



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 128 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Шатров О.А., Щерица О.В.,
Мажорова О.С.

Численное исследование
конвекции Рэлея-Бенара в
области большого размера

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Шатров О.А., Щерица О.В., Мажорова О.С. Численное исследование конвекции Рэлея-Бенара в области большого размера // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 128. 19 с. <http://doi.org/10.20948/prepr-2019-128>
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-128>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

О.А. Шатров, О.В. Щерица, О.С. Мажорова

Численное исследование конвекции Рэлея-Бенара
в области большого размера

Москва — 2019

Шатров О.А., Щерица О.В., Мажорова О.С.

Численное исследование конвекции Рэлея-Бенара в области большого размера

Представлено исследование тепловой конвекции в плоском горизонтальном слое жидкости. Основу математической модели составляют уравнения Навье-Стокса и уравнение конвективного теплопереноса. Представлены результаты трехмерного моделирования. Проведено исследование результатов расчетов на основе Фурье-анализа картины течения.

Ключевые слова: Конвекция Рэлея-Бенара, математическое моделирование, Фурье-анализ.

***Oleg Alexandrovich Shatrov, Olga Vladimirovna Shcheritsa,
Olga Semenovna Mazhorova***

Numerical study of Rayleigh-Benard convection in a large domain

The study of thermal convection in a horizontal liquid layer is presented. The mathematical model is based on the Navier-Stokes equations and the convective heat transfer equation. The results of three-dimensional modeling are presented. The Fourier analysis of the results of calculations is carried out.

Key words: Rayleigh-Benard convection, mathematical modeling, Fourier analysis.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18 – 01 – 00436.

1. Введение

В данной работе методами на основе Фурье анализа изображений проводится исследование тепловой конвекции в плоском горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу. Конвекция Рэлея-Бенара, пожалуй, тот тип конвективного движения, который наиболее тщательно исследован. Известно, что при потере устойчивости в горизонтальном бесконечном слое жидкости, подогреваемом снизу, возникает течение в форме двумерных валов [1]. Исследования устойчивости валиковых течений позволили на плоскости (k, Ra) , где k — волновое число, Ra — число Рэлея, построить нейтральные кривые, ограничивающие область устойчивости, так называемый баллон Буссе [2–4]. С ростом надкритичности валы теряют устойчивость, формируются вторичная неустойчивость: неустойчивость Экхауза, зигзаговая, узелковая, колебательная и т.д. [5–7]. В области параметров, соответствующих устойчивым валам, в экспериментах и результатах моделирования конвекции Рэлея-Бенара в ограниченной области было получено течение, состоящее из спиралей, постоянно возникающих и исчезающих, и кусочков валов [8–10]. Такое течение называется хаосом спиральных дефектов. Перечень неустойчивостей с указанием диапазонов чисел Рэлея и Прандтля, в которых эти неустойчивости могут проявиться, приведен в книге [11, с. 130].

В данной работе представлены результаты математического моделирования конвекции Рэлея-Бенара в области большого размера (аспектное соотношение 64) для значения числа Прандтля $Pr = 1$ и надкритичности $\epsilon \in [0, 9]$, где $\epsilon = (Ra - Ra_{cr})/Ra_{cr}$, Ra_{cr} — критическое число Рэлея. С помощью ранее разработанного комплекса параллельных программ [12] были проведены расчеты на подробных пространственных сетках и больших временных интервалах до 300 конвективных времен. Расчеты позволили проиллюстрировать сценарий потери устойчивости валиковых структур, возникновение хаоса спиральных дефектов и появление колебательных эффектов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о тепловой конвекции в плоском горизонтальном слое жидкости. Верхняя и нижняя граница слоя поддерживаются при постоянной

температуре T_{top} и T_{bot} соответственно, $T_{top} < T_{bot}$. Основу математической модели составляют уравнения Навье – Стокса и уравнение конвективной теплопроводности. В безразмерном виде система уравнений имеет вид [13]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \Delta \mathbf{V} + \frac{Ra}{Pr} T \boldsymbol{\gamma}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \Delta T. \quad (3)$$

Задача рассматривается в декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) в области $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$. В системе уравнений (1) – (3) используются следующие обозначения: $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ – скорость движения жидкости, t – время, p – давление, T – температура, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ – оператор Гамильтона,

$\Delta = \nabla^2 = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}$ – оператор Лапласа, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) f$ – оператор конвективного переноса.

Боковая поверхность области теплоизолирована. На всех границах заданы условия прилипания и непротекания. В начальный момент времени ($t = 0$):

$$\mathbf{V} = 0, \quad T_0 = 1 - x_3.$$

В качестве независимых параметров обезразмеривания выбраны: высота области $L_* = L_3$, перепад температуры $\Delta T = 1$, время $t_\nu = L_*^2/\nu$; $Ra = g\beta\Delta TL_*^3/(\nu\kappa)$ – число Рэлея, $Pr = \nu/\kappa$ – число Прандтля. Здесь ν – вязкость, g – модуль ускорения свободного падения, β – коэффициент объемного расширения, κ – коэффициент теплопроводности.

Система уравнений Навье-Стокса решалась с помощью метода типа предиктор-корректор с использованием явной разностной схемы. Уравнение Пуассона для давления решалось методом дискретного преобразования Фурье. Уравнение теплопроводности также аппроксимировалось с помощью явной схемы. Используемый алгоритм детально описан в работе [12]. Расчеты проводились на гибридном вычислительном кластере К-60, который установлен в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

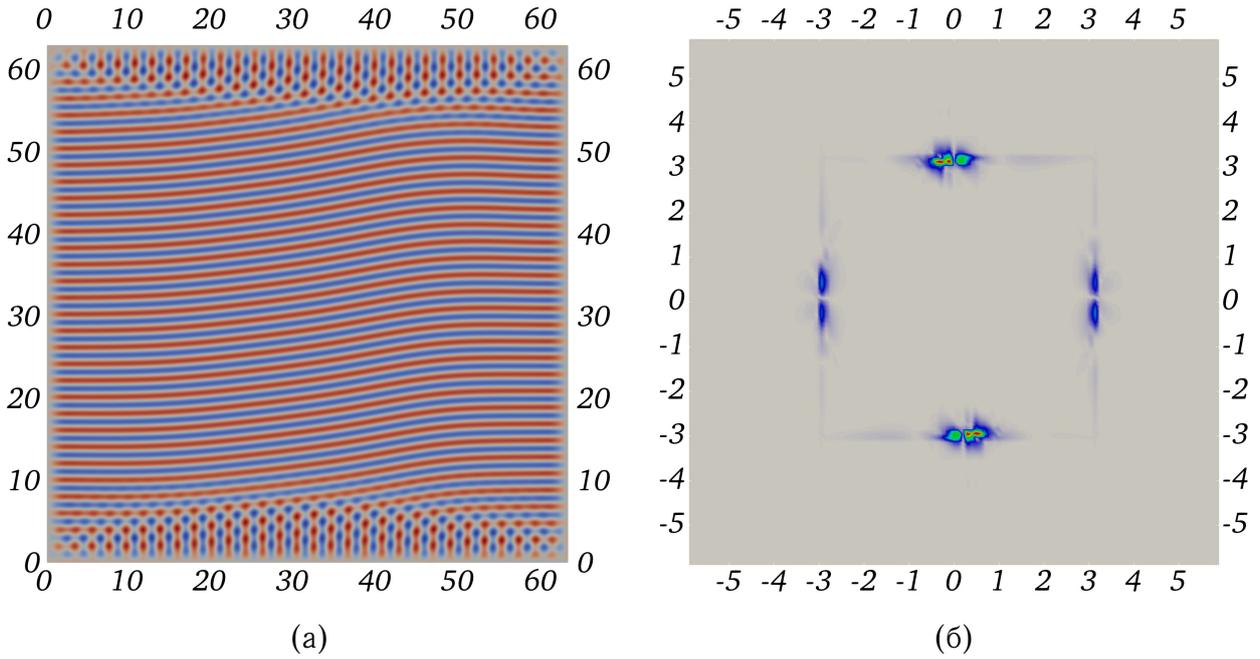


Рис. 1: Структура течения в сечении $x_3 = 0.5$, $Ra = 1.007Ra_{cr}$: (а) Вертикальная компонента вектора скорости, $E_{kin} = 0.5032$, красный цвет соответствует максимальной скорости восходящего потока 1.8, синий – максимальной скорости нисходящего потока -2.0 ; (б) Фурье-образ картины течения, $k = 3.1797$, серый цвет соответствует амплитуде $A = 0$, красный – максимальной амплитуде $A = 0.29$

3. Результаты расчетов

Расчеты проводились в области $L_1 = L_2 = 64$, $L_3 = 1$ на сетке $1024 \times 1024 \times 16$. Шаг по времени $\tau = 0.0005$.

Согласно линейной теории устойчивости в бесконечном слое жидкости с твердыми верхней и нижней границами существуют критическое число Рэля $Ra_{cr} = 1708$ и критическое волновое число $k_{cr} = 3.117$, при которых жидкость теряет устойчивое положение, начинается развитие конвективного движения [14]. В расчетах на сетке $1024 \times 1024 \times 16$ получено значение критического числа Рэля, близкое к теоретическому. На рисунке 1(а) показано распределение вертикальной компоненты вектора скорости при $Ra = 1720 = 1.007Ra_{cr}$ в момент времени $t = 1395t_\nu$. При таком значении числа Рэля течение является стационарным и представляет собой набор валов, занимающих практически всю расчетную область. Вблизи границ $x_2 = 0$ и $x_2 = L_2$ к этим валам примыкают поперечные валы, образуя структурные границы. Их появление согласуется с хорошо известной

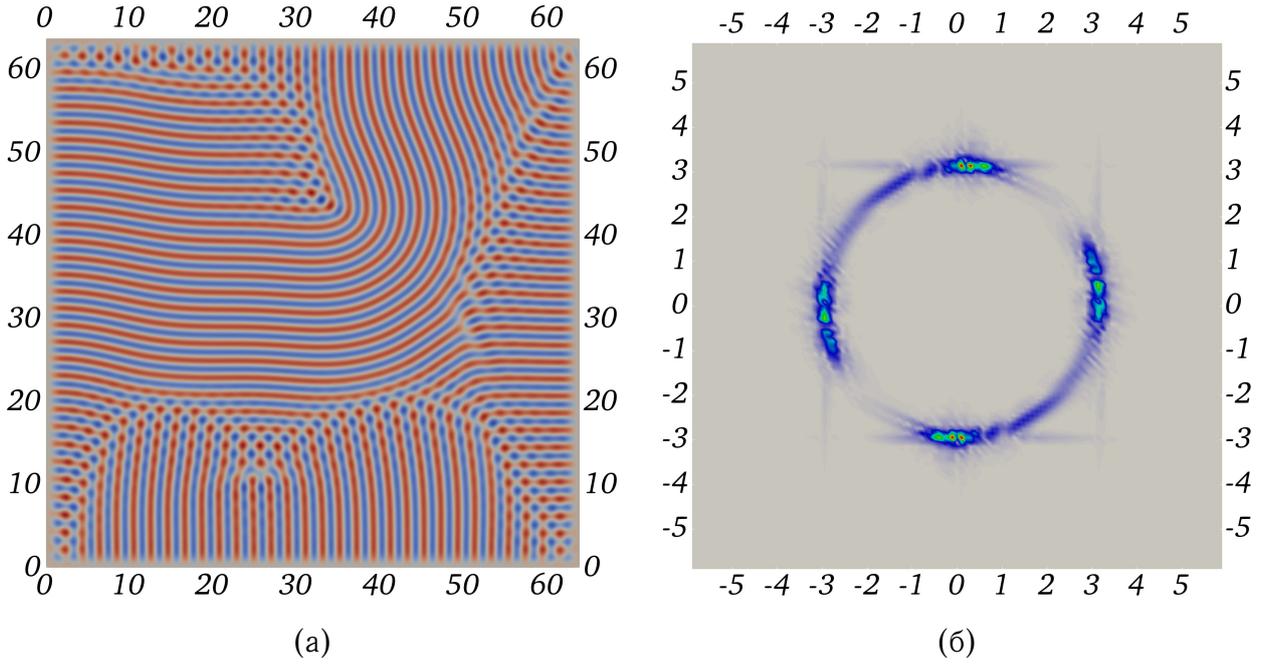


Рис. 2: Структура течения в сечении $x_3 = 0.5$, $Ra = 1.018Ra_{cr}$: (а) Вертикальная компонента вектора скорости, $E_{kin} = 0.8157$, красный цвет соответствует максимальной скорости восходящего потока 2.6, синий – максимальной скорости нисходящего потока -2.75 ; (б) Фурье-образ картины течения, $k = 3.1431$, серый цвет соответствует амплитуде $A = 0$, красный – максимальной амплитуде $A = 0.3$

тенденцией конвективных валов выстраиваться вблизи боковых стенок перпендикулярно им [11, стр. 89]. При небольшом увеличении надкритичности ($Ra = 1740 = 1.018Ra_{cr}$) структурные границы уже не располагаются на границе расчетной области, а начинают смещаться в центр (рис. 2(a)). Течение по-прежнему является стационарным, однако валы изогнулись.

Исследование конвективного течения проводилось с помощью Фурье-анализа [10, 15–17]. Распределение вертикальной компоненты скорости в горизонтальном сечении $x_3 = 0.5$, $V_z(x_{1,i}, x_{2,j}, 0.5) = f_{i,j}$ рассматривалось как дискретное изображение скорости течения (картина течения). К изображению $\{f_{i,j}\}$ применяли дискретное преобразование Фурье:

$$F_{ij} = \sum_{m=0}^{N_1-1} \sum_{n=0}^{N_2-1} f_{mn} \exp \left(-2\pi \tilde{i} \left[\frac{mi}{N_{x_1}} + \frac{nj}{N_{x_2}} \right] \right),$$

где \tilde{i} – мнимая единица, набор коэффициентов $\{F_{i,j}\}$ называется Фурье-образом изображения (спектром). Для описания Фурье-образа в данной работе использовались амплитуды $A_{ij} = A(k_{x_1,i}, k_{x_2,j}) = |F_{ij}|$. Волновые числа

k_{x_1} для направления x_1 задаются с шагом $2\pi/L_1$ и k_{x_2} для направления x_2 — с шагом $2\pi/L_2$, $k = \sqrt{k_{x_1,i}^2 + k_{x_2,j}^2}$ — волновое число гармоники с максимальной амплитудой (ведущее волновое число).

На рисунках 1(б) и 2(б) показаны Фурье-образы картин течений, возникающих при малой надкритичности. Ведущие волновые числа указанных течений $k = 3.1797$ и $k = 3.1431$ соответственно, что является хорошим приближением к теоретическим оценкам [11]. В течении при $Ra = 1.018Ra_{cr}$ валы не имеют строго выраженной ориентации (рис. 2(а)), поэтому в спектре, помимо ярких точек с максимальной амплитудой, есть еще пара точек с достаточно большой амплитудой, до 60% значения максимальной амплитуды в спектре (рис. 2(б)). Аналогичные локальные максимумы можно наблюдать и на рисунке 1(б), однако с ростом надкритичности количество таких локальных максимумов увеличивается, соответствующие им волновые вектора начинают заполнять окружность, располагаясь симметрично относительно центра $(0, 0)$.

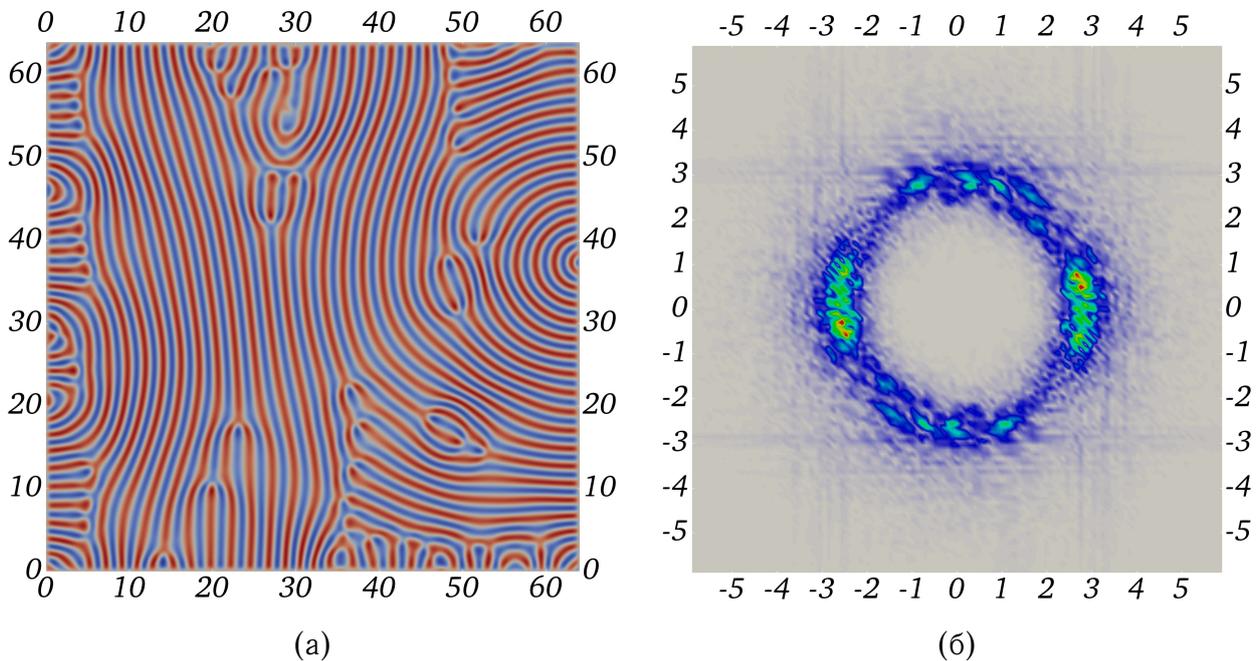


Рис. 3: Структура течения в сечении $x_3 = 0.5$, $Ra = 1.5Ra_{cr}$: (а) Вертикальная компонента вектора скорости, $E_{kin} = 15.7404$, красный цвет соответствует максимальной скорости восходящего потока 9.0, синий — максимальной скорости нисходящего потока -9.0 ; (б) Фурье-образ картины течения, $k = 2.7924$, серый цвет соответствует амплитуде $A = 0$, красный — максимальной амплитуде $A = 0.59$

С увеличением надкритичности течение перестает быть стационарным. На

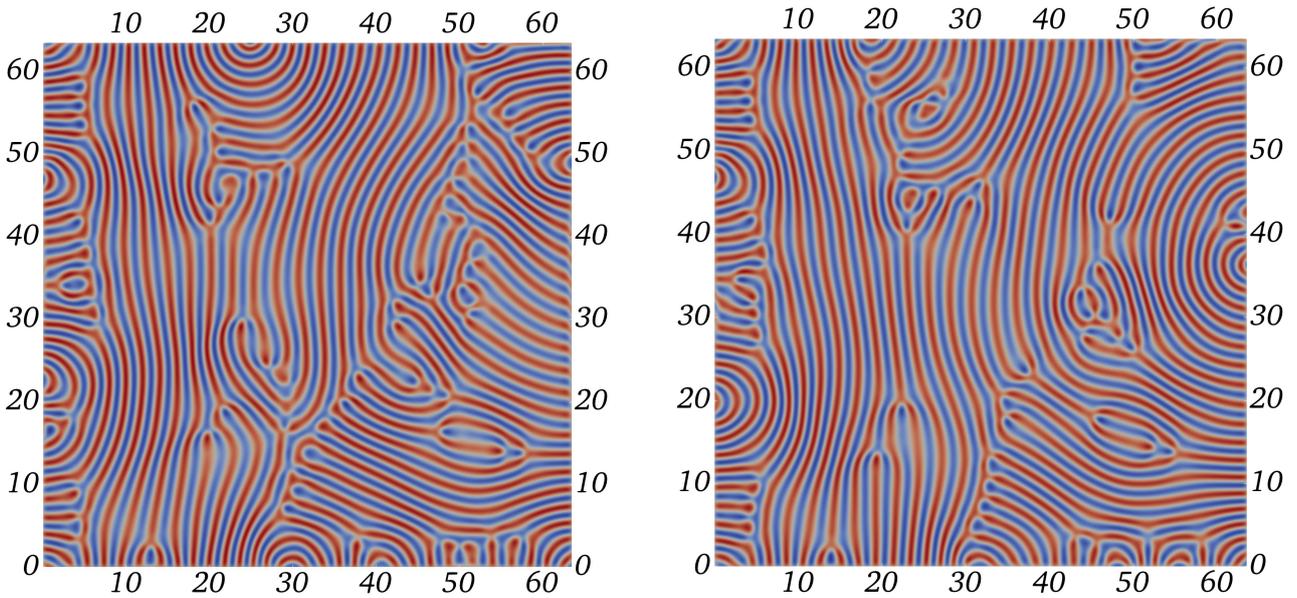


Рис. 4: Изменение структуры течения во времени, $Ra = 1.5Ra_{cr}$

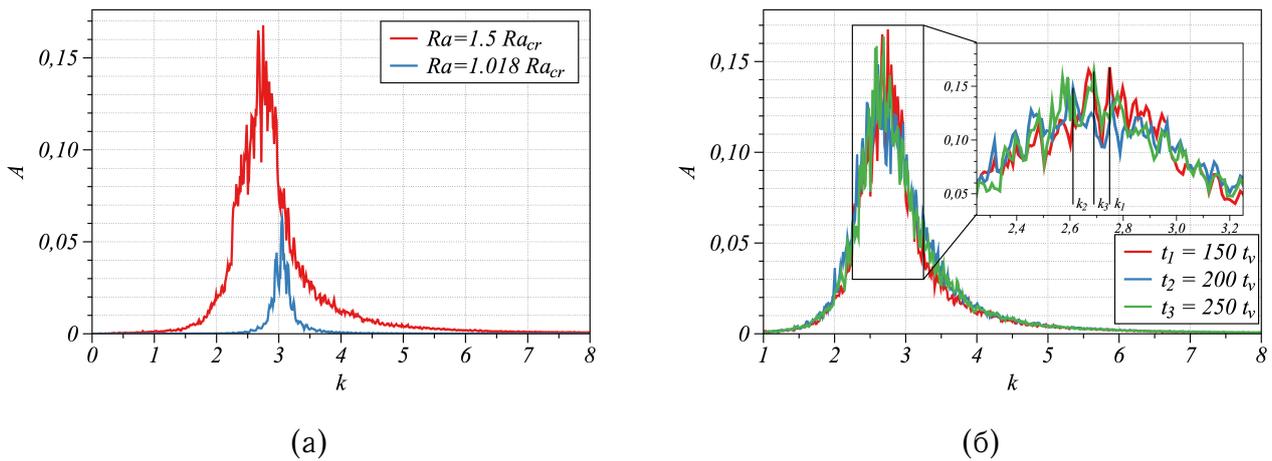


Рис. 5: Усредненный спектр. а) Увеличение ширины спектра с ростом надкритичности; б) Изменение усредненного спектра во времени, $Ra = 1.5Ra_{cr}$

рисунке 3 показана вертикальная компонента скорости при $Ra = 1.5Ra_{cr}$ и Фурье-образ картины полученного течения, которое еще похоже на валиковое, однако появляются дефекты. Основную часть этих дефектов составляют дислокации [11]. С течением времени дислокации могут мигрировать по расчетной области, исчезать в одном месте и появляться в другом (рис. 4). Возле границ области формируются дисклинации [11]. В картине спектра течения образуется почти полностью заполненное кольцо, соответствующее ненулевым амплитудам. В кольце выделяются две пары ярких точек, соответствующих ведущему волновому числу $k = 2.7924$. На рисунке 5 показан

усредненный по азимуту спектр. С ростом надкритичности кольцо в спектре становится шире. В случае надкритичности $Ra = 1.5Ra_{cr}$ в течении помимо валов, соответствующих ведущей моде, присутствуют валиковые структуры большого масштаба (их волновые числа лежат левее ведущей моды). Тече-

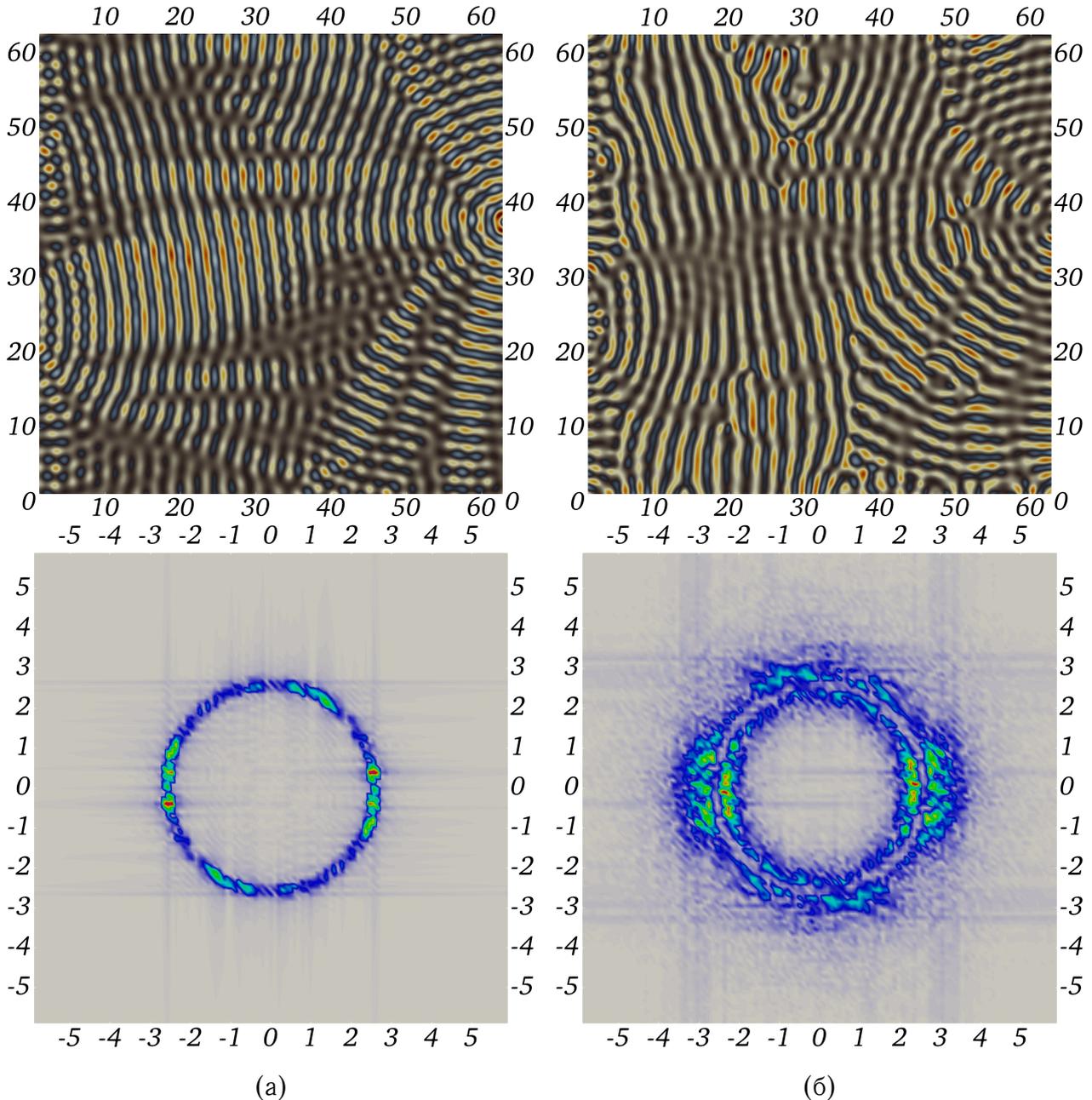


Рис. 6: Результаты обработки полосовым фильтром течения при $Ra = 1.5Ra_{cr}$. (а) $k \in (0.95k_0, 1.1k_0)$, соответствующий Фурье-образ картины течения, полученной в результате фильтрации изображения, максимальная амплитуда $A = 0.52$; (б) $k \notin (0.95k_0, 1.1k_0)$ соответствующий Фурье-образ картины течения, полученной в результате фильтрации изображения, максимальная амплитуда $A = 0.3$

ние нестационарное, оно перестраивается, однако ширина кольца в спектре постоянна, лишь немного изменяется ведущая мода (см. рис. 5 (б)).

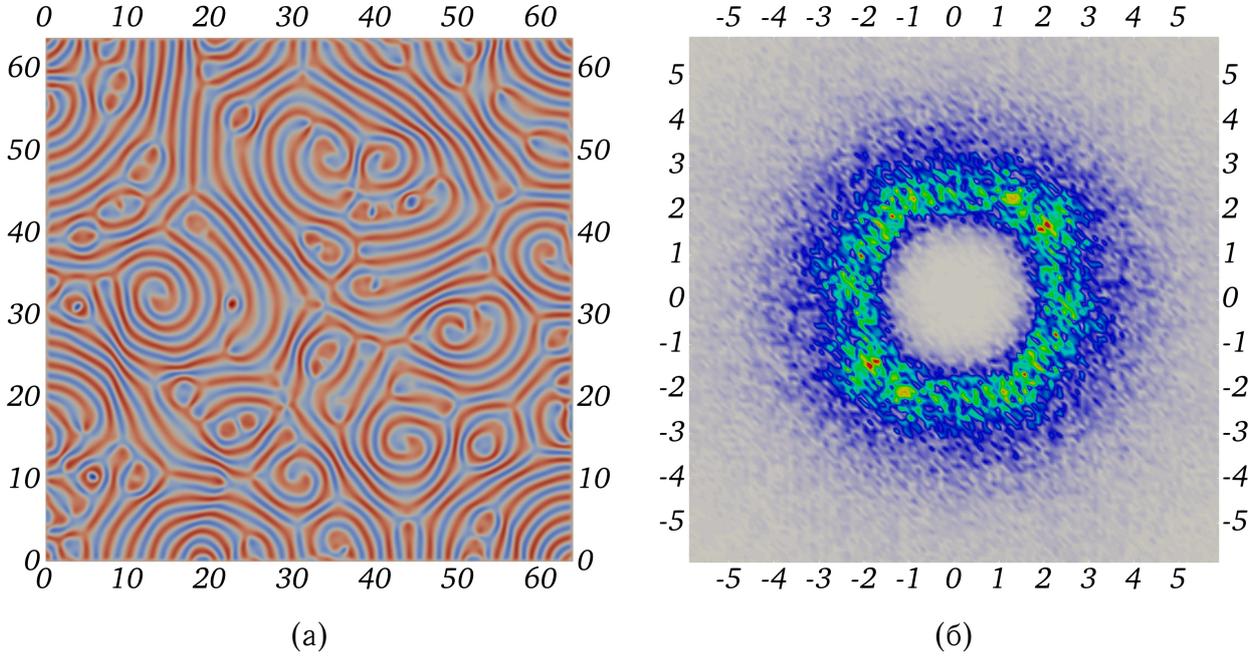


Рис. 7: Структура течения в сечении $x_3 = 0.5$, $Ra = 2Ra_{cr}$: (а) Вертикальная компонента вектора скорости, $E_{kin} = 29.5401$, красный цвет соответствует максимальной скорости восходящего потока 15.0, синий – максимальной скорости нисходящего потока -18.0 ; (б) Фурье-образ картины течения, $k = 2.6525$, серый цвет соответствует амплитуде $A = 0$, красный – максимальной амплитуде $A = 0.41$

Поскольку кольцо в Фурье-образе картины течения при $Ra = 1.5Ra_{cr}$ достаточно широкое, можно с помощью полосового фильтра выделить из структуры течения валиковые структуры, отвечающие ведущей моде. Полосовой фильтр позволяет в картине течения выделить структуры, соответствующие диапазону волновых чисел $[k_{min}, k_{max}]$. На рисунке 6(а) показаны структуры, волновые числа которых лежат в диапазоне $(0.95k_0, 1.1k_0)$, где k_0 — ведущая мода спектра течения, остальные структуры приведены на рисунке 6(б). Таким образом, картина течения при $Ra = 1.5Ra_{cr}$ (рис. 3(а)), представлена в виде суммы структур с волновым числом $k \in (0.95k_0, 1.1k_0)$ и волновым числом $k \notin (0.95k_0, 1.1k_0)$. Видно, как вал вдоль своей оси меняет размер, соответствуя то одному волновому числу, то другому. Валы, соответствующие большим волновым числам, сжимаются в направлении, перпендикулярном оси вала, сдавливая друг друга, и, напротив, там где валы соответствуют меньшим волновым числам, — расширяются. Это можно заметить и по кон-

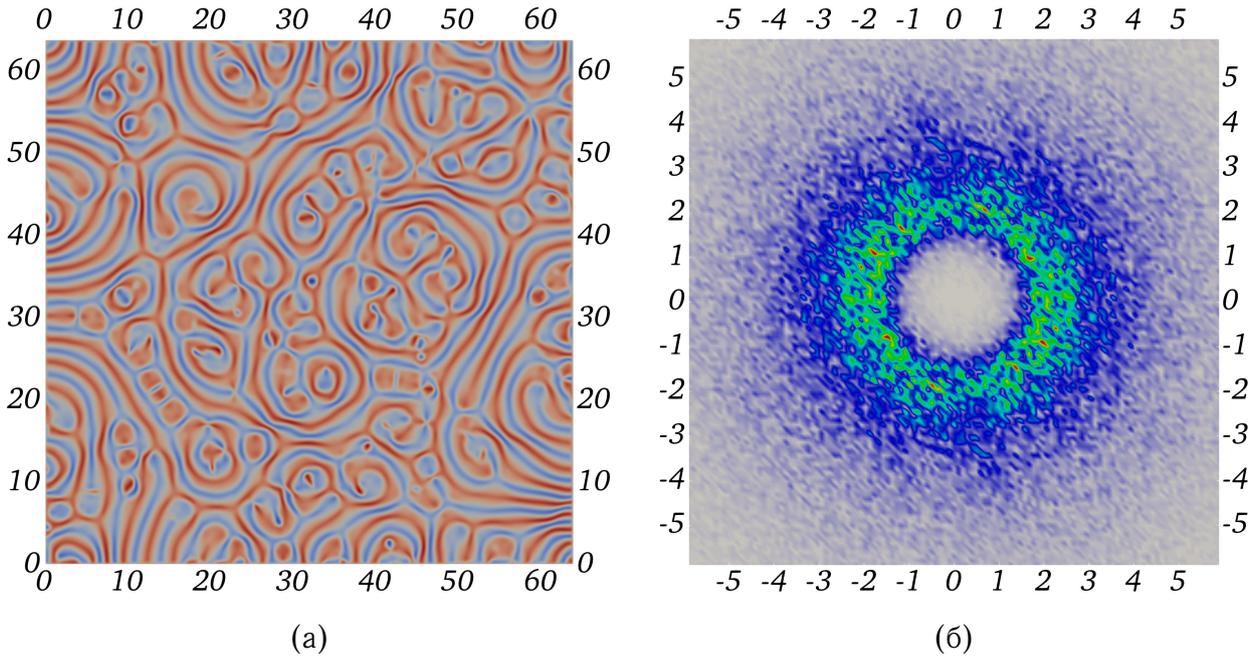


Рис. 8: Структура течения в сечении $x_3 = 0.5$, $Ra = 3Ra_{cr}$: (а) Вертикальная компонента вектора скорости, $E_{kin} = 59.6345$, красный цвет соответствует максимальной скорости восходящего потока 21., синий – максимальной скорости нисходящего потока -24.5 ; (б) Фурье-образ картины течения, $k = 1.9363$, серый цвет соответствует амплитуде $A = 0$, красный – максимальной амплитуде $A = 0.75$

трастности рисунка 3 (а), на котором приведено исходное течение: там, где переход от синего к красному происходит резко, валы соответствуют большим волновым числам, переход менее резкий – малые волновые числа.

При увеличении надкритичности течение перестает напоминать привычную картину валиковых структур. Течения, возникающие при $Ra = 2Ra_{cr}$ и $Ra = 3Ra_{cr}$, показаны на рисунках 7 и 8 соответственно. Такие течения носят название хаоса спиральных дефектов. Данный вид течения не предсказывается слабо линейной теорией устойчивости [13], оно возможно только в случае ограниченной области. В течении происходит постоянное вращение жидкости по спирали, при этом, как только одна такая спираль пропадает, в другом месте может появиться новая. В спектрах таких течений наблюдаются уже плотно заполненные кольца.

Дальнейшее увеличение числа Рэлея приводит к возникновению колебательных процессов. Конвекция, возникающая при $Ra = 5Ra_{cr}$, является переходным режимом. Структура течения и его спектр показаны на рисунке 9. В картине течения по-прежнему наблюдается хаос спиральных дефектов, од-

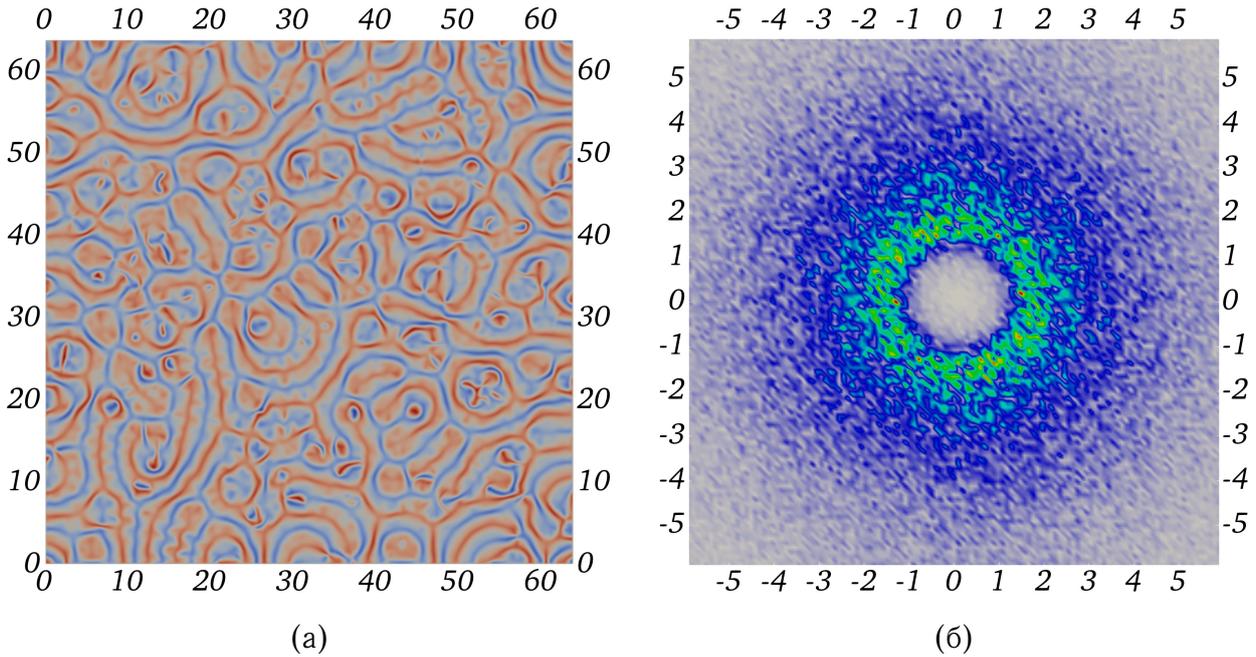


Рис. 9: Структура течения в сечении $x_3 = 0.5$, $Ra = 5Ra_{cr}$: (а) Вертикальная компонента вектора скорости, $E_{kin} = 122.7658$, красный цвет соответствует максимальной скорости восходящего потока 33.0, синий – максимальной скорости нисходящего потока -36.0 ; (б) Фурье-образ картины течения, $k = 1.4857$, серый цвет соответствует амплитуде $A = 0$, красный – максимальной амплитуде $A = 0.92$

нако по валиковым структурам начинают распространяться волны, при этом Фурье-образ картины данного течения мало отличается от изображенных на рисунках 7(б) и 8(б).

Колебательные процессы становятся более заметными при $Ra = 8Ra_{cr}$ и $Ra = 10Ra_{cr}$, соответствующие структуры течения приведены на рисунках 10 и 11. Эти течения характеризуются колебаниями восходящих и нисходящих листовидных потоков жидкости. В то же время в случае обоих течений еще наблюдаются остатки хаоса спиральных дефектов. Особенно это заметно при $Ra = 8Ra_{cr}$ в силу наличия спирали большого размера, находящейся чуть левее центра рисунка 10(а). На рисунке 12 приведен усредненный по времени и по азимуту спектр течения при $Ra = 10Ra_{cr}$. Помимо максимума, соответствующего ведущей моде, в высокочастотном диапазоне (правее максимума) наблюдается «плато». Это плато начинает формироваться при $Ra = 5Ra_{cr}$, его высота и ширина увеличиваются с ростом надкритичности. В спектре течения при $Ra < 5Ra_{cr}$ такого плато нет, и есть только выраженный максимум, соответствующий ведущему волновому числу. Картина

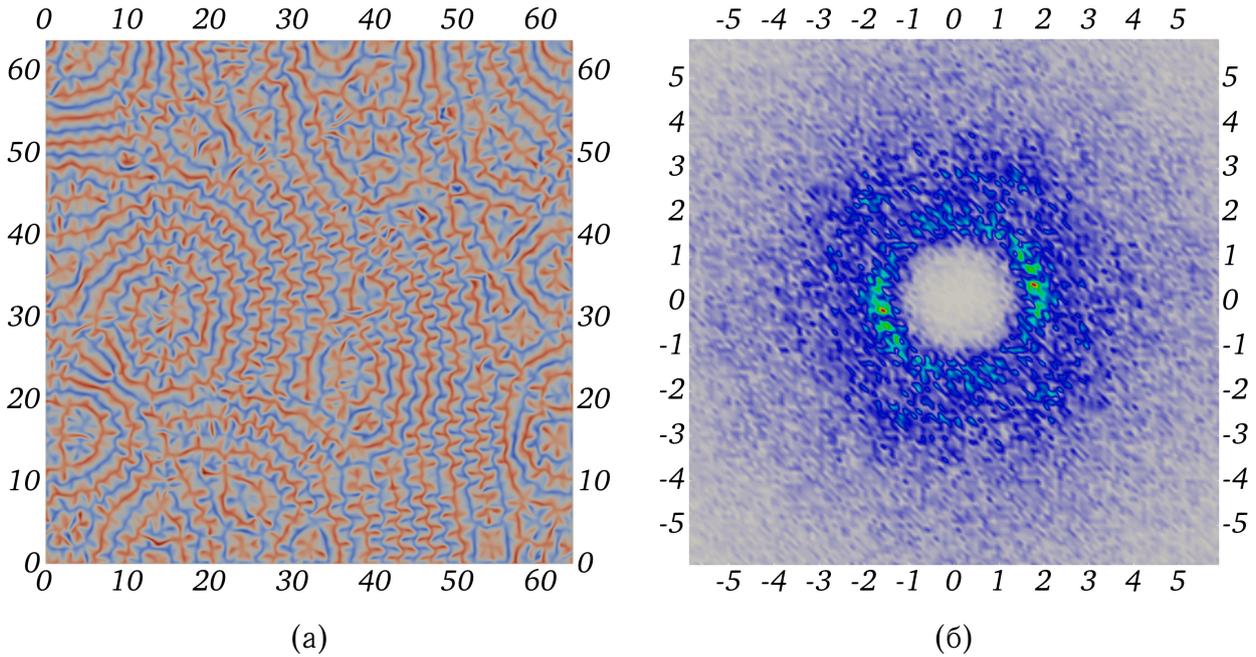


Рис. 10: Структура течения в сечении $x_3 = 0.5$, $Ra = 8Ra_{cr}$: (а) Вертикальная компонента вектора скорости, $E_{kin} = 256.0149$, красный цвет соответствует максимальной скорости восходящего потока 45.5, синий – максимальной скорости нисходящего потока -45.5 ; (б) Фурье-образ картины течения, $k = 1.8103$, серый цвет соответствует амплитуде $A = 0$, красный – максимальной амплитуде $A = 1.12$

спектра при $Ra < 5Ra_{cr}$ похожа на спектры, приведенные на рисунке 5. Полосовый фильтр позволяет в картине течения выделить структуры, соответствующие ведущему волновому числу и плато [18]. На рисунке 13 представлен результат обработки полосовым фильтром течения при $Ra = 10Ra_{cr}$ (рис. 11). Полосовый фильтр выделил структуры, соответствующие ведущей моде (рис. 13 (а)), которые похожи на хаос спиральных дефектов. В то же время, на рисунке 13 (б)) приведены мелкомасштабные структуры: видны листовидные потоки, которые есть на рисунке 11, однако структура исходного течения не просматривается. Заметим, что сложение низкочастотной составляющей с высокочастотной дает картину течения, приведенную на рисунках 11.

Проводилось исследование влияния размера области на картину установившегося течения. Рассматривались аспектные соотношения $L = 16, 32, 64$. В расчетах установлено, что усредненный спектр при аспектном соотношении более 16 не зависит от размера области.

Известно, что в течениях валиковой структуры ведущее волновое чис-

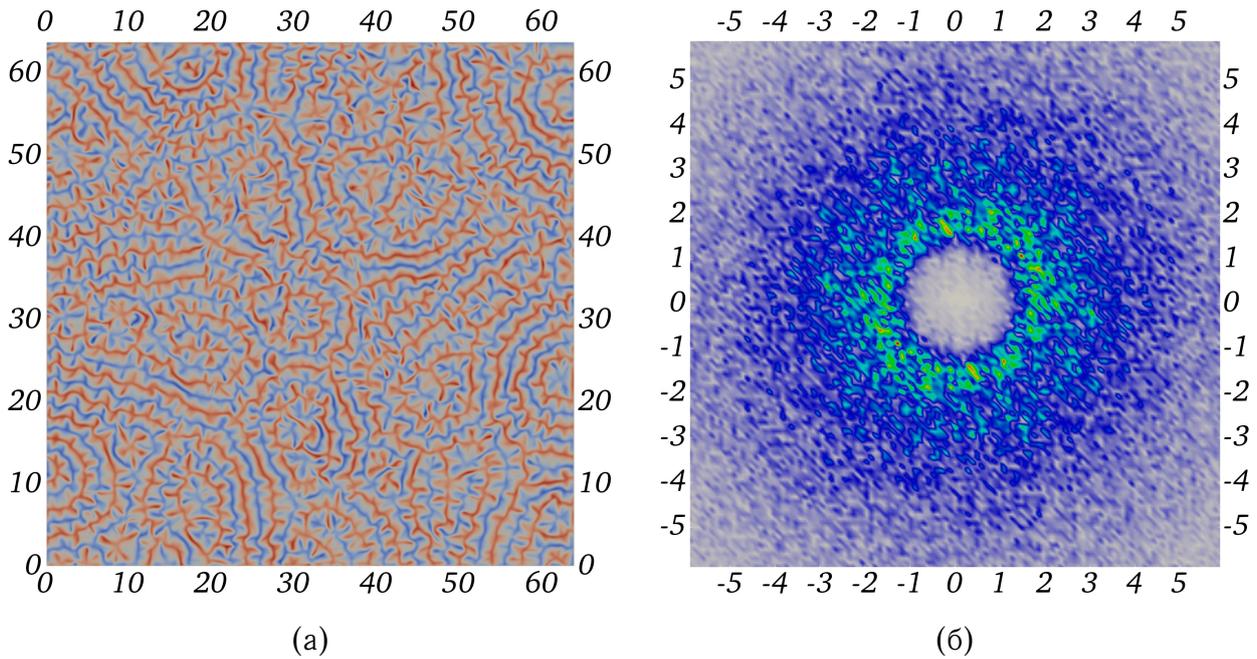


Рис. 11: Структура течения в сечении $x_3 = 0.5$, $Ra = 10Ra_{cr}$: (а) Вертикальная компонента вектора скорости, $E_{kin} = 342.7258$, красный цвет соответствует максимальной скорости восходящего потока 51.2, синий – максимальной скорости нисходящего потока -54.5 ; (б) Фурье-образ картины течения, $k = 1.8262$, серый цвет соответствует амплитуде $A = 0$, красный – максимальной амплитуде $A = 0.96$

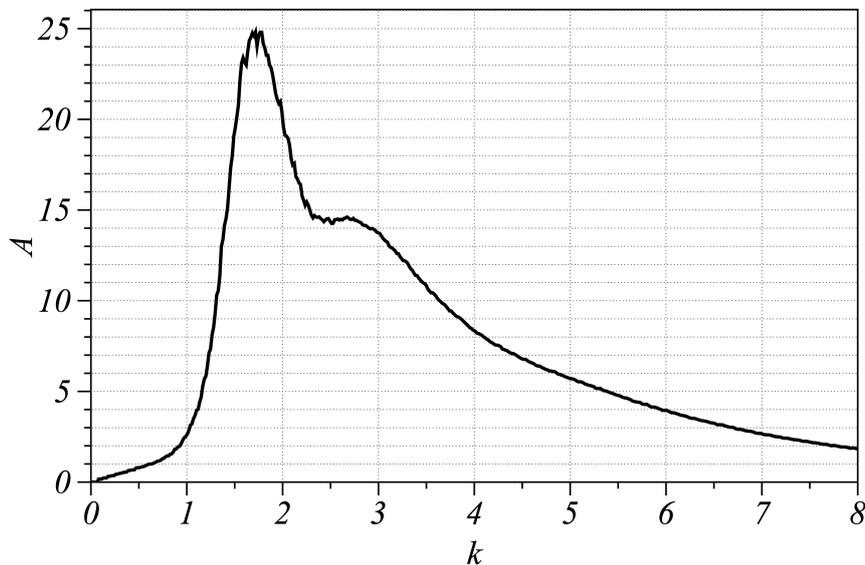


Рис. 12: Усредненный спектр по времени. $Ra = 10Ra_{cr}$

ло убывает с ростом надкритичности [19–21], т.е. масштаб структур растет. В проведенных расчетах наблюдается такая же тенденция (рис. 14). Стоит отметить, что в случае нестационарной конвекции спектр течения и его

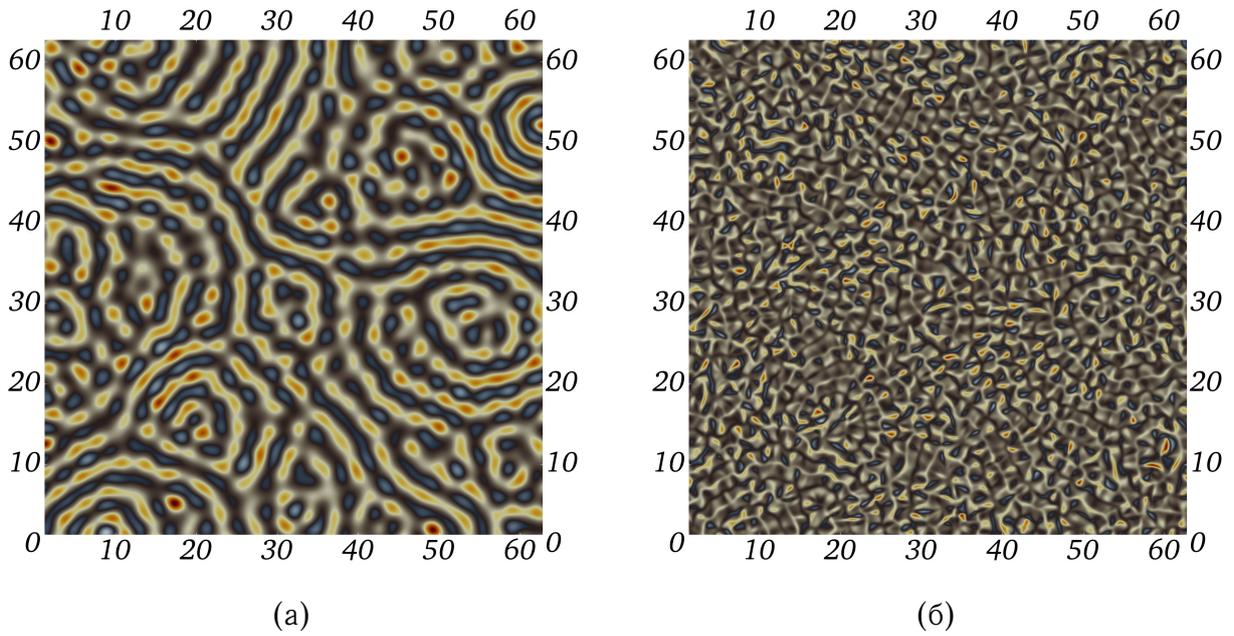


Рис. 13: Результаты обработки картины течения полосовым фильтром. $Ra = 10Ra_{cr}$ (а) структуры течения, соответствующие ведущей моде, $k \in [1.6, 1.7]$, (б) структуры течения, соответствующие волновым числам в диапазоне $k \in [2.3, 2.9]$.

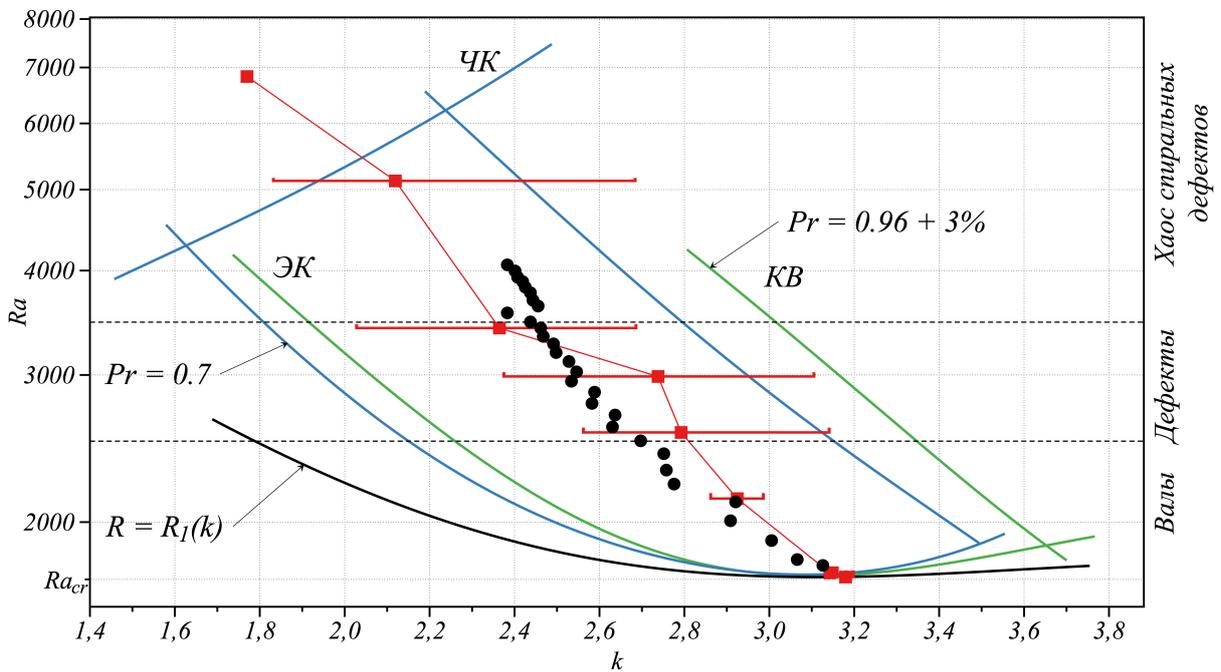


Рис. 14: Область устойчивости бесконечных пространственно-периодических систем валов на плоскости (k, Ra) . R_1 – нейтральная кривая, синяя сплошная линия – граница баллона Буссе для $Pr = 0.7$, зеленая сплошная линия – граница баллона Буссе для $Pr = 0.96$. ЧК – четная колебательная неустойчивость. Эк – неустойчивость Экхауза. КВ – косоварикозная неустойчивость. Черные кружки – результаты статьи [17], красные квадраты – результаты расчетов, представленных в данной работе.

волновое число зависят не только от величины надкритичности, но и от рассматриваемого момента времени. Красными интервалами на рисунке 14 указано изменение ведущего волнового числа в течение времени от $100t_\nu$ до $300t_\nu$. Ведущее волновое число хаоса спиральных дефектов, полученное при $Ra = 3Ra_{cr}$, попало в баллон Буссе, который соответствует валиковым течениям. Аналогичный результат описан в работе [8].

4. Выводы

Проведена серия расчетов, моделирующих конвекцию Рэлея-Бенара в прямоугольной области $64 \times 64 \times 1$ для значений числа Рэлея от Ra_{cr} до $10Ra_{cr}$ и числа Прандтля $Pr = 1$. Проведен анализ спектра возникающих течений. Течение инициировалось за счет задания случайного возмущения в поле температуры. Были получены валиковые стационарные и нестационарные течения при $Ra \in [Ra_{cr}, 2Ra_{cr}]$. Ведущие волновые числа соответствующих спектров течения попадают в область устойчивости валов (баллон Буссе). В диапазоне значений числа Рэлея $Ra \in [2Ra_{cr}, 5Ra_{cr}]$ наблюдался хаос спиральных дефектов. Размер спиралей уменьшался с ростом надкритичности. В течении при $Ra \in [5Ra_{cr}, 10Ra_{cr}]$ получены колебательные эффекты. Крупномасштабная структура течения при $Ra \in [5Ra_{cr}, 10Ra_{cr}]$ представляет собой хаос спиральных дефектов, при этом с ростом надкритичности, точно также как в случае $Ra \in [2Ra_{cr}, 5Ra_{cr}]$, размер спиралей уменьшается. В то же время и мелкомасштабная составляющая течения уменьшается.

Список литературы

1. Schlüter A., Lortz D., Busse F. On the stability of steady finite amplitude convection // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 23, Pt 1. P. 129–144.
2. Busse F.H. The oscillatory instability of convection rolls in a low Prandtl number fluid // J. Fluid Mech. 1972. Vol. 52, Pt 1. P. 97–112.
3. Clever R.M., Busse F.H. Transition to time-dependent convection // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 65, Pt 4. P. 625–645.

4. Busse F.H., Clever R.M. Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number // *J. Fluid Mech.* 1979. Vol. 91, Pt 2. P. 319–335.
5. Bolton E.W., Busse F.H., Clever R.M. Oscillatory instability of convection rolls at intermediate Prandtl numbers // *J. Fluid Mech.* 1986. Vol. 164. P. 469–485.
6. Clever R.M., Busse F.H. Three-dimensional knot convection in a layer heated from below // *J. Fluid Mech.* 1989. Vol. 198. Pp. 345–363.
7. Clever R.M., Busse F.H. Nonlinear oscillatory convection // *J. Fluid Mech.* 1987. Vol. 176. Pp. 403–417.
8. Bodenschatz E., Bruyn J.R., Ahlers G., Cannell D.S. Transitions between Patterns in Thermal Convection // *Physical review letters.* 1991. Vol. 67. Pp. 3078–3081.
9. Liu J., Ahlers G. Spiral-Defect Chaos in Rayleigh-Bénard Convection with Small Prandtl Numbers // *Physical review letters.* 1996. Vol. 77. Pp. 3126–3129.
10. Egolf D.A., Melnikov I.V., Bodenschatz E. Importance of Local Pattern Properties in Spiral Defect Chaos // *Physical review letters.* 1998. Vol. 80. Pp. 3228–3231.
11. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея-Бенара. Структуры и динамика. М.: Мир, 1980. 247 с.
12. Шатров О.А., Щерица О.В., Мажорова О.С. Параллельный алгоритм для решения уравнений термогравитационной конвекции // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2018. № 239. 21 с. DOI:10.20948/prepr-2018-239.
13. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
14. Busse F.H. Non-linear properties of thermal convection // *Reports on Progress in Physics.* 1978. Vol. 41, no. 12. Pp. 1929–1967. DOI:10.1088/0034-4885/41/12/003.

15. Щерица О.В., Мажорова О.С. Методы исследования конвективных течений со сложной структурой // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 241. 33 с. DOI:10.20948/prepr-2018-241.
16. Xi H., Gunton J.D., Viñals J. Spiral Defect Chaos in a Model of Rayleigh-Benard Convection // Physical review letters. 1993. Vol. 71. Pp. 2030–2033.
17. Morris S.W., Bodenschatz E., Cannel D.S., Ahlers G. Spiral Defect Chaos in Large Aspect Ratio Rayleigh-Benard Convection // Physical review letters. 1993. Vol. 71. Pp. 2026–2029.
18. Блейкхут Р.Е. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989. 220 с.
19. Martinet B., Haldenwang G., Labrosse G. and Payan J.C. and Payan R. Rayleigh-Benard instability: Experimental study of the wavenumber selection // In book: Cellular Structures in Instabilities. 1984. Pp. 33–42. DOI:10.1007/3-540-13879-X_68.
20. Farhadieh R., Tankin R.S. Interferometric study of two-dimensional Bénard convection cells // Journal of Fluid Mechanics. 1974. Vol. 66, no. 4. Pp. 739–752. DOI:10.1017/S0022112074000486.
21. Willis G.E., Deardorff J.W., Somerville R.C.J. Roll-diameter dependence in Rayleigh convection and its effect upon the heat flux // Journal of Fluid Mechanics. 1972. Vol. 54, no. 2. Pp. 351–367. DOI:10.1017/S0022112072000722.

Содержание

1. Введение	3
2. Постановка задачи	3
3. Результаты расчетов	5
4. Выводы	16
Список литературы	16