ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 112 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В.

О квадратурной формуле для потенциала простого слоя в трёхмерном случае

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В. О квадратурной формуле для потенциала простого слоя в трёхмерном случае // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 112. 26 с. doi:10.20948/prepr-2019-112
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-112

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

П. А. Крутицкий, А. Д. Федотова, В. В. Колыбасова

О КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ В ТРЁХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Москва — 2019

УДК 517.956.224
Павел Александрович Крутицкий, Алёна Дмитриевна Федотова, Валентина Викторовна Колыбасова. О квадратурной формуле для потенциала простого слоя в трёхмерном случае. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, Москва, 2019.

Для широкого класса гладких поверхностей, включая сферу и эллипсоид, выводится квадратурная формула для потенциала простого слоя с гладкой плотностью, заданной на замкнутой либо разомкнутой поверхности. Формула даёт равномерную аппроксимацию потенциала вблизи поверхности и сохраняет свойство непрерывности потенциала при стремлении точки наблюдения из области к поверхности, что подтверждается численными тестами. Предложенная в работе квадратурная формула даёт значительно более высокую точность при вычислении потенциала вблизи поверхности, чем стандартные квадратурные формулы, что также подтверждается численными тестами. Кроме того, выводится квадратурная формула для прямого значения потенциала простого слоя на поверхности. Для этой формулы также проведены численные тесты, подтверждающие её эффективность и точность.

Ключевые слова: потенциал простого слоя, квадратурная формула, равномерная аппроксимация.

P. A. Krutitskii, A. D. Fedotova, V. V. Kolybasova
On a quadrature formula for the simple layer potential in a 3D case.

A quadrature formula for the simple layer potential with smooth density specified on a closed or open surface is derived for a wide class of smooth surfaces including sphere and ellipsoid. The formula uniformly approximates the potential near the surface and saves its continuity as the observation point tends to the surface from the interior of the domain, that is confirmed by numerical tests. The proposed quadrature formula is much more accurate in calculating the potential near the surface than the standard quadrature formulas, that is confirmed by numerical tests also. In addition, a quadrature formula for direct value of the simple layer potential on a surface is derived. Numerical tests for this formula are also given and they confirm its efficiency and accuracy.

Key words: simple layer potential, quadrature formula, uniform approximation.

Работа поддержана РФФИ, грант № 18-01-00422a.

1. Введение

Стандартные квадратурные формулы для потенциала простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца, используемые в инженерных расчётах, не дают равномерной аппроксимации потенциала вблизи поверхности Γ, на которой задана плотность потенциала, и даже стремятся к бесконечности, когда точка, в которой вычисляется квадратурная формула, стремится к определенным точкам на поверхности Γ [1, Глава 2], тогда как сам потенциал непрерывен во всем пространстве, в том числе во всех точках на поверхности Γ. Следовательно, стандартные квадратурные формулы не сохраняют важнейшее свойство потенциала, а именно его ограниченность и непрерывность на поверхности Γ. В настоящей работе предлагается продвинутая квадратурная формула, которая сохраняет указанное свойство потенциала простого слоя. В двумерном случае продвинутая квадратурная формула для гармонического потенциала простого слоя с плотностью, заданной на разомкнутых кривых, предложена в [2, 3].

Отметим, что существуют и другие подходы к вычислению потенциала простого слоя в трехмерном случае. Один из них основан на приближении гладкой поверхности поверхностью многогранника и последующем вычислении потенциала с плотностью, заданной на поверхности многогранника с учётом того, что каждая грань — кусочек некоторой плоскости. При этом используются программы, которые строят поверхность многогранника. Однако замена гладкой поверхности на поверхность многогранника имеет ряд недостатков. Во-первых, вблизи рёбер и вершин многогранника производные потенциала простого слоя с плотностью, заданной на поверхности многогранника, могут иметь особенности, которых нет у потенциала с плотностью, заданной на гладкой поверхности, что снижает точность вычислений. Во-вторых, такой подход не может дать порядок аппроксимации выше единицы даже в случае постоянной плотности в потенциале, т. к. основан на линеаризации, т. е. на замене кусочков поверхности кусочками плоскости.

2. Постановка задачи

Введём в пространстве декартову систему координат $x = (x_1,x_2,x_3) \in R^3$. Пусть Γ — простая гладкая замкнутая либо ограниченная разомкнутая поверхность класса C^2, содержащая свои предельные точки [4, Глава 14, § 1]. Если поверхность Γ замкнутая, то она должна ограничивать объёмно-односвязную внутреннюю область [5, с. 201]. Предположим, что поверхность Γ параметризована так, что на неё отображается прямоугольник:

$$y = (y_1,y_2,y_3) \in \Gamma,$$

$$y_1 = y_1(u,v),\, y_2 = y_2(u,v),\, y_3 = y_3(u,v); \quad u \in [0,A], \quad v \in [0,B];$$

$$y_j(u,v) \in C^2([0,A] \times [0,B]), \quad j = 1,2,3. \tag{1}$$

Сфера, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом. Введём N точек u_n с шагом h на отрезке $[0,A]$ и M точек v_m на отрезке $[0,B]$ и рассмотрим разбиение прямоугольника $[0,A] \times [0,B]$, который отображается на поверхность Γ

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = 0,...,N-1;$$

$$v_m = (m + 1/2)H, \quad m = 0,...,M-1.$$

Тем самым прямоугольник $[0,A] \times [0,B]$ разбивается на $N \times M$ маленьких прямоугольничков, и через (u_n,v_m) обозначены серединки этих прямоугольничков.

Известно [4, Глава 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного) $\eta(y) = (\eta_1(y),\eta_2(y),\eta_3(y))$ в точке поверхности $y = (y_1,y_2,y_3) \in \Gamma$ определяются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Положим $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$. Известно [4, Глава 14, § 1–2], что

$$\int_\Gamma F(y)ds_y = \int_0^A du \int_0^B dv F(y(u,v))|\eta(y(u,v))|.$$

Заметим, что если $|\eta(y(u,v))| = 0$ в некоторой точке, то функция $|\eta(y(u,v))|$ может быть недифференцируемой в этой точке. Поэтому дополнительно потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u,v))| \in C^1([0,A] \times [0,B]). \tag{3}$$

Тогда для всех возможных n, m, при $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ функция $|\eta(y(u,v))|$ может быть разложена по формуле Тейлора с остаточным членом 1-го порядка

$$|\eta(y(u,v))| = |\eta(y(u_n,v_m))| + O(h + H). \tag{4}$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u,v))| > 0, \quad \forall\ (u,v) \in ((0,A) \times (0,B)). \tag{5}$$

Из условия (5) следует, что $|\eta(y(u,v))| \in C^1((0,A) \times (0,B))$, но условие (3) не следует.

Гармонический потенциал простого слоя используется при решении краевых задач для уравнения Лапласа методом интегральных уравнений. Рассмотрим гармонический потенциал простого слоя с заданной на поверхности Γ плотностью $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\mu(y)}{|x-y|}ds_y = \frac{1}{4\pi}\int_0^A du \int_0^B dv \frac{\mu(y(u,v))}{|x-y(u,v)|}|\eta(y(u,v))| =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}\frac{\mu(y(u,v))}{|x-y(u,v)|}|\eta(y(u,v))|dudv, \tag{6}$$

где $|x-y(u,v)| = \sqrt{(x_1-y_1(u,v))^2+(x_2-y_2(u,v))^2+(x_3-y_3(u,v))^2}$. Пусть $\mu_{nm} = \mu(y(u_n,v_m))$, тогда по формуле Тейлора получим

$$\mu(y(u,v)) = \mu_{nm} + \mu'_u(y(\hat{u},\hat{v}))(u-u_n) + \mu'_v(y(\hat{u},\hat{v}))(v-v_m), \tag{7}$$

где $u,\hat{u} \in [u_n-h/2,u_n+h/2]$, $v,\hat{v} \in [v_m-H/2,v_m+H/2]$. Положим

$$\begin{gathered}\sigma_0(x) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\int\limits_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int\limits_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\,|\eta(y(u,v))|\times\\ \times\frac{\mu'_u(y(\hat{u},\hat{v}))(u-u_n)+\mu'_v(y(\hat{u},\hat{v}))(v-v_m)}{|x-y(u,v)|}\end{gathered} \tag{8}$$

и заметим, что

$$|\sigma_0(x)| \le \frac{1}{4\pi}\|\mu(y(u,v))\|_{C^1([0,A]\times[0,B])}(h+H)\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\frac{|\eta(y(u,v))|}{|x-y(u,v)|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\|\mu(y(u,v))\|_{C^1([0,A]\times[0,B])}(h+H)\int_0^A du\int_0^B dv\frac{|\eta(y(u,v))|}{|x-y(u,v)|},$$

$$\int_0^A du\int_0^B dv\frac{|\eta(y(u,v))|}{|x-y(u,v)|} = \int_\Gamma\frac{1}{|x-y|}ds_y = 4\pi\mathcal{V}_0[1](x). \tag{9}$$

Здесь $\mathcal{V}_0[1](x)$ — потенциал простого слоя с единичной плотностью, он непрерывен и равномерно ограничен для всех $x \in R^3$ (см. [6, § 27]), поэтому

$$|\sigma_0(x)| \le \text{ const }\|\mu(y(u,v))\|_{C^1([0,A]\times[0,B])}(h+H), \tag{10}$$

где оценка выполняется равномерно по $x \in R^3$. Следовательно, $\sigma_0(x) = O(h+H)$ равномерно по всем x в R^3.

Подставляя соотношение (7) в (6) и используя (8), получим

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \mathcal{S}_0(x) + \sigma_0(x), \tag{11}$$

где

$$\mathcal{S}_0(x) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\frac{|\eta(y(u,v))|}{|x-y(u,v)|},$$

а для $\sigma_0(x)$ выполняется оценка (10).

Таким образом, задача построения квадратурной формулы для потенциала простого слоя $\mathcal{V}_0[\mu](x)$ в рассматриваемом случае сводится к построению квадратурной формулы для $\mathcal{S}_0(x)$. Стандартная квадратурная формула, используемая в инженерных расчётах, получается из формулы для $\mathcal{S}_0(x)$ заменой интеграла

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}du\int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}dv\frac{|\eta(y(u,v))|}{|x-y(u,v)|} \quad \text{на} \quad \frac{hH|\eta(y(u_n,v_m))|}{|x-y(u_n,v_m)|}.$$

Такую замену можно обосновать, если считать, что $|x-y(u_n,v_m)| \gg h$ и $|x-y(u_n,v_m)| \gg H$ для всех n,m (другими словами, $|x-y| \gg h$ и $|x-y| \gg H$ для всех $y \in \Gamma$), тогда при $u \in [u_n-h/2,\, u_n+h/2]$ и $v \in [v_m-H/2,\, v_m+H/2]$ функцию $y(u,v)$ можно разложить по формуле Тейлора с центром в точке (u_n,v_m), следовательно

$$\frac{1}{|x-y(u,v)|} = \left(\sum_{j=1}^{3}(x_j - y_j(u_n,v_m) + O(h+H))^2\right)^{-1/2} =$$

$$= \left(|x-y(u_n,v_m)|^2\left(1+\frac{O(h+H)}{|x-y(u_n,v_m)|}\right)\right)^{-1/2} = \frac{1}{|x-y(u_n,v_m)|} + \\ + \frac{O(h+H)}{|x-y(u_n,v_m)|^2}.$$

Учитывая (4), получим стандартную квадратурную формулу $\mathcal{K}_0(x)$ для потенциала $\mathcal{V}_0[\mu](x)$

$$\mathcal{S}_0(x) = \mathcal{K}_0(x) + \tilde{\mathcal{K}}_0(x), \quad \mathcal{K}_0(x) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}\frac{hH|\eta(y(u_n,v_m))|}{|x-y(u_n,v_m)|},$$

$$|\tilde{\mathcal{K}}_0(x)| \leq \|\mu(y(u,v))\|_{C^0([0,A]\times[0,B])} \left(\frac{1}{(\min\limits_{y\in\Gamma}|x-y|)^2} + \frac{1}{\min\limits_{y\in\Gamma}|x-y|} \right) \times$$
$$\times \text{ const } \cdot (h+H),$$

которая справедлива для тех точек x, расстояние которых до поверхности Γ значительно больше, чем h и H. Для таких точек x можно записать

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \mathcal{K}_0(x) + \tilde{\mathcal{K}}_0(x) + \sigma_0(x).$$

Однако в инженерных расчетах при вычислении потенциала простого слоя $\mathcal{V}_0[\mu](x)$ формула $\mathcal{K}_0(x)$ используется для всех точек $x \notin \Gamma$, но вблизи поверхности Γ она даёт большую ошибку в вычислениях.

Главный недостаток стандартной квадратурной формулы $\mathcal{K}_0(x)$ при фиксированных h и H заключается в том, что она не даёт равномерной аппроксимации потенциала $\mathcal{V}_0[\mu](x)$ вблизи поверхности Γ, более того, если x приближается к одной из точек $y(u_n,v_m) \in \Gamma$, то слагаемое $hH|x - y(u_n,v_m)|^{-1}$ в выражении для $\mathcal{K}_0(x)$ неограниченно возрастает и стремится к бесконечности, в то время как сам потенциал $\mathcal{V}_0[\mu](x)$ является непрерывной и ограниченной функцией во всем постранстве R^3. Иначе говоря, если точка x приближается к Γ, то выражение $\mathcal{K}_0(x)$ стремится к бесконечности в определённых точках на Γ, тогда как сам потенциал $\mathcal{V}_0[\mu](x)$ непрерывен при x, стремящемся к любой точке на Γ. Следовательно, квадратурная формула $\mathcal{K}_0(x)$ не сохраняет важнейшее свойство потенциала простого слоя $\mathcal{V}_0[\mu](x)$, а именно свойство непрерывности потенциала $\mathcal{V}_0[\mu](x)$ при переходе через Γ. Целью настоящей работы является вывод более точной квадратурной формулы, которая бы сохраняла это свойство потенциала простого слоя. Заметим, что использование вместо $\mathcal{K}_0(x)$ стандартных квадратурных формул типа Гаусса [1, Глава 2], где берётся подынтегральная функция в определённых точках на Γ с весами, проблему не решает, т.к. подынтегральная функция неограниченно возрастает при приближении x к этим точкам на Γ.

Аналогичные рассуждения можно провести и применительно к потенциалу простого слоя для уравнения Гельмгольца, который имеет вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{\mu(y)e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^A du \int\limits_0^B dv \frac{\mu(y(u,v))\exp(ik|x-y(u,v)|)}{|x-y(u,v)|}|\eta(y(u,v))| =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\int\limits_{u_n-h/2}^{u_n+h/2}\int\limits_{v_m-H/2}^{v_m+H/2}\frac{\mu(y(u,v))\exp(ik|x-y(u,v)|)}{|x-y(u,v)|}|\eta(y(u,v))|dudv, \quad (12)$$

где для простоты $k>0$; если же $k=0$, то потенциал $\mathcal{V}_k[\mu](x)$ переходит в гармонический потенциал $\mathcal{V}_0[\mu](x)$, рассмотренный выше. Пусть $x\notin\Gamma$. Разложим $|x-y(u,v)|$ по формуле Тейлора с центром в точке (u_n,v_m), тогда получим

$$|x-y(u,v)| = \left(\sum_{j=1}^{3}(x_j-y_j(u,v))^2\right)^{1/2} = |x-y(u_n,v_m)|+$$

$$+(u-u_n)\sum_{j=1}^{3}\frac{(y_j(\hat u,\hat v)-x_j)(y_j)'_u(\hat u,\hat v)}{|x-y(\hat u,\hat v)|}+$$

$$+(v-v_m)\sum_{j=1}^{3}\frac{(y_j(\hat u,\hat v)-x_j)(y_j)'_v(\hat u,\hat v)}{|x-y(\hat u,\hat v)|}=$$

$$= |x-y(u_n,v_m)|+(u-u_n)\sum_{j=1}^{3}(y_j)'_u(\hat u,\hat v)\cos\psi_j(\hat u,\hat v,x)+$$

$$+(v-v_m)\sum_{j=1}^{3}(y_j)'_v(\hat u,\hat v)\cos\psi_j(\hat u,\hat v,x),$$

где $u,\hat u\in[u_n-h/2,u_n+h/2]$, $v,\hat v\in[v_m-H/2,v_m+H/2]$,

$$\cos\psi_j(\hat u,\hat v,x) = \frac{(y_j(\hat u,\hat v)-x_j)}{|x-y(\hat u,\hat v)|}, \quad j=1,2,3.$$

Поскольку косинусы $\cos\psi_j(\hat u,\hat v,x)$ равномерно ограничены для всех $x\notin\Gamma$ и $j=1,2,3$, получим $|x-y(u,v)| = |x-y(u_n,v_m)|+O(h+H)$, отсюда

$$\exp(ik|x-y(u,v)|) = \exp(ik|x-y(u_n,v_m)|)\exp(O(h+H)) =$$

$$= \exp(ik|x-y(u_n,v_m)|)+O(h+H).$$

Используя (7), видим, что

$$\mu(y)\exp(ik|x-y(u,v)|) = \mu_{nm}\exp(ik|x-y(u_n,v_m)|)+f_{n,m}(\mu;u,v,x).$$

Для $f_{n,m}(\mu;u,v,x)$ справедлива оценка

$$|f_{n,m}(\mu;u,v,x)| \le \text{ const } \|\mu(y(u,v))\|_{C^1([0,A]\times[0,B])}(h+H),$$

которая выполняется равномерно по $x \notin \Gamma$ сразу для всех возможных n,m. Используя (12), имеем

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \mathcal{S}_k(x) + \sigma_k(x), \tag{13}$$

где

$$\mathcal{S}_k(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n,v_m)|) \times$$

$$\times \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{|\eta(y(u,v))|}{|x - y(u,v)|},$$

$$\sigma_k(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{f_{n,m}(\mu; u,v,x)|\eta(y(u,v))|}{|x - y(u,v)|}.$$

Для $\sigma_k(x)$ имеет место оценка

$$|\sigma_k(x)| \le \frac{c_1}{4\pi} \|\mu(y(u,v))\|_{C^1([0,A]\times[0,B])}(h + H) \int_0^A du \int_0^B dv \frac{|\eta(y(u,v))|}{|x - y(u,v)|},$$

где константа $c_1 > 0$. Отсюда, используя (9), получаем

$$|\sigma_k(x)| \le \frac{c_2}{4\pi} \|\mu(y(u,v))\|_{C^1([0,A]\times[0,B])}(h + H), \tag{14}$$

где c_2 — некоторая положительная константа, и оценка выполняется равномерно по $x \notin \Gamma$.

Стандартная квадратурная формула $\mathcal{K}_k(x)$ для потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\mathcal{K}_k(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_{nm} \exp(ik|x - y(u_n,v_m)|) \frac{hH|\eta(y(u_n,v_m))|}{|x - y(u_n,v_m)|}$$

и выводится из $\mathcal{S}_k(x)$, как и в случае гармонического потенциала простого слоя. При этом для тех точек x, расстояние которых до поверхности Γ значительно больше, чем h и H, можно записать

$$\mathcal{S}_k(x) = \mathcal{K}_k(x) + \tilde{\mathcal{K}}_k(x),$$

$$|\tilde{\mathcal{K}}_k(x)| \le \|\mu(y(u,v))\|_{C^0([0,A]\times[0,B])} \left(\frac{1}{(\min\limits_{y\in\Gamma} |x - y|)^2} + \frac{1}{\min\limits_{y\in\Gamma} |x - y|} \right) \times$$

$$\times \text{ const } \cdot (h + H),$$

поэтому для указанных точек x имеет место соотношение

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \mathcal{K}_k(x) + \tilde{\mathcal{K}}_k(x) + \sigma_k(x).$$

Квадратурная формула $\mathcal{K}_k(x)$ имеет тот же недостаток, что и формула $\mathcal{K}_0(x)$: она не даёт равномерной аппроксимации потенциала простого слоя вблизи поверхности Γ и стремится к бесконечности, когда x приближается к определенным точкам поверхности Γ, тогда как сам потенциал $\mathcal{V}_k[\mu](x)$ является ограниченным и даже непрерывным для всех $x \in R^3$. Использование вместо $\mathcal{K}_k(x)$ стандартных квадратурных формул типа Гаусса ничего не даёт, т.к. эти квадратурные формулы также неограниченно возрастают при приближении x к определенным точкам на поверхности Γ.

Как видно из соотношений для $\mathcal{S}_k(x)$ и $\mathcal{S}_0(x)$, для получения более точных квадратурных формул необходимо более точно вычислить интеграл

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{|\eta(y(u,v))|}{|x-y(u,v)|}.$$

В силу (4), получим

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{|\eta(y(u,v))|}{|x-y(u,v)|} \approx$$

$$\approx |\eta(y(u_n,v_m))| \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{1}{|x-y(u,v)|},$$

и задача сводится к вычислению канонического интеграла

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{1}{|x-y(u,v)|}. \tag{15}$$

3. Канонический интеграл

Пусть точка x не принадлежит кусочку поверхности, вдоль которого изменяется точка $y = y(u,v)$. Серединой этого кусочка является точка $y(u_n,v_m)$. Тогда $(u - u_n) \in [-h/2,h/2]$, $(v - v_m) \in [-H/2,H/2]$. Разложим $y_j(u,v)$ по формуле Тейлора с центром в точке (u_n,v_m), тогда для $j = 1,2,3$ получим

$$y_j(u,v) = y_j(u_n,v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m).$$

Все производные берутся в точке (u_n,v_m). Положим

$$r^2 = |x - y(u_n,v_m)|^2 = \sum_{j=1}^{3} r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n,v_m) - x_j, \quad j = 1,2,3,$$

тогда

$$y_j(u,v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1,2,3.$$

Следовательно,

$$|x - y(u,v)|^2 = \sum_{j=1}^{3} (x_j - y_j(u,v))^2 \approx \sum_{j=1}^{3} (r_j^2 + 2r_jD_j + D_j^2) =$$

$$= r^2 + 2P(u-u_n) + 2Q(v-v_m) + \alpha^2(u-u_n)^2 + \beta^2(v-v_m)^2 + 2\delta(u-u_n)(v-v_m) =$$
$$= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2U^2 + 2PU + r^2,$$

где $U = u - u_n,\ V = v - v_m$,

$$P = \sum_{j=1}^{3} r_j(y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^{3} r_j(y_j)'_v, \quad \alpha^2 = \sum_{j=1}^{3} ((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^{3} ((y_j)'_v)^2,$$

$$\delta = \sum_{j=1}^{3} (y_j)'_u (y_j)'_v.$$

Производные по u и v берутся в точке $u = u_n,\ v = v_m$. Можно показать [4, Гл. 14, § 1], что

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n,v_m))|^2. \tag{16}$$

Согласно условию (5), $|\eta(y(u_n,v_m))| > 0$ для всех возможных n, m, поэтому

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 > 0. \tag{17}$$

Отсюда следует, что $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$.

Целью этого пункта является вычисление следующего интеграла

$$\int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} dv \frac{1}{|x - y(u,v)|} \approx$$

$$\approx \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} dV \frac{1}{\beta} \times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(V+\delta U/\beta^2+Q/\beta^2)^2+\left(-(\delta U+Q)^2/\beta^2+\alpha^2U^2+2PU+r^2\right)/\beta^2}}=$$

$$=\theta_{nm}(x)=\frac{1}{\beta}(I(H)-I(-H)).$$

Здесь введены обозначения $\theta_{nm}(x)$ и $I(H)$. Интеграл $I(H)$ возникает после интегрирования по V с учётом неравенства (17), а также в соответствии с [7, пункт 1.2.43.13] и имеет вид

$$I(H)=\int_{-h/2}^{h/2}dU\times$$

$$\times\ln\left|\frac{H}{2}+\frac{\delta U+Q}{\beta^2}+\sqrt{\left(\frac{H}{2}+\frac{\delta U+Q}{\beta^2}\right)^2-\frac{(\delta U+Q)^2}{\beta^4}+\frac{\alpha^2U^2+2PU+r^2}{\beta^2}}\right|=$$

$$=\int_{-h/2}^{h/2}dU\ln\left|\varepsilon+\delta_0U+\sqrt{\alpha_0^2U^2+2\beta_0U+\chi_0}\right|, \tag{18}$$

где введены обозначения

$$\delta_0=\frac{\delta}{\beta^2},\quad \alpha_0^2=\frac{\alpha^2}{\beta^2}>0,\quad \varepsilon=\frac{H}{2}+\frac{Q}{\beta^2},\quad \beta_0=\frac{\delta H+2P}{2\beta^2},\quad \chi_0=\frac{H^2}{4}+\frac{HQ+r^2}{\beta^2}.$$

Покажем, что в интеграле квадратный трехчлен под корнем неотрицателен. Положим $\tilde{D}_j=(y_j)'_uU+(y_j)'_vH/2$ и рассмотрим преобразования

$$\sum_{j=1}^{3}(r_j+\tilde{D}_j)^2=\sum_{j=1}^{3}\left(r_j^2+2r_j\tilde{D}_j+\tilde{D}_j^2\right)=r^2+2\sum_{j=1}^{3}r_j\tilde{D}_j+\sum_{j=1}^{3}\tilde{D}_j^2=$$

$$=r^2+2PU+2Q\frac{H}{2}+\alpha^2U^2+\beta^2\left(\frac{H}{2}\right)^2+2\delta U\frac{H}{2}=$$

$$=\beta^2\left(\left(\frac{H}{2}\right)^2+2\frac{\delta U+Q}{\beta^2}\left(\frac{H}{2}\right)+\left(\frac{\delta U+Q}{\beta^2}\right)^2\right)-\frac{(\delta U+Q)^2}{\beta^2}+$$

$$+\alpha^2U^2+2PU+r^2=$$

$$=\beta^2\left(\left(\frac{H}{2}+\frac{\delta U+Q}{\beta^2}\right)^2-\frac{(\delta U+Q)^2}{\beta^4}+\frac{\alpha^2U^2+2PU+r^2}{\beta^2}\right)=$$

$$=\alpha_0^2U^2+2\beta_0U+\chi_0\geq 0.$$

Тем самым, квадратный трехчлен неотрицателен, а значит, его дискриминант неположитен, т.е. $\beta_0^2 - \alpha_0^2\chi_0 \le 0$. Поэтому положим $\chi_1^2 = \chi_0 - \beta_0^2/\alpha_0^2 \ge 0$ и преобразуем подкоренное выражение в интеграле к виду

$$\alpha_0^2U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0 = (\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)^2 + \chi_1^2.$$

Теперь надо рассмотреть 2 случая: $\chi_1 > 0$ и $\chi_1 = 0$. Интеграл $I(-H)$ вычисляется по тем же формулам, что и интеграл $I(H)$, но в параметрах $\varepsilon,\ \beta_0,\ \chi_0$ надо заменить H на $-H$.

3.1. Вычисление интеграла $I(H)$ при $\chi_1 > 0$. Рассмотрим случай $\chi_1 > 0$. Сделаем гиперболическую замену переменной в интеграле$I(H)$ по формулам

$$U = (\chi_1 \operatorname{sh} t - \beta_0/\alpha_0)/\alpha_0, \qquad t = \operatorname{arcsh}(\zeta), \qquad \zeta = (\alpha_0 U + \beta_0/\alpha_0)/\chi_1$$

и обозначим $t_\pm = \operatorname{arcsh}(\zeta_\pm)$, $\zeta_\pm = (\pm\alpha_0 h/2 + \beta_0/\alpha_0)/\chi_1$, тогда, используя тождество $\operatorname{sh}^2 t + 1 = \operatorname{ch}^2 t$, находим

$$I(H) = \frac{\chi_1}{\alpha_0}\int_{t_-}^{t_+} \ln\left|\varepsilon - \frac{\delta_0\beta_0}{\alpha_0^2} + \frac{\delta_0\chi_1}{\alpha_0}\operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t\right| d\operatorname{sh} t.$$

Обозначив $\varepsilon_1 = \varepsilon - \delta_0\beta_0/\alpha_0^2$, $\delta_1 = \delta_0\chi_1/\alpha_0$ и интегрируя по частям, получим

$$I(H) = \frac{\chi_1}{\alpha_0}\int_{t_-}^{t_+} \ln|\varepsilon_1 + \delta_1 \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t|\, d\operatorname{sh} t =$$

$$= \frac{\chi_1}{\alpha_0}(\ln|\varepsilon_1 + \delta_1 \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t|)\operatorname{sh} t\Big|_{t_-}^{t_+} - \frac{\chi_1}{\alpha_0} I_1 =$$

$$= \frac{\chi_1}{\alpha_0}\left(\ln\left|\varepsilon_1 + \delta_1\zeta + \chi_1\sqrt{\zeta^2+1}\right|\right)\zeta\Big|_{\zeta_-}^{\zeta_+} - \frac{\chi_1}{\alpha_0} I_1,$$

где

$$I_1 = \int_{t_-}^{t_+} \frac{(\delta_1 \operatorname{ch} t + \chi_1 \operatorname{sh} t)\operatorname{sh} t}{\varepsilon_1 + \delta_1 \operatorname{sh} t + \chi_1 \operatorname{ch} t} dt.$$

В интеграле I_1 сделаем замену переменной $z = \exp(t) > 0$, тогда находим

$$\operatorname{sh} t = \frac{z^2-1}{2z}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{z^2+1}{2z}, \quad t = \ln z, \quad dt = \frac{dz}{z},$$

$$z_\pm = \exp(t_\pm) = \operatorname{sh} t_\pm + \operatorname{ch} t_\pm = \operatorname{sh} t_\pm + \sqrt{\operatorname{sh}^2 t_\pm + 1} = \zeta_\pm + \sqrt{\zeta_\pm^2 + 1},$$

$$I_1 = \int_{z_-}^{z_+} \frac{(z^2-1)(\delta_1(z^2+1)+\chi_1(z^2-1))}{4\varepsilon_1 z^2 + 2z(z^2-1)\delta_1 + 2z(z^2+1)\chi_1}\,\frac{d\,z}{z} =$$

$$= \int_{z_-}^{z_+} \frac{(\delta_1+\chi_1)z^4 - 2\chi_1 z^2 + \chi_1 - \delta_1}{2z^2\left((\delta_1+\chi_1)z^2 + 2\varepsilon_1 z + \chi_1 - \delta_1\right)}\,d\,z = \frac{\delta_+}{2}I_2 - \chi_1 I_3 + \frac{\delta_-}{2}I_4, \qquad (19)$$

где $\delta_\pm = \chi_1 \pm \delta_1 = \chi_1(1 \pm \delta_0/\alpha_0)$ и введены обозначения

$$I_2 = \int\limits_{z_-}^{z_+} \frac{z^2\,d\,z}{\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-}, \quad I_3 = \int\limits_{z_-}^{z_+} \frac{d\,z}{\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-},$$

$$I_4 = \int\limits_{z_-}^{z_+} \frac{d\,z}{z^2(\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-)}.$$

Необходимо пояснить, что если $\delta_+ = 0$, то в формуле (19) отсутствует слагаемое $(\delta_+/2)I_2$, а если $\delta_- = 0$, то в формуле (19) отсутствует слагаемое $(\delta_-/2)I_4$. Заметим также, что δ_+ и δ_- не могут обращаться в ноль одновременно. Действительно, если $\delta_+ = \delta_- = 0$, то $\chi_1 = 0$, а в данном разделе рассматривается случай $\chi_1 > 0$. Вычислим интегралы $I_2,\ I_3,\ I_4$ при разных значениях параметров.

I. Пусть $\delta_+ \neq 0$. Используя [7, пункт 1.2.8.13], вычислим интеграл I_3. Если $\varepsilon_1^2 - \delta_+\delta_- > 0$, то

$$I_3 = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_1^2 - \delta_+\delta_-}} \ln \left| \frac{\delta_+ z + \varepsilon_1 - \sqrt{\varepsilon_1^2 - \delta_+\delta_-}}{\delta_+ z + \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - \delta_+\delta_-}} \right| \Bigg|_{z_-}^{z_+}.$$

Если $\varepsilon_1^2 - \delta_+\delta_- < 0$, то

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{\delta_+\delta_- - \varepsilon_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{\delta_+ z + \varepsilon_1}{\sqrt{\delta_+\delta_- - \varepsilon_1^2}} \Bigg|_{z_-}^{z_+}.$$

Если $\varepsilon_1^2 - \delta_+\delta_- = 0$, то

$$I_3 = -\frac{1}{\delta_+ z + \varepsilon_1} \Bigg|_{z_-}^{z_+}.$$

При $\delta_+ \neq 0$ интеграл I_2 вычисляется согласно [7, пункт 1.2.8.20] и имеет вид

$$I_2 = \frac{1}{\delta_+} \left(z - \frac{\varepsilon_1}{\delta_+} \ln |\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-| \right) \Bigg|_{z_-}^{z_+} + \frac{2\varepsilon_1^2 - \delta_+\delta_-}{\delta_+^2} I_3,$$

а интеграл I_4 находится в соответствии с [7, пункт 1.2.8.26] и даётся выражением

$$I_4 = \frac{1}{\delta_-}\left(-\frac{1}{z} - \frac{\varepsilon_1}{\delta_-}\ln\frac{z^2}{|\delta_+ z^2 + 2\varepsilon_1 z + \delta_-|}\right)\Bigg|_{z_-}^{z_+} + \frac{2\varepsilon_1^2 - \delta_+\delta_-}{\delta_-^2} I_3, \qquad \delta_- \neq 0.$$

Как отмечено выше, если $\delta_- = 0$, то слагаемое $(\delta_-/2)I_4$ в формуле (19) отсутствует, поэтому интеграл I_4 в этом случае вычислять не нужно.

II. Пусть $\delta_+ = 0$. Как указано выше, в этом случае в формуле (19) отсутствует слагаемое с интегралом I_2, поэтому интеграл I_2 вычислять не нужно. Кроме того, как показано выше, $\delta_- \neq 0$, если $\delta_+ = 0$, поэтому надо рассмотреть 2 случая: $\varepsilon_1 \neq 0$ и $\varepsilon_1 = 0$. Если $\delta_+ = 0$ и $\varepsilon_1 \neq 0$, то

$$I_3 = \frac{1}{2\varepsilon_1}\ln|2\varepsilon_1 z + \delta_-|\Bigg|_{z_-}^{z_+}, \qquad I_4 = \left(-\frac{1}{\delta_- z} + \frac{2\varepsilon_1}{\delta_-^2}\ln\left|\frac{2\varepsilon_1 z + \delta_-}{z}\right|\right)\Bigg|_{z_-}^{z_+}.$$

Если $\delta_+ = 0$ и $\varepsilon_1 = 0$, то

$$I_3 = \frac{z}{\delta_-}\Bigg|_{z_-}^{z_+}, \qquad I_4 = -\frac{1}{\delta_- z}\Bigg|_{z_-}^{z_+}.$$

3.2. Вычисление интеграла $I(H)$ при $\chi_1 = 0$. Поскольку $\alpha_0 > 0$, подкоренное выражение в $I(H)$ принимает вид

$$\alpha_0^2 U^2 + 2\beta_0 U + \chi_0 = \alpha_0^2\left(U + \frac{\beta_0}{\alpha_0^2}\right)^2,$$

следовательно,

$$I(H) = \int_{-h/2}^{h/2} dU \ln\left|\varepsilon + \delta_0 U + \alpha_0\left|U + \frac{\beta_0}{\alpha_0^2}\right|\right|.$$

1. Если $-\beta_0/\alpha_0^2 \in (-h/2,h/2)$, то

$$I(H) = \int_{-h/2}^{-\beta_0/\alpha_0^2} dU \ln\left|(\delta_0 - \alpha_0)\,U + \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right| +$$

$$+ \int_{-\beta_0/\alpha_0^2}^{h/2} dU \ln\left|(\delta_0 + \alpha_0)\,U + \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right| =$$

$$= I_5\left(-\frac{h}{2}, -\frac{\beta_0}{\alpha_0^2}, \delta_0 - \alpha_0, \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right) + I_5\left(-\frac{\beta_0}{\alpha_0^2}, \frac{h}{2}, \delta_0 + \alpha_0, \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right),$$

где введено обозначение

$$I_5(U_1{,}U_2{,}\varkappa_1{,}\varkappa_2) = \int_{U_1}^{U_2} dU \ln|\varkappa_1 U + \varkappa_2|.$$

2. Если $-\beta_0/\alpha_0^2 \in [h/2, +\infty)$, то

$$I(H) = \int_{-h/2}^{h/2} dU \ln\left|(\delta_0 - \alpha_0)\,U + \varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right| = I_5\left(-\frac{h}{2}{,}\frac{h}{2}{,}\delta_0 - \alpha_0{,}\varepsilon - \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right).$$

3. Если $-\beta_0/\alpha_0^2 \in (-\infty, -h/2]$, то

$$I(H) = \int_{-h/2}^{h/2} dU \ln\left|(\delta_0 + \alpha_0)\,U + \varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right| = I_5\left(-\frac{h}{2}{,}\frac{h}{2}{,}\delta_0 + \alpha_0{,}\varepsilon + \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right).$$

Вычислим интеграл $I_5(U_1{,}U_2{,}\varkappa_1{,}\varkappa_2)$.

1. При $\varkappa_1 \neq 0$:

$$I_5(U_1{,}U_2{,}\varkappa_1{,}\varkappa_2) = \left(-U + \left(U + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)\ln|\varkappa_1 U + \varkappa_2|\right)\Bigg|_{U_1}^{U_2}.$$

2. При $\varkappa_1 = 0$: $I_5(U_1{,}U_2{,}\varkappa_1{,}\varkappa_2) = (U_2 - U_1)\ln|\varkappa_2|$.

4. Основной результат

Сформулируем основной результат этой работы в виде теоремы.

Теорема. *Пусть* Γ — *простая гладкая замкнутая либо ограниченная разомкнутая поверхность класса* C^2, *содержащая свои предельные точки (если поверхность* Γ *замкнутая, то она должна ограничивать объёмно-односвязную внутреннюю область), допускающая параметризацию* (1) *со свойствами* (3), (5). *Пусть* $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$. *Тогда для гармонического потенциала простого слоя* (6) *и для потенциала простого слоя для уравнения Гельмгольца* (12) *справедливы представления* (11) *и* (13), *где для* $\sigma_0(x)$ *равномерно по* $x \in R^3$ *выполняется оценка* (10), *а для* $\sigma_k(x)$ *при всех* $x \notin \Gamma$ *выполняется оценка* (14). *Кроме того, при* $x \notin \Gamma$ *для* $\mathcal{S}_0(x)$, $\mathcal{S}_k(x)$ *имеют место квадратурные формулы*

$$\mathcal{S}_0(x) \approx \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}|\eta(y(u_n{,}v_m))|\theta_{nm}(x),$$

$$\mathcal{S}_k(x) \approx \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu_{nm}|\eta(y(u_n{,}v_m))|\exp(ik|x - y(u_n{,}v_m)|)\theta_{nm}(x),$$

где интеграл $\theta_{nm}(x)$ *вычислен в пункте 3 в явном виде.*

5. Численные тесты

Тестирование квадратурных формул для потенциалов простого слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца проведено в случае, когда поверхность Γ является сферой единичного радиуса, которая задана параметрически уравнениями:

$$y_1(u,v) = \sin v \cos u, \quad y_2(u,v) = \sin v \sin u, \quad y_3(u,v) = \cos v, \tag{20}$$

причём $(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$. Отметим, что в данном случае $|\eta(y(u,v))| = \sin v$ и $|\eta(y(u,0))| = |\eta(y(u,\pi))| = 0$ для всех $u \in [0,2\pi]$. Иначе говоря, $|\eta(y)| = 0$ на полюсах сферы при такой параметризации, но условия теоремы выполняются.

В рассматриваемых тестовых примерах для потенциала простого слоя с заданной на единичной сфере плотностью известно явное выражение во всём пространстве, поэтому точные значения потенциала можно сравнить с приближенными, вычисленными по квадратурным формулам. Во всех тестах приближенное значение потенциала простого слоя вычислялось по стандартным квадратурным формулам $\mathcal{K}_0(x)$ и $\mathcal{K}_k(x)$ и по улучшенным квадратурным формулам $\mathcal{S}_0(x)$ и $\mathcal{S}_k(x)$ в некоторых точках на вспомогательных сферах, имеющих центры в начале координат и радиусы, равные $1 \pm \Delta R$. Тем самым, вспомогательные сферы находятся либо внутри, либо снаружи сферы единичного радиуса, на которой задана плотность потенциала, на расстоянии ΔR от неё. Затем были рассчитаны значения абсолютных погрешностей в этих точках $|\mathcal{K}_k(x) - \mathcal{V}_k[\mu](x)|$ и $|\mathcal{S}_k(x) - \mathcal{V}_k[\mu](x)|$ (здесь $k \geq 0$) либо относительных погрешностей (когда абсолютная погрешность делится на модуль точного значения потенциала в данной точке), и для каждой вспомогательной сферы определялись максимумы значений этих погрешностей.

Координаты точек, которые использовались для оценки максимальной абсолютной либо относительной погрешности:

$$x_j^{ql} = R y_j(u_q, v_l), \quad j = 1,2,3,$$

$$u_q = \frac{2\pi}{2N} q, \quad q = 0,1,2; \quad v_l = \frac{\pi}{2M} l, \quad l = 0, \dots, 2M, \tag{21}$$

где $y_j(u,v)$ определяется формулами (20), R — радиус вспомогательной сферы. То есть эти точки расположены над и под центрами участков разбиения единичной сферы, серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ. Отметим, что эти точки распределены не по всей сфере, а находятся вблизи нулевого меридиана.

Вычисления проводились для различных значений M и N. Значения шагов определяются формулами $h = 2\pi/N$, $H = \pi/M$. Если $N = M = 25$, то

$h \approx 0.25$, $H \approx 0.13$; если $N = M = 50$, то $h \approx 0.126$, $H \approx 0.063$; если $N = M = 100$, то $h \approx 0.063$, $H \approx 0.031$.

В таблицах приведены рассчитанные максимальные значения погрешностей. В левом столбце указано отличие радиуса вспомогательной сферы от единицы: для внутренних сфер радиус равен $1 - \Delta R$, для внешних $1 + \Delta R$. В верхней строке указаны значения M, N. Первое число в ячейках таблицы — максимальная погрешность для стандартной квадратурной формулы на данной вспомогательной сфере, а число после точки с запятой — максимальная погрешность на данной сфере для улучшенной формулы.

Тест 1 для квадратурной формулы в случае уравнения Лапласа. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = 4\pi$, тогда гармонический потенциал простого слоя имеет вид

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} 4\pi & \text{при } |x| < 1 \\ \dfrac{4\pi}{|x|} & \text{при } |x| > 1 \end{cases}.$$

В таблице 1 приведены рассчитанные максимальные значения относительных погрешностей.

Таблица 1. Максимальная относительная погрешность квадратурных формул в тесте 1.

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	4.0E-3; 4.0E-3	9.0E-4; 9.7E-4	2.2E-4; 2.4E-4
0.01	0.21; 0.040	0.042; 0.014	7.1E-3; 4.2E-3
0.001	2.5; 0.065	0.60; 0.038	0.14; 0.017
0.0001	25; 0.069	6.3; 0.045	1.56; 0.027

Внутренние сферы

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	4.9E-3; 5.8E-3	9.9E-4; 1.4E-3	2.4E-4; 3.4E-4
0.01	0.21; 0.048	0.043; 0.016	7.2E-3; 4.3E-3
0.001	2.5; 0.075	0.60; 0.046	0.15; 0.019
0.0001	25; 0.070	6.3; 0.047	1.6; 0.031

Внешние сферы

Тест 2 для квадратурной формулы в случае уравнения Лапласа. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = \cos u \sin v$, при этом гармонический потенциал простого слоя имеет вид

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \begin{cases} \dfrac{|x|\cos\varphi\sin\vartheta}{3} & \text{при } |x| < 1, \\[2ex] \dfrac{\cos\varphi\sin\vartheta}{3|x|^2} & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

где ϑ и φ — зенитный и азимутальный углы в сферических координатах с центром в начале координат. Методика вычислений в этом тесте аналогична таковой в тесте 1. Отличие состоит лишь в том, что в формулах (21) теперь $q = 0, \ldots, 2N$, т. е. точки распределены по всей сфере. В таблице 2 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

Таблица 2. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 2.

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	3.4E-3; 2.7E-3	1.1E-4; 6.4E-4	2.8E-7; 1.6E-4
0.01	0.21; 4.7E-3	0.042; 1.0E-3	7.1E-3; 2.2E-4
0.001	2.5; 5.5E-3	0.60; 1.4E-3	0.14; 3.4E-4
0.0001	25; 5.6E-3	6.2; 1.5E-3	1.6; 3.7E-4

Внутренние сферы

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	4.1E-3; 3.9E-4	1.6E-4; 8.5E-5	6.9E-7; 2.1E-5
0.01	0.21; 1.7E-3	0.042; 4.2E-4	7.1E-3; 6.8E-5
0.001	2.5; 4.7E-3	0.60; 5.5E-4	0.14; 1.8E-4
0.0001	25; 5.5E-3	6.2; 1.4E-3	1.6; 2.8E-4

Внешние сферы

Тест 3 для квадратурной формулы в случае уравнения Гельмгольца. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = k$. Тогда потенциал простого слоя для уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \begin{cases} e^{ik} \cdot \dfrac{\sin(k|x|)}{|x|} & \text{при } |x| < 1, \\[2ex] \sin k \cdot \dfrac{e^{ik|x|}}{|x|} & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

где $k = 1$. Методика вычислений в тесте 3 аналогична таковой в тесте 1. В таблице 3 приведены рассчитанные максимальные значения относительных погрешностей.

Таблица 3. Максимальная относительная погрешность квадратурных формул в тесте 3.

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	4.3E-3; 4.8E-3	9.7E-4; 1.2E-3	2.4E-4; 2.9E-4
0.01	0.24; 0.047	0.050; 0.017	8.4E-3; 4.9E-3
0.001	2.9; 0.077	0.72; 0.045	0.17; 0.021
0.0001	30; 0.082	7.4; 0.053	1.9; 0.032

Внутренние сферы

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	5.4E-3; 6.9E-3	1.1E-3; 1.7E-3	2.7E-4; 4.1E-4
0.01	0.25; 0.057	0.051; 0.018	8.6E-3; 5.1E-3
0.001	2.9; 0.089	0.72; 0.054	0.17; 0.023
0.0001	30; 0.083	7.4; 0.056	1.9; 0.037

Внешние сферы

Тест 4 для квадратурной формулы в случае уравнения Гельмгольца. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u,v)) = k^3 \cos v$. При этом потенциал простого слоя имеет вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x) = \begin{cases} (ik-1)e^{ik} \cdot \dfrac{k|x|\cos(k|x|) - \sin(k|x|)}{|x|^2} \cos\vartheta & \text{при } |x| < 1, \\[2ex] (k\cos k - \sin k) \cdot \dfrac{(ik|x|-1)e^{ik|x|}}{|x|^2} \cos\vartheta & \text{при } |x| > 1, \end{cases}$$

где ϑ — зенитный угол в сферических координатах с центром в начале координат, $k = 1$. Методика вычислений в этом тесте такая же, как и в тесте 2. В таблице 4 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

Выводы. Как указано выше, первое число в ячейках таблиц — погрешность стандартной квадратурной формулы, а второе число — погрешность улучшенной квадратурной формулы. Из таблиц видно, что стандартная квадратурная формула расходится, когда точки x стремятся к точкам на единичной сфере Γ, где задана плотность потенциала. Когда расстояние от точек x до сферы Γ сокращается в 10 раз, погрешность вычислений по стандартной формуле возрастает в 10 раз или больше, а максимальная погрешность вычислений по

Таблица 4. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 4.

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	3.9E-3; 4.4E-3	8.6E-4; 1.1E-3	2.1E-4; 2.7E-4
0.01	0.097; 0.040	0.019; 0.014	2.8E-3; 4.2E-3
0.001	1.2; 0.065	0.30; 0.038	0.071; 0.017
0.0001	13; 0.069	3.1; 0.045	0.78; 0.027

Внутренние сферы

ΔR	$M = N = 25$	$M = N = 50$	$M = N = 100$
0.1	3.9E-3; 5.4E-3	8.8E-4; 1.3E-3	2.1E-4; 3.2E-4
0.01	0.098; 0.048	0.019; 0.015	2.9E-3; 4.3E-3
0.001	1.2; 0.074	0.30; 0.046	0.071; 0.019
0.0001	13; 0.070	3.1; 0.047	0.78; 0.031

Внешние сферы

улучшенной формуле существенно не меняется и оценивается как $O(H)$ в приведённых расчётах. Из таблиц вытекает, что стандартная формула не даёт ни равномерной сходимости, ни равномерной аппроксимации как во внутренней, так и во внешней области, ограниченной сферой Γ, т.к. не даёт равномерной аппроксимации вблизи сферы Γ. Улучшенная квадратурная формула, наоборот, обеспечивает равномерную аппроксимацию и равномерную сходимость во внутренней и внешней области, ограниченной поверхностью Γ, поскольку даёт равномерную аппроксимацию потенциала вблизи Γ. Кроме того, улучшенная квадратурная формула имеет первый порядок сходимости и аппроксимации по результатам из таблиц. Ещё необходимо отметить, что улучшенная квадратурная формула, в отличие от стандартной, сохраняет свойство непрерывности потенциала простого слоя при переходе через границу Γ, что также следует из приведённых численных результатов.

6. Прямое значение потенциала простого слоя на поверхности

Используя полученные результаты, можно построить квадратурную формулу для прямого значения потенциала простого слоя, когда точка x лежит на поверхности Γ в одном из узлов. Пусть $x = y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})$, и $y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})$ — один из узлов на поверхности Γ. Если $(n,m) \neq (\hat{n},\hat{m})$, (т. е. $x = y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}}) \neq y(u_n,v_m)$), то интеграл (15) можно считать приближенно равным функции $\theta_{nm}(x)$, которая найдена в пункте 3 в явном виде. Остаётся приближенно вычислить интеграл (15), когда $(n,m) = (\hat{n},\hat{m})$ (т. е. $y(u,v)$ принадлежит маленькому кусочку поверхности с центром в точке $x = y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})$). В этом случае, применяя формулу

Тейлора с центром в точке $(u_{\hat n},v_{\hat m})$, находим

$$|y(u,v)-x|^2 \approx \sum_{j=1}^{3}((y_j)'_u(u-u_{\hat n})+(y_j)'_v(v-v_{\hat m}))^2 =$$

$$=\sum_{j=1}^{3}(((y_j)'_u)^2(u-u_{\hat n})^2+((y_j)'_v)^2(v-v_{\hat m})^2+2(y_j)'_u(y_j)'_v(u-u_{\hat n})(v-v_{\hat m}))=$$

$$=\alpha^2(u-u_{\hat n})^2+\beta^2(v-v_{\hat m})^2+2\delta(u-u_{\hat n})(v-v_{\hat m})=$$
$$=\rho^2(\alpha^2\cos^2\phi+\beta^2\sin^2\phi+2\delta\cos\phi\sin\phi),$$

где $\rho = \sqrt{(u-u_{\hat n})^2+(v-v_{\hat m})^2}$, $\cos\phi=(u-u_{\hat n})/\rho$, $\sin\phi=(v-v_{\hat m})/\rho$, формулы для α^2, β^2, δ даны в пункте 3, и в них все производные $(y_j)'_u$ и $(y_j)'_v$ берутся в точке $u=u_{\hat n}$, $v=v_{\hat m}$. Рассмотрим канонический интеграл

$$\int_{u_{\hat n}-h/2}^{u_{\hat n}+h/2}du\int_{v_{\hat m}-H/2}^{v_{\hat m}+H/2}dv\frac{1}{|y(u,v)-x|}\approx$$

$$\approx\int_{u_{\hat n}-h/2}^{u_{\hat n}+h/2}du\int_{v_{\hat m}-H/2}^{v_{\hat m}+H/2}dv\frac{1}{\sqrt{\alpha^2(u-u_{\hat n})^2+\beta^2(v-v_{\hat m})^2+2\delta(u-u_{\hat n})(v-v_{\hat m})}}=$$
$$=\mathcal{I}_{\hat n,\hat m}.$$

Здесь введено обозначение $\mathcal{I}_{\hat n,\hat m}$. При вычислении интеграла будем считать, что $|\eta(y(u_{\hat n},v_{\hat m}))|>0$, тогда, в соответствии с тождеством (16), выполняется неравенство $\alpha^2\beta^2-\delta^2>0$. Переходя к полярным координатам, получим

$$\mathcal{I}_{\hat n,\hat m}=\int_{u_{\hat n}-h/2}^{u_{\hat n}+h/2}du\int_{v_{\hat m}-H/2}^{v_{\hat m}+H/2}dv\frac{1}{\rho\sqrt{\alpha^2\cos^2\phi+\beta^2\sin^2\phi+2\delta\cos\phi\sin\phi}}=$$

$$=2\int_{-\operatorname{arctg}(H/h)}^{\operatorname{arctg}(H/h)}d\phi\int_0^{h/(2\cos\phi)}\rho d\rho\frac{1}{\rho\sqrt{\alpha^2\cos^2\phi+\beta^2\sin^2\phi+2\delta\cos\phi\sin\phi}}+$$
$$+2\int_{\operatorname{arcctg}(h/H)}^{\pi-\operatorname{arcctg}(h/H)}d\phi\int_0^{H/(2\sin\phi)}\rho d\rho\frac{1}{\rho\sqrt{\alpha^2\cos^2\phi+\beta^2\sin^2\phi+2\delta\cos\phi\sin\phi}}.$$

Коэффициент 2 возник из-за того, что подынтегральная функия в исходном интеграле не меняется при замене $(u-u_{\hat n})$, $(v-v_{\hat m})$ на $-(u-u_{\hat n})$, $-(v-v_{\hat m})$, поэтому интеграл по прямоугольнику равен удвоенному интегралу по треугольнику, который лежит над главной диагональю в прямоугольнике. Сокращая ρ и вычисляя интеграл по ρ, получим

$$\mathcal{I}_{\hat n,\hat m}=h\int_{-\operatorname{arctg}(H/h)}^{\operatorname{arctg}(H/h)}\frac{d\phi}{\cos\phi\sqrt{\alpha^2\cos^2\phi+\beta^2\sin^2\phi+2\delta\cos\phi\sin\phi}}+$$

$$+H\int_{\operatorname{arcctg}(h/H)}^{\pi-\operatorname{arcctg}(h/H)}\frac{d\phi}{\sin\phi\sqrt{\alpha^2\cos^2\phi+\beta^2\sin^2\phi+2\delta\cos\phi\sin\phi}}=$$

$$=h\int_{-\operatorname{arctg}(H/h)}^{\operatorname{arctg}(H/h)}\frac{d\phi}{\cos^2\phi\sqrt{\alpha^2+\beta^2\operatorname{tg}^2\phi+2\delta\operatorname{tg}\phi}}+$$

$$+H\int_{\operatorname{arcctg}(h/H)}^{\pi-\operatorname{arcctg}(h/H)}\frac{d\phi}{\sin^2\phi\sqrt{\alpha^2\operatorname{ctg}^2\phi+\beta^2+2\delta\operatorname{ctg}\phi}}=$$

$$=h\int_{-\operatorname{arctg}(H/h)}^{\operatorname{arctg}(H/h)}\frac{d\operatorname{tg}\phi}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2\operatorname{tg}^2\phi+2\delta\operatorname{tg}\phi}}-$$

$$-H\int_{\operatorname{arcctg}(h/H)}^{\pi-\operatorname{arcctg}(h/H)}\frac{d\operatorname{ctg}\phi}{\sqrt{\alpha^2\operatorname{ctg}^2\phi+\beta^2+2\delta\operatorname{ctg}\phi}}.$$

Полагая $t=\operatorname{tg}\phi$ в 1-ом интеграле и $t=\operatorname{ctg}\phi$ во 2-ом, получим

$$\mathcal{I}_{\hat{n},\hat{m}}=h\int_{-H/h}^{H/h}\frac{dt}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2t^2+2\delta t}}-H\int_{h/H}^{-h/H}\frac{dt}{\sqrt{\alpha^2t^2+\beta^2+2\delta t}}=$$

$$=\frac{h}{\beta}\int_{-H/h}^{H/h}\frac{dt}{\sqrt{(\alpha/\beta)^2+(t+\delta/\beta^2)^2-(\delta/\beta^2)^2}}-$$

$$-\frac{H}{\alpha}\int_{h/H}^{-h/H}\frac{dt}{\sqrt{(t+\delta/\alpha^2)^2-(\delta/\alpha^2)^2+(\beta/\alpha)^2}}=$$

$$=\frac{h}{\beta}\int_{-H/h+\delta/\beta^2}^{H/h+\delta/\beta^2}\frac{dz}{\sqrt{z^2+(\alpha/\beta)^2-(\delta/\beta^2)^2}}-$$

$$-\frac{H}{\alpha}\int_{h/H+\delta/\alpha^2}^{-h/H+\delta/\alpha^2}\frac{dz}{\sqrt{z^2-(\delta/\alpha^2)^2+(\beta/\alpha)^2}}=$$

$$=\frac{h}{\beta}\ln\left|z+\sqrt{z^2+(\alpha/\beta)^2-(\delta/\beta^2)^2}\right|\Bigg|_{-H/h+\delta/\beta^2}^{H/h+\delta/\beta^2}-$$

$$-\frac{H}{\alpha}\ln\left|z+\sqrt{z^2-(\delta/\alpha^2)^2+(\beta/\alpha)^2}\right|\Bigg|_{h/H+\delta/\alpha^2}^{-h/H+\delta/\alpha^2}.$$

Таким образом, приближенное значение канонического интеграла (15) при $(n,m)=(\hat{n},\hat{m})$ и $x=y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})$ равняется $\mathcal{I}_{\hat{n},\hat{m}}$ и даётся последним выражением.

Из приведенных рассуждений вытекает, что если точка x лежит на поверхности Γ в узле $y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})$, то квадратурная формула для потенциала простого слоя имеет вид

$$\mathcal{V}_k[\mu](x)|_{x=y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})\in\Gamma}\approx\frac{1}{4\pi}\,\mu_{\hat{n}\hat{m}}|\eta(y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}}))|\exp(ik|x-y(u_{\hat{n}},v_{\hat{m}})|)\mathcal{I}_{\hat{n},\hat{m}}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{n=0,\,m=0\\(n,m)\neq(\hat{n},\hat{m})}}^{n=N-1,\,m=M-1}\mu_{nm}|\eta(y(u_n,v_m))|\exp(ik|x-y(u_n,v_m)|)\theta_{nm}(x),\qquad k\geq 0. \tag{22}$$

При выводе формулы (22) используется соотношение (4) и предположение, что во всех узловых точках вектор нормали η имеет положительную длину, т.е. $|\eta(y(u_n,v_m))|>0$ для всех возможных $n,\ m$. Данные условия выполняются, если выполнены условия (3), (5). Квадратурная формула (22) может использоваться для численного решения граничных интегральных уравнений, возникающих при решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца методом потенциалов.

Сходимость формулы (22) проверена на тестах 1 — 4 из пункта 5, полученные результаты приведены в таблице 5, где указана максимальная погрешность вычислений в узловых точках единичной сферы для каждого теста. В таблице по тестам 1 и 3 приводится максимальная относительная погрешность, а по тестам 2 и 4 — максимальная абсолютная погрешность. Из этих результатов вытекает, что квадратурная формула (22) сходится и аппроксимирует прямое значение потенциала простого слоя с погрешностью $O(H)$.

Таблица 5. Максимальная погрешность квадратурной формулы (22) по тестам 1 – 4.

Номер теста	$M=N=25$	$M=N=50$	$M=N=100$
1	0.00865156	0.00489815	0.00259686
2	0.00114002	0.00030165	7.75075E-05
3	0.0103965	0.00584807	0.0030924
4	0.00886643	0.00494347	0.00260689

Список литературы

[1] *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.

[2] *Krutitskii P. A., Kwak D. Y., Hyon Y. K.* Numerical treatment of a skew-derivative problem for the Laplace equation in the exterior of an open arc // Journal of Engineering Mathematics, 2007, v. 59, p. 25 – 60.

[3] *Крутицкий П.А., Колыбасова В.В.* Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференциальные уравнения, 2016, Т. 52, № 9, с. 1262 – 1276.

[4] *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Физматлит, 2000.

[5] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Часть 2. М.: Физматлит, 1973.

[6] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1981.

[7] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 1981.

Список таблиц

Оглавление