



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 122 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Белов А.А., [Калиткин Н.Н.](#),
Топор О.И., Федоров И.А.**

Уточненные аппроксимации
сечений и скоростей
реакций, существенных для
управляемого
термоядерного синтеза

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Уточненные аппроксимации сечений и скоростей реакций, существенных для управляемого термоядерного синтеза / А.А.Белов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 122. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2019-122](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-122)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-122>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.А. Белов, Н.Н. Калиткин, О.И. Топор, И.А. Федоров

**Уточненные аппроксимации сечений
и скоростей реакций, существенных
для управляемого термоядерного
синтеза**

Москва-2019

А.А. Белов, Н.Н. Калиткин, О.И. Топор, И.А. Федоров

Уточненные аппроксимации сечений и скоростей реакций, существенных для управляемого термоядерного синтеза

Для расчета задач управляемого термоядерного синтеза традиционно используют четыре ядерные реакции. В работе проведено сравнение сечений большого числа термоядерных реакций между легчайшими элементами. Показано, что помимо традиционных четырех реакций ощутимый вклад может внести реакция $T + T \rightarrow 2n + {}^4_2\text{He}$. При низких температурах существенный вклад вносят реакции $D + p \rightarrow \gamma + {}^3_2\text{He}$ и $T + p \rightarrow \gamma + {}^4_2\text{He}$, остальными реакциями, по-видимому, можно пренебречь. Для указанных реакций проведена более тщательная обработка экспериментальных данных, и построены аппроксимации высокой точности. У новых реакций точность нахождения S-фактора составила 2-6%, а точность скорости реакции – 3-5%.

Ключевые слова: термоядерные реакции, сечения, скорости реакций, аппроксимации.

A.A. Belov, N.N. Kalitkin, O.I. Topor, I.A. Fedorov

Refined approximations of cross sections and reactivities of the reactions significant for controlled thermonuclear fusion

For simulations of controlled fusion problems, 4 major reactions are conventionally accounted for. In the present work, we compare cross sections of many thermonuclear reactions between lightest elements. We show that along with the traditional reactions, considerable contribution can be given by the reaction $T + T \rightarrow 2n + {}^4_2\text{He}$. At low temperatures, two reactions $D + p \rightarrow \gamma + {}^3_2\text{He}$ and $T + p \rightarrow \gamma + {}^4_2\text{He}$ also have considerable contribution, the rest reactions are likely to be neglected. For the outlined reactions, we perform a more thorough processing of experimental data and construct high-precision approximations. For the new reactions, the accuracy of the S-factor is 2 – 6% and that of the reactivities is 3 – 5%.

Key words: thermonuclear reactions, cross sections, reactivities, approximations.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-11-10001-П.

Введение

Начиная с 1950-ых годов в ядерной физике была поднята проблема управляемого термоядерного синтеза (УТС) – явления получения более тяжелых ядер из более легких с выделением энергии, которое при этом имеет управляемый характер. В связи с необходимостью решения данного вопроса были выдвинуты различные способы реализации данного процесса. На сегодняшний день существуют два основных метода осуществления УТС: квазистационарный и инерциальный (импульсный). Данные методы различаются как способом нагрева плазмы, в которой происходят термоядерные реакции, так и способом ее удержания в состоянии, необходимом для протекания этих реакций. Остановимся на втором способе реализации реакций термоядерного синтеза.

Формулировка инерциального подхода к решению задачи УТС основывается на утверждении, что с помощью концентрированного лазерного излучения (или высокоэнергичных пучков тяжелых ионов) возможно нагреть вещество до термоядерных температур, масштаб которых составляет порядка 0.1-1 кэВ. В связи с этим возникает необходимость решения задач не только получения такого рода излучений, но и расчета мишеней. Последние включают в себя математическое моделирование большого числа процессов, происходящих в плазме, которые рассматриваются при помощи различных физических моделей: высокотемпературной газодинамики, моделей, учитывающих поглощение лазерного излучения, различных неупругих процессов с участием частиц среды и других.

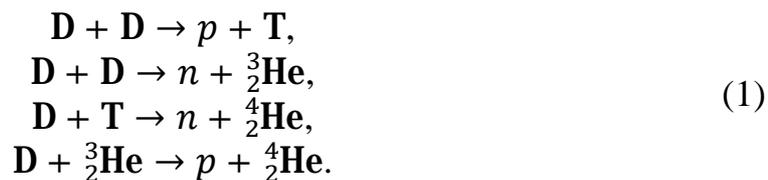
Мишени для управляемого термоядерного синтеза обычно состоят из сферической оболочки, наполненной чистым дейтерием. В теоретических расчетах рассматривают также наполнение смесью дейтерия и трития. Но в экспериментах тритий подмешивают редко, поскольку он исключительно опасен для человека. При нагреве и сжатии мишени в них начинают протекать термоядерные реакции как между исходными ядрами, так и между продуктами первичных реакций. Число в принципе возможных реакций измеряется десятками. Многочисленные эксперименты по измерению сечений таких реакций (это тысячи точек) содержатся в компендиумах [1], [2]. Обработке сечений и вычислению скоростей посвящено большое количество работ.

В 1989 году вышла классическая монография по скоростям термоядерных реакций [3]. В ней рассматривается 9 изотопов 4 легких химических элементов (H, D, T, ^3He , ^4He , ^6Li , ^7Li , ^9Be , ^{11}B) и 66 термоядерных реакций с их участием.

Зависимости логарифмов скоростей реакций от логарифмов температуры аппроксимируются кубическими сплайнами. Аналогично аппроксимируются зависимости логарифмов S-факторов от логарифмов энергии в системе центра масс; в логарифмических переменных зависимости становятся более простыми, что облегчает построение аппроксимаций.

Однако какую часть этих реакций необходимо учитывать при расчете термоядерных мишеней?

Уже в 1950-е годы были отобраны четыре важнейшие реакции:



В начале 2000-х годов содружники Физического института им. П.Н. Лебедева и Института математического моделирования им. М.В. Келдыша РАН В.Б. Розанов, Н.В. Змитренко, В.Я. Карпов проводили расчеты термоядерных мишеней с включением реакции $T + T \rightarrow 2n + {}^4_2\text{He}$, но пришли к выводу, что вклад этой реакции несущественен.

Для основных реакций (1) имеется большое количество экспериментальных данных, и в разные годы предлагался ряд хороших аппроксимаций. В российской литературе до сих пор часто используются ранние формулы Козлова [4]. Сравнение с современными данными показывает, что их погрешность не превышает 5-10% и лишь в самых худших условиях доходит до 20%. Сейчас разработаны более точные методы обработки экспериментов, которые при наличии большого числа экспериментальных точек позволяют восстановить сечения с точностью 4-5%, а скорости реакций – с точностью 1% при температурах $T > 1 - 2$ кэВ (при уменьшении температуры до $T \sim 10$ эВ погрешность может возрасти до 4%). Соответствующие обработки для реакций (1) содержатся в [5]–[7] и размещены в открытом доступе в базе данных ТЕФИС [8]. Остаются две проблемы:

- отобрать реакции, которые, помимо упомянутых четырех, целесообразно дополнительно учитывать при расчете термоядерных мишеней;

- провести для отобранных реакций обработку экспериментов и построить аппроксимации высокой точности.

Этим проблемам посвящена данная работа.

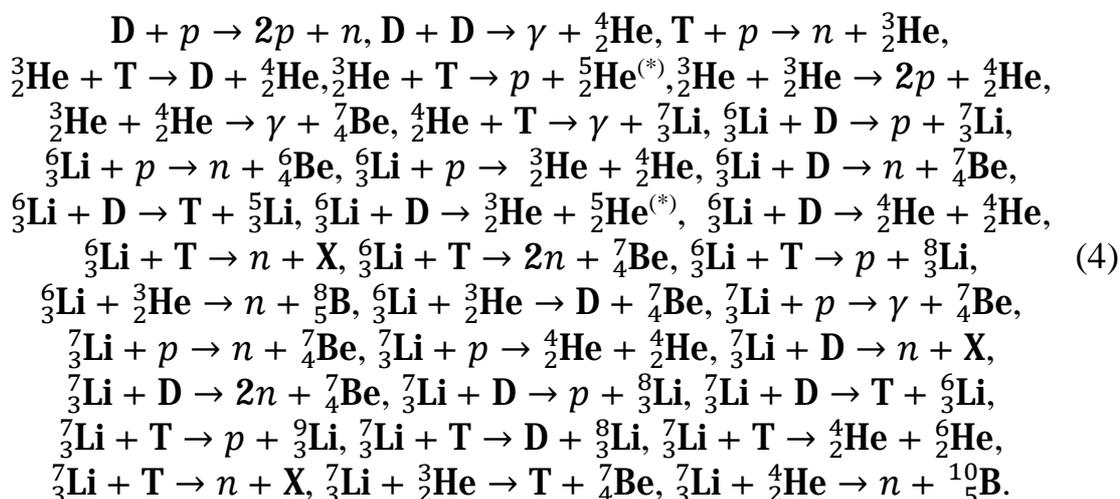
Отбор реакций

Кулоновский барьер. В высокотемпературной плазме сталкиваются не нейтральные атомы, а полностью ионизованные ядра. Они имеют положительные заряды Z_1 и Z_2 , и кулоновское отталкивание препятствует их сближению. Вероятность сближения на столь малые расстояния, на которых начинают действовать ядерные силы, определяется известным множителем Гамова [9]:

$$G = \exp\{-\pi Z_1 Z_2 \sqrt{2M/E}\}. \quad (2)$$

Здесь E – энергия в системе центра масс, M – приведенная масса. Будем использовать удобную для расчетов атомную систему единиц, в которой принято $m_e = 1$, $e = 1$, $h = 1$. Напомним, что атомная единица энергии E и температуры T равна 27.2 эВ, а приведенная масса измеряется в единицах m_e , то есть получается из приведенного атомного веса умножением на 1836.1.

Обратим внимание, что на величину кулоновского барьера сильно влияют параметры сталкивающихся частиц. Вероятность туннельного проникновения резко уменьшается при увеличении $Z_1 Z_2$ и не столь резко – при увеличении приведенной массы M . Этот эффект сильно выражен при малых значениях E и ослабевает при увеличении E . Поэтому в первую очередь нужно учитывать столкновения между собой однозарядных частиц p , D , T ; во вторую очередь – столкновения однозарядных частиц с двухзарядными изотопами гелия. Менее значимы столкновения однозарядных частиц с трехзарядными изотопами лития. Следом идут столкновения двух ядер гелия. Всеми другими видами столкновений в условиях управляемого термоядерного синтеза можно пренебречь.



Рассматриваемый диапазон энергий очень велик: от 10 эВ до 10 МэВ. Быстрое горение мишени начинается при температурах $T > 1$ кэВ. Но малые энергии представляют интерес, так как во многих экспериментах достигаются лишь невысокие температуры. В них сопоставляют расчетный и экспериментальный выход нейтронов. При этом зажигания не происходит, но подобные эксперименты служат для отработки конструкции мишеней.

К сожалению, для части перечисленных реакций экспериментальные данные имеются лишь при $E > 100$ кэВ. Такие энергии на порядки превышают температуру не только зажигания мишеней, но даже их горения. По имеющимся данным невозможно сказать, каковы будут сечения этих реакций при существенно более низких энергиях. Поэтому мы вынуждены их откинуть.

Также для части перечисленных реакций экспериментальных данных очень мало. Эти реакции отмечены (*). Поэтому такие реакции мы также вынуждены откинуть.

Сравнение сечений. Сечение реакции $\sigma(E)$ сильно зависит от энергии сталкивающихся частиц, и величина сечения может меняться на много порядков в практически значимом диапазоне энергий. Поэтому в справочниках экспериментальные данные по столкновениям частиц приводятся не в форме сечений, а в виде так называемых S-факторов $S(E)$. S-фактор связан с сечением соотношением

$$S(E) = \sigma(E)E/G. \quad (5)$$

Фактор $S(E)$ обусловлен чисто ядерными силами, и в широком диапазоне E его изменение редко превосходит 1–2 порядка. Отметим одно важное свойство S-фактора. При столкновениях медленных частиц ($E \rightarrow 0$) величина $S(E)$ стремится к константе [10].

Скорости термоядерных реакций выражаются сверткой сечения с функцией распределения частиц, которую чаще всего можно считать максвелловской. Поэтому для выделения существенных реакций нужно сравнивать не S-факторы, а сечения.

Учтем, что в начальном составе мишеней имеется обычно только дейтерий, а все остальные компоненты вырабатываются в ходе горения, так что вблизи момента зажигания их концентрации незначительны. Поэтому в момент зажигания и в начале горения основными будут два канала реакции $D + D$ – протонный и нейтронный, сечения которых мало отличаются. Выберем для определенности канал $D + D \rightarrow p + T$ в качестве эталона для сравнения.

Критерии отбора. В результате вышесказанного были сформулированы критерии отбора реакций:

- для отбираемых реакций необходимо наличие данных по сечениям в диапазоне энергий, актуальном для УТС: $E \lesssim 100$ кэВ;
- в этом диапазоне по величине сечения реакция должна быть

сопоставима с эталонной.

Применим описанные критерии к традиционным реакциям (1). На рис. 1 приведен график зависимости σ/σ_{st} от энергии E для этих реакций. Здесь σ_{st} – сечение выбранной нами эталонной реакции $D + D \rightarrow p + T$.

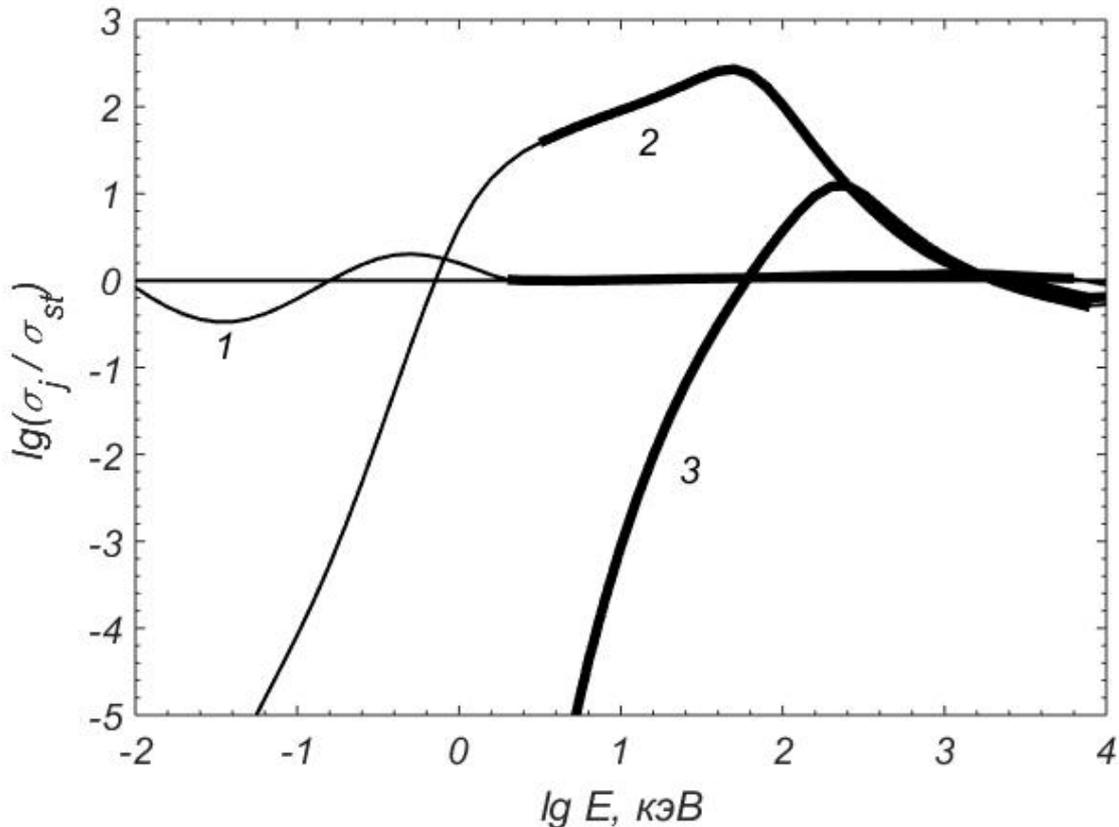


Рис. 1. Отношение сечений j -х термоядерных реакций к сечению σ_{st} эталонной реакции: 1 – $D + D \rightarrow n + {}^3_2\text{He}$, 2 – $D + T \rightarrow n + {}^4_2\text{He}$, 3 – $D + {}^3_2\text{He} \rightarrow p + {}^4_2\text{He}$

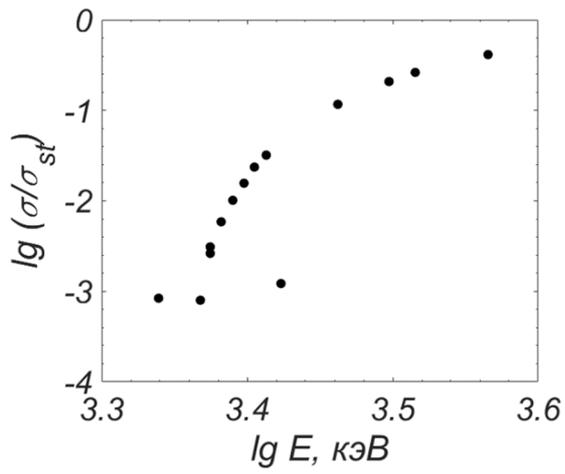
Видно, что сечение реакции $D + T$ может быть существенно выше эталонного, так что учет этой реакции необходим. Однако в чисто дейтериевых мишенях тритий отсутствует в начальном составе. Поэтому вклад этой реакции является не преобладающим, а лишь сопоставимым с реакцией $D + D$. Сечение реакции $D + {}^3_2\text{He}$ при $E < 5$ кэВ очень мало, но далее оно быстро нарастает. Поэтому на стадии зажигания мишеней этой реакцией можно пренебречь, но на стадии горения ее учитывать необходимо.

Таким образом, описанные критерии не противоречат списку традиционно учитываемых реакций.

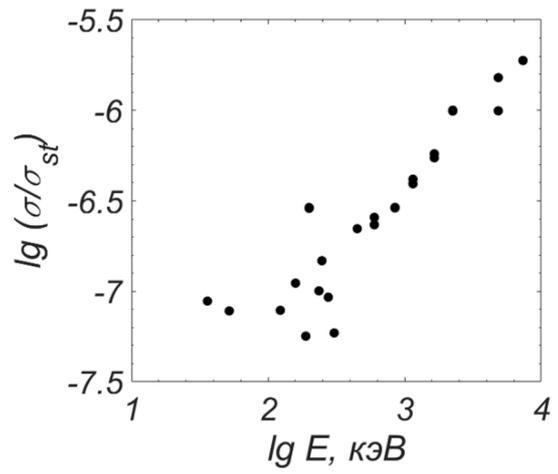
Рассмотрим графики зависимости логарифма отношений сечения каждой реакции из (3) и (4) к сечению выбранной нами эталонной реакции.

Реакции между изотопами H и He

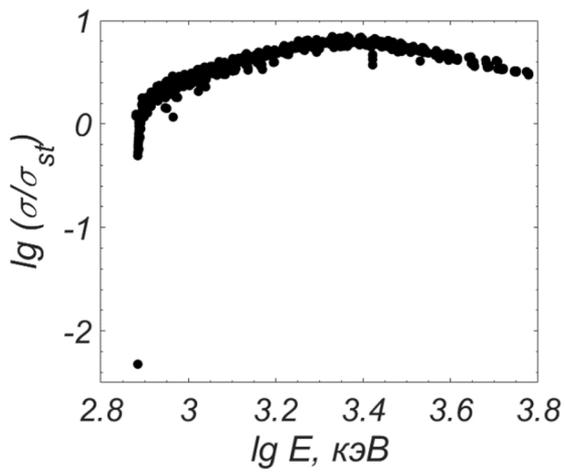
Сравнение сечений реакций между изотопами H и He, указанных в (4), с сечением эталонной реакции, дано на рис. 2. Проведем анализ представленных графиков.



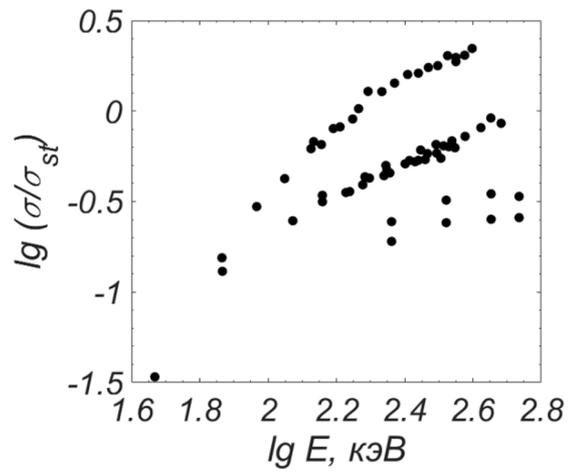
(1)



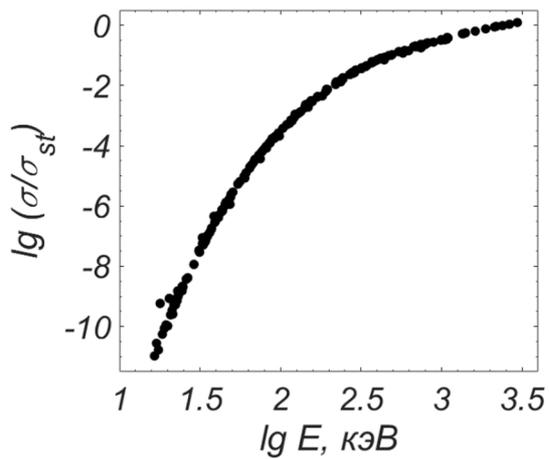
(2)



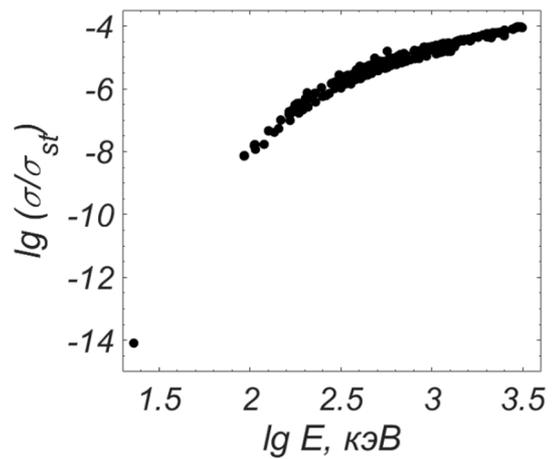
(3)



(4)

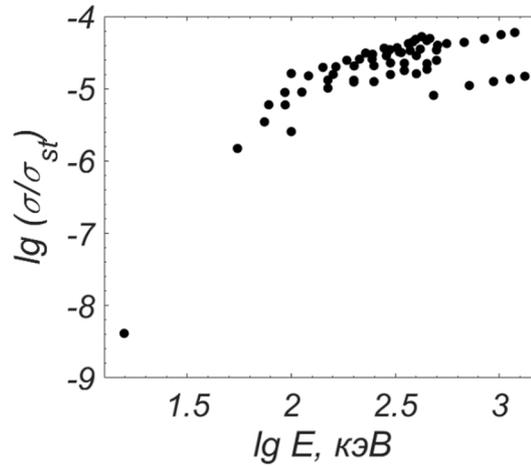


(5)



(6)

Рис. 2. Отношения сечений рассматриваемых реакций к сечению эталонной σ_{st} :
 $D + p \rightarrow 2p + n$ (1), $D + D \rightarrow \gamma + {}^4_2\text{He}$ (2), $T + p \rightarrow n + {}^3_2\text{He}$ (3),
 ${}^3_2\text{He} + T \rightarrow D + {}^4_2\text{He}$ (4), ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow 2p + {}^4_2\text{He}$ (5), ${}^3_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \rightarrow \gamma + {}^7_4\text{Be}$ (6)



(7)

Рис. 2 (продолжение). Отношения сечений рассматриваемых реакций к сечению эталонной σ_{st} : ${}^4_2\text{He} + \text{T} \rightarrow \gamma + {}^7_3\text{Li}$ (7)

1) $\text{D} + \text{p} \rightarrow 2\text{p} + \text{n}$

Экспериментальный диапазон: $2183.3 < E < 3673.3$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-3.1 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < -0.4$.

Реакция является сопоставимой с эталонной в экспериментальном диапазоне. Данные по сечениям для реакции имеются лишь в диапазоне, который лежит значительно выше энергий, актуальных для УТС. В связи с этим реакцию мы вынуждены откинуть.

2) $\text{D} + \text{D} \rightarrow \gamma + {}^4_2\text{He}$

Границы экспериментального диапазона: $36 < E < 7350$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-7.2 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < -5.7$.

Экспериментальные данные по сечениям для данной реакции в целом имеются только в диапазоне выше актуального для УТС (в области $E < 100$ кэВ имеется всего 2 точки). В актуальном диапазоне реакцию можно считать несопоставимой с эталонной по величине сечения.

3) $\text{T} + \text{p} \rightarrow \text{n} + {}^3_2\text{He}$

Границы экспериментального диапазона: $759 < E < 15000$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-2.3 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.8$.

Реакция является сопоставимой с эталонной в экспериментальном диапазоне. Данные по сечениям для реакции имеются лишь в диапазоне, который лежит значительно выше энергий, актуальных для УТС. В связи с этим реакцию мы вынуждены откинуть.

4) ${}^3_2\text{He} + \text{T} \rightarrow \text{D} + {}^4_2\text{He}$

Границы экспериментального диапазона: $46 < E < 1900$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-1.4 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.4$.

Реакция является сопоставимой с эталонной в экспериментальном диапазоне. Данные по сечениям для реакции имеются в диапазоне, лежащем выше актуального. Однако по поведению отношения можно предположить, что реакцию окажется сопоставимой и в интересующем нас диапазоне энергий.



Границы экспериментального диапазона: $16.5 < E < 2958$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-11 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.1$.

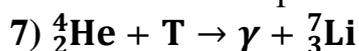
Экспериментальные данные имеются в широком диапазоне энергий, однако по величине сечения реакция является несопоставимой с эталонной. Также стоит отметить, что оба сталкивающихся ядра являются продуктами первичных реакций, что означает отсутствие вклада данной реакции на моменте зажигания мишеней.



Границы экспериментального диапазона: $23 < E < 2130$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-14 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < -4.1$.

Экспериментальные данные имеются в широком диапазоне энергий, однако по величине сечения реакция является несопоставимой с эталонной.



Границы экспериментального диапазона: $46 < E < 1900$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-8.4 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < -4.2$.

Экспериментальные данные имеются в широком диапазоне энергий, однако по величине сечения реакция является несопоставимой с эталонной.

Реакции с участием изотопов Li



Экспериментальный диапазон: $12 < E < 750$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-7.6 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.3$.

Реакция сопоставима с эталонной в экспериментальном диапазоне. Данные по сечениям для реакции имеются в диапазоне, лежащем выше актуального. Однако по поведению отношения на левом краю экспериментального диапазона можно предположить, что реакцию можно считать сопоставимой и в интересующем нас диапазоне энергий.

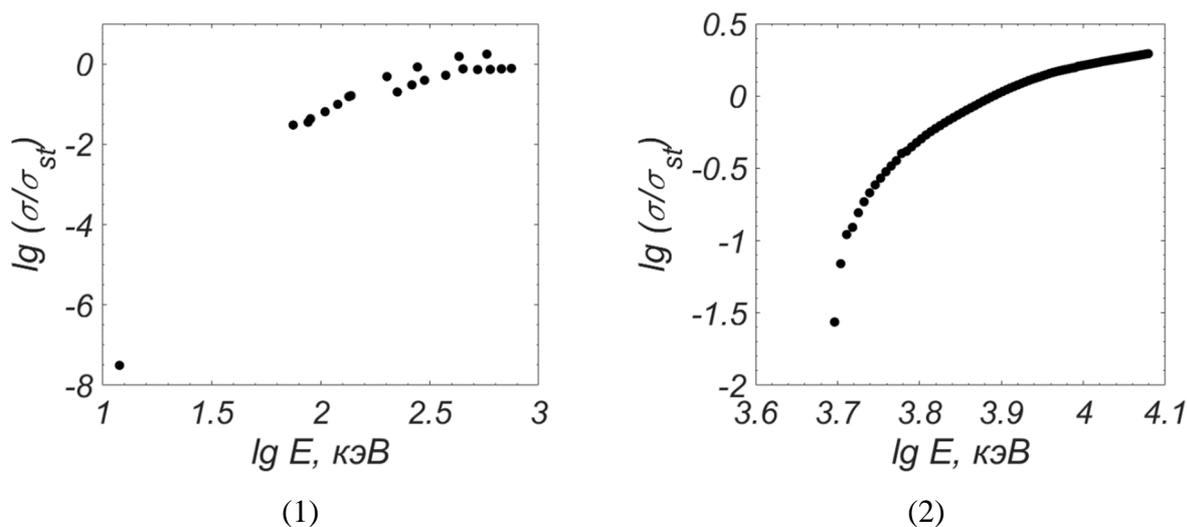
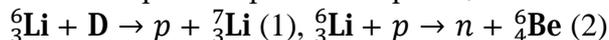
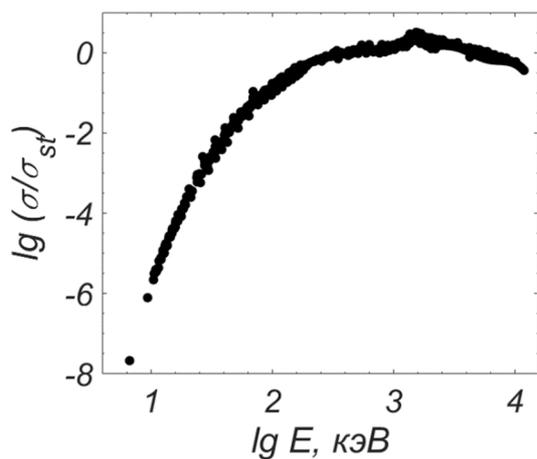
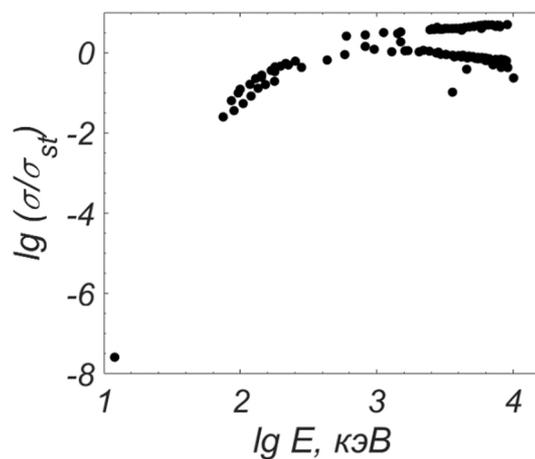


Рис. 3. Отношения сечений рассматриваемых реакций к сечению эталонной σ_{st} :

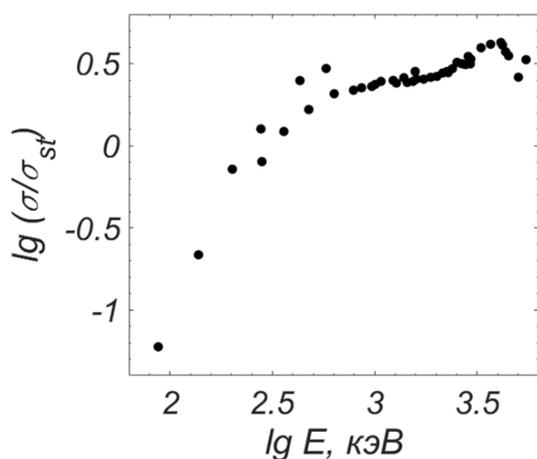




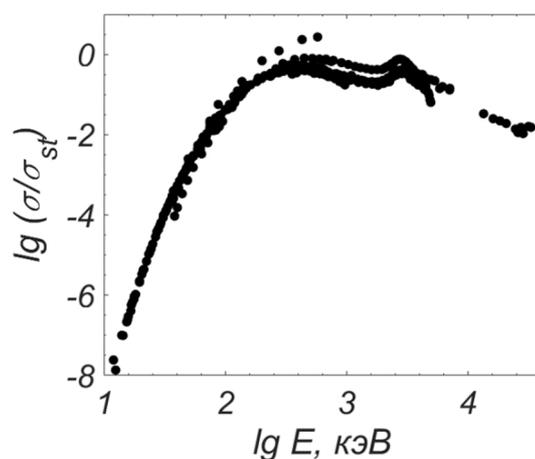
(3)



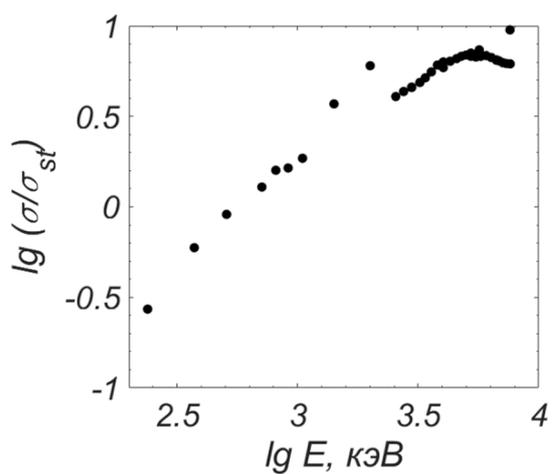
(4)



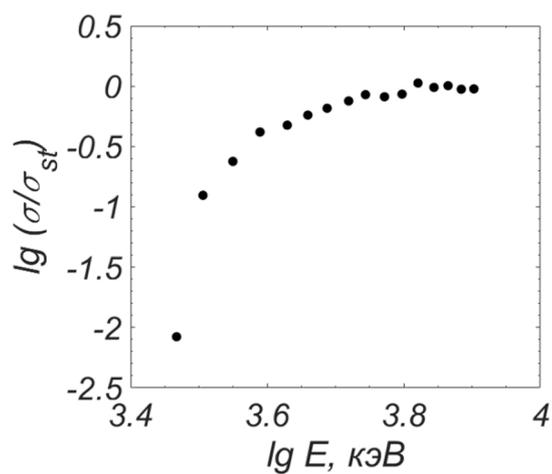
(5)



(6)

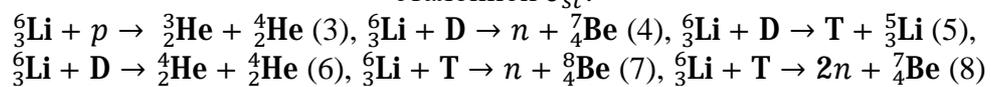


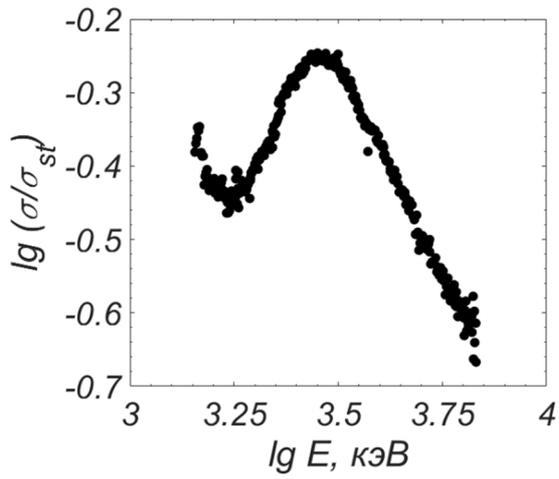
(7)



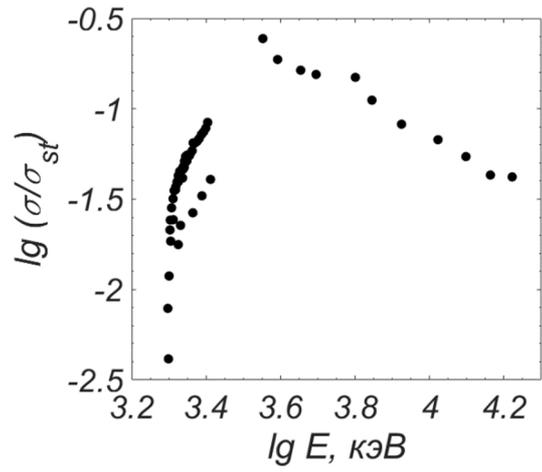
(8)

Рис. 3 (продолжение). Отношения сечений рассматриваемых реакций к сечению эталонной σ_{st} :

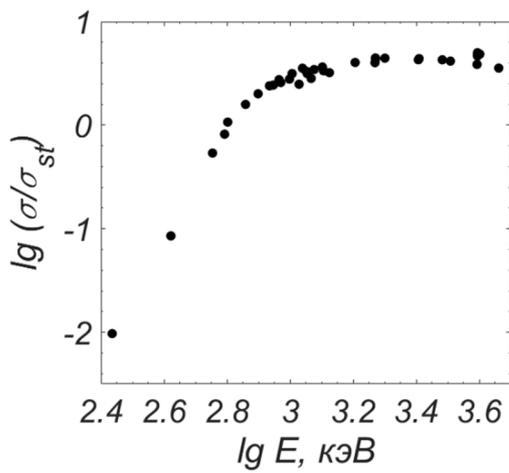




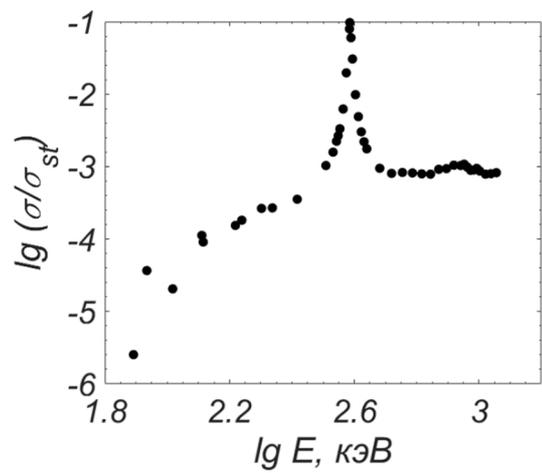
(9)



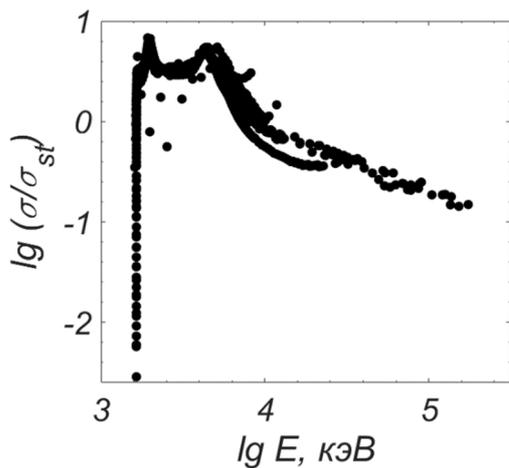
(10)



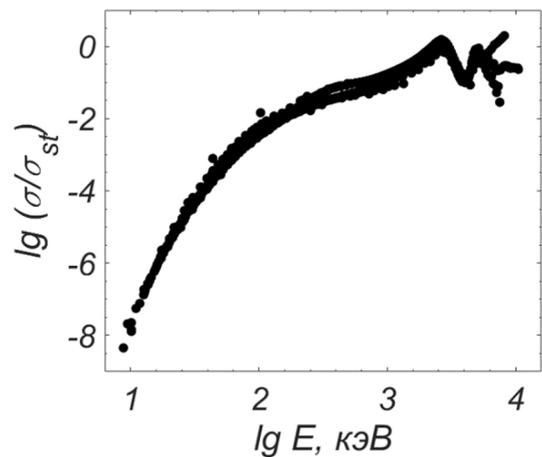
(11)



(12)

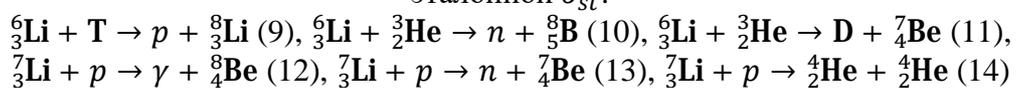


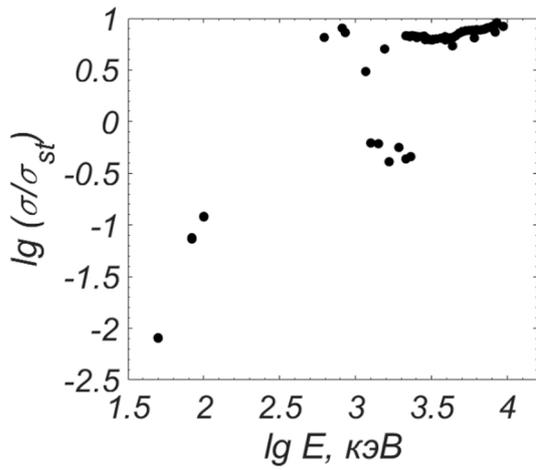
(13)



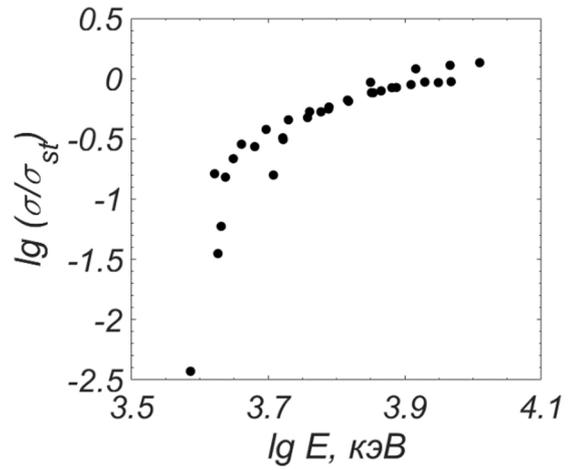
(14)

Рис. 3 (продолжение). Отношения сечений рассматриваемых реакций к сечению эталонной σ_{st} :

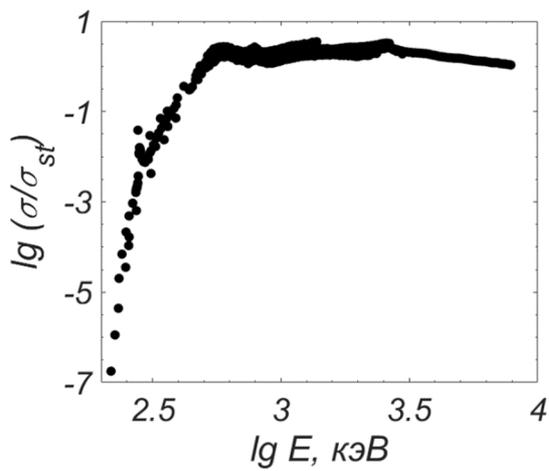




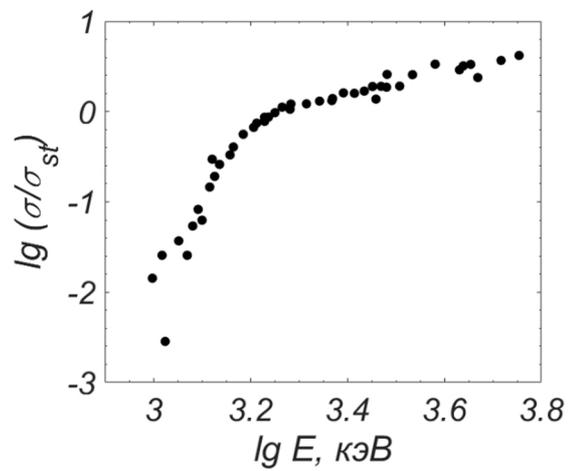
(15)



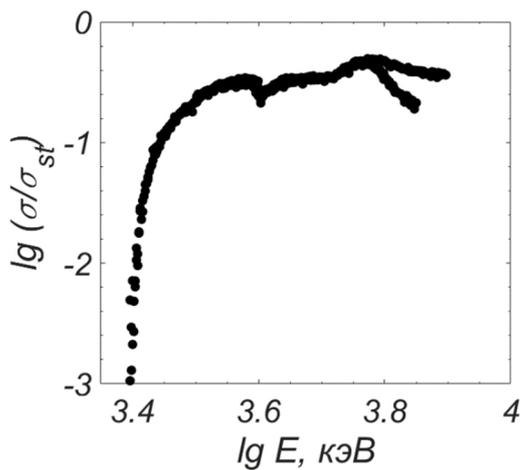
(16)



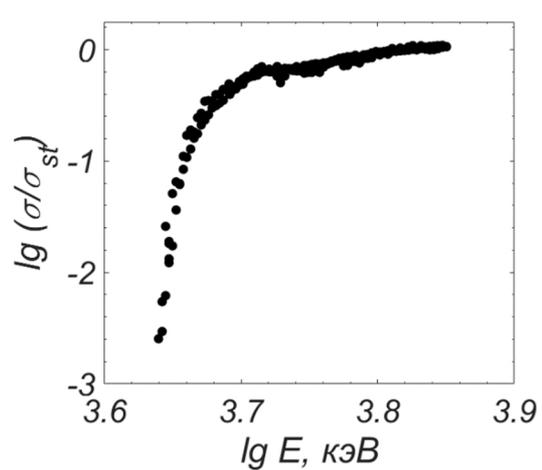
(17)



(18)

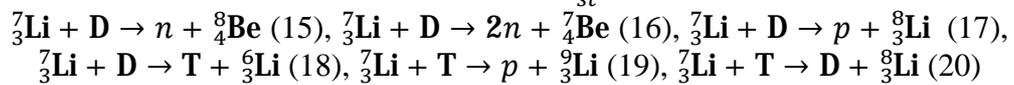


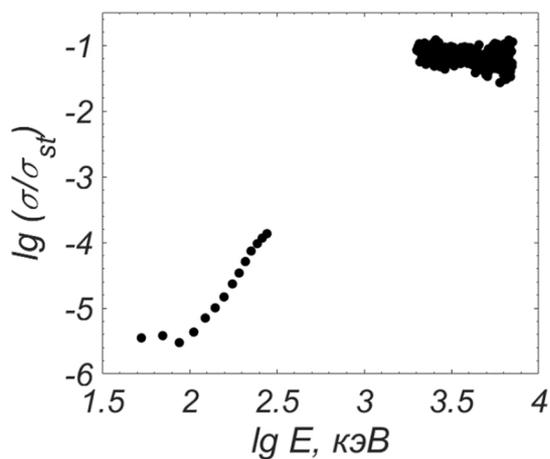
(19)



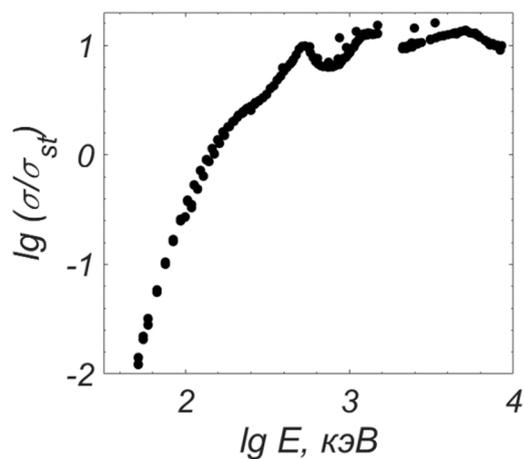
(20)

Рис. 3 (продолжение). Отношения сечений рассматриваемых реакций к сечению эталонной σ_{st} :

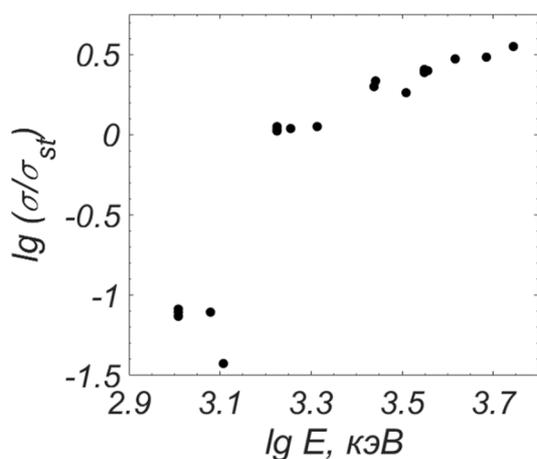




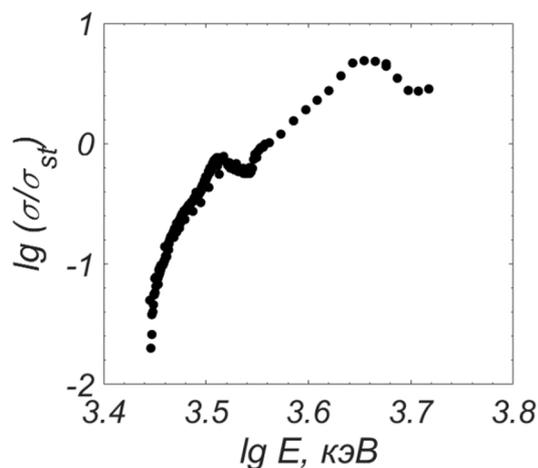
(21)



(22)

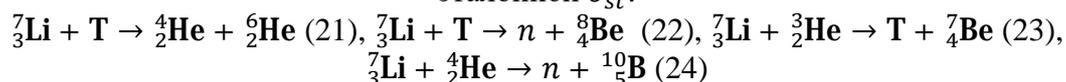


(23)



(24)

Рис. 3 (продолжение). Отношения сечений рассматриваемых реакций к сечению эталонной σ_{st} :



2) ${}^6_3\text{Li} + p \rightarrow n + {}^6_4\text{Be}$

Экспериментальный диапазон: $4971.4 < E < 12000$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-1.6 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.3$.

Реакция является сопоставимой с эталонной, однако экспериментальные данные по сечениям для реакции имеются лишь в диапазоне, который лежит значительно выше энергий, актуальных для УТС.

3) ${}^6_3\text{Li} + p \rightarrow {}^3_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$

Экспериментальный диапазон: $6.7 < E < 12000$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-7.7 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.6$.

Экспериментальные данные по сечениям для реакции имеются в широком диапазоне энергий. В области актуальных для УТС энергий реакция несопоставима по величине сечения с эталонной.



Экспериментальный диапазон: $12 < E < 10087.5$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-7.7 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.6$.

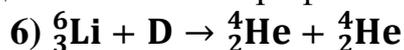
Экспериментальные данные по сечениям для реакции имеются в широком диапазоне энергий, однако в целом экспериментальные точки лежат в области высоких энергий. В области актуальных для УТС энергий реакция несопоставима по величине сечения с эталонной.



Экспериментальный диапазон: $87.7 < E < 5475$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-1.2 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.7$.

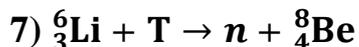
Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей выше энергий, актуальных для УТС. Тенденция поведения зависимости на левом краю экспериментального диапазона говорит о быстром спаде значения логарифма отношения сечений.



Экспериментальный диапазон: $12 < E < 33360$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-7.9 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.5$.

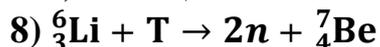
Экспериментальные данные по сечениям для реакции имеются в широком диапазоне энергий. В области актуальных для УТС энергий реакция несопоставима по величине сечения с эталонной.



Экспериментальный диапазон: $238 < E < 7614$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-0.6 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 1.0$.

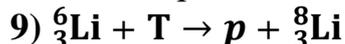
Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $2933 < E < 7993$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-2.1 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.1$.

Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей значительно выше энергий, актуальных для УТС. Тенденция поведения зависимости на левом краю экспериментального диапазона говорит о быстром спаде значения логарифма отношений сечений.



Экспериментальный диапазон: $1432 < E < 6774$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-0.7 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < -0.3$.

Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей значительно выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $1983 < E < 16658$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-2.8 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < -0.6$.

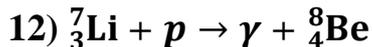
Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей значительно выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $272 < E < 7614$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-2.1 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.7$.

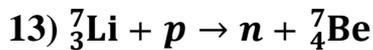
Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $77 < E < 1137$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-5.6 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < -1.0$.

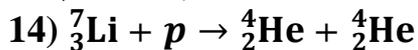
Экспериментальные данные по сечениям для реакции имеются в широком диапазоне энергий. В области актуальных для УТС энергий реакция несопоставима по величине сечения с эталонной.



Экспериментальный диапазон: $1610 < E < 174212.5$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-3.1 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < -0.4$.

Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей значительно выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $8 < E < 10500$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-8.4 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.3$.

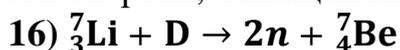
Экспериментальные данные по сечениям для реакции имеются в широком диапазоне энергий. В области актуальных для УТС энергий реакция несопоставима по величине сечения с эталонной.



Экспериментальный диапазон: $50 < E < 9412$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-2.1 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 1.0$.

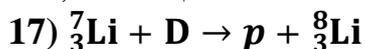
Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако основной массив данных находится в области энергий, лежащей выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $3857 < E < 10228$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-2.5 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.2$.

Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей значительно выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $217 < E < 7856$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-6.8 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.6$.

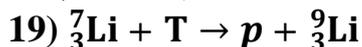
Реакция в целом не является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Данные имеются лишь в области энергий, лежащей значительно выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $995 < E < 5678$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-2.6 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.7$.

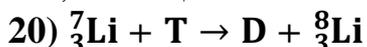
Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей значительно выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $2408 < E < 7891$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-3.0 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < -0.3$.

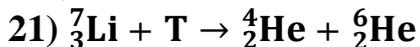
Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей значительно выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $4360 < E < 7084$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-2.6 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.1$.

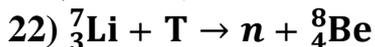
Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей значительно выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $52 < E < 7084$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-5.6 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < -0.9$.

Реакция в целом не является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Основной массив данных находится в области энергий, лежащей выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $51.5 < E < 8484$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-2.0 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 1.3$.

Экспериментальные данные по сечениям для реакции имеются в широком диапазоне энергий. Основной массив данных находится в области энергий, лежащей выше энергий, актуальных для УТС. Исходя из тенденции поведения зависимости на левом краю экспериментального диапазона можно предположить, что в области актуальных для УТС энергий реакция несопоставима по величине сечения с эталонной.



Экспериментальный диапазон: $1020 < E < 5551$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-3.1 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < -0.4$.

Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей значительно выше энергий, актуальных для УТС.



Экспериментальный диапазон: $2787 < E < 5219$ кэВ.

Диапазон соотношения сечений: $-1.7 < \lg(\sigma/\sigma_{st}) < 0.7$.

Реакция является сопоставимой с эталонной по величине сечения в экспериментальном диапазоне. Однако данные имеются лишь в области энергий, лежащей значительно выше энергий, актуальных для УТС.

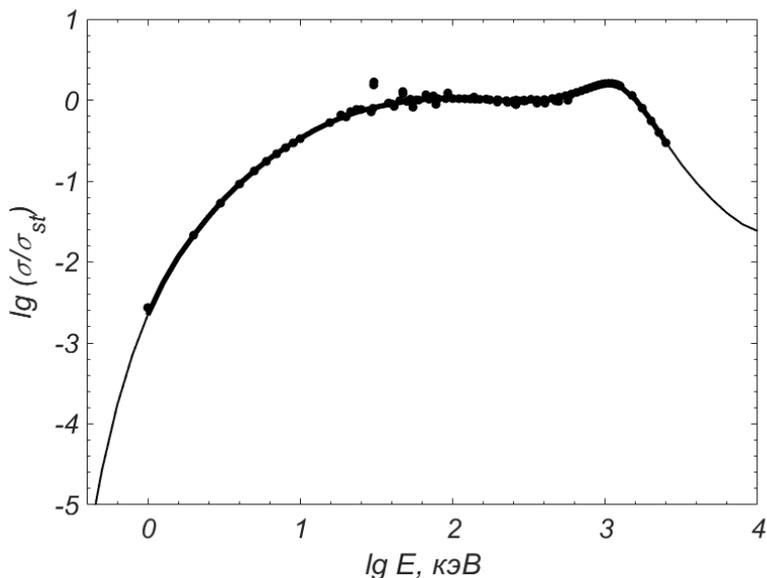


Рис. 4. Соотношение сечений реакции $\text{T} + \text{T} \rightarrow 2n + {}^4_2\text{He}$ к эталонной реакции, маркеры – экспериментальные данные, жирная линия – построенная по экспериментальным данным аппроксимация, тонкая линия – экстраполяция полученной аппроксимации

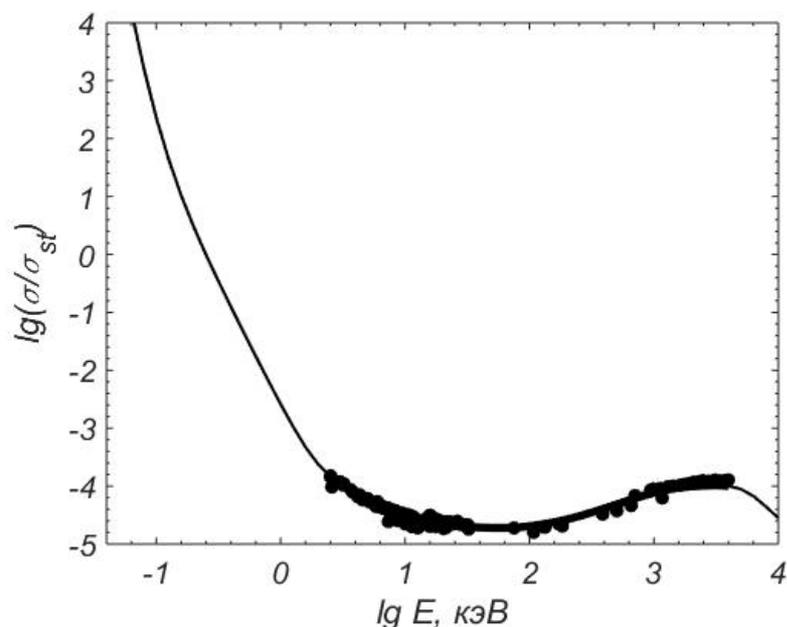


Рис. 5. Соотношение сечений реакции $\text{D} + p \rightarrow \gamma + {}^3_2\text{He}$ к эталонной реакции, обозначения соответствуют рис. 4

Приведенный анализ графиков позволяет сделать вывод о том, что представленные реакции необходимо отбросить.

Отдельно стоит остановиться на реакциях (3). Предварительный анализ данных показал, что реакции из этого списка удовлетворяют критериям отбора, и для них были построены графики, включающие как экспериментальные точки, так и аппроксимации кривых $\sigma(E)$ и их экстраполяции в область энергий, лежащих как ниже экспериментального диапазона, так и выше.

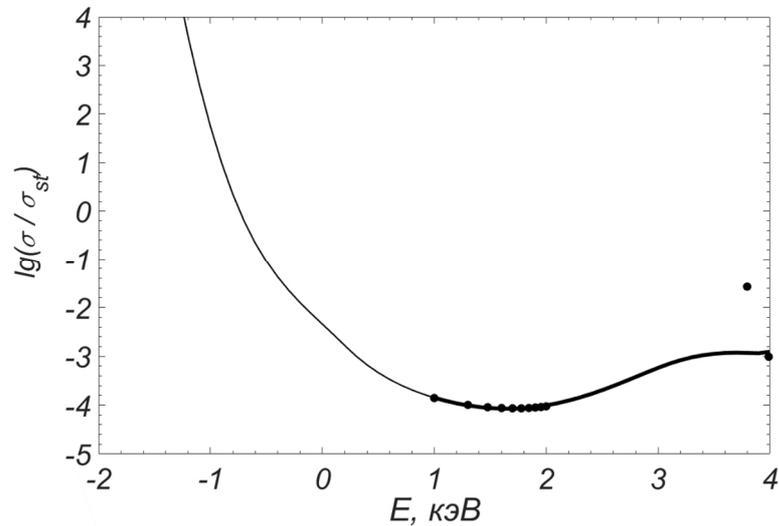


Рис. 6. Соотношение сечений реакции $T + p \rightarrow \gamma + {}^4_2\text{He}$ к эталонной реакции, обозначения соответствуют рис. 4

На рис. 4-6 показаны зависимости отношения сечения реакций (3) к эталонной от энергии. Алгоритм построения аппроксимаций и экстраполяций будет описан ниже.

Сечение реакции $T + T$ достигает 1% от эталона при $E \sim 1$ кэВ, а при энергиях 20 кэВ и выше сечение этой реакции сравнивается с эталоном. Поэтому учет такой реакции в дейтериевых мишенях может оказаться целесообразным, а в дейтериево-тритиевых – необходимым.

Обе реакции $D + p \rightarrow \gamma + {}^3_2\text{He}$ и $T + p \rightarrow \gamma + {}^4_2\text{He}$ при $E > 1$ кэВ малы по сравнению с эталонной реакцией. Поэтому на стадии интенсивного горения мишеней ими можно пренебречь. Однако при уменьшении энергии их вклад быстро возрастает, а их сечение становится существенно больше эталонного (это связано с тем, что в этих реакциях мала приведенная масса и, соответственно, более проницаем кулоновский барьер). Поэтому на стадии зажигания учет этих реакций может оказаться целесообразным.

Метод обработки

Метод обработки экспериментов детально описан в [5]–[7]. Вкратце напомним его. Берут все известные экспериментальные измерения сечений реакции $\sigma(E)$ с теми оценками точности, которые дают авторы экспериментов.

Делением на множитель Гамова из сечений получают S-факторы $S(E)$. Далее рассматривают зависимость $\lg S$ от $\lg E$, которая имеет особенно простой вид, удобный для аппроксимации. В частности, $S \rightarrow \text{const}$ при $E \rightarrow 0$. Это означает, что кривая $\lg S(\lg E)$ при $\lg E \rightarrow -\infty$ ($E \rightarrow 0$) асимптотически переходит в горизонтальную прямую.

Затем эту зависимость аппроксимируют специфическим переопределенным рядом Фурье (так называемый метод двойного периода).

Задан большой массив экспериментальных точек: аргументов x_i и функций $u_i \pm \delta_i$, $1 \leq i \leq I$, $I \gg 1$, где δ_i – абсолютные погрешности измерений. Из смысла задачи известно, что $u(x)$ есть гладкая функция с не слишком большими старшими производными, однако, экспериментальные ошибки δ_i могут быть значительными.

Для простоты записи линейно преобразуем аргумент так, чтобы $\min x_i = -\frac{\pi}{2}$, $\max x_i = \frac{\pi}{2}$. Затем возьмем следующие гармоники Фурье для отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ нулевую гармонику и N пар синус–косинус. Дополним их M гармониками удвоенного периода $[-\pi; \pi]$, не являющимися гармониками основного периода. Эти гармоники подключаются в расчет не парами синус–косинус, а поодиночке, так что их число M может быть любой четности. Аппроксимируем суммой гармоник основного и двойного периода. Для единообразия выберем следующую форму записи:

$$u(x) \approx \sum_{n=0}^{2N+M} a_n \varphi_n(x). \quad (6)$$

Коэффициенты a_n подбирают из условия наилучшей аппроксимации $u(x)$ в норме L_2 .

Формально уже гармоник основного периода достаточно для аппроксимации при $N \rightarrow \infty$. Поэтому присутствие членов с $n > 2N$ является в этом случае избыточным. При конечном N сумма (6) избыточной не является. Подключение в расчет гармоник двойного периода эквивалентно повышению гладкости периодического продолжения $u(x)$ на период $[-\pi; \pi]$. Каждая лишняя гармоника двойного периода повышает гладкость на единицу. Чем больше M , тем быстрее сходятся разложения по гармоникам основного периода. При $N \rightarrow \infty$ и фиксированном M приближение (6) аппроксимирует $u(x)$ и ее q -е производные в норме C с точностью $O(N^{q-M})$. При численных расчетах следует брать лишь небольшие значения M , так как увеличение M катастрофически ухудшает обусловленность расчетов. Однако значения N можно брать большими для получения хорошей точности аппроксимации. Разумеется, для полного числа параметров данной задачи должно выполняться условие $2N + M + 1 < I$.

Метод двойного периода разработан для функций, заданных на равномерной сетке. Однако в экспериментах сетка x_i неравномерна и может содержать пробелы – участки аргумента значительной длины, на которых

отсутствуют экспериментальные точки, а погрешности измерений δ_i нередко велики.

Для уменьшения нефизичных осцилляций аппроксимирующей кривой вводят стабилизатор Тихонова со штрафом за большие значения второй производной. Очевидно, мы должны с хорошей точностью аппроксимировать $u(x)$ и $u'(x)$. Поэтому включать их в стабилизатор нельзя: это приведет к занижению их величин и, соответственно, ухудшению аппроксимации. Однако, если не говорить о радиотехнических задачах, физические кривые обычно являются достаточно плавными и не содержат высокочастотных осцилляций, так что их кривизна невелика. Поэтому величину $u''(x)$ целесообразно ограничивать, включая ее в стабилизатор. Этого обычно достаточно для хорошего подавления нефизичных осцилляций, так что нет необходимости включать в стабилизатор более высокие производные. Включение второй производной имеет еще одно практическое преимущество: при двукратном дифференцировании синус переходит в синус, а косинус – в косинус. Это упрощает алгоритм.

Учтем еще два обстоятельства, относящихся к нашей частной задаче аппроксимации сечений для ядерных реакций. Во-первых, важна не абсолютная точность аппроксимации сечений, а относительная, поскольку сечения меняются в очень широких пределах. Во-вторых, специфические переменные при этом выбираются так, чтобы $u(x) \approx \text{const}$ при наименьших x_i . Поэтому в стабилизатор надо добавить значения $(u'(x))^2$ и $(u''(x))^2$ на левой границе с большими весовыми множителями, чтобы аппроксимирующая кривая выходила на горизонтальную прямую. С учетом этих соображений метод наименьших квадратов приводит к следующей формулировке:

$$\sum_{i=1}^I \left(\frac{u(x_i) - u_i}{\delta_i} \right)^2 + \alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [u''(x)]^2 dx + \beta [u'(-\pi/2)]^2 + \gamma [u''(-\pi/2)]^2 = \min.$$

Поставленное левое краевое условие, которое обеспечивает переход аппроксимации в горизонтальную кривую при $\lg E \rightarrow -\infty$. Последнее позволяет достаточно надежно экстраполировать S-фактор в область малых энергий, лежащих левее границы экспериментального диапазона.

Поскольку при этом используется большое число коэффициентов Фурье, то результат удобно представлять не в виде таблицы коэффициентов, а в виде таблицы непосредственно $\lg S(\lg E)$.

В [7] разработана процедура статистически достоверной оценки точности полученной кривой. Она начинается со сравнения экспериментальных точек и найденной среднеквадратичной аппроксимации. При этом фактически проводится сопоставление данных различных лабораторий и корректируются их оригинальные оценки точности.

Далее проводится случайное «разыгрывание» точек. При этом среднее определяется построенной аппроксимацией, а стандартное отклонение равно экспериментальной погрешности. Для полученного нового набора «псевдоэкспериментальных» точек строится новая аппроксимация $\lg S (\lg E)$. Такая процедура повторяется достаточное количество раз. В результате получаем «пучок» аппроксимирующих кривых. Их стандартное отклонение является хорошей оценкой доверительного коридора исходной аппроксимации. Эта процедура была названа методом виртуального эксперимента.

Если используется много экспериментальных точек, то ширина достоверного коридора оказывается гораздо меньше, чем можно было бы ожидать от экспериментов отдельно взятой лаборатории. Для хорошо изученных реакций погрешности составляют 5%.

Экстраполяция. Остановимся на одном важном вопросе. Экспериментальные данные начинаются при довольно высоких энергиях $E \sim 2$ кэВ и выше. Начиная с этих энергий полученные аппроксимации S-фактора имеют высокую точность, поскольку построены усреднением по большому числу экспериментальных точек. Однако для расчета зажигания термоядерных мишеней нужны существенно меньшие температуры и энергии. Для этого построенные аппроксимации необходимо экстраполировать на меньшие значения энергии. Как такую экстраполяцию построить и насколько ей можно доверять?

Физической основой такой экстраполяции является то обстоятельство, что $S(E) \rightarrow \text{const}$ при $E \rightarrow 0$. Это означает, что в логарифмических переменных зависимость $\lg S (\lg E)$ при $\lg E \rightarrow -\infty$ должна переходить в горизонтальную прямую. Это условие перехода в горизонтальную прямую было непосредственно использовано в качестве граничного условия в методе двойного периода. Для тех реакций, в которых экспериментальные S-факторы визуально выходят на константу при наименьших значениях $\lg E$, такая экстраполяция является надежной. Обычно такой выход на прямую реализуется вблизи $E \sim 3$ кэВ. Для тех реакций, у которых эксперименты доходят до этой границы, экстраполяцию можно считать надежной. В противном случае вопрос о точности экстраполяции остается открытым.

Умножая полученную зависимость $S(E)$ на множитель Гамова, найдем аппроксимацию сечения $\sigma(E)$.

Скорость реакции. Пусть в веществе имеется локальное термодинамическое равновесие с температурой T . Тогда скорость термоядерной реакции определяется сверткой $\sigma(E)\sqrt{2E/M}$ с максвелловским распределением:

$$K(T) = \frac{\pi}{\sqrt{M}} \left(\frac{2}{\pi T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \sigma(E) E \exp \left\{ -\frac{E}{T} \right\} dE.$$

Интеграл брался численно по квадратурам высокой точности с подстановкой аппроксимации $\sigma(E)$.

Коридор достоверности зависимости $K(T)$ также определяется методом виртуального эксперимента. Для наиболее изученных реакций ширина коридора составляет 1-4% при малых температурах и существенно уменьшается при высоких температурах.

Результаты обработки

Реакция $T + T \rightarrow 2n + {}^4_2\text{He}$

Для реакции $T + T \rightarrow 2n + {}^4_2\text{He}$ на рис. 6 приведено в общей сложности 130 точек. Из них 50 точек получены в Los Alamos National Laboratory. Итоговые данные опубликованы в базе [1], однако первичные данные и детали методов обработки приведены в отчете [12], который отсутствует в открытом доступе. Известно лишь, что эти данные получены с помощью теории R-матриц. Поэтому мы оцениваем их точность в 5% (по аналогии с работой [13]).

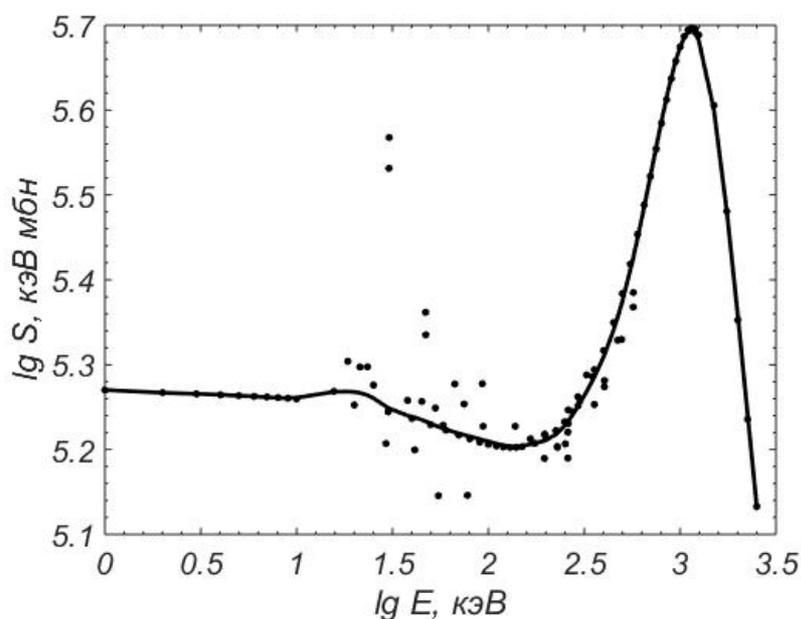


Рис. 7. S-фактор реакции $T + T \rightarrow 2n + {}^4_2\text{He}$, маркеры – экспериментальные данные, сплошная линия – построенная аппроксимация

Косвенным подтверждением этой оценки служит малый разброс этих точек относительно мысленной гладкой усредненной линии. Остальные точки принадлежат нескольким работам, в каждой из которых измерено 10-15 точек. Их погрешности в основном составляют 10-20% и изредка доходят до 50%.

Наша обработка по описанной выше методике дала гладкую аппроксимацию, приведенную на рис. 7. Виртуальный эксперимент показал, что ширина ее коридора достоверности составляет 2 – 4%.

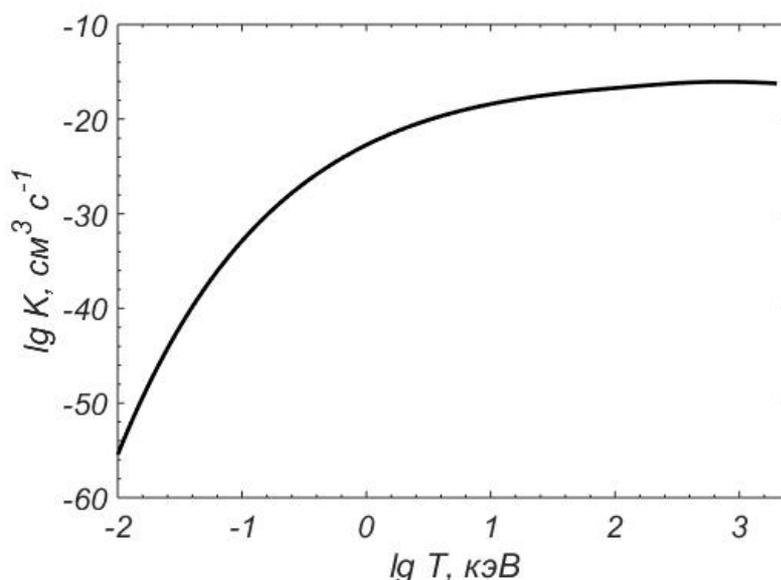


Рис. 8. Скорость реакции $\text{T} + \text{T} \rightarrow 2n + {}^4_2\text{He}$

Экспериментальные данные начинаются с энергии 1 кэВ. Видно, что экспериментальные точки выходят на горизонтальную прямую. Поэтому экстраполяцию построенной на $E \rightarrow 0$ можно считать надежной.

Соответствующие значения $K(T)$, рассчитанные для максвелловского распределения скоростей, приведены на рис. 8. Для скорости реакции используется единица $\text{см}^3 \text{с}^{-1}$. Ширина доверительного коридора во всем интервале температур составляет 1 – 4.5%.

Реакция $\text{D} + p \rightarrow \gamma + {}^3_2\text{He}$

Для реакции $\text{D} + p \rightarrow \gamma + {}^3_2\text{He}$ имеется 140 точек, представленных на рис. 9. Из них 110 точек расположены в диапазоне низких энергий от 2.5 кэВ до 30 кэВ. Они получены в разных работах и разумно согласуются друг с другом в основном в пределах ~15%. Эту величину можно принять за предварительную оценку точности на данном интервале энергий. В диапазоне высоких энергий 1-10 МэВ лежит 20 точек. Они ложатся на гладкую кривую с малым визуальным разбросом ~5%. Это также можно считать предварительной оценкой точности. В достаточно широком промежуточном диапазоне энергий 30 кэВ – 1 МэВ имеется всего 12 точек. Визуально они также согласуются с данными остальных диапазонов.

Обработка описанных экспериментальных точек приведена на рис. 9. Оценка ее коридора достоверности по методу виртуального эксперимента составляет 1-4%. Экспериментальные данные начинаются с энергии 2.5 кэВ. Хорошо видно, что экспериментальные точки выходят на горизонтальную прямую. Поэтому экстраполяцию кривой на $E \rightarrow 0$ можно считать надежной.

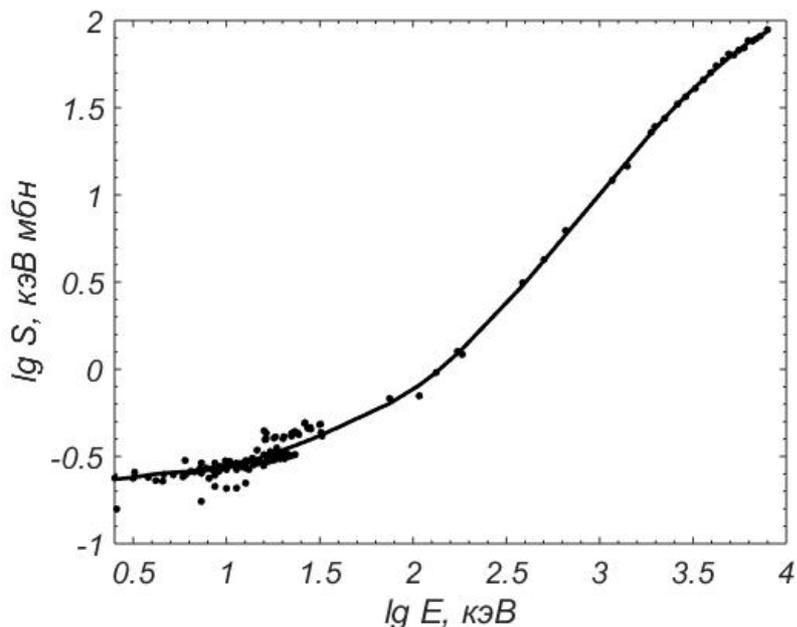


Рис. 9. S-фактор реакции $D + p \rightarrow \gamma + {}^3_2\text{He}$, обозначения соответствуют рис. 7

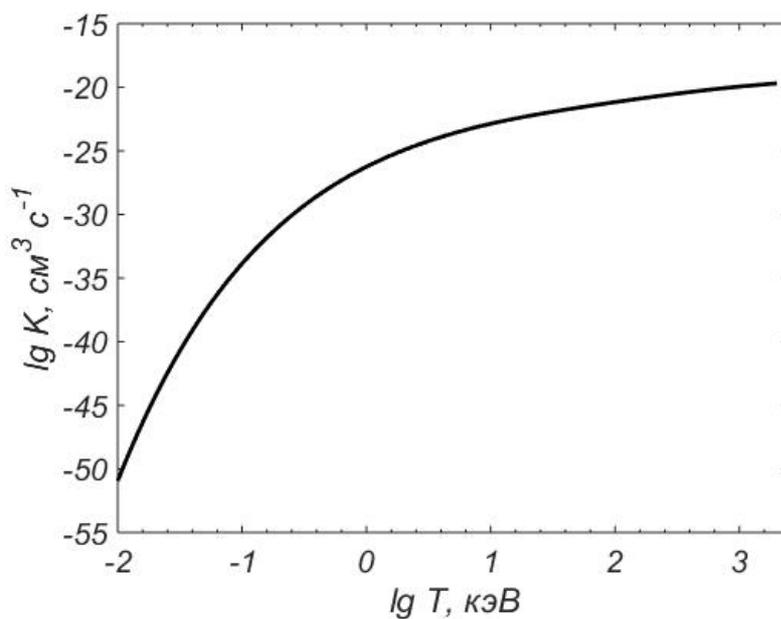


Рис. 10. Скорость реакции $D + p \rightarrow \gamma + {}^3_2\text{He}$

Рассчитанные значения $K(T)$ представлены на рис. 10. Их точность составляет 1-3% во всем диапазоне температур 10 эВ – 2 МэВ.

Реакция $T + p \rightarrow \gamma + {}^4_2\text{He}$

Для реакции $T + p \rightarrow \gamma + {}^4_2\text{He}$ экспериментальных данных очень мало. Они разбиваются на 2 группы: 10 точек в диапазоне средних энергий 10–100 кэВ и 10 точек в диапазоне огромных энергий 10–30 МэВ. Как в промежуточной области, так и в области малых энергий экспериментальных

измерений нет. Видно, что участки средних и сверхвысоких энергий можно разумно соединить монотонной гладкой кривой. Физическим обоснованием этого является то, что ядро ${}^4_2\text{He}$ образуется в основном состоянии, ибо его низшее возбужденное состояние имеет очень большую энергию ~ 21 МэВ. Поэтому резонансных максимумов на кривой $S(E)$ быть не должно.

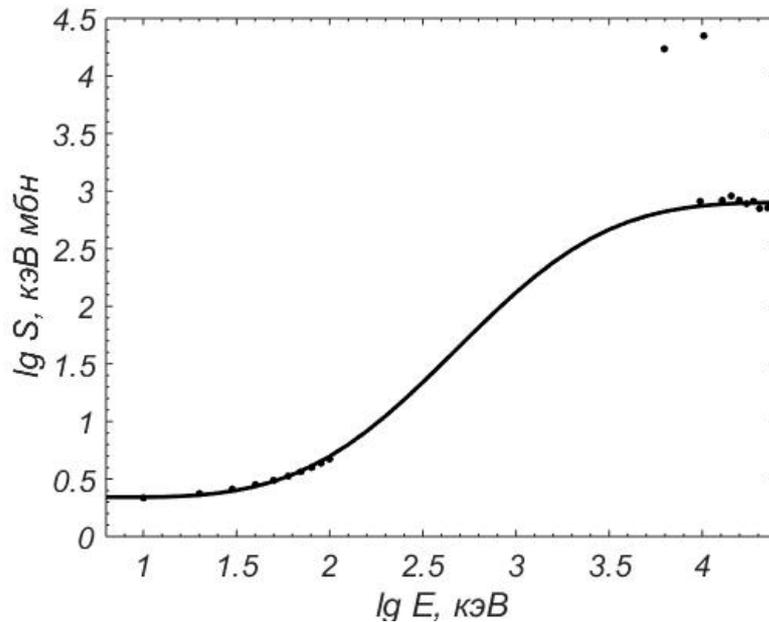


Рис. 11. S-фактор реакции $T + p \rightarrow \gamma + {}^4_2\text{He}$, обозначения соответствуют рис. 7

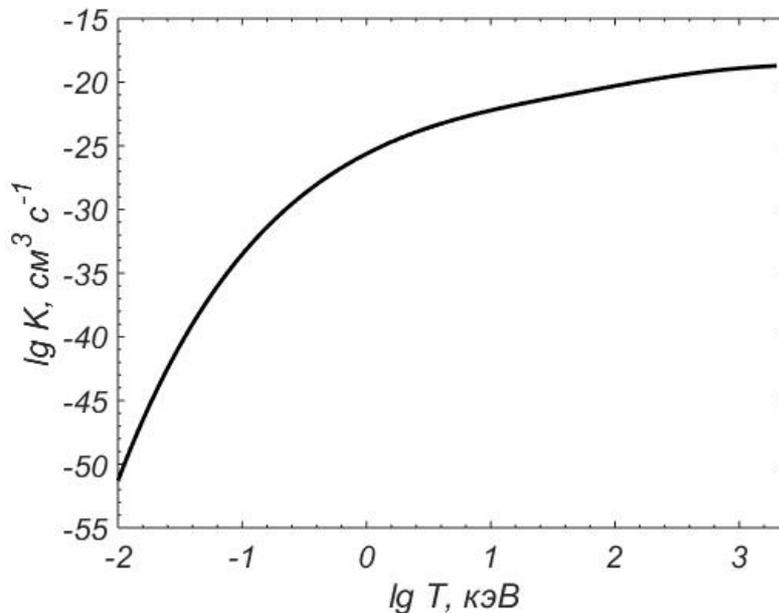


Рис. 12. Скорость реакции $T + p \rightarrow \gamma + {}^4_2\text{He}$

Это позволяет совместно обработать оба участка экспериментальных данных описанным выше методом. Полученная кривая приведена на рис. 11. Оценка погрешности расчетного S-фактора методом виртуального

эксперимента дает 2 – 3% в районе средних энергий и до 4% в промежуточной области (в которой данных нет).

Экспериментальные данные начинаются с энергии 10 кэВ. Для этой реакции имеется мало экспериментальных точек, и визуально выход экспериментальных значений $S(E)$ на константу просматривается хуже. Однако аппроксимирующая кривая хорошо выходит на горизонтальную прямую. Поэтому экстраполяцию на $E \rightarrow 0$ можно считать надежной.

Соответствующие значения $K(T)$ и их погрешности приведены на рис. 12. Погрешность составляет 1.5 – 5% во всем рассматриваемом диапазоне температур.

Заключение

Для реакций $T + T \rightarrow 2n + {}^4_2\text{He}$, $D + p \rightarrow \gamma + {}^3_2\text{He}$ и $T + p \rightarrow \gamma + {}^4_2\text{He}$ построены аппроксимации рекордно высокой точности для S-факторов и скоростей реакций в широком диапазоне энергий и температур. Точность построенных кривых существенно превышает мировой уровень, и ее величина надежно определена по правилам статистики. Она настолько высока, что в течение многих лет построенные кривые вряд ли будут нуждаться в пересмотре.

Отметим важные преимущества использованного метода обработки. Во-первых, он позволяет уверенно экстраполировать $S(E)$ на энергии, гораздо меньшие реализуемых в экспериментах. Во-вторых, он позволяет разумно интерполировать сечения даже в достаточно широких промежуточных участках, где отсутствуют экспериментальные данные. Это позволяет находить скорости реакций в огромном диапазоне температур, включая низкие температуры зажигания мишеней.

Таким образом, ранее аппроксимированные реакции (1) совокупно с реакцией $T + T \rightarrow 2n + {}^4_2\text{He}$ вполне достаточны для расчета задач управляемого термоядерного синтеза. Две другие реакции из (3) целесообразно учитывать на начальном этапе зажигания мишени. Вкладом реакций (4), по-видимому, можно пренебречь.

Работа поддержана грантом РФФИ 16-11-10001-П.

Литература

1. NEA Data Bank – Nuclear Data Services. <http://www.oecd-nea.org/janisweb/search/exfor>
2. NIST Standard Reference Data – <https://www.nist.gov/srd>
3. *Абрамович С.Н., Гужовский Б.Я., Жеребцов В.А., Звенигородский А.Г.* Ядерно-физические константы термоядерного синтеза. Справочное пособие. М.: ЦНИИАтоминформ, 1989.

4. *Козлов Б.Н.* Скорости термоядерных реакций // Атомная энергия. 1962. Т. 12. № 3. С. 238 – 240
5. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Обработка экспериментальных кривых регуляризованным методом двойного периода // Доклады Академии Наук. 2016. Т. 470, № 3, С. 266 – 270.
6. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Регуляризация метода двойного периода при обработке экспериментальных данных // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017, Т. 57, № 11, С. 7 – 17.
7. *Belov A.A., Kalitkin N.N., Kozlitin I.A.* Refinement of thermonuclear reaction rates // Fusion Engineering and Design. 2019, Vol. 141, P. 51 – 58.
8. *Калиткин Н.Н., Козлитин И.А., Белов А.А.* База данных ТЕФИС. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва. <http://tefis.keldysh.ru>, <http://tefis.ru>
9. *Гамов Г.А.* Очерк развития учения о строении атомного ядра. Теория радиоактивного распада // Успехи физических наук. 1930, Т. 10, № 4, С. 531^о– 544.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика, изд. 6-е. М.: Физматлит, 2004.
11. *Днестровская Е.Ю., Калиткин Н.Н.* Регрессия экспериментальных кривых// Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1987, № 181, 24 с.
12. Los Alamos Scientific Lab. Reports, number 7722-PR, page 1, 1978/12
13. *Bosch H.-S., Hale G.M.* Improved formulas for fusion cross-sections and thermal reactivities // Nuclear Fusion. 1992, Vol. 32, P. 611.

Оглавление

Введение.....	3
Отбор реакций	5
Реакции между изотопами Н и He.....	7
Реакции с участием изотопов Li.....	10
Метод обработки	19
Результаты обработки.....	23
Реакция $T + T \rightarrow 2n + {}^4_2\text{He}$	23
Реакция $D + p \rightarrow \gamma + {}^3_2\text{He}$	24
Реакция $T + p \rightarrow \gamma + {}^4_2\text{He}$	25
Заключение	27
Литература	27