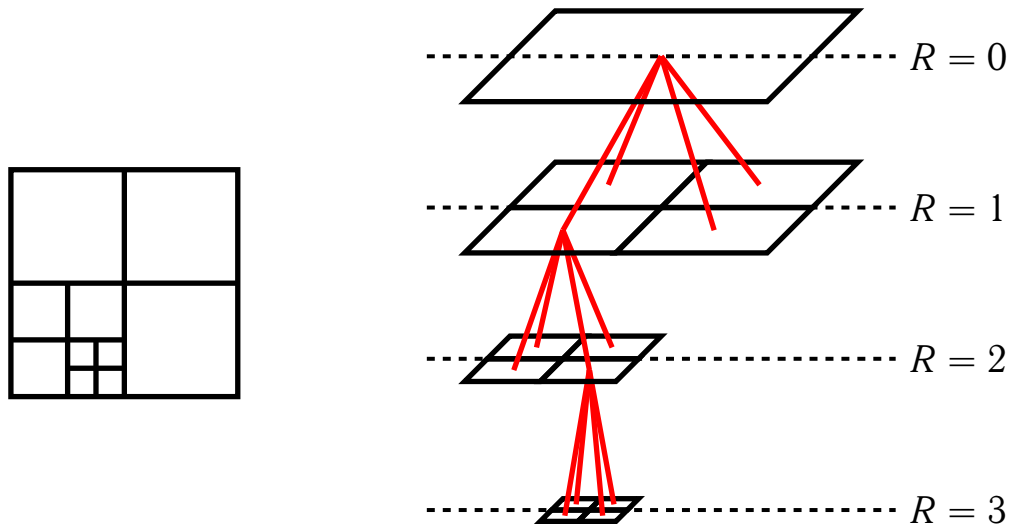


Рис. 1. Адаптивное измельчение ячейки нулевого ранга и дерево ячеек

Сделаем одно важное замечание, специфичное для пространственного шаблона бикомпактных схем: хранение всех девяти значений решения Q в ячейке, которая сама хранится в дереве, совершенно неэффективно, поскольку данные при этом многократно дублируются. Например, даже при $R_{\max} = 0$ такой подход приведет почти к четырехкратному увеличению требуемой памяти для вершин ячеек и двукратному для центров их граней. При $R_{\max} > 0$ ситуация усугубляется тем, что все вершины ячеек-потомков принадлежат также их ячейке-родителю. Более экономичным представляется другой подход к хранению данных.

1. В каждой ячейке хранится не само решение, а целочисленные координаты ее узлов (помимо указателей на потомков и характеристик ячейки типа ранга и тому подобного). Под целочисленными координатами точки понимаются ее координаты (x, y) , измеряемые в единицах $h_x(R_{\max})/2$, $h_y(R_{\max})/2$ соответственно.
2. Решение хранится в ассоциативном массиве, каждый элемент которого представляет собой пару «ключ-значение», где в роли ключа выступает пара целочисленных координат узла сетки, а в роли значения выступает собственно значение решения в этом узле. Данный массив является общим для всего леса деревьев. При выполнении тех или иных вычислений в ячейке значения решения в ее узлах получают путем доступа к этому массиву через целочисленные координаты узла.

При измельчении ячеек массив пополняется новыми элементами, при объединении ячеек некоторые элементы массива удаляются.

В такой структуре данных дублирование значений решения исключено, так как ассоциативный массив значений содержит число элементов, в точности равное числу узлов сетки Ω . Отметим, что в языке C++ существует стандартный контейнер «map», хорошо подходящий для реализации вышеописанного массива.

Опишем теперь процедуру адаптации сетки к решению, по-прежнему следуя работе [27]. Рассмотрим переход со слоя t^n на слой t^{n+1} . Прежде чем выполнять вычисления по схеме, мы адаптируем сетку на основе известного решения \mathbf{Q}^n . Адаптация сетки проводится в два этапа: на первом этапе все ячейки-узлы (не только расчетные) всех деревьев некоторым образом помечаются, а на втором этапе сетка перестраивается исходя из того, как помечены ячейки.

На этапе присвоения меток корни всех деревьев, то есть ячейки нулевого ранга, обходятся в произвольном порядке (например, двойным циклом), каждое дерево обходится в обратном порядке (postorder traversal), при этом порядок обхода потомков при раскрытии рекурсии не играет никакой роли. В каждой расчетной ячейке вычисляется так называемый *критерий адаптации*:

$$d_{s,i} = |\nabla Q_s(x_i, y_i, t^n)| (h_{x,i} h_{y,i})^{\frac{\omega_0+1}{2\omega_0}}, \quad (6)$$

где $s = \overline{1, m}$ — номер компоненты вектора \mathbf{Q} , $i = \overline{1, N_c}$ — номер расчетной ячейки, N_c — общее число расчетных ячеек, $|\mathbf{a}|$ — евклидова норма вектора \mathbf{a} , $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ — градиент по пространственным переменным, (x_i, y_i) — координаты центра ячейки, $h_{x,i}$ и $h_{y,i}$ — линейные размеры ячейки в направлениях x и y соответственно, ω_0 — настраиваемый параметр алгоритма адаптации. При счете по бикompактным схемам величина $|\nabla Q_s(x_i, y_i, t^n)|$ в формуле (6) аппроксимируется выражением:

$$|\nabla Q_s(x_i, y_i, t^n)| \approx \sqrt{[A_0^y \Lambda_1^x Q_s^n(x_i, y_i)]^2 + [\Lambda_1^y A_0^x Q_s^n(x_i, y_i)]^2}.$$

При обходе сетки вычисляются также среднеквадратичные величин $d_{s,i}$ по всем расчетным ячейкам:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} d_{s,i}^2}.$$

После того как вычислены все $d_{s,i}$ и их среднеквадратичные σ_s , лес деревьев обходится еще раз в том же самом порядке. Каждая ячейка-узел получает одну из трех возможных меток.

1. Если ячейка расчетная (без потомков), ее ранг $R_i < R_{\max}$, существует номер $s = \overline{1, m}$ такой, что $d_{s,i} \geq \omega_1 \sigma_s$, то эта ячейка получает метку «требуется измельчения».
2. Если ячейка расчетная (без потомков), ее ранг $R_i > 0$, неравенство $d_{s,i} \leq \omega_2 \sigma_s$ выполнено для всех $s = \overline{1, m}$, то эта ячейка получает метку «требуется объединения».
3. В остальных случаях ячейка получает метку «ничего не требует».

Величины ω_1 и ω_2 также являются настраиваемыми параметрами алгоритма адаптации. Параметры $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ меняются в следующих диапазонах:

$$\omega_0 > 0, \quad \omega_1 \in [1.0, 1.5], \quad \omega_2 \in [0.1, 0.5].$$

В работе [27] эти параметры задаются так:

$$\omega_0 = 2, \quad \omega_1 = 1.0, \quad \omega_2 = 0.1.$$

Объясним их смысл: параметр ω_0 отвечает за то, с каким весом характерный линейный масштаб ячейки $\sqrt{h_{x,i} h_{y,i}}$ участвует в критерии адаптации (6), параметр ω_1 регулирует то, насколько «легко» ячейки будут измельчаться (чем меньше ω_1 , тем вероятнее измельчение), а параметр ω_2 , напротив, регулирует то, насколько «легко» ячейки будут объединяться (чем больше ω_2 , тем вероятнее объединение).

Обратим внимание на то, что в работе [27] и других более поздних работах на ее основе применяются критерии, существенно отличающиеся от критерия (6). Критерий [27] и подобные ему критерии, имеющиеся в литературе, разработаны применительно к механике жидкостей и газов и не годятся для других приложений, в то время как критерий (6) сформулирован для гиперболической системы общего вида. Кроме того, известные критерии оценивают необходимость адаптации либо через градиент плотности, либо через градиент давления, либо через дивергенцию скорости, либо через ротор скорости, либо через две последние величины одновременно. В работе [27] разобраны недостатки этих вариантов, при этом вариант с комбинацией дивергенции и ротора скорости выбран как самый удачный, хотя и не способный распознать плоские контактные разрывы. Укажем еще один недостаток критерия с дивергенцией и ротором скорости: он игнорирует любые возмущения на фоне нулевой или постоянной скорости. Новый критерий (6), предлагаемый в настоящей работе, учитывает изменение всех компонент решения и выдаст близкие к нулю $d_{s,i}$ для всех $s = \overline{1, m}$ только в ячейке, где решение близко к тождественной константе во всех компонентах.

На этапе перестроения сетки корни всех деревьев обходятся, как и раньше, в произвольном порядке, каждое дерево обходится уже в прямом порядке (preorder traversal), порядок обхода потомков при раскрытии рекурсии не принципиален. Ячейки-узлы подвергаются преобразованиям в соответствии со своими метками.

1. Если ячейка имеет метку «требуется измельчения», то она разбивается на четыре новые ячейки пополам по каждому направлению. Эти четыре новые ячейки добавляются в дерево как потомки разбиваемой ячейки. Сетка приобретает от восьми до шестнадцати новых узлов в зависимости от степени измельчения соседей разбиваемой ячейки (некоторые кандидаты в новые узлы могут уже существовать), ровно таким же числом новых элементов пополняется ассоциативный массив, в котором хранится решение. Решение в новых узлах вычисляется при помощи биквадратной интерполяции [28, формула (9)], построенной для разбиваемой ячейки. Каждая из четырех новых ячеек получает метку «ничего не требует».
2. Если каждый из четырех потомков ячейки-родителя имеет метку «требуется объединения», то эти ячейки-потомки объединяются обратно в своего родителя и удаляются из дерева. Узлы объединяемых ячеек удаляются из сетки только в том случае, если они не принадлежат другим ячейкам (центры объединяемых ячеек удаляются всегда). Элементы, соответствующие удаляемым узлам сетки, удаляются из ассоциативного массива решения ровно в том же числе.
3. В остальных случаях с ячейкой ничего не происходит.

На нулевом временном слое t^0 процедура адаптации сетки к решению запускается R_{\max} раз, чтобы к началу счета по схеме сетка была максимально адаптирована к начальному условию. Если последнее задано через известную функцию координат x, y , а не через некоторую таблицу, то при измельчении ячеек решение в новых узлах разумно вычислять при помощи проекции начального условия на сетку, а не при помощи интерполяции.

После того как сетка адаптировалась, на ней по выбранной схеме рассчитывается решение Q^{n+1} на следующем временном слое. Уточним, что следующая адаптация сетки выполняется уже после нахождения Q^{n+1} , то есть непосредственно во время реализации схемы на одном шаге по времени сетка остается неизменной.

За исключением нескольких нюансов, алгоритм реализации бикомпактных схем на декартовых сетках с адаптацией к решению практически ничем не отличается от алгоритма их реализации на обычных декартовых сетках, описанного в конце раздела 1.

Первое отличие от обычных декартовых сеток заключается в том, что расчетные ячейки адаптивных декартовых сеток достаточно трудно занумеровать и обойти «обычным», рекурсивным циклом в правильном порядке. Гораздо проще обойти расчетные ячейки через лес деревьев. Обозначим произвольную ячейку-узел через P , а ее ячейки-потомки (если они существуют) через LL, LR, RL, RR, см. рис. 2 (ячейка P нарисована штриховой линией). Корни всех деревьев, то есть ячейки нулевого ранга, обходятся двойным циклом в направлении, соответствующем знакам расщепленных векторов потоков подобно ячейкам обычной декартовой сетки. Каждое из деревьев обходится в прямом порядке (preorder traversal): если ячейка P не расчетная, мы обходим ее потомков, если расчетная — делаем вычисления по бикompактной схеме. Ясно, что порядок обхода потомков зависит от знаков расщепленных векторов потоков. Перечислим все возможные варианты:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^+, \mathbf{G}^+ &\Rightarrow \text{LL, LR, RL, RR}; & \mathbf{F}^-, \mathbf{G}^- &\Rightarrow \text{RR, RL, LR, LL}; \\ \mathbf{F}^+, \mathbf{G}^- &\Rightarrow \text{LR, LL, RR, RL}; & \mathbf{F}^-, \mathbf{G}^+ &\Rightarrow \text{RL, RR, LL, LR}. \end{aligned} \quad (7)$$

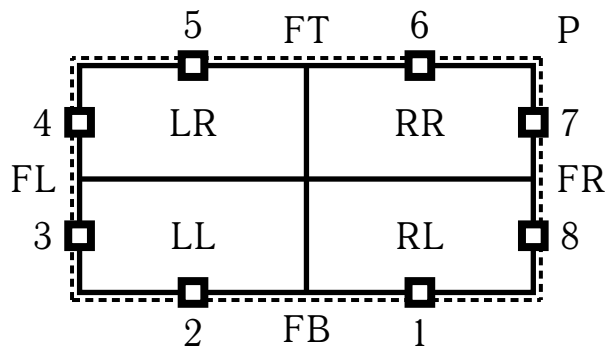


Рис. 2. Некоторые обозначения адаптивной декартовой сетки

Второе отличие проявляется в возможности возникновения такой ситуации: искомое решение в некоторой расчетной ячейке в некоторых узлах тех ее граней, где оно должно быть известным, все еще неизвестно, несмотря на то что до этого были обработаны все предыдущие (по порядку обхода) расчетные ячейки. Такое происходит во время марша по пространству, когда бикompактная схема переходит с крупных расчетных ячеек на мелкие. Иллюстрация к этой проблеме в случае потоков $\mathbf{F}^+, \mathbf{G}^+$ приведена на рис. 3. При обходе ячеек 1, 2, 3 искомое решение будет найдено в узлах, отмеченных на рис. 3 полными зелеными маркерами. Далее алгоритм обхода приступит к обработке крупной ячейки в правом верхнем углу, которая разделена на расчетные ячейки 4, 5, 6, 7. При попытке обчислить

ячейки 4, 5, 6 мы столкнемся с тем, что искомое решение в узлах, отмеченных на рис. 3 сплошными красными маркерами, все еще неизвестно, при этом без него обчислить данные ячейки будет невозможно. Однако эту проблему можно легко решить, вычислив неизвестные значения искомого решения через известные при помощи одномерной квадратичной интерполяции вида [28, формула (3)] на левой и нижней гранях крупной ячейки, составленной из расчетных ячеек 4, 5, 6, 7.

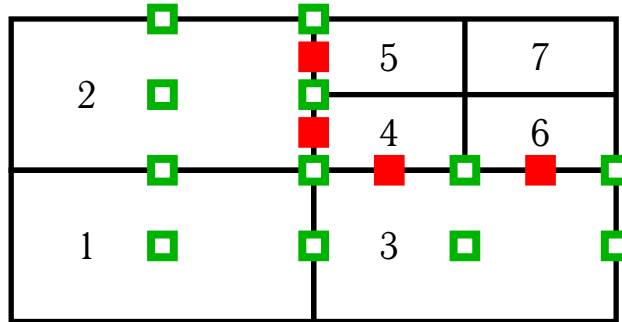


Рис. 3. Нехватка данных при переходе с крупных ячеек на мелкие

Опишем в общем виде процедуру досчета искомого решения через интерполяцию на гранях. Обозначим грани произвольной ячейки-узла P через FB, FL, FT, FR, см. рис. 2. Потенциально проблемные узлы изображены на этом рисунке в виде полых маркеров и пронумерованы от 1 до 8. Данная процедура досчета встроена в обход по лесу деревьев, в котором реализуется бикомпактная схема.

1. Если ячейка P расчетная, выполнить в ней вычисления по схеме.
2. Если ячейка P не расчетная, то, прежде чем спуститься вглубь по рекурсии к ее потомкам LL, LR, RL, RR, проверяются узлы

1, 2, 3, 4 для потоков F^+ , G^+ ; 5, 6, 7, 8 для потоков F^- , G^- ;

3, 4, 5, 6 для потоков F^+ , G^- ; 7, 8, 1, 2 для потоков F^- , G^+ .

Если искомое решение все еще не найдено в узлах

1, 2 \Rightarrow вычисляем его при помощи 1D интерполяции на грани FB;

3, 4 \Rightarrow вычисляем его при помощи 1D интерполяции на грани FL;

5, 6 \Rightarrow вычисляем его при помощи 1D интерполяции на грани FT;

7, 8 \Rightarrow вычисляем его при помощи 1D интерполяции на грани FR.

Далее обходятся потомки ячейки P в порядке (7).

Поскольку одномерная квадратичная интерполяция на любой грани ячейки совпадает с двумерной биквадратной интерполяцией во всей ячейке

ке, взятой на этой грани, досчет искомого решения на ней не нарушит бикompактной аппроксимации.

Итак, мы полностью описали реализацию бикompактных схем на декартовых сетках с адаптацией к решению в простейших вычислительных областях.

3. Численные эксперименты

Проверим бикompактные схемы на декартовых сетках с адаптацией к решению на примере пары двумерных тестовых задач. Во всех расчетах параметры алгоритма адаптации $\omega_0 = 2$, $\omega_1 = 1.0$, $\omega_2 = 0.1$.

Задача о переносе финитного импульса. Эта задача ставится следующим образом. Решается простейший вариант системы уравнений (1) — линейное уравнение переноса:

$$\mathcal{L}_2(u) \equiv \partial_t u + a \partial_x u + b \partial_y u = 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad b = \text{const} > 0,$$

где $u = u(x, y, t)$ — искомая функция. Скорости переноса a, b полагаются равными 1. Вычислительная область $D = (0, 1) \times (0, 1)$ ($x_{\max} = y_{\max} = 1$), максимальное время $t_{\max} = 0.5$. Выпишем начальное условие:

$$u(x, y, 0) = P_7^f \left[4\sqrt{(x - 1/4)^2 + (y - 1/4)^2} \right], \quad (x, y) \in \bar{D},$$

где $P_q^f(x) \in C^{q-1}(\mathbb{R})$, $q \in \mathbb{N}$ — финитный полином регулируемой гладкости:

$$P_q^f(x) = \begin{cases} (1 - x^2)^q & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Граничные условия постоянные и нулевые, они ставятся на границах $x = 0$ и $y = 0$ при всех $t \in (0, t_{\max}]$.

Расчеты проведем по двум бикompактным схемам четвертого порядка аппроксимации по x, y : схеме Т2В4 и схеме SDIRK3В4. Интегрирование по t в первой схеме выполняется при помощи метода трапеций второго порядка, в последней — при помощи L -устойчивого жестко-точного трехстадийного SDIRK-метода третьего порядка [29, формула (17)]. Расщепление потоков в данной задаче не делается, так как скорости переноса всегда положительны.

Начнем с качественной верификации: сделаем один расчет по схеме Т2В4, чтобы выяснить, правильно ли переносится импульс и адаптируется сетка. Зададим параметры сетки и схемы:

$$\begin{aligned} h_x(0) = h_y(0) = 0.1, \quad R_{\max} = 3, \quad h_x(R_{\max}) = h_y(R_{\max}) = 0.0125, \\ \tau = 0.005, \quad \kappa_x(0) = \kappa_y(0) = 0.05, \quad \kappa_x(R_{\max}) = \kappa_y(R_{\max}) = 0.4, \end{aligned}$$

где $\kappa_x = a\tau/h_x$, $\kappa_y = b\tau/h_y$ — числа Куранта по x, y соответственно.

На рис. 4–6 приведены двумерные графики решения и изображения сетки в моменты времени $t = 0, 0.25, 0.5$. Значения решения показаны цветовой заливкой, на изображениях сетки показаны только расчетные ячейки. Из данных рисунков хорошо видно, что схема T2B4 переносит импульс корректно, без потери амплитуды. Сетка адаптируется адекватно, ее измельчение следует за импульсом, а там, где от решения остается константа, ячейки объединяются обратно вплоть до ячеек нулевого ранга.

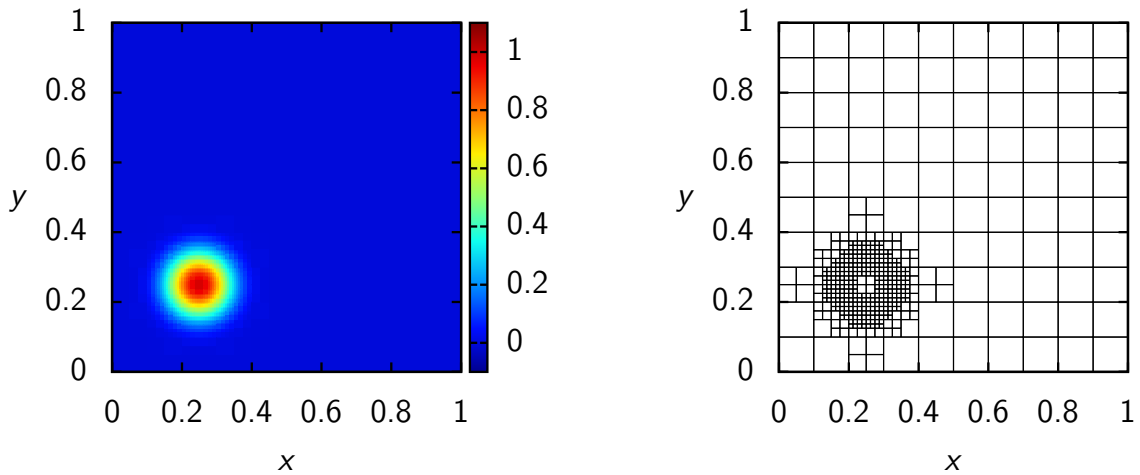


Рис. 4. Решение и сетка при $t = 0$

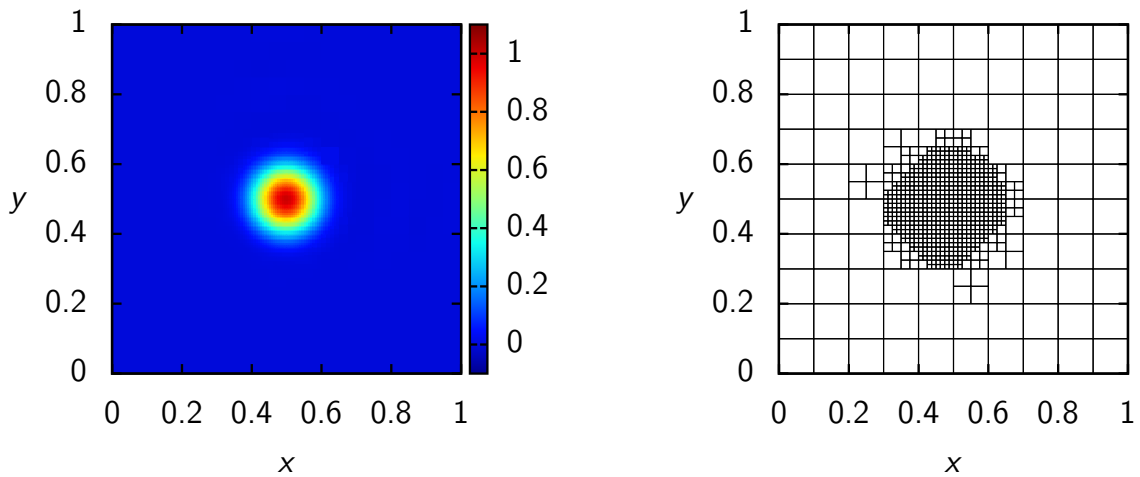


Рис. 5. Решение и сетка при $t = 0.25$

На рис. 7 показана зависимость корня из числа расчетных ячеек от времени. Кривая $\sqrt{N_c(t)}$ быстро выходит на константу, что вполне отвечает финитности импульса. Из этого графика можно сделать вывод, что

вычислительная трудоемкость расчета на адаптивной сетке с вышеуказанными параметрами эквивалентна при одинаковом τ расчету на равномерной сетке 27×27 , если судить только по количеству расчетных ячеек.

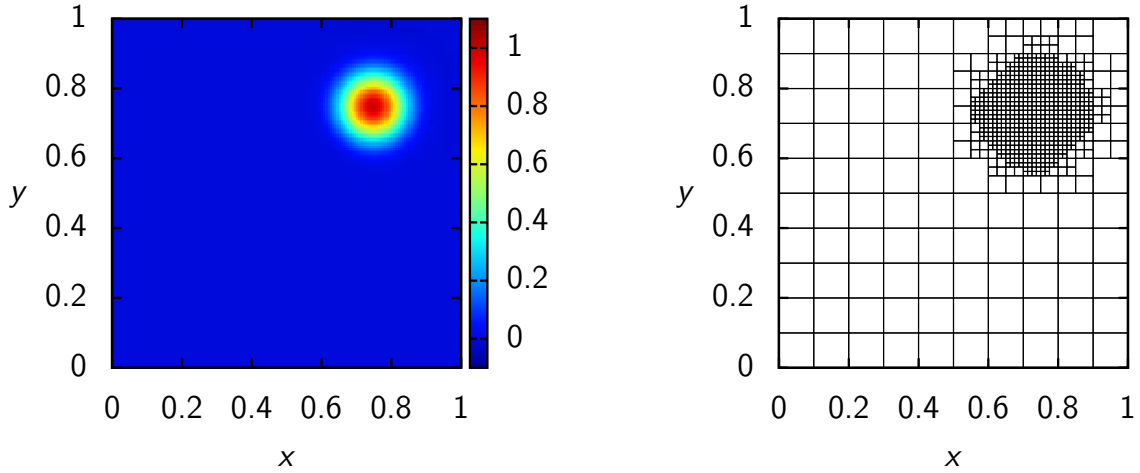


Рис. 6. Решение и сетка при $t = 0.5$

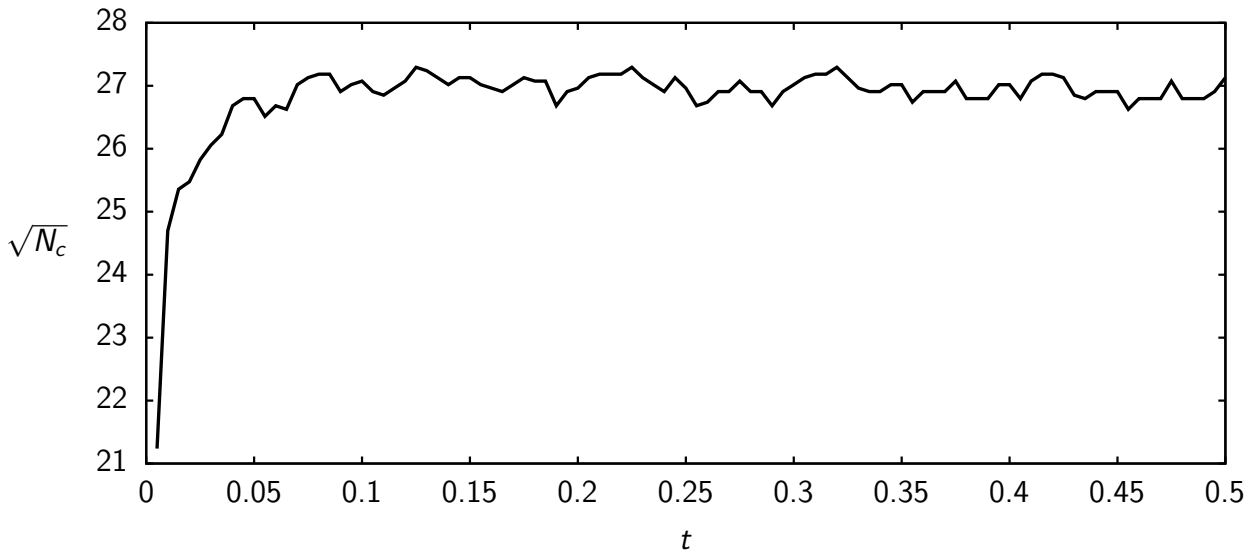


Рис. 7. Эволюция корня из числа расчетных ячеек во времени

Исследуем сеточную сходимость схемы SDIRK3B4 на точном решении рассматриваемой задачи. Сетка сгущается так:

$$h_x(0) = h_y(0) = h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, \quad R_{\max} = \text{const},$$

$$\kappa_x(R_{\max}) = \kappa_y(R_{\max}) = \kappa = \text{const}, \quad \tau = \frac{h}{2R_{\max}\kappa}.$$

Сгущение проводится при четырех значениях $R_{\max} = 0, 1, 2, 3$ и трех значениях $\kappa = 1.0, 0.5, 0.2$ (всего 48 расчетов). Нас интересует величина E_∞ —

абсолютная ошибка схемы в норме L_∞ , вычисляемая в момент времени $t = 0.5$ по всем узлам сетки. Поскольку число расчетных ячеек меняется во времени, разумно изображать E_∞ как функцию их суммарного числа N_{sum} по всем слоям:

$$N_{\text{sum}} = \sum_{n=0}^{N_t} N_c(t^n).$$

Величина N_{sum} еще хороша тем, что по ее значениям можно сравнивать вычислительную трудоемкость схемы на разных сетках, как равномерных, так и адаптивных.

На рис. 8 приведены искомые графики зависимостей E_∞ от N_{sum} при разных R_{max} и κ . Из данных, изображенных на рис. 8, следует, что схема SDIRK3B4 на адаптивной сетке при $R_{\text{max}} = 1, 2$ и не слишком малых $\kappa = 1.0, 0.5$ имеет апостериорный порядок сходимости, близкий к теоретическому. При $R_{\text{max}} = 3$ порядок сходимости несколько ниже теоретического, это достаточно заметно при $\kappa = 0.2$. Обратим внимание на то, что при $\kappa = 1.0, 0.5$ адаптация сетки позволяет достичь заданной погрешности решения при меньшем N_{sum} , то есть с меньшей вычислительной трудоемкостью. При малых числах Куранта адаптация к решению практически не дает выгоды с точки зрения скорости счета.

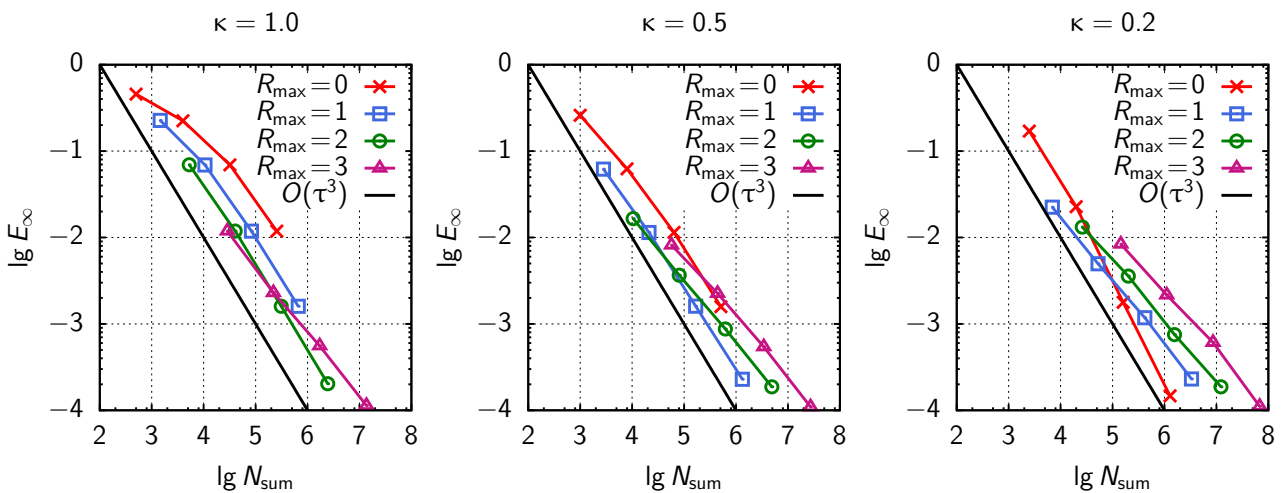


Рис. 8. Зависимости абсолютных ошибок в норме L_∞ от суммарного числа расчетных ячеек при разных R_{max} и κ

Задача Седова о сильном взрыве в идеальном газе. Решение этой известной газодинамической задачи [30] состоит из сильной ударной волны, почти константы в некоторой окрестности точки взрыва за ударной

волной и постоянного фона снаружи. Такая структура решения хорошо подходит для проверки схем на сетках с адаптацией к решению.

Система двумерных газодинамических уравнений Эйлера имеет вид (1), где

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ v_x(E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ v_y(E + p) \end{bmatrix},$$

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2}.$$

Через ρ , $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, p , E обозначены соответственно плотность, вектор скорости, давление и полная энергия единицы объема газа соответственно, $\gamma = 1.4$ — показатель адиабаты (газ двухатомный). Вычислительная область $D = (0, 2) \times (0, 2)$ ($x_{\max} = y_{\max} = 2$), максимальное время $t_{\max} = 0.01$.

Опишем постановку начальных и граничных условий. Взрыв происходит в момент времени $t = 0$ в точке (x_0, y_0) , $x_0 = y_0 = 1$. Энергия взрыва \mathcal{E}_0 задается так, чтобы к моменту времени $t = t_{\max} = 0.01$ радиус цилиндрической ударной волны равнялся 0.8: $\mathcal{E}_0 = 4030.78$. Начальные условия таковы, $(x, y) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, 0) &= 1, \quad v_x(x, y, 0) = v_y(x, y, 0) = 0, \\ E(x, y, 0) &= \begin{cases} \mathcal{E}_0 / [h_x(R_{\max}) h_y(R_{\max})] & \text{при } (x, y) = (x_0, y_0), \\ 10^{-2} / (\gamma - 1) & \text{в остальных точках.} \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Шаги $h_x(0)$, $h_y(0)$ необходимо выбирать так, чтобы $(x_0, y_0) \in \Omega$. Перед запуском счета по t сетка адаптируется к начальным условиям (8) R_{\max} раз, после чего значения \mathbf{Q}^0 в полуцелых узлах пересчитываются по значениям в целых узлах при помощи билинейной интерполяции (то есть усреднением). Граничные условия постоянные, они ставятся на всей ∂D .

Посчитаем эту задачу по бикомпактной схеме SDIRK3B4 с симметризованным LOD-расщеплением и консервативной монотонизацией [28]. В рамках подхода [28] эта схема является схемой B ; в качестве схемы A возьмем базовую бикомпактную схему с несимметризованным LOD-расщеплением.

Перечислим параметры схемы: $C_1 = 0.5$, $\sigma = 0.1$ (см. [28]); C_2^x , C_2^y определяются автоматически по формулам (5) с $\delta = 0.2$. Шаг τ переменный, он вычисляется по формуле

$$\tau = 2\kappa \min \left\{ \frac{h_x(R_{\max})}{V_{\max}^x + 2C_2^x}, \frac{h_y(R_{\max})}{V_{\max}^y + 2C_2^y} \right\},$$

где κ — число Куранта в ячейках максимального ранга. Мы задаем $\kappa = 0.8$. Нелинейные уравнения схем A и B решаются методом Ньютона с относительной погрешностью $\text{rtol} = 10^{-7}$. Расчеты проведем на сетке с $h_x(0) = h_y(0) = 2/160$ и $R_{\max} = 1$.

На рис. 9 приведены двумерные графики плотности и рангов ячеек в конечный момент времени. Значения функций показаны цветовой заливкой. Из этих графиков мы видим, что бикompактная LOD-схема SDIRK3B4 с консервативной монотонизацией обеспечивает правильную симметрию решения, фронт ударной волны свободен от карбункулов и каких бы то ни было нефизических особенностей. Кроме того, для устойчивого счета по этой схеме не нужно применять специальные процедуры коррекции отрицательных плотностей и давлений. Алгоритм адаптации сетки работает корректно — он измельчает ячейки там, где градиенты решения велики и объединяет ячейки там, где решение меняется мало.

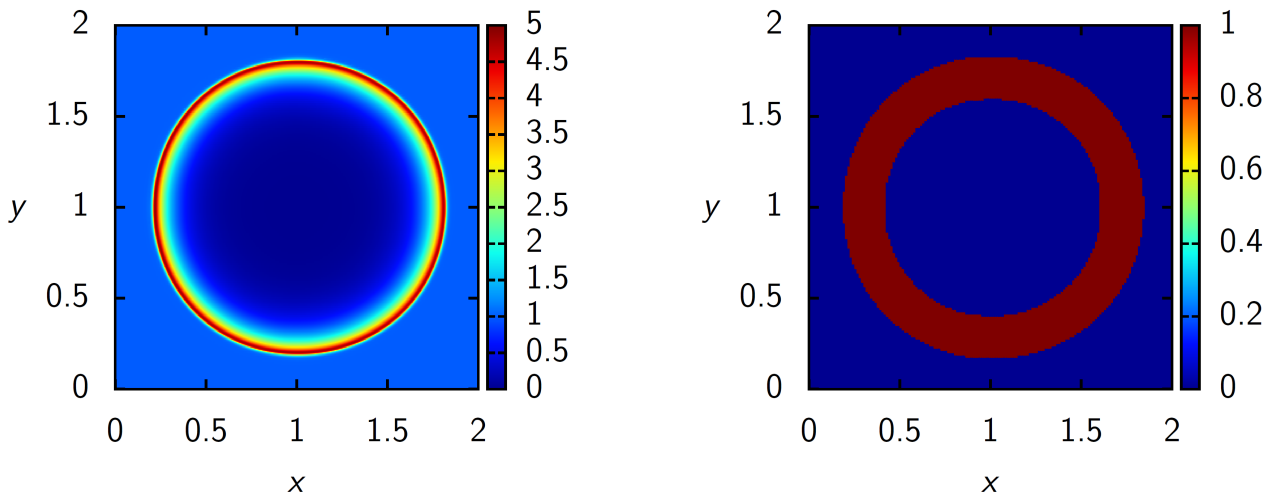


Рис. 9. Поле плотности и ранги ячеек при $t = t_{\max} = 0.01$

Одномерные профили плотности, скорости, давления на отрезке $x = 1$, $y \in [1, 2]$ в конечный момент времени приведены на рис. 10–12 соответственно. Цветными маркерами показаны значения численного решения в целых узлах расчетных ячеек, сплошной черной кривой — точное решение. Из анализа этих профилей мы заключаем, что численное решение хорошо согласуется с точным, посчитанная ударная волна размазывается лишь на 3 ячейки нулевого ранга. Кроме того, тестируемая схема достаточно неплохо разрешает острые пики плотности и давления непосредственно за ударной волной.

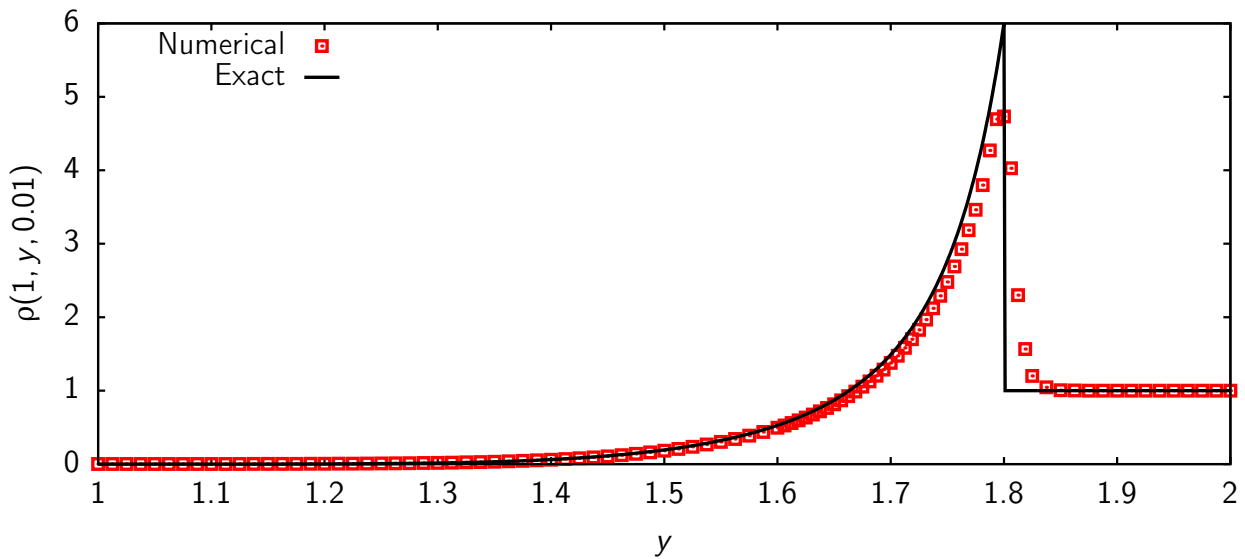


Рис. 10. Профили плотности на отрезке $x = 1$, $y \in [1, 2]$ при $t = t_{\max} = 0.01$

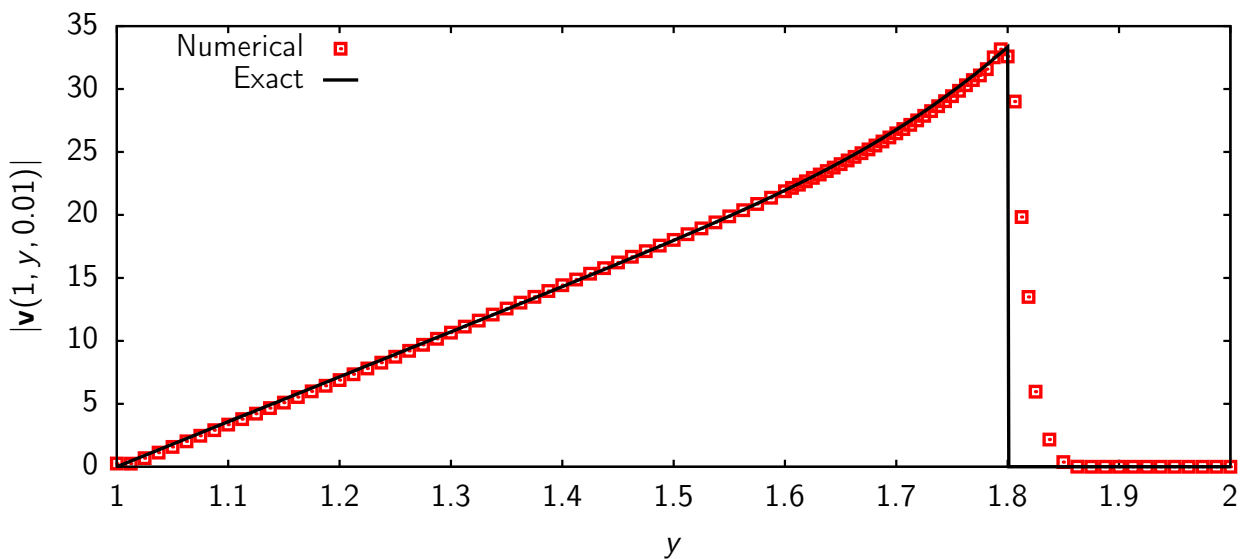


Рис. 11. Профили скорости на отрезке $x = 1$, $y \in [1, 2]$ при $t = t_{\max} = 0.01$

На рис. 13 показана зависимость корня из числа расчетных ячеек от времени. Из нее следует вывод, что в данной задаче при $R_{\max} = 1$ адаптация сетки позволяет обойтись двукратно меньшим числом расчетных ячеек по сравнению с равномерной сеткой с шагами $h_x(R_{\max})$, $h_y(R_{\max})$.

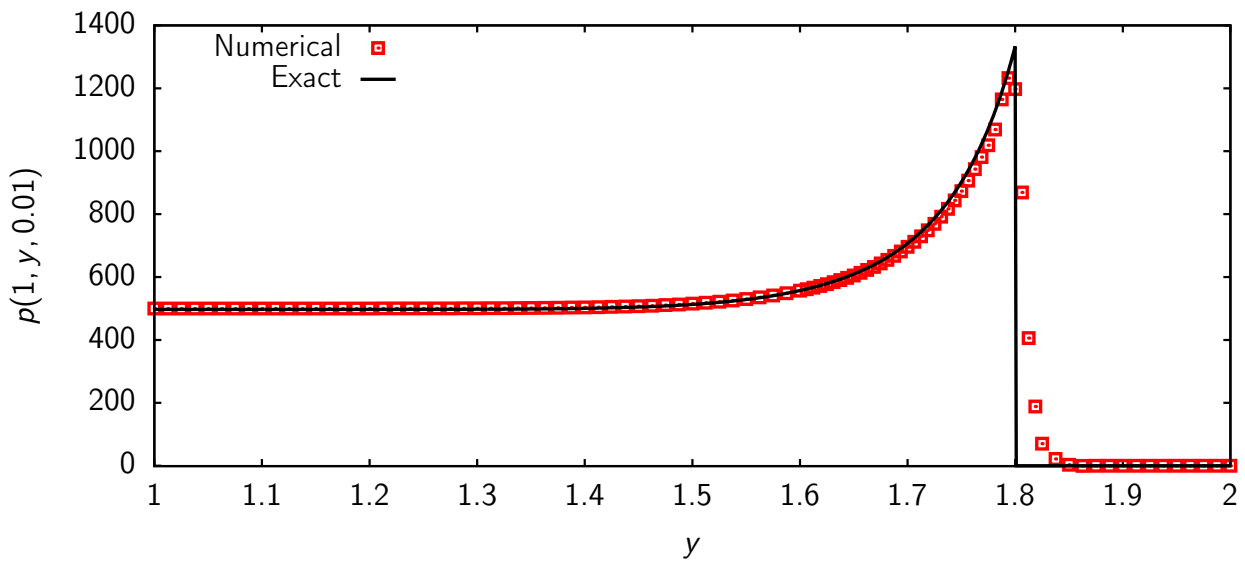


Рис. 12. Профили давления на отрезке $x = 1$, $y \in [1, 2]$ при $t = t_{\max} = 0.01$

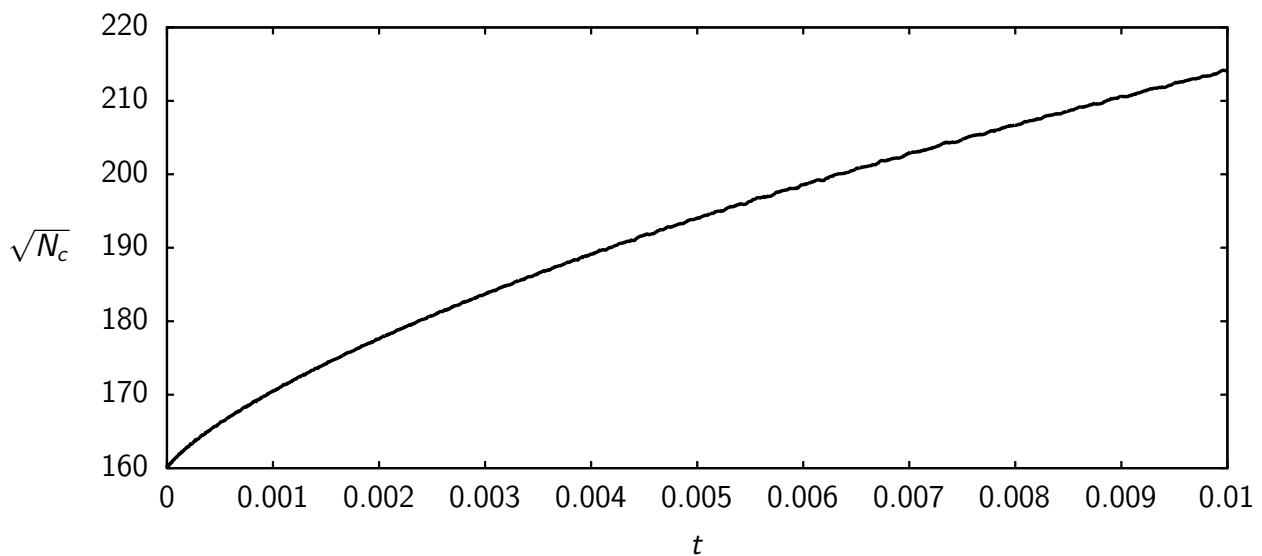


Рис. 13. Эволюция корня из числа расчетных ячеек во времени

Заключение

Описан алгоритм счета по бикompактным схемам четвертого порядка пространственной аппроксимации на декартовых сетках с адаптацией к решению. Даны практические рекомендации по реализации структур данных для хранения сетки и сеточной функции, которые учитывают специфику пространственного шаблона бикompактных схем. Предложен новый критерий адаптации сетки к решению, пригодный для гиперболических систем

уравнений общего вида.

На декартовых сетках с адаптацией к решению по бикompактным схемам проведены расчеты двумерной задачи о переносе финитного импульса и двумерной задачи Седова о сильном взрыве в идеальном газе. На примере первой задачи показано, что бикompактные схемы сохраняют свой высокий порядок точности на адаптивных декартовых сетках. Эти схемы показывают хорошую точность в обеих задачах, причем в задаче Седова бикompактная схема с консервативной монотонизацией не требует особых приемов для коррекции отрицательных плотностей и давлений и дает симметричное решение, свободное от нефизических особенностей, в том числе карбункулов. Результаты настоящей работы представляют собой основу для реализации бикompактных схем на декартовых сетках с адаптацией к границам вычислительных областей сложной формы.

Библиографический список

1. Ekaterinaris J. A. High-order accurate, low numerical diffusion methods for aerodynamics // *Prog. Aerosp. Sci.* — 2005. — Vol. 41. — P. 192–300.
2. Kurbatskii K. A., Mankbadi R. R. Review of computational aeroacoustics algorithms // *Int. J. Comput. Fluid Dyn.* — 2004. — Vol. 18, no. 6. — P. 533–546.
3. Dumbser M., Käser M., de la Puente J. Arbitrary high-order finite volume schemes for seismic wave propagation on unstructured meshes in 2D and 3D // *Geophys. J. Int.* — 2007. — Vol. 171. — P. 665–694.
4. A high-order discontinuous Galerkin method for wave propagation through coupled elastic-acoustic media / Lucas C. Wilcox, Georg Stadler, Carsten Burstedde, Omar Ghattas // *J. Comput. Phys.* — 2010. — Vol. 229. — P. 9373–9396.
5. Hesthaven J. S. High-order accurate methods in time-domain computational electromagnetics: a review // *Adv. Imag. Elect. Phys.* — 2003. — Vol. 127. — P. 59–123.
6. Михайловская М. Н., Рогов Б. В. Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2012. — Т. 52, № 4. — С. 672–695.
7. Рогов Б. В. Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2013. — Т. 53, № 2. — С. 264–274.

8. Chikitkin A. V., Rogov B. V., Utyuzhnikov S. V. High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* — 2015. — Vol. 93. — P. 150–163.
9. Брагин М. Д., Рогов Б. В. Гибридные бикомпактные схемы с минимальной диссипацией для уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 958–972.
10. Чикиткин А. В., Рогов Б. В. Семейство симметричных бикомпактных схем со свойством спектрального разрешения для уравнений гиперболического типа // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.* — 2018. — № 144. — 28 с.
11. Рогов Б. В. Дисперсионные и диссипативные свойства полностью дискретных бикомпактных схем четвертого порядка пространственной аппроксимации для уравнений гиперболического типа // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.* — 2018. — № 153. — 30 с.
12. Чикиткин А. В., Рогов Б. В., Аристова Е. Н. Высокоточные бикомпактные схемы для многомерного неоднородного уравнения переноса и их эффективная параллельная реализация // *Докл. АН.* — 2016. — Т. 470, № 2. — С. 144–149.
13. Berger M., Colella P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics // *J. Comput. Phys.* — 1989. — Vol. 82. — P. 64–84.
14. De Zeeuw D., Powell K. An adaptively refined Cartesian mesh solver for the Euler equations // *J. Comput. Phys.* — 1993. — Vol. 104. — P. 56–68.
15. Hartmann D., Meinke M., Schröder W. An adaptive multilevel multigrid formulation for Cartesian hierarchical grid methods // *Comput. Fluids.* — 2008. — Vol. 37. — P. 1103–1125.
16. Ji H., Lien F.-S., Yee E. A robust and efficient hybrid cut-cell/ghost-cell method with adaptive mesh refinement for moving boundaries on irregular domains // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* — 2008. — Vol. 198. — P. 432–448.
17. Park S., Shin H. Efficient generation of adaptive Cartesian mesh for computational fluid dynamics using GPU // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* — 2012. — Vol. 70, no. 11. — P. 1393–1404.
18. A Cartesian grid embedded boundary method for the compressible Navier–Stokes equations / Daniel T. Graves, Phillip Colella, David Modiano

et al. // *Comm. App. Math. and Comp. Sci.* — 2013. — Vol. 8, no. 1. — P. 99–122.

19. Positivity-preserving Runge-Kutta discontinuous Galerkin method on adaptive Cartesian grid for strong moving shock / Jianming Liu, Jianxian Qiu, Mikhail Goman et al. // *Numer. Math. Theor. Meth. Appl.* — 2016. — Vol. 9, no. 1. — P. 87–110.
20. Buchmüller P., Dreher J., Helzel C. Finite volume WENO methods for hyperbolic conservation laws on Cartesian grids with adaptive mesh refinement // *Appl. Math. Comput.* — 2016. — Vol. 272, no. 2. — P. 460–478.
21. Адаптивные вейвлетные алгоритмы для решения задач гидро- и газовой динамики на декартовых сетках. / А. Л. Афондииков, А. А. Давыдов, А. Е. Луцкий и др. — М. : ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016. — 232 с.
22. Марчук Г. И. Методы расщепления. — М. : Наука, 1988. — 263 с.
23. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М. : Наука, 1989. — 616 с.
24. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск : Наука, 1967. — 197 с.
25. Брагин М. Д., Рогов Б. В. О точном пространственном расщеплении многомерного скалярного квазилинейного гиперболического закона сохранения // *Докл. АН.* — 2016. — Т. 469, № 2. — С. 143–147.
26. Брагин М. Д., Рогов Б. В. Метод итерируемой приближенной факторизации операторов высокоточной бикомпактной схемы для систем многомерных неоднородных квазилинейных уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2018. — Т. 58, № 3. — С. 313–325.
27. De Zeeuw D. A quadtree-based adaptively-refined Cartesian-grid algorithm for solution of the Euler equations. PhD Thesis. — Ann Arbor : The University of Michigan, 1993. — 149 p.
28. Брагин М. Д., Рогов Б. В. Консервативная монотонизация бикомпактных схем // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.* — 2019. — № 8. — 26 с.

29. Скворцов Л. М. Диагонально неявные FSAL-методы Рунге-Кутты для жестких и дифференциально-алгебраических систем // Матем. моделирование. — 2002. — Т. 14, № 2. — С. 3–17.
30. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — Москва : Наука, 1977. — 440 с.

Оглавление

Введение	3
1. Бикompактные схемы на обычных декартовых сетках.	4
2. Бикompактные схемы на декартовых сетках с адаптацией к решению	9
3. Численные эксперименты.	16
Заключение.	23
Библиографический список	24