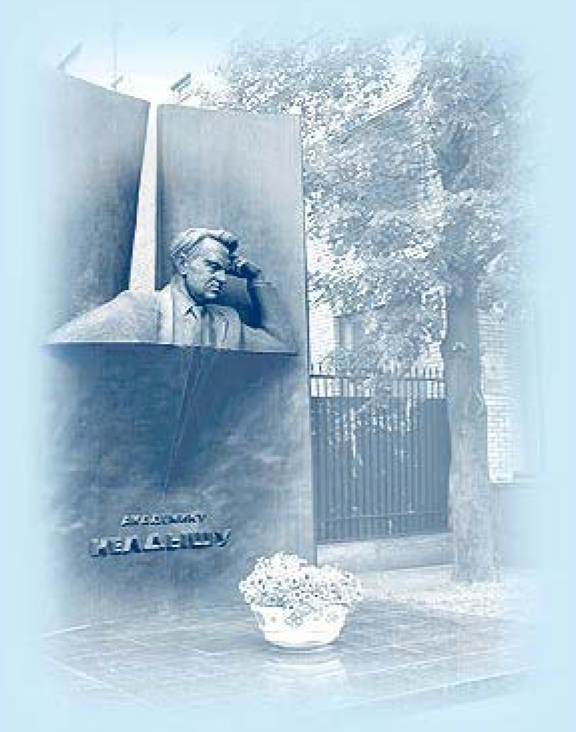
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 15 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колесниченко А.В.

К выводу симметричности матрицы кинетических коэффициентов Онсагера в рамках неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. К выводу симметричности матрицы кинетических коэффициентов Онсагера в рамках неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 15. 24 с. doi:10.20948/prepr-2019-15
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-15

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

К выводу симметричности матрицы кинетических коэффициентов Онсагера в рамках неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса

Москва — 2019

Колесниченко Александр Владимирович

К выводу симметричности матрицы кинетических коэффициентов Онсагера в рамках неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса.

В рамках неэкстенсивной статистической механики Тсаллиса выведены соотношения симметрии Онсагера для кинетических коэффициентов в линейных уравнениях регрессии для чётных и нечётных малых флуктуаций макроскопических параметров состояния. Эти соотношения отражают на макроскопическом уровне инвариантность микроскопических уравнений движения относительно обращения времени. Так же как в случае классической статистики Гиббса, проведенный вывод опирается на теорию равновесных флуктуаций динамических параметров состояния и на свойство инвариантности флуктуаций относительно инверсии времени. Кроме этого, был использован постулат Онсагера, согласно которому затухание равновесных флуктуаций термодинамических переменных описывается линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. Традиционные соотношения взаимности для экстенсивных систем получаются из выведенных соотношений в случае, когда параметр деформации q, входящий в параметрический функционал энтропии Тсаллиса, равен единице.

Ключевые слова: неэкстенсивные системы, параметрическая энтропия Тсаллиса, соотношения взаимности Онсагера.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

To the derivation of symmetry of matrix of kinetic coefficients Onsager in framework of the nonextensive statistical mechanics of Tsallis.

In the framework of the nonextensive statistical mechanics of Tsallis, Onsager symmetry relations for the kinetic coefficients in linear regression equations for even and odd (when the velocities of elementary particles change direction) small fluctuations of macroscopic state parameters are derived. At a macroscopic level, these relations reflect the invariance of microscopic equations of motion with respect to time reversal. As in the case of classical Gibbs statistics, this conclusion is based on the theory of equilibrium fluctuations of dynamic variables characterizing the system, and on the properties of their invariance with respect to time reversal. In addition, the Onsager postulate was used, according to which the attenuation of the equilibrium fluctuations of the thermodynamic parameters of the state is described by linear differential equations of the first order. Traditional reciprocity relations for extensive systems are obtained from the derived relations in the case when the deformation parameter q, included in the parametric entropy functional of Tsallis, is equal to one.

Key words: nonextensive systems, generalized entropy of Tsallisy, Onsager reciprocity relations.

Введение

Как теперь стало понятно, статистическая механика Больцмана−Гиббса и стандартная термодинамика не являются вполне универсальными теориями, поскольку они имеют ограниченные области применимости. Это связано, в частности, с тем, что в основе статистики Больцмана−Гиббса лежит постулат о полном перемешивании потока «фазовых точек» в фазовом пространстве (гипотеза молекулярного хаоса). Это означает, что фазовое пространство не содержит запрещённых состояний и обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости. При этом гипотеза перемешивания, дополненная предположением о бесконечном числе степеней свободы, приводит к экспоненциальному распределению вероятности состояний системы (из которого следует, в частности, свойство аддитивности экстенсивных термодинамических переменных) или, в случае кинетической теории, к максвелловскому распределению скоростей. Кроме этого, в основе этих наук лежит фундаментальное предположение о малости радиуса взаимодействия между отдельными элементами системы по сравнению с размерами самой системы. Поскольку в большинстве обычных систем силы между отдельными её частями короткодействующие, то каждая «молекула» чувствует лишь несколько ближайших соседей. Таким образом, аддитивность энтропии и других термодинамических параметров для равновесных или близких к равновесию систем является следствием локального взаимодействия между отдельными элементами системы.

Вместе с тем существует широкий класс сложных систем, элементы которых взаимодействуют глобально, чему предшествует снижение симметрии системы, связанное с формированием коллективных мод интенсивных переменных. В физике и в других естественных науках, использующих методы статистической термодинамики, известны многочисленные примеры подобных систем, поведение и свойства которых являются аномальными с точки зрения классической статистики и равновесной термодинамики. Примером таких аномальных систем в астрофизике являются газопылевые астрофизические диски достаточно больших размеров, существенным признаком которых является несводимость всей системы к простой сумме её частей. Как известно, сила гравитационного притяжения между любыми телами падает с расстоянием достаточно медленно, обратно пропорционально квадрату расстояния между телами. Поэтому в самогравитирующих астрофизических дисках каждая частица «чувствует» не только ближайших соседей, а всю систему целиком (всю совокупность остальных частиц). Другими словами, отдельные части дискового облака будут взаимодействовать не только на границе их соприкосновения, но и глобально всеми своими объёмами (*Kolesnichenko, Marov,* 2014; *Kolesnichenko,* 2017). Именно по этой причине моделирование эволюции дискового вещества на основе классической энтропии Больцмана−Гиббса $S^{BG} \equiv -k\int p \ln p \, d\boldsymbol{\Omega}$ не является в общем случае вполне адекватным. Это означает, что в самогравитирующих системах сильное гравитационное взаимодействие является причиной того, что дисковая система относится к числу сложных (аномальных) систем, для которых характерна слабая хаотизация фазового пространства, вследствие чего нарушается аддитивность ряда экстенсивных термодинамических параметров (в частности, энтропия в таких системах не будет аддитивной величиной) и традиционное экспоненциальное статистическое распределение вероятности состояний приобретает степенной характер (см., например, *Колесниченко, Четверушкин*, 2014; *Колесниченко*, 2015, 2018a-d, 2019).

Существуют и многие другие системы, которые не могут быть описаны в рамках статистики Больцмана−Гиббса. К их числу относятся системы, которые помнят свое прошлое. Эффекты памяти также приводят к нарушению гипотезы молекулярного хаоса, поскольку движения отдельных частиц такой системы являются взаимообусловленными (т.е. сильно коррелированными). Существуют также системы, в которых имеются нелокальные корреляции, сильная взаимозависимость между всеми элементами системы (см., например, *Kolesnichenko, Chetverushkin*, 2013; *Kolesnichenko,* 2014). Сложная пространственно-временная структура подобных систем приводит к нарушению принципа аддитивности для таких важнейших термодинамических величин, как энтропия или внутренняя энергия.

Таким образом, построение статистической механики и термодинамики сложных неэкстенсивных систем является важной проблемой как современной теоретической физики, так и смежных с ней наук. Начало систематического изучения в этом направлении исследований связано с работой *К. Тсаллиса* (1988), в которой им впервые был введен параметрический функционал

$$S_q\left(p\right) \equiv \frac{k}{q-1}\left(1-\int p^q d\boldsymbol{\Omega}\right) \tag{1}$$

для статистической энтропии, предназначенный для описания эволюции аномальных систем с сильным силовым взаимодействием и сильными корреляциями отдельных её частей, а также с фрактальным характером фазового пространства. Важно отметить, что формула (1) для энтропии, во-первых, переходит в пределе слабой связи $(q \to 1)$ в каноническую формулу энтропии Больцмана−Гиббса, а во-вторых, являясь неаддитивной величиной, может соответствовать условию неэкстенсивности. Энтропийный индекс q (параметр деформации) в определении энтропии $S_q(p)$ представляет собой вещественное число, принадлежащее области $q \in \mathsf{R}$ (часто это просто лишь подгоночный параметр задачи). Форма энтропии Тсаллиса позволяет учитывать важную особенность поведения аномальных систем, связанную с вероятностью реализации функции распределения $p(\boldsymbol{r})$. При $q > 1$ в системе реализуются коллективные «эффективные» степени свободы, и чем больше q, тем больше их вклад в организацию системы. Равновесная функция распределения вероятности $p(\boldsymbol{r})$, «экстремизирующая» энтропию Тсаллиса, носит степенной характер, причём при больших значениях энергии она убывает при $q > 1$ (не экспоненциально быстро, а степенным образом), а при $q < 1$ это распределение обрезается на некотором конкретном значении энергии. Благодаря этому статистика Тсаллиса описывает события практически недостижимые в простых системах, характеризуемых статистикой Больцмана−Гиббса. Важно отметить, что неэкстенсивная статистика Тсаллиса представляет собой всё же обобщение, а не альтернативу классической статистике Больцмана−Гиббса, поскольку она распространяет область применимости стандартной статистической теории на неэкстенсивные системы только путем расширения математической формы её энтропийного функционала.

В настоящее время теория неэкстенсивных систем существенно развивается в ускоренном ритме, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять её природу, возможности и ограничения (см. библиографию, представленную на сайте http:/tsallis. -cat.cbpf.br/biblio.htm, которая постоянно обновляется). Теория имеет широкий спектр значимых приложений, связанных с физикой статистических систем, вероятностные свойства которых описываются негауссовыми и негиббсовыми распределениями. Область применения теории постоянно расширяется и уже охватывает различные направления в науке, такие как квантовая механика и космология, теория плазмы, теория турбулентности, нелинейная динамика и фракталы, геофизика и статистика и другие.

При этом возникают многочисленные новые математические проблемы статистики неэкстенсивных систем, требующие своего решения. Среди них одной из важных является проблема обоснования в рамках статистики Тсаллиса знаменитых «соотношений взаимности» Онсагера между коэффициентами линейных уравнений переноса, выражающих феноменологические законы, которым подчиняются необратимые процессы в механической системе. Эти соотношения симметрии отражают на макроскопическом уровне инвариантность микроскопических уравнений движения относительно операции обращения знака времени. Они по своему существу являются соотношениями макроскопическими. Однако исходными для получения этих соотношений в классической статистике являются микроскопические, обратимые во времени уравнения механики. Таким образом, теория Онсагера позволяет с помощью статистической механики связать микроскопические и макроскопические свойства достаточно долго изолированной системы, успевшей перейти в состояние термодинамического равновесия. При этом теория базируется на трёх основаниях: на теории флуктуаций, на микроскопической обратимости и на гипотезе существования линейных законов затухания флуктуаций термодинамических параметров (основной гипотезе Онсагера).

В настоящей работе автор, используя эти три основания теории Онсагера, предпринял попытку обоснования в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса соотношений взаимности кинетических коэффициентов для необратимых процессов в неэкстенсивных системах. Насколько известно автору, подобные попытки предпринимались в литературе всего лишь дважды (см. *Cáceres*, 1995; *Chame, de Mello*, 1997). Однако в этих совершенно недоступных отечественному исследователю публикациях данная проблема рассмотрена лапидарно, без необходимой полноты, в частности без учёта влияния на структуру соотношений взаимности Онсагера чётных и нечётных параметров состояния, являющихся функциями скоростей элементарных частиц.

1. Некоторые элементы статистики Тсаллиса

Напомним здесь базовые элементы формализма неаддтивной статистики Тсаллиса, обобщающей идеи и подходы классической статистической механики на негиббсовые (степенные) вероятностные распределения и приведённые здесь с целью сравнительного сопоставления столь различных статистик. Более детальное рассмотрение этого вопроса можно найти в монографиях (*Tsallis*, 1999; *Abe, Okamoto*, 2001; *Grigolini и др.*, 2002; 2006; *Sugiyama*, 2004; *Kaniadakis, Lissia*, 2004**;** *Gell-Mann, Tsallis*, 2004; *Swinney, Tsallis*, 2009; *Herrmann и др.*,2004; *Boon, Tsallis*, 2005; *Колесниченко*, 2019)

Параметрическая энтропия Тсаллиса

Рассмотрим адиабатически изолированную систему, состоящую из N частиц, причем N − очень большое число. Микроскопическое состояние системы описывается точкой $\boldsymbol{r} \equiv \{\boldsymbol{q}^N \boldsymbol{p}^N\} = \{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_N; \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_N\}$ в фазовом пространстве, где $\boldsymbol{q}^N$ и $\boldsymbol{p}^N$ соответственно канонические координаты и импульсы частиц.

В статистической механике Тсаллиса (для непрерывных величин при вероятностной нормировке $\int p(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{\Omega} = 1$, для фазовой функции распределения $p(\boldsymbol{r})$, $0 \le p(\boldsymbol{r}) < \infty$) энтропия задаётся функционалом (1), который можно записать также в виде:

$$S_q(p) \equiv -k \int p^q(\boldsymbol{r}) \ln_q p(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{\Omega} = -k \langle \ln_q p(\boldsymbol{r}) \rangle_q, \tag{2}$$

где $k-$ постоянная Больцмана. Здесь и далее везде область интегрирования совпадает со всем $6N$-мерным фазовым пространством, безразмерный пространственный элемент которого может быть представлен в следующей современной форме $d\boldsymbol{\Omega} \equiv \dfrac{1}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} d\boldsymbol{q}^N d\boldsymbol{p}^N$. При написании (2) использован так называемый, «деформированный логарифм» (*Tsallis*, 1999, 2009)

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \quad (x \in \mathrm{R}^+;\ q \in \mathrm{R}), \tag{3}$$

а таже взвешенное ненормированное среднее, которое для любой физической микроскопической величины $a(\boldsymbol{r})$ в состоянии с распределением $p(\boldsymbol{r})$ определяется (в статистике Курадо−Тсаллиса) соотношением (*Curado, Tsallis*,1991).

$$\langle a \rangle_q \equiv \int a(\boldsymbol{r}) p(\boldsymbol{r})^q d\boldsymbol{\Omega}, \quad 0 < \int p(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{\Omega} < \infty. \tag{4}$$

Равновесные состояния сложных q-систем характеризуются распределениями, которые не меняются с течением времени. Каноническая равновесная функция распределения Гиббса $p(\boldsymbol{r})$ в статистике Курадо−Тсаллиса, «экстремизирующая» q-энтропию Тсаллиса (1), может быть получена, как и в классическом случае, путём использования вариационного принципа Джейнса при выполнении следующих дополнительных условий: сохранения нормировки (4) функции распределения вероятности и при заданном значении средней энергии

$E_q \equiv \langle H \rangle_q = \int H(\boldsymbol{r}) p^q d\boldsymbol{\Omega} = const$, где функция Гамильтона $H = H(\boldsymbol{r})$ задаётся математической моделью изучаемых физических процессов в системе. В результате *деформированное каноническое распределение Гиббса* с параметрами q, β имеет вид (см., например, *Колесниченко* 2018a, 2019)

$$p(\boldsymbol{r},\beta) = Z_q^{-1}(\beta)\left[1 - k^{-1}(1-q)\beta H(\boldsymbol{r})\right]^{1/(1-q)}, \qquad (5)$$

где

$$Z_q(\beta) \equiv \int \left[1 - k^{-1}(1-q)\beta H(\boldsymbol{r})\right]^{1/(1-q)} d\boldsymbol{\Omega} \qquad (6)$$

– обобщённый статистический интеграл, определяемый из условия нормировки (4); множитель Лагранжа β (обратная эффективная температура) определяется из уравнения, получаемого подстановкой (5) в соотношение $E_q \equiv \langle H \rangle_q$.

При $1 - k^{-1}(1-q)\beta H > 0$ и $q = 1$ из (5) и (6) следует классическое каноническое распределение Гиббса $p(\boldsymbol{r},T) = \dfrac{\exp\{-H(\boldsymbol{r})/kT\}}{\int \exp\{-H(\boldsymbol{r})/kT\} d\boldsymbol{\Omega}}$ для аддитивных систем, находящихся в термостате с температурой $T = 1/\beta$.

Деформированная экспонента Тсаллиса

Распределение (5) удобно представить в классической форме Больцмана

$$p(\boldsymbol{r},\beta) = Z_q^{-1}(\beta)\left[1 - k^{-1}(1-q)\beta H(\boldsymbol{r})\right]^{1/(1-q)} = Z_q^{-1}(\beta)\exp_q\left\{-k^{-1}\beta H(\boldsymbol{r})\right\}, \qquad (7)$$

выражая стоящую в (5) степенную функцию $[..]^{1/1-q}$ через деформированную экспоненту Тсаллиса (q-экспоненциальную функцию), которая определяется следующим образом:

$$\exp_q x \equiv [1+(1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} = \begin{cases} 0, & \text{если } q<1 \text{ и } x < -1/1-q; \\ [1+(1-q)x]^{1/1-q}, & \text{если } q<1 \text{ и } x \geq -1/1-q; \\ [1+(1-q)x]^{1/1-q}, & \text{если } q>1 \text{ и } x < -1/1-q. \end{cases} \qquad (8)$$

Здесь выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[y]_+ \equiv max(y,0)$. Для $q<1$ экспонента Тсаллиса исчезает для $x \le -1/(1-q)$, непрерывна и монотонно увеличивается от 0 до ∞, когда x увеличивается от $-1/(1-q)$ до ∞ *). Для $q>1$ q-экспоненциальная функция непрерывна и монотонно увеличивается от 0 до ∞, когда x увеличивается от $-\infty$ до $1/(1-q)$, оставаясь расходящейся для $x > 1/(q-1)$.

Легко проверить, что в пределе $q \to 1$ функция (8) принимает стандартный вид:

$$\exp_1 x \equiv \lim_{q\to 1+0} \exp_q x = \lim_{q\to 1-0} \exp_q x = \exp x \quad (\forall x).$$

Используя определения (3) и (8), можно убедиться, что имеют место следующие используемые ниже соотношения для деформированной экспоненты и деформированного логарифма (см, например, *Tsallis*, 2009):

$$\exp_q(\ln_q x) = \ln_q(\exp_q x) = x \quad (\forall x; \forall q), \tag{9}$$

$$\ln_q(xy) = \ln_q x + \ln_q y + (1-q)(\ln_q x)(\ln_q y), \quad (\forall (x,y); \forall q), \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}\exp_q x = (\exp_q x)^q, \quad (\forall q), \quad \frac{d}{dx}\ln_q x = \frac{1}{x^q} \quad (x>0; \forall q). \tag{11}$$

2. Макроскопические параметры состояния квазиравновесной системы и их флуктуации

Как хорошо известно, для макроскопического описания квазиравновесной системы не нужна полная совокупность динамических переменных, характеризующих её микроскопическое состояние, а лишь гораздо меньшее их число. Эти переменные могут, например, относиться к экстенсивным свойствам макроскопически бесконечно малых подсистем внутри системы, которые, однако, должны содержать ещё достаточно большое (в статистическом смысле) число частиц, так чтобы к ним можно было применить принципы статистической механики. В качестве этих усреднённых «крупнозернистых» переменных, кото-

---

*) В случае $q<0$ следует позаботиться о том, чтобы исключить все состояния, вероятность которых не является строго положительной, в противном случае энтропия $S_q(p)$ будет расходиться.

рые не сильно отличаются от своих равновесных значений, могут быть выбраны экстенсивные параметры для малой подсистемы, например масса, электрический заряд, энергия и т.д. Обозначим эту ограниченную систему параметров через A_j $(j=1,2,...,n)$, где n может быть неопределённо большим, но много меньше N.

Для удобства введём матричные и тензорные обозначения. Будем далее рассматривать величины A_j как компоненты вектора $\boldsymbol{A}$. Макроскопическое состояние системы может при этом быть представлено точкой в так называемом $\boldsymbol{A}$-пространстве, n декартовыми координатами которого являются величины A_j. Переменные $\boldsymbol{A}$ являются функциями динамических переменных $\boldsymbol{r} \equiv \{\boldsymbol{q}^N \boldsymbol{p}^N\}$ системы $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$.

Введём теперь макроскопическую функцию распределения W:

$$W(\boldsymbol{A})d\boldsymbol{A} = W(A_1, A_2, ..., A_n)dA_1 dA_2 ... dA_n, \tag{12}$$

которая даёт вероятность того, что параметры $\boldsymbol{A}$ лежат в области $d\boldsymbol{A}$ вблизи значений $\boldsymbol{A}$. Далее мы будем рассматривать параметры $\boldsymbol{A}$ не как динамические переменные $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, а как термодинамические величины, но сохраним при этом для них прежние обозначения (см. *Зубарев*, 1971; *Зубарев и др.*, 2002). Функция W должна удовлетворять условию нормировки уже не в фазовом пространстве $d\boldsymbol{\Omega}$, а в пространстве значений $\boldsymbol{A}$:

$$\int W(\boldsymbol{A})d\boldsymbol{A} = \int W(A_1, A_2, ..., A_n)dA_1 dA_2 ... dA_n = 1. \tag{13}$$

Поскольку параметры $\boldsymbol{A}$ ведут себя как суммы большого числа независимых случайных переменных, то можно воспользоваться центральной предельной теоремой теории вероятностей. Это даёт право считать, что по аналогии с классической статистикой Гиббса (см. *де Гроот, Мазур*, 1964; *Зубарев и др.*, 2002) макроскопическая функция распределения W для q-флуктуаций $\delta_q A_j$ в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса является обобщённым q-гауссианом (см. Приложение)[†)]

[†)] Принятие формы (14) для функции распределения W определяет класс переменных, к которому применимо предложенное здесь рассмотрение. Заметим, что

$$W=\Omega_{0q}\left\{1-\frac{1-q}{2k}\sum_{i,j}^{n}g_{ij}(q)\Delta_q A_j\,\Delta_q A_i\right\}^{\frac{1}{1-q}}=$$

$$=\Omega_{0q}\exp_q\left\{-\frac{1}{2k}\sum_{i,j}^{n}g_{ij}(q)\Delta_q A_j\,\Delta_q A_i\right\}=$$

$$=\Omega_{0q}\exp_q\left\{-\frac{1}{2k}\boldsymbol{g}(q):\Delta_q\boldsymbol{A}\Delta_q\boldsymbol{A}\right\},\tag{14}$$

где

$$\Delta_q A_j\equiv\left[A_j-\langle A_j\rangle_q W(\boldsymbol{A})^{1-q}\right]\ (j=1,2,\dots,n),\quad \left(\Delta_q\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{A}-\langle\boldsymbol{A}\rangle_q W(\boldsymbol{A})^{1-q}\right)\tag{15}$$

− флуктуация параметра A_j в статистике Курадо−Тсаллиса (см. *Curado,Tsallis*, 1991; Зарипов, 2002); $g_{ik}(q)$ − элементы симметричной положительно определенной матрицы $\boldsymbol{g}$ (это значит, что квадратичная форма $\sum_{ik}^{n}g_{ik}\,x_i x_k$ с действительными x_j является положительно определенной); константа Ω_{0q} определяется из условия нормировки (13).

Вводя новое обозначение $\boldsymbol{\alpha}$ для q-флуктуаций переменных $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{\alpha}\equiv\Delta_q\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-\langle\boldsymbol{A}\rangle_q W(\boldsymbol{A})^{1-q},\tag{15}$$

можно вместо (14) написать

$$W(\boldsymbol{\alpha})\equiv\Omega_{0q}\left\{1-\frac{1-q}{2k}\boldsymbol{g}(q):\boldsymbol{\alpha\alpha}\right\}^{\frac{1}{1-q}}=\Omega_{0q}\exp_q\left\{-\frac{1}{2k}\boldsymbol{g}(q):\boldsymbol{\alpha\alpha}\right\}.\tag{16}$$

После вычисления нормировочной постоянной Ω_{0q} с помощью условия нормировки $\int W(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}=1$, окончательно получим:

именно такая функция распределения была положена в основу обобщения в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса флуктуационно-диссипативной теоремы в работе (*Chame, de Mello*, 1994), а также при рассмотрении обобщённой необратимой термодинамики в работе (*Cáceres*, 1995).

$$W(\boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{\frac{|g|}{(2\pi k)^n}}(q-1)^{n/2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}-\frac{n}{2}\right)}\exp_q\left\{-\frac{1}{2k}g(q):\boldsymbol{\alpha\alpha}\right\}, \tag{17}$$

где $\boldsymbol{\alpha\alpha}$−диадное произведение (матрица с элементами $\alpha_i\alpha_j$); $\Gamma(x)$− гамма-функция. Среднее по Тсаллису значение переменных $\boldsymbol{\alpha}$ равно нулю $\langle\boldsymbol{\alpha}\rangle_q = 0$.

По аналогии с процедурой вычисления всех флуктуаций в классической статистике (см. *Зубарев*, 1971) вычислим с помощью обобщённого q-гауссиана (16) ряд средних значений.

Определим интенсивные параметры $\boldsymbol{X}_q$ (так называемые термодинамические силы), сопряжённые с экстенсивными параметрами $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{X}_q \equiv k\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}(\ln_q \mathrm{W}) \quad \left(X_{qi} \equiv k\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(\ln_q W), \quad (i = 1,2,...,n)\right). \tag{18}$$

Из этого определения и распределения (17), с учетом формул (9) и (10), следует, что

$$X_{qi} = k\frac{\partial \ln_q W}{\partial\alpha_i} = k\left[1+(1-q)\ln_q \Omega_{0q}\right]\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left\{-\frac{1}{2k}\sum_{i,k}^{n} \mathrm{g}_{ik}(q)\alpha_k\alpha_i\right\} =$$

$$= -c(q)\sum_k^n \mathrm{g}_{ik}(q)\alpha_k\,, \tag{19}$$

или

$$\boldsymbol{X}_q = -\boldsymbol{s}_q\cdot\boldsymbol{\alpha}, \quad \left(X_{qi} = -\sum_j^n s_{qij}\alpha_j\,,\ (i=1,2,...,n)\right). \tag{20}$$

Здесь $s_{qij} \equiv c(q)\mathrm{g}_{ij}, \quad c(q) \equiv 1+(1-q)\ln_q\Omega_{0q}, \quad s_{1ij} = \mathrm{g}_{ij}$.

Разрешая соотношения (20) относительно $\boldsymbol{\alpha}$, получим важные для дальнейшего зависимости

$$\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{s}_q^{-1}\cdot\boldsymbol{X}_q, \tag{21}$$

где $\boldsymbol{s}_q^{-1}$ представляет собой матрицу, обратную матрице $\boldsymbol{s}_q$,

$(\boldsymbol{s}_q\cdot\boldsymbol{s}_q^{-1}=\boldsymbol{s}_q^{-1}\cdot\boldsymbol{s}_q=\boldsymbol{I})$; $\boldsymbol{I}$ − единичная матрица, с компонентами δ_{ik}; δ_{ik} − символ Кронекера.

Среднее значение диады $\boldsymbol{\alpha X}$ вычисляется без труда:

$$\langle\boldsymbol{\alpha X}_q\rangle_q\equiv\int\boldsymbol{\alpha X}_q W^q d\boldsymbol{\alpha}=k\int\boldsymbol{\alpha}\frac{\partial\ln_q W}{\partial\boldsymbol{\alpha}}W^q d\boldsymbol{\alpha}=k\int\boldsymbol{\alpha}\frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{\alpha}}d\boldsymbol{\alpha}, \tag{22}$$

где мы использовали (11) и (18), а величина $d\boldsymbol{\alpha}$ обозначает $da_1da_2...da_n$.

Интегрирование в выражении (22) по частям даёт:

$$\langle\boldsymbol{\alpha X}_q\rangle_q=k\int\boldsymbol{\alpha}\frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{\alpha}}d\boldsymbol{\alpha}=k\int\frac{\partial W\boldsymbol{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\alpha}}d\boldsymbol{\alpha}-k\int W\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}d\boldsymbol{\alpha}=-k\int W\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}d\boldsymbol{\alpha}, \tag{23}$$

поскольку на границах области интегрирования функция W обращается в нуль, а производная по вектору $\boldsymbol{\alpha}$ в подынтегральном выражении есть единичная матрица $\boldsymbol{I}$, так как $\partial a_i/\partial a_k\equiv\delta_{ik}$. Таким образом, в конечном счёте, получаем, учитывая нормировку функции $W(\boldsymbol{\alpha})$, следующее соотношение:

$$\langle\boldsymbol{\alpha X}_q\rangle_q=-k\boldsymbol{I},\quad\left(\langle\alpha_j X_{qi}\rangle_q=-\left\langle\alpha_j\sum_k^n s_{qik}(q)\alpha_k\right\rangle_q=-k\delta_{ji}\right). \tag{24}$$

Заметим, что, по аналогии с известной теоремой классической статистики (см. *Зубарев и др*. 2002), величину $\langle\boldsymbol{\alpha X}_q\rangle_q$ можно рассматривать или как среднее по ансамблю, или как среднее по времени $\overline{\boldsymbol{\alpha X}_q}$ для простой одиночной системы.

Используя теперь (20) и (24), можно получить важный результат: средние квадратичные флюктуации, вычисленные с помощью q-гауссиана (16), определяются матрицей, обратной $\boldsymbol{s}$:

$$\langle\boldsymbol{\alpha\alpha}\rangle_q=k\boldsymbol{s}_q^{-1}. \tag{25}$$

Учёт параметров − нечётных функций скоростей частиц

До сих пор мы рассматривали переменные $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ как чётные функции скоростей частиц. Однако в общем случае важны также переменные, являющиеся нечётными функциями скоростей частиц (например, плотности импульсов и др.), которые при изменении направления скоростей частиц меняют свой знак, в отличие от чётных переменных, остающихся при этом инвариантными. Эти переменные обозначим как B_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

По аналогии с соотношениями (12) введём макроскопическую функцию распределения $W(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})d\boldsymbol{A}d\boldsymbol{B}$ и ограничимся здесь случаем, когда на систему не действует внешнее магнитное поле. Для совокупности макроскопических переменных $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ можно опять применить центральную предельную теорему и написать обобщённое гауссово q-распределение в виде:

$$W(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{|\boldsymbol{g}||\boldsymbol{h}|}{(2\pi k)^{n+m}}}(q-1)^{(n+m)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{n+m}{2}\right)} \times$$

$$\times \exp_q \left\{ -\frac{1}{2k}\left(\boldsymbol{g}(q) : \boldsymbol{\alpha\alpha} + \boldsymbol{h}(q) : \boldsymbol{\beta\beta} \right) \right\}, \tag{26}$$

где $\boldsymbol{\beta} \equiv [\boldsymbol{B} - \langle \boldsymbol{B} \rangle_q W(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})^{1-q}]$ – q-флуктуации переменных $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{g} = \{g_{ij}\}$, $\boldsymbol{h} = \{h_{ij}\}$ – симметричные положительно определённые матрицы. Заметим, что смешанные члены, содержащие как $\boldsymbol{\alpha}$, так и $\boldsymbol{\beta}$, в (26) отсутствуют в силу соотношения $W(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = W(\boldsymbol{\alpha}, -\boldsymbol{\beta})$, которое можно получить, выражая $W(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})d\boldsymbol{\alpha}d\boldsymbol{\beta}$ через интеграл по объёму в фазовом пространстве и принимая во внимание чётности различных входящих в уравнение величин относительно перемены знака скоростей частиц (см. *Зубарев и др*., 2002).

С помощью функции распределения (26) определим два набора термодинамических сил (интенсивных параметров системы):

$$\boldsymbol{X}_q \equiv k \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\ln_q \mathrm{W}) = -\boldsymbol{s}_q \cdot \boldsymbol{\alpha}, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{Y}_q \equiv k \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\ln_q \mathrm{W}) = -\boldsymbol{f}_q \cdot \boldsymbol{\beta}, \tag{28}$$

и получаем по аналогии с (24) формулы

$$\langle \boldsymbol{\alpha X}_q \rangle_q = -k\boldsymbol{I}, \quad \langle \boldsymbol{\alpha Y}_q \rangle_q = 0, \tag{29}$$

$$\langle \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{Y}_q \rangle_q = -k\boldsymbol{I}, \quad \langle \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{X}_q \rangle_q = 0. \tag{30}$$

Здесь $\boldsymbol{f}_q = c(q)\boldsymbol{h}, \quad c(q) \equiv 1 + (1-q)\ln_q \Omega_{0q}, \quad \boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{h}$.

Для дисперсий распределения (26) получаем из (29)-(30) с учетом (27) и (28)

$$\langle \boldsymbol{\alpha\alpha} \rangle_q = k\boldsymbol{s}_q^{-1}, \quad \langle \boldsymbol{\beta\beta} \rangle_q = k\boldsymbol{f}_q^{-1}, \tag{31}$$

$$\langle \boldsymbol{\alpha\beta} \rangle_q = \langle \boldsymbol{\beta\alpha} \rangle_q = 0. \tag{32}$$

3. Уравнения затухания малых флуктуаций

Согласно гипотезе Онсагера затухание (регрессия) флуктуаций подчиняется в среднем обычным феноменологическим законам. Выражение этих законов дают линейные соотношения между производными по времени параметров $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ и самими этими параметрами:

$$\boldsymbol{J}_q^{(\alpha)} \equiv \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = -\boldsymbol{M}^{(\alpha\alpha)} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{M}^{(\alpha\beta)} \cdot \boldsymbol{\beta}, \tag{33}$$

$$\boldsymbol{J}_q^{(\beta)} \equiv \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = -\boldsymbol{M}^{(\beta\alpha)} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{M}^{(\beta\beta)} \cdot \boldsymbol{\beta}, \tag{34}$$

где $\boldsymbol{M}^{(\alpha\alpha)}, \boldsymbol{M}^{(\alpha\beta)}, \ \boldsymbol{M}^{(\beta\alpha)}, \boldsymbol{M}^{(\beta\beta)}$ – феноменологические коэффициенты. Левые части этих уравнений называются потоками.

Следует отметить, что гипотеза Огзагера о том, что уравнения (33) и (34) справедливы для малых флуктуаций, представляется вполне разумной, хотя строгие пределы её применимости могут быть установлены только на основе чисто микроскопического подхода. Вместе с тем эмпирическим путем было установлено, что для значений макроскопических параметров $\boldsymbol{\alpha}$ (и/или $\boldsymbol{\beta}$), значительно превышающих их среднеквадратичную величину в равновесном состоянии ($\boldsymbol{\alpha\alpha} \gg k\boldsymbol{g}^{-1}$) средние от этих величин удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям первого порядка (см. *де Гроот, Мазур,* 1964).

Разрешая соотношения (27) и (28) относительно $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, получим

$$\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{s}_q^{-1} \cdot \boldsymbol{X}_q, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{f}_q^{-1} \cdot \boldsymbol{Y}_q. \tag{36}$$

Вводя (35) и (36) в (33) и (34), получаем выражения для потоков, которые выражаются через термодинамические силы следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \equiv \boldsymbol{J}_q^{(\alpha)} = \boldsymbol{L}_q^{(\alpha\alpha)} \cdot \boldsymbol{X}_q + \boldsymbol{L}_q^{(\alpha\beta)} \cdot \boldsymbol{Y}_q, \tag{37}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \equiv \boldsymbol{J}_q^{(\beta)} = \boldsymbol{L}_q^{(\beta\alpha)} \cdot \boldsymbol{X}_q + \boldsymbol{L}_q^{(\beta\beta)} \cdot \boldsymbol{Y}_q, \tag{38}$$

где феноменологические коэффициенты $\boldsymbol{L}_q$ задаются выражениями:

$$\boldsymbol{L}_q^{(\alpha\alpha)} = \boldsymbol{M}^{(\alpha\alpha)} \cdot \boldsymbol{s}_q^{-1}, \quad \boldsymbol{L}_q^{(\alpha\beta)} = \boldsymbol{M}^{(\alpha\beta)} \cdot \boldsymbol{f}_q^{-1},$$

$$\boldsymbol{L}_q^{(\beta\alpha)} = \boldsymbol{M}^{(\beta\alpha)} \cdot \boldsymbol{s}_q^{-1}, \quad \boldsymbol{L}_q^{(\beta\beta)} = \boldsymbol{M}^{(\beta\beta)} \cdot \boldsymbol{f}_q^{-1}. \tag{39}$$

Здесь точкой между символами тензоров обозначено внутреннее произведение, например,

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} \to (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v})_l = \sum\nolimits_k T_{ik} v_k, \ \ \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{T} \to (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{T})_{ik} = \sum\nolimits_l Q_{il} T_{lk}. \tag{40}$$

Согласно соотношениям (37) и (38) , в наиболее общем случае любой поток возникает под действием всех термодинамических сил. Коэффициенты $\{L_{qik}\}$ представляют собой кинетические коэффициенты, т.е. коэффициенты пропорциональности потоков различным термодинамическим силам. При помощи выражений (39) можно получить следующие соотношения Онсагера (в случае, когда внешнее магнитное поле $\boldsymbol{B}$ отсутствует):

$$\boldsymbol{L}_q^{(\alpha\alpha)} = \tilde{\boldsymbol{L}}_q^{(\alpha\alpha)}, \quad \boldsymbol{L}_q^{(\alpha\beta)} = -\tilde{\boldsymbol{L}}_q^{(\alpha\beta)}, \quad \boldsymbol{L}_q^{(\beta\beta)} = \tilde{\boldsymbol{L}}_q^{(\beta\beta)}, \tag{41}$$

которые являются математической формулировкой принципа взаимности кинетических коэффициентов. Здесь через $\tilde{\boldsymbol{T}}$ обозначена транспонированная матрица, которая получается путём перестановки индексов матрицы $\boldsymbol{T}$ ($\tilde{T}_{ik} = T_{ki}$).

Приведём вывод этих соотношений в рамках неэкстенсивной статистики.

4. Микроскопическая обратимость и доказательство соотношений взаимности Онсагера

Рассмотрим среднее по времени пульсации α_i, взятой в момент времени t, и α_k, отнесённой ко времени $t+\tau$, где значение τ положительно (см. *Ландау, Лифшиц*, 1964**)**:

$$\overline{\alpha_i(t)\alpha_k(t+\tau)} = \frac{1}{T}\int \alpha_i(t)\alpha_k(t+\tau)dt. \tag{42}$$

С помощью замены переменных $t \to -t-\tau$, и считая $T \gg \tau$, получаем

$$\overline{\alpha_i(t)\alpha_k(t+\tau)} = \frac{1}{T}\int \alpha_i(-t-\tau)\alpha_k(-t)dt \ . \tag{43}$$

Поскольку параметры α_i – чётные функции скоростей, то, имея в виду симметрию уравнений механики относительно изменения знака времени (в отсутствие магнитного поля), можно записать

$$\alpha_k(-t) = \alpha_k(t) \ . \tag{44}$$

Поэтому, сравнивая формулы (42) и (43), получаем следующее соотношение:

$$\overline{\alpha_i(t)\alpha_k(t+\tau)} = \overline{\alpha_i(t+\tau)\alpha_k(t)}. \tag{45}$$

Аналогичное рассмотрение для средних по времени, содержащих β_i, при учёте того, что (в отсутствие магнитного поля)

$$\beta_i(t) = -\beta_i(-t), \tag{46}$$

приводит к соотношениям

$$\overline{\alpha_i(t)\beta_k(t+\tau)} = -\overline{\alpha_i(t+\tau)\beta_k(t)}, \tag{47}$$

$$\overline{\beta_i(t)\beta_k(t+\tau)} = \overline{\beta_i(t+\tau)\beta_k(t)}. \tag{48}$$

Продифференцировав формулы (45), (47) и (48) по τ и приняв затем $\tau = 0$, находим

$$\overline{\alpha_i \frac{d\alpha_k}{dt}} = \overline{\frac{d\alpha_i}{dt}\alpha_k}, \quad \overline{\alpha_i \frac{d\beta_k}{dt}} = -\overline{\frac{d\alpha_i}{dt}\beta_k}, \quad \overline{\beta_i \frac{d\beta_k}{dt}} = \overline{\frac{d\beta_i}{dt}\beta_k}. \tag{49}$$

Вывод симметричности матрицы кинетических коэффициентов Онсагера

В предположении о том, что средние по времени равны средним по ансамблю, соотношения (49) можно переписать в виде:

$$\left\langle \alpha_i \frac{d\alpha_k}{dt} \right\rangle_q = \left\langle \frac{d\alpha_i}{dt}\alpha_k \right\rangle_q, \quad \left\langle \alpha_i \frac{d\beta_k}{dt} \right\rangle_q = -\left\langle \frac{d\alpha_i}{dt}\beta_k \right\rangle_q,$$

$$\left\langle \beta_i \frac{d\beta_k}{dt} \right\rangle_q = \left\langle \frac{d\beta_i}{dt}\beta_k \right\rangle_q. \tag{50}$$

Исключая производные по времени в формулах (50) с помощью уравнений (37) и (38), в результате получим:

$$\sum_{j=1}^{n} L_{qkj}^{(\alpha\alpha)} \langle X_{qj}\alpha_i \rangle_q + \sum_{j=1}^{m} L_{qkj}^{(\alpha\beta)} \langle Y_{qj}\alpha_i \rangle_q = \sum_{j=1}^{n} L_{qij}^{(\alpha\alpha)} \langle X_{qj}\alpha_k \rangle_q + \sum_{j=1}^{m} L_{qij}^{(\alpha\beta)} \langle Y_{qj}\alpha_k \rangle_q, \tag{51}$$

$$\sum_{j=1}^{n} L_{qkj}^{(\beta\alpha)} \langle X_{qj}\alpha_i \rangle_q + \sum_{j=1}^{m} L_{qkj}^{(\beta\beta)} \langle Y_{qj}\alpha_i \rangle_q = -\sum_{j=1}^{n} L_{qij}^{(\alpha\alpha)} \langle X_{qj}\beta_k \rangle_q - \sum_{j=1}^{m} L_{qij}^{(\alpha\beta)} \langle Y_{qj}\beta_k \rangle_q, \tag{52}$$

$$\sum_{j=1}^{n} L_{qkj}^{(\beta\alpha)} \langle X_{qj}\beta_i \rangle_q + \sum_{j=1}^{m} L_{qkj}^{(\alpha\beta)} \langle Y_{qj}\beta_i \rangle_q = \sum_{j=1}^{n} L_{qij}^{(\beta\alpha)} \langle X_{qj}\beta_k \rangle_q + \sum_{j=1}^{m} L_{qij}^{(\beta\beta)} \langle Y_{qj}\beta_k \rangle_q. \tag{53}$$

Подставляя теперь в уравнения (51)-(53) выражения (29) и (30), в результате получим искомые тождества (41).

Важно отметить, что при наличии внешнего магнитного поля свойство инвариантности относительно обращения времени означает, что частицы пробегают в обратном направлении свои траектории, если одновременно с обращением скоростей меняет знак и магнитное поле ($t \to -t, \boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{B}$). Это следует из выражения для силы Лоренца, которая пропорциональна векторному произведению скорости частицы и вектора магнитного поля. Аналогичная ситуация возникает во вращающихся системах. В этом случае частицы должны двигаться в обратном направлении по своим траекториям при изменении скорости частиц и вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ вращения системы, поскольку частицы подвергаются действию силы Кориолиса, пропорциональной векторному произведению скорости частицы и угловой скорости вращения. Легко показать, что вследствие этого соотношения Онсагера (41), как и в классическом случае (см., например, *де Гроот, Мазур,* 1964), принимают вид:

$$\boldsymbol{L}_q^{(\alpha\alpha)}(\boldsymbol{B}) = \tilde{\boldsymbol{L}}_q^{(\alpha\alpha)}(-\boldsymbol{B}), \quad \boldsymbol{L}_q^{(\alpha\beta)}(\boldsymbol{B}) = -\tilde{\boldsymbol{L}}_q^{(\alpha\beta)}(-\boldsymbol{B}), \quad \boldsymbol{L}_q^{(\beta\beta)}(\boldsymbol{B}) = \tilde{\boldsymbol{L}}_q^{(\beta\beta)}(-\boldsymbol{B}). \tag{54}$$

Заключение

В настоящее время неэкстенсивная статистическая механика развивается в ускоренном ритме, при котором возникают новые идеи, позволяющие глубже понять её природу, возможности и ограничения. Теория имеет широкий спектр важных приложений, связанных с физикой аномальных систем, вероятностные свойства которых описываются негауссовыми и негиббсовыми распределениями. Область применения теории постоянно расширяется и уже охватывает различные направления в науке, такие как квантовая механика и космология, теория плазмы, теория турбулентности, нелинейная динамика и фракталы, геофизика и статистика и другие. При этом возникают новые проблемы статистики неэкстенсивных систем, требующие своего решения. Среди них одной из важных является проблема обоснования в рамках механики Тсаллиса знаменитых «соотношений взаимности» Онсагера между коэффициентами линейных уравнений, выражающих феноменологические законы, которым подчиняются необратимые процессы.

В представленной работе предпринята попытка обоснования в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса соотношений взаимности кинетических коэффициентов в феноменологических уравнениях затухания флуктуаций термодинамических параметров, характеризующих неэкстенсивную систему. Эти соотношения отражают на макроскопическом уровне инвариантность микроскопических уравнений движения относительно обращения времени. Также как в случае классической статистики Гиббса, предложенный вывод опирается на теорию равновесных флуктуаций динамических переменных, характеризующих сложную систему, и на свойство инвариантности флуктуаций относительно обращения времени. Кроме этого использовано предположение о том, что макроскопическая функция распределения q-флуктуаций в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса является обобщённым q-гауссианом. Принятие подобной формы для функции распределения определяет (как- и в случае классической теории флуктуаций) класс переменных, к которому применим представленный подход. Традиционные соотношения взаимности для экстенсивных систем получаются из выведенных здесь соотношений в случае, когда параметр деформации q, входящий в параметрический функционал энтропии Тсаллиса, равен единице.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПМ им. М.В. Келдыша при частичной поддержке гранта РФФИ № 18-01-00064.

Приложение: Обобщённое распределение Гаусса

В классической статистической теории равновесных флуктуаций макроскопическая функция распределения (12) флуктуирующих термодинамических величин A_j записывается в виде (*Callen*, 1960; *Зубарев*, 1971):

$$W(A_1, A_2, ..., A_n) = Q\exp\left\{\frac{1}{k}\left[\hat{S} - S - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k \left(A_k - \langle A_k \rangle\right)\right]\right\}, \qquad (\text{П.1})$$

где

$$\boldsymbol{X} = \partial S / \partial \langle \boldsymbol{A} \rangle \qquad (\text{П.2})$$

– интенсивные параметры системы, термодинамически сопряжённые с осреднёнными экстенсивными параметрами $\langle \boldsymbol{A} \rangle = \int \boldsymbol{A} W(\boldsymbol{A}) d\boldsymbol{A}$; $S(\langle \boldsymbol{A} \rangle)$ – энтропия в квазиравновесном большом каноническом ансамбле, характеризующемся полным числом частиц N, объемом системы V и набором значений термодинамических переменных A_j); $\hat{S}(\boldsymbol{A})$ – энтропия микроканонического ансамбля, в котором параметры $\boldsymbol{A}$ заданы в области $d\boldsymbol{A}$ вблизи значений $\boldsymbol{A}$.

Сделаем существенное для дальнейшего замечание. Вследствие термодинамической эквивалентности этих двух статистических ансамблей энтропия $S(\boldsymbol{X})$ в большом каноническом ансамбле является такой же функцией от $\langle \boldsymbol{A} \rangle$, как энтропия в соответствующем микроканоническом ансамбле от $\boldsymbol{A}$, т. е. S и $\hat{S}$ – одинаковые функции, но от разных переменных. Это предположение фактически лежит в основе так называемой квазитермодинамической теории флуктуации, впервые развитой Эйнштейном (*Einstein*, 1910), который, как изветно, исходил из интуитивных соображений. Поэтому разность $(\hat{S}-S)$ можно разложить в ряд по степеням $\boldsymbol{A}-\langle\boldsymbol{A}\rangle$ и ограничиться, из-за малости флуктуаций, членами второго порядка. С учетом (П.2) получим

$$\hat{S}-S=-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}_k\,\Delta(A_k)+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial\langle A_i\rangle\partial\langle A_k\rangle}\mathrm{X}_k\,\Delta(A_i)\Delta(A_k). \qquad \text{(П.3)}$$

Подставляя (П.3) в (П.1) и учитывая, что линейные члены сокращаются, получим функцию распределения для флуктуаций:

$$W(A_1,A_2,...,A_n)=\Omega_0\exp\left\{\frac{1}{2k}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial\langle A_i\rangle\partial\langle A_k\rangle}\Delta(A_i)\,\Delta(A_k)\right\}; \qquad \text{(П.4)}$$

при этом константа Ω_0 определяется из условия нормировки

$$\int W(A_1,A_2,...,A_n)\,dA_1dA_2...dA_n=1. \qquad \text{(П.5)}$$

Следовательно, вероятность флуктуации величин A_i определяется распределением Гаусса (П.4).

Распределение Гаусса (П.4) запишем в виде

$$W=\Omega_0\exp\left\{\frac{1}{2k}\boldsymbol{g}:\boldsymbol{\alpha\alpha}\right\}, \qquad \text{(П.6)}$$

где $$g_{ik}=-\frac{\partial^2 S}{\partial\langle A_i\rangle\partial\langle A_k\rangle},\quad \alpha_j=\Delta A_j=A_j-\langle A_j\rangle,$$

или, после вычисления нормировочной постоянной Ω_0 ,

$$W=\frac{\sqrt{|\boldsymbol{g}|}}{(2\pi)^{(n+1)/2}}\Omega_0\exp\left\{\frac{1}{2k}\boldsymbol{g}:\boldsymbol{\alpha\alpha}\right\}. \qquad \text{(П.7)}$$

Рассмотренный здесь кратко классический подход к нахождению макроскопической функции распределения вероятности флуктуирующих термодинамических величин A_j может быть обобщён на случай неэкстенсивной статастической механики Тсаллиса. Ключевым моментом является следующее обобщение соотношения (П.4) для статистического распределения функции W (см. *Cheme, de Mello*, 1994):

$$W=\Omega_{0q}\left\{1-\frac{1-q}{2k}\sum_{i,j}^{n}\mathrm{g}_{ij}(q)\Delta_q A_j\,\Delta_q A_i\right\}^{\frac{1}{1-q}}=$$

$$= \Omega_{0q} \exp_q \left\{ -\frac{1}{2k} \boldsymbol{g}(q) : \Delta_q \boldsymbol{A} \Delta_q \boldsymbol{A} \right\}, \tag{П.8}$$

где $\Delta_q \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A} - \langle \boldsymbol{A} \rangle_q W(\boldsymbol{A})^{1-q}$ – флуктуация параметра $\boldsymbol{A}$ в статистике Курадо–Тсаллиса (см. *Curado,Tsallis,* 1991; *Зарипов,* 2002). Выбор в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса макроскопической функции распределения (П.8) для q-флуктуаций $\Delta_q \boldsymbol{A}$ определяется существующей аналогией между классическим и деформированным каноническим распределением Гиббса (7) (см. *Колесниченко,* 2019). Заметим, что именно такая функция распределения была положена в основу обобщения в рамках неэкстенсивной статистики Тсаллиса необратимой термодинамики в работе (*Cáceres*, 1995).

Список литературы

Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир. 1964. 456 с.

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах// Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зубарев Д.П. Неравновесная статистическая механика. М.: Наука, 1971. 416 с.

Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Рёпке Г. Статистическая механика неравновесных процессов. М.: Физматлит. 2002. Т.1. 431 с.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука. 1964. 584 с.

Колесниченко А.В., Четверушкин Б.Н. Вывод гидродинамических и квазигидродинамических уравнений для автотранспортных систем на основе статистики Тсаллиса// Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014. № 6. 32 с.

Колесниченко А.В. Модификация в рамках статистики Тсаллиса критериев гравитационной неустойчивости астрофизических дисков с фрактальной структурой фазового пространства // Mathematica Montisnigri. 2015. V. 32. P. 93-118.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо–Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018a. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. К конструированию термодинамики неаддитивных сред на основе статистики Тсаллиса–Мендеса–Пластино // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018b. № 23. 28 с.

Колесниченко А.В. К разработке статистической термодинамики и техники фрактального анализа для неэкстенсивных систем на основе энтропии и различающей информации Реньи // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018c. № 60. 44 с.

Колесниченко. А.В. Двухпараметрический энтропийный функционал Шарма–Миттала как основа семейства обобщенных термодинамик неэкстенсивных систем // Mathematica Montisnigri. 2018d. V XLII. P.74-101.

Колесниченко А.В. Статистическая механика и термодинамика Тсаллиса неаддитивных систем. Введение в теорию и приложения. М.: ЛЕНАНД. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 87). 2019. 360 с.

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Abe S., Okamoto Y. Eds., "Nonextensive Statistical Mechanicsand Its Applications". Series Lecture Notes in Physics. Springer: Verlag, Berlin, New York. 2001. ISBN 3-540-41208-5.

Boon J.P., Tsallis C. Eds. "Special issue overview Nonextensive statistical mechanics: new trends, new perspectives"// Europhys. News. 2005. V. 36. № 6. P. 183-186 (DOI 10.1051/epn:2005601.

Callen H.B. Thermodynamics. An introduction to the physical theories of equilibrium thermostatics and irreversible thermodynamics. Wiley & Sons, Inc. New York and London. 1960. 369 p.

Curado E.M.F., Tsallis C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics// J. Phys. A : Mathematical and General.1991. V.24. № 2. P. L69-72

Cáceres M. O. Irreversible thermodynamics in the framework of Tsallis entropy // Physica A. 1995. V. 218 P. 471-481.

Chame A., de Mello E.V.L. The fluctuation-dissipation theorem in the framework of the Tsallis statistics // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1994. V. 27. № 11. P. 3663-3670.

Chame A., de Mello E.V.L. The Onsager reciprocity relations within Tsallis statistics // Physics Letters A. 1997. V. 228. P. 159-163.

Einstein A. Theorie der Opaleszenz von homogenen Flussigkeiten und Flussigkeitsgemische in der Ndhe des kritischen Zustandes // Ann. Phys. (Leipzig). 1910. V. 33. P.1275-1298.

Gell-Mann M., Tsallis C. Eds. "Nonextensive Entropy- Interdisciplinary Applications. Oxford University Press. 2004. 440 p.

Grigolini P., Tsallis C., West B.J. Eds., "Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics"// Chaos, Solitons and Fractals. 2002. 13, № 3. P. 367.

Herrmann H.J., Barbosa M., Curado E.M.F. Eds. "Trends and perspectives in extensive and non-extensive statistical mechanics" // Physica A 2004. V. 344. № 3/4. P. v-vi.

Kolesnichenko A.V., Chetverushkin B.N. Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics", RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling). 2013. V.28. № 6. P. 547-576.

Kolesnichenko A. V. On construction of the entropy transport model based on the formalism of nonextensive statistics // Mathematical Models and Computer Simulations. 2014. V. 6. № 6. P. 587-597.

Kolesnichenko A.V. Power distributions for self-gravitating astrophysical systems based on nonextensive Tsallis kinetics // Solar System Research. 2017. V. 51. № 2. P.127-144.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics // Solar System Research. 2014. V. 48. № 5. P. 354-365.

Kaniadakis G., Lissia M. Eds. “News and Expectations in Thermostatistics”// Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2004. V. 340, № 1. P. xv-xix.

Kaniadakis G., Carbone A., Lissia M. Eds. “News, expectations and trends in statistical physics”// Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006. V. 365. № 1 P. xi-xi.

Sugiyama M. Eds. “Introduction to the topical issue: Nonadditive entropy and nonextensive statistical mechanics”// Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2004. V.16. № 3. P. 221-222.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics //J. Stat. Phys. 1988. V.52. № 1/2. P. 479–487. (a regular updated bibliography is accessible at http:/tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm).

Tsallis C. Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections //Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P.1-35.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2009. 382.

Оглавление