ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 113 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Богданов И.П.

Формирование оптимальных маршрутов региональных пассажирских авиаперевозок

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Богданов И.П. Формирование оптимальных маршрутов региональных пассажирских авиаперевозок // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 113. 20 с. doi:**10.20948/prepr-2019-113**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-113**

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

И.П. Богданов

Формирование оптимальных маршрутов региональных пассажирских авиаперевозок

Москва — 2019

Богданов И.П.

Формирование оптимальных маршрутов региональных пассажирских авиаперевозок

В работе рассматривается задача минимизации затрат на воздушные пассажирские перевозки в региональной транспортной сети. Для указанной задачи предложена формализация в виде 4-индексной задачи смешанного целочисленного линейного программирования. Данная формализация позволяет учесть все особенности моделируемой системы, в том числе: различные значения скоростей и вместимостей транспортных средств, возможность дозаправки во всех узлах сети, запрет на использование определенных воздушных путей для заданных типов летательных аппаратов, возможность многократного посещения одного и того же узла, наличие допустимых временных интервалов для взлета и посадки и т.д.

Ключевые слова: маршрутизация транспортных средств, многократное использование транспортных средств, смешанное целочисленное линейное программирование

Ilya Petrovich Bogdanov

Optimal routing of regional passenger air transportation

The paper considers the problem of the cost minimization of regional passenger transportation, performed by air vehicles. The regarded problem is formalized as a 4-index mixed-integer linear problem. Presented formalization takes into account all peculiarities of the investigated system, including heterogeneous set of aircrafts, access to refueling facilities in each node of the transport network, restrictions on the set of available airways, feasibility of multiple visits to the same node, time windows for takeoffs and landings, etc.

Key words: vehicle routing problem, multiple trips, mixed-integer linear programming

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-00-00012 (18-00-00011) КОМФИ.

Введение

В связи со значительным увеличением пространственной мобильности населения (обусловленной трудовой миграцией, туристическими поездками и т.д.) возрастает необходимость в разработке новых и совершенствовании существующих математических моделей процесса перевозки пассажиров, а также алгоритмов оптимизации расписаний движения задействованных транспортных средств.

Для частного случая пассажирских перевозок, не предусматривающих периодического движения по фиксированным маршрутам с заданным набором остановок, могут быть применены обобщения и модификации подходов, разработанных для класса задач оптимальной маршрутизации транспортных средств [1]. В наиболее общей постановке данная задача подразумевает построение маршрутов движения совокупности транспортных средств, осуществляющих доставку хранящихся на складах товаров заданному множеству потребителей. При определении наилучшего набора маршрутов могут учитывать суммарный пробег транспортных средств (либо суммарное время в пути), время посещения потребителей, количество потребителей, оставшихся необслуженными, и др.

В настоящем исследовании рассмотрена задача формирования графиков движения летательных аппаратов (далее – ЛА), выполняющих региональные перевозки, при заданных предположениях относительно характеристик ЛА, доступности воздушных путей, пунктов базирования транспортных средств, возможности дозаправки и т.д. Для указанной задачи предложены формализации в виде многоиндексных задач бинарного линейного программирования (далее – БЛП) и смешанного целочисленного линейного программирования (далее – СЦЛП). Данные формализации схожи с описанными в литературе, но обладают рядом отличий, позволяющих учитывать все особенности моделируемого процесса транспортировки.

Задача маршрутизации региональных авиаперевозок

Рассматривается задача составления расписания пассажирских авиаперевозок между населенными пунктами региональной транспортной сети в течение заданного периода планирования. Транспортировка осуществляется совокупностью ЛА, в общем случае относящихся к различным типам. Для каждого типа заданы: количество доступных транспортных средств, вместимость, средняя скорость, стоимость потребляемого топлива, плата за аренду на весь период планирования, а также множество воздушных коридоров, которыми могут передвигаться ЛА указанного типа. Для каждой упорядоченной пары узлов транспортной сети, между которыми существует прямая авиасвязь, заданы объемы пассажирских перевозок.

Перед началом периода планирования для каждого транспортного средства определяется пункт базирования (соответствующий одному из узлов транспортной сети). В начальный момент времени каждый задействованный в транспортировке ЛА находится в назначенном пункте базирования, откуда он совершает свой первый вылет. К моменту окончания периода планирования каждый ЛА должен вернуться в назначенный пункт базирования. Перед первым вылетом, а также после каждого последующего перелета ЛА должен затратить определенный временной интервал на подготовку к следующему полету – на высадку/посадку пассажиров, заправку воздушного судна топливом, необходимые проверки, техническое обслуживание и т.д. (в настоящем исследовании предполагаем, что продолжительность данного временного интервала зафиксирована для каждого типа ЛА). Пропускная способность узлов транспортной сети (количество прилетевших ЛА за весь период планирования) ограничено. Суммарное количество ЛА, которые могут базироваться в заданном узле транспортной сети, ограничено.

За период планирования необходимо перевезти всех пассажиров (в настоящем исследовании предполагаем, что количество и параметры имеющихся ЛА позволяют это сделать).

Требуется минимизировать суммарные затраты на перелеты, складывающиеся из стоимости аренды задействованных ЛА и стоимости израсходованного топлива.

Обзор литературы

В научно-технической литературе рассматривается значительное количество различных видов задач маршрутизации. Задачи классифицируют в зависимости от [2]:

- характеристик совокупности транспортных средств (идентичные либо относятся к разным типам);
- количества пунктов базирования транспортных средств и/или складов (единственный либо несколько);
- количества рейсов, совершаемых каждым транспортным средством за период планирования (единственный либо несколько);
- схемы осуществления доставки (снабжение потребителей продукцией с центрального склада либо выполнение перевозок между заданными парами точек отправки и доставки);
- учета временных интервалов доступности потребителей и т.д.;

Принимая во внимание специфику исследуемой проблематики, существенный интерес представляют результаты, полученные для класса задач маршрутизации, допускающих многократное использование транспортных средств в течение периода планирования. Наиболее часто (см. обширный обзор, приведенный в [3]) рассматривается постановка, подразумевающая снабжение заданного набора потребителей однородной продукцией с единственного склада, осуществляемое совокупностью транспортных средств, каждое из которых может совершать несколько рейсов по маршрутам, начинающимся и заканчивающимся в месторасположении склада. Суммарный спрос потребителей, включенных в проезжаемый транспортным средством маршрут, не должен превышать грузоподъемности данного транспортного средства. Каждого потребителя должны посетить ровно один раз (либо не более одного раза) за весь период планирования (примеры исключений из указанных правил, допускающие либо наличие нескольких складов, либо наличие товаров различных типов, либо возможность неоднократного посещения потребителя, можно найти в [4-7]). Граф транспортной сети считается полным (при этом могут быть заданы ограничения на посещения определенных потребителей конкретными типами транспортных средств). Дополнительно могут быть заданы ограничения на временные интервалы доступности потребителей, а также на суммарную продолжительность всех рейсов, назначенных одному транспортному средству.

Учитывая NP-трудность рассматриваемой задачи [1,8], значительное внимание исследователей уделяется эвристическим методам вычисления приближенного решения, позволяющим получать приемлемые результаты для реальных практических задач. Данные подходы, как правило, основаны на комбинированном применении [1,9]:

- эвристик формирования маршрутов движения отдельных транспортных средств;
- методов построения маршрутов с улучшенными характеристиками;
- алгоритмов назначения транспортных средств на маршруты.

В качестве эвристик формирования маршрутов движения отдельных транспортных средств, в частности, рассматривают следующие алгоритмы (а также их модификации):

- методы, основанные на алгоритме Кларка-Райта [10], идея которого заключается в формировании нового маршрута с меньшим суммарным пробегом за счет объединения пар уже построенных маршрутов путем добавления переезда между последним потребителем одного маршрута и первым потребителем второго маршрута [4,11-13];
- методы, подразумевающие формирование маршрутов объезда потребителей в соответствии с разбиением на секторы воображаемого круга с центром в точке, соответствующей складу, и содержащего все точки, соответствующие потребителям [12,14,15];
- методы, основанные на формировании маршрутов путем вставки в уже построенные маршруты потребителей, при добавлении которых достигается минимальное увеличение длины маршрута (либо продолжительности поездки) [5,16-19];
- алгоритм ближайшего соседа [4,16,17].

Для построения маршрутов с улучшенными характеристиками в том числе используют следующие подходы (а также их модификации):

- поиск с запретами [4,15-17,20];
- алгоритм имитации отжига [4,19];
- алгоритмы 2-opt и 3-opt [12,13];
- адаптивный поиск с большими окрестностями [18];
- генетические алгоритмы [14,21];
- муравьиный алгоритм [22].

Для назначения транспортных средств на маршруты, в частности, применяют модификации алгоритмов упаковки контейнеров [23] – например, см. [4,5,11,12,14,24].

Также развиваются подходы, явно использующие формализацию задач рассматриваемого класса в виде задач целочисленного линейного программирования либо задач СЦЛП [3]. В случае небольшой размерности точное решение данных задач может быть найдено, например, с помощью методов ветвей и границ, отсекающих плоскостей, генерации столбцов и т.д. [1].

В [25] рассматривается задача минимизации издержек при объезде заданного множества потребителей совокупностью идентичных транспортных средств. Предложено две бинарных линейных формализации поставленной задачи – в одной из них переменные соответствуют индикаторам назначения конкретного транспортного средства на конкретный допустимый маршрут, а в другой – индикаторам назначения одному из транспортных средств конкретного допустимого расписания работы (т.е. совокупности маршрутов). Для данных задач авторами построены модифицированные непрерывные линейные релаксации, из решения которых определяются редуцированные множества маршрутов и расписаний, содержащие решения исходных задач. Применяя комплекс CPLEX (https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer) для поиска оптимума на редуцированных множествах, авторы вычислили решения для примеров, содержащих до 120 потребителей.

В [26] схожая задача формализована как задача СЦЛП, содержащая два блока бинарных переменных. Первый блок соответствует индикаторам включения переезда между двумя конкретными потребителями (либо между конкретным потребителем и складом) в один из маршрутов. Второй блок соответствует индикаторам ситуации, когда одно из транспортных средств, заканчивая очередной маршрут, приезжает к одному заданному потребителю, и, начиная следующий маршрут, приезжает к другому заданному потребителю. Для решения построенной задачи использован метод ветвей и отсечений. Применяя оптимизаторы CPLEX и SCIP (https://scip.zib.de/), автору удалось за разумное время построить решение для примеров, содержащих до 120 потребителей.

В [27] рассматривается задача минимизации суммарного времени объезда животноводческих ферм совокупностью транспортных средств различных типов (совершающих по несколько рейсов в день). В целях описания пространства задачи для каждой упорядоченной пары ферм, каждого транспортного средства, каждого рейса и каждого дня были введены бинарные переменные, являющиеся индикаторами посещения одной (конкретной) фермы после другой (конкретной) фермы заданным транспортным средством при выполнении заданного рейса в заданный день, что позволило записать задачу в виде задачи СЦЛП. Дополнительные блоки бинарных переменных потребовались для формализации ограничений, обусловленных связью процессов доставки с другими производственными процессами (для каждого временного интервала, на которые разбиваются дни), а также для линеаризации данных ограничений. С помощью комплекса CPLEX авторам удалось найти точное решение построенной задачи за приемлемое время для случая 7 ферм, 2 транспортных средств, ограничения на 3 рейса в день и двухдневного периода планирования (каждый день разбивался на 4 временных интервала).

В [28] исследуется задача оптимизации доставки однородной продукции (хранящейся на единственном складе), осуществляемой набором идентичных транспортных средств при наличии временных интервалов доступности потребителей. Доставляя товар потребителю, оператор перевозок получает заданный доход (при этом предполагается, что некоторые потребители могут остаться необслуженными). Требуется максимизировать общий полученный доход за вычетом суммарной пройденной дистанции, умноженной на весовой коэффициент. Указанная задача формализована как задача БЛП с переменными, соответствующим индикаторам назначения одному из транспортных средств конкретного допустимого расписания работы. Для решения поставленной задачи авторами был применен метод ветвей и границ с генерацией столбцов, позволивший найти оптимум для тестовых примеров, содержащих до 50 потребителей. Альтернативный подход решения данной задачи, представленный в [29], основан на дискретизации времени. В указанной работе рассматриваемая задача приведена к виду задачи о поиске целочисленного потока минимальной стоимости в сети, вершины которой соответствуют моментам времени, а дуги – ожиданиям транспортных средств на складе либо допустимым маршрутам (вершины, инцидентные данным дугам, являются моментами начала и завершения рейсов по допустимым маршрутам). Основываясь на построенной формализации, авторы разработали точный алгоритм, позволивший продемонстрировать лучшие результаты по сравнению с [28] для аналогичного набора тестовых данных. При проведении численных экспериментов и в [28] и в [29] был использован оптимизатор CPLEX. Для схожей задачи в [30] представлена целочисленная линейная модель с переменными, соответствующими индикаторам назначения одного из транспортных средств на конкретный допустимый маршрут. Для формализации запрета одновременного выполнения рейсов по двум и более маршрутам одним и тем же транспортным средством вводится дискретизация времени. Решение сформированной задачи целочисленного линейного программирования строится с помощью предложенного авторами варианта метода ветвей и границ с генерацией столбцов. Применяя при проведении расчетов оптимизатор GLPK (https://www.gnu.org/software/glpk/), авторам удалось продемонстрировать лучшие результаты для тестовых примеров, аналогичных рассмотренным в [28] и [29].

Работа [31] посвящена задаче минимизации издержек при объезде заданного множества потребителей совокупностью транспортных средств, относящихся к различным типам. Данная задача формализована как задача БЛП, переменными которой являются индикаторы назначения конкретному транспортному средству конкретного допустимого расписания работы. Для решения построенной задачи авторами предложен метод ветвей и границ с генерацией столбцов (подзадачи, возникающие при применении алгоритма генерации столбцов, решаются с помощью динамического программирования).

В [6] рассмотрена задача минимизации суммарных затрат на доставку заказов, состоящих из товаров различных типов, с учетом значительного количества дополнительных ограничений, возникающих на практике. В частности, принимаются во внимание: наличие нескольких складов, возможность посещения одного потребителя несколькими транспортными средствами, недоступность определенных товаров на некоторых складах, недопустимость перевозки товаров определенных типов в некоторых типах транспортных средств, несовместимость между товарами различных типов и т.д. Задача формализована как задача БЛП с переменными, соответствующими индикаторам назначения одному из транспортных средств заданного типа конкретного допустимого расписания работы. Для решения поставленной задачи предложен подход, основанный на применении метода генерации столбцов (возникающие подзадачи решаются с помощью динамического программирования).

Пример задачи формирования оптимальных расписаний перевозок между заданными парами пунктов отправки и доставки представлен в [7]. Имеется несколько складов с древесиной, несколько промышленных площадок и набор идентичных транспортных средств, приписанных к нескольким пунктам базирования. Задан набор заказов на доставку древесины с конкретного склада на конкретную промышленную площадку (предполагается, что объемы заказов одинаковы и равны вместимости одного транспортного средства). Предполагается, что транспортные средства могут многократно посещать склады и промышленные площадки. Требуется составить расписание движения транспортных средств, при котором будут выполнены все заказы, а также будут минимизированы суммарные затраты на порожний пробег транспортных средств. Указанная задача формализована в виде задачи СЦЛП с бинарными переменными, являющимися индикаторами выполнения одного конкретного заказа на перевозку (либо поездки в пункт базирования) после другого конкретного заказа (либо поездки из пункта базирования) конкретным транспортным средством. Авторами предложен метод, позволяющий провести редукцию поставленной задачи. В случае относительно небольшой размерности исходной задачи редуцированная задача может быть решена, в частности, с помощью комплекса Xpress (https://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization).

Математическая постановка задачи

Ряд особенностей задачи, рассматриваемой в настоящем исследовании, существенно затрудняет ее сведение к одной из известных постановок. В частности, так как в общем случае:

- узлы транспортной сети одновременно выступают и в качестве пунктов отправки и в качестве пунктов доставки;
- существует возможность дозаправки ЛА во всех узлах сети;
- потребности в транспортировке превосходят вместимость ЛА;

то, в отличие от большинства описанных в предыдущем разделе моделей, траектории движения ЛА между вылетом из пункта базирования и возвращением в пункт базирования могут содержать циклы. Рассмотрим следующий иллюстрирующий пример (**пример 1**). Исследуются авиаперевозки в 3-узловой транспортной сети (обозначим узлы через «A», «B» и «C»). Предположим, что имеется единственный ЛА (вместимостью 100 человек), базирующийся в узле «A». С помощью данного ЛА необходимо осуществить транспортировку 200 пассажиров из узла «B» в узел «C» и 150 пассажиров из узла «C» в узел «B» (при этом расстояние от «A» и «B» равно 100 км, от «A» до «C» – 150 км и от «B» до «C» – 50 км). Последовательность перелетов, обеспечивающая перевозку всех пассажиров с минимальными затратами на расход топлива (и которую было бы целесообразно реализовать на практике), схематично представлена на рис. 1.

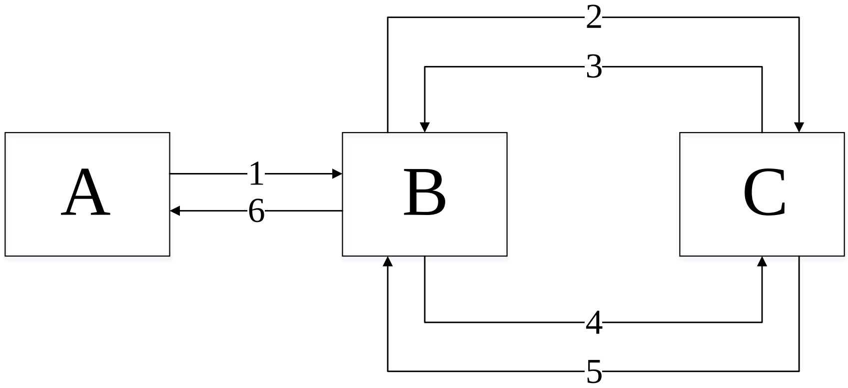

Рис. 1. Последовательность перелетов для примера 1

При этом из-за различной вместимости ЛА в общем случае не представляется возможным априорно разбить все потребности в транспортировке на отдельные заказы (как это сделано, например, в [7]), либо априорно осуществить декомпозицию узлов на несколько отдельных новых узлов с редуцированными потребностями в перевозках (и таким образом избежать появления циклов).

Также необходимо учитывать наличие нескольких пунктов базирования (например, в отличие от [26,27]) по которым в ходе построения решения нужно распределить ЛА.

Дополнительным отличием является запрет определенным типам ЛА передвигаться по заданным воздушным коридорам. При отсутствии прямой авиасвязи между пунктом базирования и пунктом отправки ЛА придется совершить промежуточные перелеты. Проиллюстрируем указанную ситуацию следующим примером (**пример 2**). Рассматривается 4-узловая транспортная сеть (обозначим узлы через «A», «B», «C» и «D»). Предположим, что имеется единственный ЛА, базирующийся в узле «A». С помощью указанного ЛА необходимо осуществить транспортировку пассажиров из узла «C» в узел «D», при этом полеты возможны только между узлами «A» и «B», «B» и «C», а также «C» и «D». Единственная возможная траектория, по которой должен передвигаться ЛА, выполняющий данную перевозку (и возвращающийся в пункт базирования), схематично представлена на рис. 2.

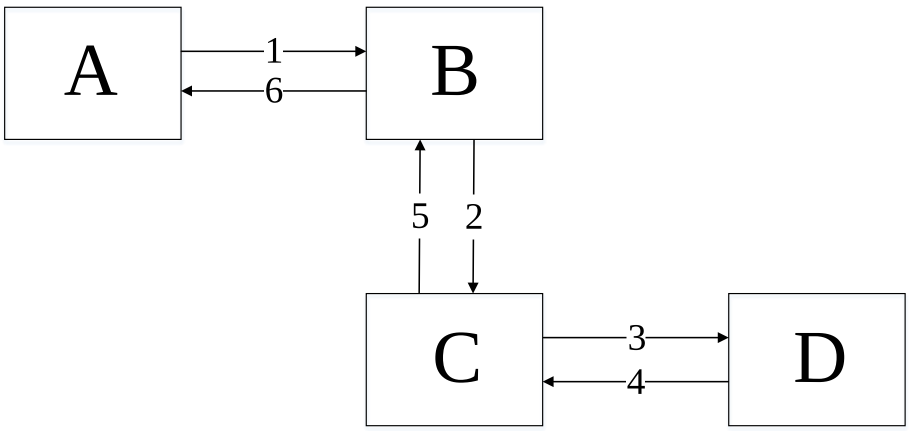

Рис. 2. Траектория движения ЛА для примера 2

Вследствие этого представляется целесообразным построить альтернативную формализацию. Задавая для каждого ЛА максимально допустимое количество перелетов, которые он может совершить в течение периода планирования, а также используя в качестве переменных индикаторы выполнения конкретным ЛА конкретного перелета между двумя конкретными узлами, можно записать рассматриваемую задачу в виде 4-индексной задачи БЛП.

Введем следующие обозначения:

N – число узлов транспортной сети;

$d_{i,j}$ $(i, j = 1,\ldots,N)$ – расстояние между i-м и j-м узлами транспортной сети;

$a_{i,j}$ $(i, j = 1,\ldots,N)$ – потребность в транспортировке из i-го узла транспортной сети в j-й узел (за весь период планирования);

$S_i^{\max}$ $(i = 1,\ldots,N)$ – максимальное количество ЛА, которое может принять i-й узел транспортной сети в течение всего периода планирования;

$S_i^{\text{base,max}}$ $(i = 1,\ldots,N)$ – максимальное количество ЛА, которые могут базироваться в i-м узле транспортной сети;

K – количество ЛА;

v_k $(k = 1,\ldots,K)$ – средняя скорость k-го ЛА;

b_k $(k = 1,\ldots,K)$ – вместимость k-го ЛА;

c_k $(k = 1,\ldots,K)$ – удельные затраты k-го ЛА на перелеты (стоимость топлива, израсходованного за единицу времени);

w_k $(k = 1,\ldots,K)$ – затраты на аренду k-го ЛА (на весь период планирования);

L_k $(k = 1,\ldots,K)$ – максимально возможное количество перелетов, которое может выполнить k-й ЛА в течение всего периода планирования (данная верхняя оценка может быть задана на основании технических требований либо статистической информации);

$l(k)$ $(l(k) = 1,\ldots,L_k)$ – номер перелета, выполняемого k-м ЛА;

$\mathbf{H}^k$ $(k = 1,\ldots,K)$ – набор из k матриц размера $n \times n$, элементы которых $h_{i,j}^k$ $(i, j = 1,\ldots,N)$ равны 1, если k-й ЛА может совершить перелет из i-го узла транспортной сети в j-й узел, и 0 – иначе (при этом, $h_{i,i}^k = 0$ $\forall i = 1,\ldots,N,\ k = 1,\ldots,K$);

T – продолжительность периода планирования;

T_{prep}^k $(k = 1,\ldots,K)$ – время, которое требуется k-му ЛА на осуществление необходимых мероприятий после выполнения каждого перелета (включая последний), а также для подготовки к первому вылету;

$T_{i,j}^k$ $(k = 1,\ldots,K,\ i, j = 1,\ldots,N)$ – среднее время перелета k-го ЛА из i-го узла транспортной сети в j-й узел (данная величина рассчитывается через расстояния и средние скорости: $T_{i,j}^k = d_{i,j} / v_k$);

$x_{i,j,l(k)}^k$ $(k = 1,\ldots,K,\ i, j = 1,\ldots,N,\ l(k) = 1,\ldots,L_k)$ – бинарная переменная, являющаяся индикатором выполнения k-м ЛА перелета с номером $l(k)$ из i-го узла транспортной сети в j-й узел.

Воспользовавшись введенными обозначениями, запишем ограничения рассматриваемой задачи в виде системы линейных уравнений и неравенств.

Бинарные переменные, соответствующие перелету из узла транспортной сети в тот же самый узел, тождественно равны нулю – см. уравнения (1):

$$\forall i=1,\ldots,N,\ k=1,\ldots,K,\ l(k)=1,\ldots,L_k:\ \ x_{i,i,l(k)}^{k}=0. \tag{1}$$

ЛА не может выполнять два перелета одновременно – см. неравенства (2):

$$\forall k=1,\ldots,K,\ l(k)=1,\ldots,L_k:\ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_{i,j,l(k)}^{k}\le 1. \tag{2}$$

Цепочка выполняемых каждым ЛА перелетов должна начинаться с перелета № 1 и не должна иметь разрывов – см. неравенства (3) $\forall k=1,\ldots,K$, $i=1,\ldots,N$, $l(k)=1,\ldots,L_k-1$:

$$\sum_{j=1}^{N}x_{i,j,l(k)+1}^{k}\le\sum_{j=1}^{N}x_{j,i,l(k)}^{k}. \tag{3}$$

Совершив очередной перелет, ЛА может воспользоваться для следующего вылета одним из доступных воздушных коридоров либо остаться в пункте базирования – см. неравенства (4) $\forall k=1,\ldots,K$, $i=1,\ldots,N$, $l(k)=1,\ldots,L_k-1$:

$$\sum_{j=1}^{N}x_{j,i,l(k)}^{k}\le\left(1-\sum_{j=1}^{N}x_{i,j,l(k)+1}^{k}\right)+\sum_{j=1}^{N}\left(x_{i,j,l(k)+1}^{k}\cdot h_{i,j}^{k}\right). \tag{4}$$

Используя тождество (5):

$$\left(1-\sum_{j=1}^{N}x_{i,j,l(k)+1}^{k}\right)+\sum_{j=1}^{N}\left(x_{i,j,l(k)+1}^{k}\cdot h_{i,j}^{k}\right)=1-\sum_{j=1}^{N}\left(x_{i,j,l(k)+1}^{k}\cdot\left(1-h_{i,j}^{k}\right)\right), \tag{5}$$

можем записать ограничение (4) в форме (6):

$$\sum_{j=1}^{N}x_{j,i,l(k)}^{k}\le 1-\sum_{j=1}^{N}\left(x_{i,j,l(k)+1}^{k}\cdot\left(1-h_{i,j}^{k}\right)\right). \tag{6}$$

Ограничения на пропускную способность узлов транспортной сети имеют вид, задаваемый (7):

$$\forall j=1,\ldots,N: \sum_{k=1}^{K}\sum_{l(k)=1}^{L_k}\sum_{i=1}^{N} x_{i,j,l(k)}^{k} \le S_j^{\max}. \quad (7)$$

Ограничения на количество ЛА, которые могут быть приписаны к пунктам базирования, имеют вид, задаваемый неравенствами (8):

$$\forall i=1,\ldots,N: \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{N} x_{i,j,1}^{k} \le S_i^{\text{base,max}}. \quad (8)$$

Суммарное время пребывания ЛА на маршруте ограничено продолжительностью периода планирования – см. неравенства (9) $\forall k=1,\ldots,K$:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(x_{i,j,1}^{k}\cdot T_{\text{prep}}^{k}\right)+\sum_{l(k)=1}^{L_k}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(x_{i,j,l(k)}^{k}\cdot\left(T_{i,j}^{k}+T_{\text{prep}}^{k}\right)\right)\le T. \quad (9)$$

В конце периода планирования каждый ЛА должен оказаться в пункте базирования – см. равенства (10):

$$\forall k=1,\ldots,K,\ i=1,\ldots,N: \sum_{l(k)=1}^{L_k}\sum_{j=1}^{N} x_{i,j,l(k)}^{k}=\sum_{l(k)=1}^{L_k}\sum_{j=1}^{N} x_{j,i,l(k)}^{k}. \quad (10)$$

За период планирования необходимо перевезти всех пассажиров – см. неравенства (11):

$$\forall i,j=1,\ldots,N: a_{ij}-\sum_{k=1}^{K}\sum_{l(k)=1}^{L_k}\left(x_{i,j,l(k)}^{k}\cdot b_k\right)\le 0. \quad (11)$$

Целевая функция соответствует суммарным затратам на аренду ЛА и потребленное топливо – см. выражение (12):

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(w_k\cdot x_{i,j,1}^{k}\right)+\sum_{k=1}^{K}\sum_{l(k)=1}^{L_k}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(c_k\cdot x_{i,j,l(k)}^{k}\cdot T_{i,j}^{k}\right). \quad (12)$$

Таким образом, рассматриваемая в настоящем исследовании задача может быть формализована как задача минимизации функции (12) по бинарным переменным $x_{i,j,l(k)}^{k}$ ($k=1,\ldots K,\ i,j=1,\ldots,N,\ l(k)=1,\ldots,L_k$) при ограничениях (1)-(3), (6)-(11).

Учет временных интервалов доступности узлов транспортной сети

Одно из наиболее часто встречающихся на практике дополнительных ограничений связано с тем, что взлет и посадка ЛА в конкретном узле транспортной сети возможны только в течение заданного временного интервала, например, вследствие погодных условий. В целях формализации указанного ограничения введем набор дополнительных непрерывных переменных $t_{l(k)}^{k} \in \left[0, T\right]$ ($k = 1, \ldots, K$, $l\left(k\right) = 1, \ldots, L_k$), соответствующих времени начала выполнения k-м ЛА перелета с номером $l\left(k\right)$, и заменим условие (9) на совокупность следующих уравнений и неравенств, где через $T_i^{\min}$ и $T_i^{\max}$, $i = 1, \ldots, N$, обозначены пределы временного диапазона доступности i-го узла (при этом $0 \le T_i^{\min} \le T_i^{\max} \le T$).

Разность между временами начала выполнения двух последовательных перелетов складывается из продолжительности перелета, времени высадки пассажиров и подготовки к следующему вылету, а также, возможно, времени ожидания – см. условие (13) $\forall k = 1, \ldots, K,\ l\left(k\right) = 1, \ldots, L_k - 1$:

$$t_{l(k)+1}^{k} - t_{l(k)}^{k} \ge \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(x_{i,j,l(k)}^{k} \cdot \left(T_{i,j}^{k} + T_{\mathrm{prep}}^{k} \right) \right). \tag{13}$$

Если ЛА задействован в перевозках, он должен быть подготовлен к первому вылету – см. ограничение (14):

$$\forall k = 1, \ldots, K: \quad t_1^k \ge \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(x_{i,j,1}^{k} \cdot \left(T_i^{\min} + T_{\mathrm{prep}}^{k} \right) \right). \tag{14}$$

ЛА могут совершить посадку и вылет только в течение интервала доступности узла – см. неравенства (15) $\forall k = 1, \ldots, K$, $j = 1, \ldots, N$, $l\left(k\right) = 1, \ldots, L_k$:

$$\begin{cases} t_{l(k)}^{k} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} x_{i,j,l(k)}^{k} \ge \sum\limits_{i=1}^{N} \left(x_{i,j,l(k)}^{k} \cdot \left(T_j^{\min} - T_{i,j}^{k} \right) \right), \\ t_{l(k)}^{k} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} x_{i,j,l(k)}^{k} \le \sum\limits_{i=1}^{N} \left(x_{i,j,l(k)}^{k} \cdot \left(T_j^{\max} - T_{i,j}^{k} - T_{\mathrm{prep}}^{k} \right) \right), \\ t_{l(k)}^{k} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} x_{j,i,l(k)}^{k} \le T_j^{\max} \cdot \sum\limits_{i=1}^{N} x_{j,i,l(k)}^{k}. \end{cases} \tag{15}$$

Для линеаризации условий (15), содержащих произведения бинарных и непрерывных переменных, введем блок дополнительных непрерывных переменных $p_{i,j,l(k)}^k = t_{l(k)}^k \cdot x_{i,j,l(k)}^k$ $(k=1,\ldots K,\ i,j=1,\ldots,N,\ l(k)=1,\ldots,L_k)$ и дополним систему ограничений неравенствами (16) $\forall k=1,\ldots,K$, $i,j=1,\ldots,N$, $l(k)=1,\ldots,L_k$:

$$\begin{cases} p_{i,j,l(k)}^k \le T \cdot x_{i,j,l(k)}^k, \\ p_{i,j,l(k)}^k \le t_{l(k)}^k, \\ p_{i,j,l(k)}^k \ge t_{l(k)}^k - T \cdot \left(1 - x_{i,j,l(k)}^k\right), \\ p_{i,j,l(k)}^k \ge 0. \end{cases} \tag{16}$$

С учетом ограничений (16) условия (15) могут быть записаны в форме (17) $\forall k=1,\ldots,K$, $j=1,\ldots,N$, $l(k)=1,\ldots,L_k$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} p_{i,j,l(k)}^k \ge \sum_{i=1}^{N}\left(x_{i,j,l(k)}^k \cdot \left(T_j^{\min} - T_{i,j}^k\right)\right), \\ \sum_{i=1}^{N} p_{i,j,l(k)}^k \le \sum_{i=1}^{N}\left(x_{i,j,l(k)}^k \cdot \left(T_j^{\max} - T_{i,j}^k - T_{\text{prep}}^k\right)\right), \\ \sum_{i=1}^{N} p_{j,i,l(k)}^k \le T_j^{\max} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_{j,i,l(k)}^k. \end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, при необходимости учета временных интервалов доступности узлов транспортной сети рассматриваемая в настоящем исследовании задача может быть формализована как задача минимизации функции (12) по бинарным переменным $x_{i,j,l(k)}^k$ и непрерывным переменным $t_{l(k)}^k \in [0,T]$ и $p_{i,j,l(k)}^k$ $(k=1,\ldots K,\ i,j=1,\ldots,N,\ l(k)=1,\ldots,L_k)$ при условиях (1)-(3), (6)-(8), (10), (11), (13), (14), (16), (17).

Обсуждение предложенной формализации

Построенная формализация учитывает все особенности моделируемой системы, включая возможность многократного посещения ЛА узлов транспортной сети, а также запрет на движение по определенным воздушным коридорам. Математически данная формализация относится к классу задач БЛП (либо к классу задач СЦЛП при учете ограничений на допустимое время посадки/вылета), размерность которой определяется числом узлов транспортной сети, количеством ЛА, а также максимально допустимым числом перелетов. В случае большой размерности (характерной для реальных транспортных систем) поиск точного решения поставленной задачи потребует времени, неприемлемого с практической точки зрения, таким образом, перспективным направлением исследований представляется разработка эвристических алгоритмов построения допустимых решений, оценивающих точное решение снизу. Верификацию и калибровку разрабатываемых алгоритмов аппроксимации целесообразно проводить на тестовых задачах относительно небольшой размерности, точное решение которых может быть рассчитано с помощью представленных в настоящий момент на рынке коммерческих и некоммерческих оптимизационных комплексов (CPLEX, SCIP и др.), реализующих подходы, основанные на комбинированном применении методов ветвей и границ, отсекающих плоскостей, генерации столбцов и т.д.

Другим актуальным направлением дальнейших исследований представляется модификация постановки с целью формализации дополнительных аспектов, принимаемых во внимание при составлении расписаний реальных авиаперевозок, включающих в себя: ограниченную пропускную способность взлетно-посадочных полос, зависимость скорости движения (и расхода топлива) ЛА от загрузки, ограничения на допустимую продолжительность работы пилотов и т.д. В качестве еще одного примера можно привести ситуацию, когда совокупной вместимости доступных ЛА недостаточно для того, чтобы организовать транспортировку всех пассажиров (т.е. допустимое множество построенной в настоящем исследовании задачи пусто). В данном случае представляется целесообразным убрать неравенства (11) из системы ограничений задачи, ввести денежный штраф за каждого пассажира, которого не удалось перевезти, и добавить в целевую функцию (12) слагаемое $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\max\left\{0, a_{ij} - \sum_{k=1}^{K}\sum_{l(k)=1}^{L_k}\left(x_{i,j,l(k)}^{k}\cdot b_k\right)\right\}$, умноженное на введенный штраф. Решение модифицированной задачи потребует применения методов кусочно-линейного программирования [32].

Заключение

В настоящем исследовании рассмотрена задача формирования расписания региональных пассажирских авиаперевозок, обеспечивающего минимальные затраты на аренду транспортных средств и израсходованное топливо. В зависимости от предположений относительно временных интервалов доступности узлов транспортной сети предложено две формализации – в виде задачи БЛП и в виде задачи СЦЛП. Приведенные формализации позволяют одновременно учитывать наличие совокупности ЛА с различными характеристиками, произвольное соотношение между вместимостями транспортных средств и объемами отдельных корреспонденций, возможность многократного посещения одного и того же узла, необходимость распределения ЛА по пунктам базирования, а также запрет на полеты по заданным воздушным коридорам.

Определены основные направления дальнейших исследований, включающие как разработку методов оценки точного решения построенной оптимизационной задачи, так и модификацию формализации с целью учета дополнительных ограничений, возникающих при моделировании процессов в реальных транспортных системах.

Библиографический список

1. Toth P., Vigo D. The vehicle routing problem. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Philadelphia, 2002.

2. Braekers K., Ramaekers K., Van Nieuwenhuyse I. The vehicle routing problem: State of the art classification and review // Computers & Industrial Engineering. 2016. Vol. 99. P. 300-313.

3. Cattaruzza D., Absi N., Feillet D. Vehicle routing problems with multiple trips // 4OR quarterly journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. 2016. Vol. 14. Issue 3. P. 223-259.

4. Lin C.K.Y., Kwok R.C.W. Multi-objective metaheuristics for a location-routing problem with multiple use of vehicles on real data and simulated data // European Journal of Operational Research. 2006. Vol. 175. Issue 3. P. 1833-1849.

5. Battarra M., Monaci M., Vigo D. An adaptive guidance approach for the heuristic solution of a minimum multiple trip vehicle routing problem // Computers & Operations Research. 2009. Vol. 36. Issue 11. P. 3041-3050.

6. Ceselli A., Righini G., Salani M. A column generation algorithm for a rich vehicle-routing problem // Transportation Science. 2009. Vol. 43. No. 1. P. 56-69.

7. Oberscheider M., Zazgornik J., Gronalt M., Hirsch P. An exact approach to minimize the greenhouse gas emissions in timber transport // Journal of Applied Operational Research. 2015. Vol. 7. No. 2. P. 43-59.

8. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

9. Prins C. Efficient heuristics for the heterogeneous fleet multitrip VRP with application to a large-scale real case // Journal of Mathematical Modelling and Algorithms. 2002. Vol. 1. Issue 2. P. 135-150.

10. Clarke G., Wright J.W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points // Operations Research. 1964. Vol. 12. No. 4. P. 568-581.

11. Fleischmann B. The vehicle routing problem with multiple use of the vehicles. Working paper, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Universität Hamburg, 1990.

12. Petch R.J., Salhi S. A multi-phase constructive heuristic for the vehicle routing problem with multiple trips // Discrete Applied Mathematics. 2003. Vol. 133. Issue 1-3. P. 69-92.

13. Caceres-Cruz J., Grasas A., Ramalhinho H., Juan A.A. A savings-based randomized heuristic for the heterogeneous fixed fleet vehicle routing problem with multi-trips // Journal of Applied Operational Research. 2014. Vol. 6. No. 2. P. 69-81.

14. Salhi S., Petch R.J. A GA based heuristic for the vehicle routing problem with multiple trips // Journal of Mathematical Modelling and Algorithms in Operations Research. 2007. Vol. 6. Issue 4. P. 591-613.

15. Olivera A., Viera O. Adaptive memory programming for the vehicle routing problem with multiple trips // Computers & Operations Research. 2007. Vol. 34. Issue 1. P. 28-47.

16. Brandão J., Mercer A. A tabu search algorithm for the multi-trip vehicle routing and scheduling problem // European Journal of Operational Research. 1997. Vol. 100. Issue 1. P. 180-191.

17. Brandão J.C.S., Mercer A. The multi-trip vehicle routing problem // Journal of the Operational Research Society. 1998. Vol. 49. Issue 8. P. 799-805.

18. Azi N., Gendreau M., Potvin J.-Y. An adaptive large neighborhood search for a vehicle routing problem with multiple routes // Computers & Operations Research. 2014. Vol. 41. P. 167-173.

19. Despaux F., Basterrech S. Multi-Trip Vehicle Routing Problem with Time Windows and Heterogeneous Fleet // International Journal of Computer Information Systems and Industrial Management Applications. 2016. Vol. 8. P. 355-363.

20. Alonso F., Alvarez M.J., Beasley J.E. A tabu search algorithm for the periodic vehicle routing problem with multiple vehicle trips and accessibility restrictions // Journal of the Operational Research Society. 2008. Vol. 59. Issue 7. P. 963-976.

21. Cattaruzza D., Absi N., Feillet D. The multi-trip vehicle routing problem with time windows and release dates // Transportation Science. 2016. Vol. 50. No. 2. P. 676-693.

22. Ye Z., Mohamadian H. Multiple ant colony optimization for single depot multiple trip vehicle routing problems // PSI 2014. Ershov Informatics Conference. EPiC Series in Computing. 2014. Vol. 23. P. 43-54.

23. Martello S., Toth P. Knapsack problems: algorithms and computer implementations. John Wiley & Sons, New York, 1990.

24. Taillard É.D., Laporte G., Gendreau M. Vehicle routeing with multiple use of vehicles // Journal of the Operational Research Society. 1996. Vol. 47. Issue 8. P. 1065-1070.

25. Mingozzi A., Roberti R., Toth P. An exact algorithm for the multi-trip vehicle routing problem // INFORMS Journal on Computing. 2013. Vol. 25. Issue 2. P. 193-207.

26. Karaoğlan I. A branch-and-cut algorithm for the vehicle routing problem with multiple use of vehicles // International Journal of Lean Thinking. 2015. Vol. 6. Issue 1. P. 21-46.

27. Gribkovskaia I., Gullberg B.O., Hovden K.J., Wallace S.W. Optimization model for a livestock collection problem // International Journal of Physical Distribution & Logistics Management. 2006. Vol. 36. Issue 2. P. 136-152.

28. Azi N., Gendreau M., Potvin J.-Y. An exact algorithm for a vehicle routing problem with time windows and multiple use of vehicles // European Journal of Operational Research. 2010. Vol. 202. Issue 3. P. 756-763.

29. Macedo R., Alves C., de Carvalho J.M.V., Clautiaux F., Hanafi S. Solving the vehicle routing problem with time windows and multiple routes exactly using a pseudo-polynomial model // European Journal of Operational Research. 2011. Vol. 214. Issue 3. P. 536-545.

30. Hernandez F., Feillet D., Giroudeau R., Naud O. A new exact algorithm to solve the multi-trip vehicle routing problem with time windows and limited duration // 4OR - A Quarterly Journal of Operations Research. 2014. Vol. 12. Issue 3. P. 235-259.

31. Seixas M.P., Mendes A.B. A branch-and-price approach for a multi-trip vehicle routing problem with time windows and driver work hours // Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa. Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. September 24-28, 2012, Rio de Janeiro, Brazil. P. 3469-3480.

32. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. М.: Советское радио, 1966.

Оглавление