ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 25 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Игнатов А.И., Сазонов В.В.

Исследование установившихся движений искусственного спутника Земли в режиме одноосной магнитной ориентации

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Игнатов А.И., Сазонов В.В. Исследование установившихся движений искусственного спутника Земли в режиме одноосной магнитной ориентации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 25. 44 с. doi:10.20948/prepr-2019-25
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-25

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

А.И. Игнатов, В.В. Сазонов

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ В РЕЖИМЕ ОДНООСНОЙ МАГНИТНОЙ ОРИЕНТАЦИИ

Москва – 2019

Игнатов А.И., Сазонов В.В.

Исследование установившихся движений искусственного спутника Земли в режиме одноосной магнитной ориентации

Исследовано вращательное движение осесимметричного искусственного спутника с постоянным магнитом под действием механического момента, создаваемого влиянием на магнит магнитного поля Земли (МПЗ). Орбитальное движение спутника рассчитывается с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы, собственный магнитный момент спутника параллелен оси симметрии. Построены установившиеся движения спутника, в которых эта ось составляет малый угол с вектором напряженности МПЗ. В качестве модели МПЗ используется модель IGRF. Показана возможность аппроксимации таких движений последовательностью периодических решений модифицированных уравнений движения. Установившиеся движения содержат две базисные частоты – орбитальную и угловую скорость вращения Земли. Периодические решения имеют орбитальный период, но спектр составленной из них аппроксимирующей последовательности практически совпадает со спектром исходного установившегося режима.

Ключевые слова: магнитная ориентация, магнитный момент, периодические решения

Ignatov A.I., Sazonov V.V.

Investigation of steady-state motions of Earth artificial satellite in single axis magnetic orientation mode

We investigate the angular motion of an axially symmetric artificial satellite with a permanent magnet in the Earth's magnetic field (EMF). The satellite orbital motion is considered taking into account the influence of the non-centrality of the Earth's gravitational field and the atmosphere drag, IGRF is used as the model of the EMF, the satellite's own magnetic moment is parallel to the axis of symmetry. Steady-state satellite motions are constructed in which this axis forms a small angle with the EMF vector. We approximate such a motion by a sequence of periodic solutions of modified motion equations. These solutions have the orbital period, but the sequence as a whole reproduces almost full spectrum of a steady-state motion including the frequencies relating to the Earth rotation.

Key words: magnetic orientation, magnetic moment, periodic solutions

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 17-01-00143а.

1. Уравнения движения спутника. Спутник считаем осесимметричным твердым телом, центр масс которого движется по геоцентрической орбите. На спутнике установлен магнит, создающий постоянный дипольный момент, направленный по оси симметрии спутника. Для записи уравнений движения спутника и представления полученных результатов используется гринвичская система координат $Cy_1y_2y_3$. Ее начало находится в центре Земли, плоскость Cy_1y_2 совпадает с плоскостью экватора, ось Cy_1 пересекает гринвичский меридиан, ось Cy_3 направлена к Северному полюсу. Полагаем, что эта система вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_E = (0, 0, \omega_E)$ вокруг оси Cy_3. Здесь и ниже компоненты векторов относятся к системе $Cy_1y_2y_3$.

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая – его движение относительно центра масс – вращательное движение. В подсистеме уравнений движения центра масс учитываются нецентральность гравитационного поля Земли и сопротивление атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Параметры атмосферы и баллистический коэффициент спутника считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения образована уравнениями, описывающими теорему об изменении кинетического момента спутника в движении относительно центра масс и уравнениями Пуассона для орта оси симметрии спутника. В уравнениях кинетического момента учитываются гравитационный момент, модельный демпфирующий момент и механический момент, обусловленный взаимодействием магнита спутника с магнитным полем Земли (МПЗ). Формулы этих моментов приведены в [1].

Подсистема уравнений вращательного движения имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\omega}_E \times \boldsymbol{\Omega} + k_\Omega \boldsymbol{\Omega} = \frac{3\mu_E}{|\mathbf{r}|^5}\left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{n}\times\mathbf{r}) + l_0(\mathbf{n}\times\mathbf{B}),$$

$$\dot{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{n}. \qquad (1)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени t, причем векторы дифференцируются относительно системы $Cy_1y_2y_3$; I_1 и I_2 – полярный и экваториальный главные центральные моменты инерции спутника; $I_2\boldsymbol{\Omega}$ – кинетический момент спутника в его движении вокруг центра масс; $\mathbf{n}$ – орт оси симметрии спутника; $\mathbf{r}$ – геоцентрический радиус-вектор центра масс спутника; $\mathbf{B}$ – магнитная индукция МПЗ в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$; $I_2 l_0$ – дипольный момент магнита спутника, μ_E – гравитационный параметр Земли, k_Ω – коэффициент демпфирования. Компоненты $\mathbf{B}$ рассчитываются согласно модели

IGRF. Полагаем, что $I_2 l_0 |\mathbf{B}| >> 3\mu_E (I_2 - I_1)|\mathbf{r}|^{-3} > 0$, т.е. создаваемый магнитом механический момент влияет на движение спутника намного сильнее гравитационного момента.

В программе численного интегрирования уравнений (1) использованы следующие единицы измерения физических величин: $[t] = 10^3$ с, $[r] = 10^6$ м, $[\mathbf{\Omega}] = [k_\Omega] = 10^{-3}$ с$^{-1}$, $[\mathbf{B}] =$ Гс, $[l_0] = 10^{-6}$ с$^{-2}$Гс$^{-1}$(в системе СИ $[l_0] = 10^{-2}$ А/кг). Параметры уравнений движения: $I_1 / I_2 = 0.236$, баллистический коэффициент спутника 0.0017 м^2/кг, параметры модели атмосферы: F=137, F_{81}=117, $A_p = 10$. Параметр l_0 варьировался в пределах от 2 до 20А/кг, параметр k_Ω принимал значения: 0, 0.0001с$^{-1}$, 0.00015с$^{-1}$ и 0.0002 с$^{-1}$.

Начальные условия движения центра масс спутника заданы на момент 10:13:07 декретного московского времени 05.05.2013. На этот момент элементы орбиты составляли: высота в апогее 575.2 км, высота в перигее 546.8 км, наклонение 64.87°, аргумент широты перигея –124.65°, долгота восходящего узла (отсчитывается от точки весеннего равноденствия эпохи даты) –16.73°. Это параметры орбиты спутника *Бион-М №1*. Начальные условия уравнений (1) задаются в тот же момент времени, что и начальные условия принятой орбиты. Этот момент служит началом отсчета времени – точкой $t = 0$.

Ниже рассматриваются движения спутника в режиме одноосной магнитной ориентации [2 – 4]. В этом режиме ось симметрии спутника совершает малые колебания относительно вектора магнитной индукции МПЗ.

2. Поиск начальных условий ориентированного движения спутника. При $k_\Omega > 0$ начальные условия движения спутника в режиме одноосной магнитной ориентации $\mathbf{\Omega}(0)$ и $\mathbf{n}(0)$ можно найти методом установления (представляющий интерес режим должен быть асимптотически устойчив), но можно выбирать начальные условия уравнений (1) путем минимизации функционала

$$\Phi = \sum_{s=0}^{S} |\mathbf{B}(s\tau) \times \mathbf{n}(s\tau)|^2, \tag{2}$$

где $\tau = 5$ мин, $S = 288 \div 1152$. Минимизация такого функционала позволяет построить режим одноосной магнитной ориентации и в случае $k_\Omega = 0$. Однако при отсутствии демпфирования время существования ориентированного движения будет сравнительно невелико.

Так как в ориентированном движении функция $|\mathbf{B}(t) \times \mathbf{n}(t)|$ должна быть малой, минимизация Φ по начальным условиям решения системы (1) проводилась методом Гаусса–Ньютона с учетом ограничения $|\mathbf{n}(0)| = 1$. На первом этапе минимизации этот метод использовался в варианте Левенберга–Маркдвардта [5]. Для расчета частных производных решения по начальным условиям интегрировались соответствующие уравнения в вариациях. Рассматривались два варианта минимизации Φ – с демпфированием и без него. В варианте с демпфированием $S = 288$ ($S\tau = 1$сут), без демпфирования – $S = 1152$ ($S\tau = 4$сут). Первым приближением искомых начальных условий служили значения $\mathbf{\Omega}(0)=0$, $\mathbf{n}(0)=\mathbf{B}(0)/|\mathbf{B}(0)|$. Такие начальные условия использовались и в методе установления. В варианте с демпфированием продолжение экстремали функционала (2) на интервал $t>S\tau$ практически совпадало с установившемся решением.

Примеры расчетов решений уравнений (1) с начальными условиями экстремалей функционала (2) приведены на рис. 1 – 3. Решения вычислены на отрезке времени длиной 20 суток при $l_0=4$ А/кг. Решение на рис. 1, 2 получено в случае $k_\Omega=0.00015$с$^{-1}$. Здесь изображены графики зависимости от времени компонент векторов $\mathbf{\Omega}=(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)$, $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)$ и угла $\gamma=\arccos(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B})$. Графики представлены на двух отрезках времени: $0\le t\le 3$сут и $17\le t\le 20$сут, они иллюстрируют начало и окончание вычисленного решения. Судя по графикам, это решение можно считать установившимся и описывающим движение спутника в режиме одноосной магнитной ориентации. На графиках Ω_1 и Ω_2 видны колебания большой амплитуды с периодом 1сут и колебания малой амплитуды, период которых – примерно половина орбитального периода.

Решение на рис. 3 получено при $k_\Omega=0$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega}=0$ (при $k_\Omega=0$ система (1) имеет первый интеграл $\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega}=\text{const}$). Здесь приведены графики компонент вектора $\mathbf{\Omega}$ и угла γ. Это решение первые несколько суток похоже на установившееся и описывает движение спутника в режиме одноосной магнитной ориентации, но затем оно начинает разрушаться. Решение на рис. 3 интересно сравнить с решением, полученным с использованием модели МПЗ в виде прямого диполя [1, 3]

$$\mathbf{B}=\frac{m_E}{|\mathbf{r}|^3}\left[\mathbf{e}-\frac{3(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^2}\mathbf{r}\right].$$

Здесь $\mathbf{e}$ – орт оси Cy_3, $m_E=7.812\cdot10^{15}$ Тл·м^3. Такое решение приведено на рис. 4. Оно также найдено при $k_\Omega=0$, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega}=0$ и $l_0=4$ А/кг. Графики компонент вектора $\mathbf{\Omega}$ и угла γ представлены на отрезках времени $0\le t\le 3$сут и $37\le t\le 40$сут, которые иллюстрируют начало движения и его удаленный от начала участок. Здесь нет признаков разрушения движения.

3. Спектральный анализ ориентированных движений. Решение уравнений (1) на рис. 1, 2 выглядит как условно-периодическое. Его частоты были найдены с помощью спектрального анализа, выполнявшегося по следующей схеме [6]. Пусть x_n $(n=1,2,\ldots,N)$ – значения какой-либо переменной $x(t)$ исследуемого решения в узлах равномерной временной сетки $\{t_n\}$: $x_n=x(t_n)$. Во всех рассмотренных ниже примерах шаг сетки $h=t_{n+1}-t_n=16$с. Периодограммой называется функция $I(f)$, рассматриваемая на отрезке $0\le f\le F=(2h)^{-1}$, и определенная соотношениями

$$I(f)=\left[\sum_{n=1}^{N}(x_n-x_*)\cos 2\pi f t_n\right]^2+\left[\sum_{n=1}^{N}(x_n-x_*)\sin 2\pi f t_n\right]^2,\quad x_*=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n\,.$$

Здесь f – пробная частота, F – частота Найквиста. Если моменты времени t_n выражены в секундах, то единицы измерения f и F – герцы. В данном случае $F = 0.03125$Гц. Использование периодограммы основано на следующем ее свойстве. Предположим, что исследуемая функция имеет вид

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{M} (\alpha_m \cos 2\pi f_m^\circ t + \beta_m \sin 2\pi f_m^\circ t),$$

где α_0 и α_m, β_m $(m = 1, 2, \ldots, M)$ – постоянные параметры, все $f_m^\circ > 0$ и среди них нет одинаковых. Составим выражение

$$I_1(f) = \left\{ \sum_{n=1}^{N} [x(t_n) - \alpha_0] \cos 2\pi f t_n \right\}^2 + \left\{ \sum_{n=1}^{N} [x(t_n) - \alpha_0] \sin 2\pi f t_n \right\}^2.$$

Его можно преобразовать к виду

$$I_1(f) = \frac{N^2}{4} \sum_{k=1}^{K} (\alpha_m^2 + \beta_m^2)[W(f - f_m^\circ) + W(f + f_m^\circ)] + \Delta I_1(f),$$

$$N^2 W(f) = \left(\sum_{n=1}^{N} \cos 2\pi f t_n \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{N} \sin 2\pi f t_n \right)^2 = \frac{\sin^2 \pi N f h}{\sin^2 \pi f h},$$

$$\Delta I_1(f) = \sum_{k<l} \sum_{j} \Big\{ A_j \cos 2\pi [\Omega_j t_k + \Omega'_j t_l + f(t_l - t_k)] +$$
$$+ B_j \sin 2\pi [\Omega_j t_k + \Omega'_j t_l + f(t_l - t_k)] \Big\}.$$

В выражении для $\Delta I_1(f)$ частоты Ω_j и Ω'_j принадлежат множеству чисел $\{\pm f_1^\circ, \pm f_2^\circ, \ldots, \pm f_M^\circ\}$, коэффициенты A_j и B_j выражаются через α_m и β_m $(m = 1, 2, \ldots, M)$.

Функция $W(f)$ называется функцией окна [6]. Она – четная, периодическая с периодом $2F$ и удовлетворяет соотношениям $0 \le W(f) \le 1$, $W(0) = 1$. Ее наименьший положительный нуль равен $(Nh)^{-1}$. Для сетки $\{t_n\}_{n=1}^{N}$ с шагом $h = 16$ с и $N = 6000$ фрагменты ее графика изображены на рис. 5. Значимые максимумы (пики) функции окна равны 1 и достигаются в точках $f = 2Fl$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$. Вне малых окрестностей этих точек $W(f) < 0.01$. С увеличением N ширина пиков этой функции сужается. В силу четности и периодичности функция окна полностью определяется своими значениями на отрезке $0 \le f \le F$.

Для $\Delta I_1(f)$ не удается найти простых эффективных оценок, но при большом N вкладом этого слагаемого в значения функции $I_1(f)$ вблизи точек ее значимых максимумов можно пренебречь и принять

$$\widetilde{I}_1(f) = \frac{N^2}{4}\sum_{k=1}^{K}(\alpha_m^2 + \beta_m^2)[W(f - f_m^\circ) + W(f + f_m^\circ)].$$

Таким образом, значимые максимумы функций $I_1(f)$ и $\widetilde{I}_1(f)$ весьма близки. Отсюда, учитывая вид окна $W(f)$, можно найти точки этих максимумов – они определяются соотношениями $|\, f \pm f_m^\circ| = 2Fl \quad (l = 0, 1, \ldots)$. Если $f_m^\circ < F$, то периодограмму $I_1(f)$ достаточно исследовать на интервале $0 < f < F$. На нем ее значимые максимумы достигаются в малой окрестности точек f_m°.

Вернемся к периодограмме $I(f)$. В случае исследуемых решений уравнений (1) $\alpha_0 \approx x_*$, значимые максимумы периодограммы достигаются в точках $f_m^* \approx f_m^\circ$, и $\alpha_m^2 + \beta_m^2 \approx 4N^{-2}I(f_m^*) \quad (m = 1, 2, \ldots, M)$. Точность выписанных соотношений увеличивается с ростом N. Таким образом, знание максимумов периодограммы позволяет получить оценки частот и амплитуд гармонических составляющих функции $x(t)$. Ниже вместо графиков периодограммы приводятся графики амплитудного спектра $A(f) = 2N^{-1}\sqrt{I(f)}$. Функция $A(f)$ удобна тем, что ее максимальные значения являются оценками амплитуд соответствующих гармоник. Однако ее значимые максимумы выражены менее наглядно значимых максимумов периодограммы.

На рис. 6 – 8 черным цветом (кое-где черные линии расположены в точности под линиями красными и поэтому не видны) изображены амплитудные спектры $A_{\Omega i}(f)$ переменных $\Omega_i(t) \quad (i = 1, 2, 3)$, графики которых приведены на рис. 1. На рис. 9 приведен амплитудный спектр $A_\gamma(f)$ угла γ, представленного на рис. 2. Все амплитудные спектры на рис. 6 – 9 представлены в диапазоне частот от 0 до F = 0.0015 Гц. Ниже в табл. 1 приведены частоты циклических трендов, имеющих достаточно большие амплитуды. Здесь $f_E = \omega_E / 2\pi$ – частота вращения Земли, $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ – орбитальная частота (ω_0 – среднее движение центра масс спутника). Номера частот в табл. 1 соответствуют номерам, указанным на рис. 6 – 9. Наиболее значимый вклад в установившееся движение вносят гармоники с частотами f_E и $2f_0 - f_E$. Присутствие f_E объясняется тем, что переменные уравнений (1) относятся к гринвичской системе координат, частота $2f_0 - f_E$ является доминирующей в компонентах вектора $\mathbf{B}$ в гринвичской системе координат. В модели прямого диполя компоненты этого вектора в инерциальной системе координат меняются с частотой $2f_0$ [3].

Для сравнения на рис. 6 – 8 красным цветом показаны амплитудные спектры переменных $\Omega_i(t) \quad (i = 1, 2, 3)$ установившегося решения уравнений (1), полученного при тех же условиях, что и решение, приведенное на рис.1, только в качестве модели МПЗ вместо IGRF использовалась модель прямого диполя.

4. Аппроксимация ориентированного движения последовательностью периодических движений. Анализ рис. 1 – 3 и 6 – 9 показывает, что установившийся режим магнитной ориентации спутника похож на условно-периодическое движение с базисными частотами f_0 и $f_E \approx f_0/16$. Основываясь на этом свойстве и учитывая соотношение $f_0 >> f_E$, построим аппроксимацию такого режима последовательностью периодических движений с периодом $1/f_0$, отличающихся положением орбиты относительно МПЗ.

Таблица 1.

№	Частоты		Амплитуды			
	f, 10^{-4} Гц	Интерпретация	$A_{\Omega 1}$	$A_{\Omega 2}$	$A_{\Omega 3}$	A_γ, град.
			10^{-3} град./с			
1	0.1145	f_E	99	103	5.44	0.142
2	0.3435	$3f_E$	12	14	3.99	0.232
3	1.506	f_0-2f_E	11	12	4.71	0.184
4	1.621	f_0-f_E	1.75	8.11	0.68	0.312
5	1.850	f_0+f_E	3.06	10	3.85	0.106
6	1.964	f_0+2f_E	3.84	2.64	5.84	0.076
7	3.356	$2f_0-f_E$	40	32	9.36	0.139
8	3.470	$2f_0$	13	12	20	0.736
9	5.091	$3f_0-f_E$	5.81	8.65	4.56	0.071
10	6.826	$4f_0-f_E$	13	17	1.40	0.043
11	6.940	$4f_0$	7.66	5.45	5.24	0.166
12	8.675	$5f_0$	0.28	0.92	2.87	0.056
13	10.30	$6f_0-f_E$	6.48	5.25	2.27	0.044
14	10.41	$6f_0$	6.05	1.67	2.06	0.139
15	12.15	$7f_0$	1.21	1.44	2.05	0.043
16	13.76	$8f_0-f_E$	2.24	2.50	1.38	0.026
17	13.88	$8f_0$	3.81	1.01	1.65	0.180

На каждом орбитальном витке (между последовательными прохождениями восходящего узла орбиты) построим аппроксимирующее периодическое движение. При построении этого движения гринвичскую систему координат примем инерциальной, зафиксировав ее положение в абсолютном пространстве на момент прохождения спутником восходящего узла орбиты на данном витке. Орбиту в «замороженной» гринвичской системе примем кеплеровой эллиптической. Элементы этой орбиты вычисляются по фазовому вектору реальной орбиты в начальном восходящем узле. Таким образом, от витка к витку долгота восходящего узла орбиты в «замороженной» гринвичской системе координат меняется, меняется и положение орбиты относительно МПЗ, но внутри витка эти долгота и положение относительно МПЗ остаются неизменными. Уравнения вращательного движения спутника возьмем в виде (1), положив в них

$\omega_E = 0$ и приняв в формулах для расчета координат и компонент скорости центра масс в «замороженной» гринвичской системе формулы кеплерова движения. Получившуюся систему уравнений обозначим (1'). Время входит в эту систему периодически с орбитальным периодом T, поэтому можно поставить задачу об отыскании ее периодических решений. Интерес представляет такое периодическое решение, которое можно будет использовать как аппроксимацию установившегося решения исходной системы (1) на данном витке.

Построение периодического решения системы (1') сводится к решению для этой системы периодической краевой задачи

$$\mathbf{\Omega}(t_0) = \mathbf{\Omega}(t_0 + T), \quad \mathbf{n}(t_0) = \mathbf{n}(t_0 + T), \quad |\mathbf{n}(t_0)| = 1. \tag{3}$$

Здесь t_0 – момент прохождения восходящего узла орбиты на витке аппроксимации. Задача (1'), (3) решается методом пристрелки. Краевые условия (3) рассматриваются как уравнения для определения неизвестных начальных условий $\mathbf{\Omega}(t_0)$, $\mathbf{n}(t_0)$. Первым приближением начальных условий периодического решения служат значения фазовых переменных аппроксимируемого решения в точке t_0. Можно также использовать начальное приближение $\mathbf{\Omega}(t_0) = 0$, $\mathbf{n}(t_0) = \mathbf{B}(t_0) / |\mathbf{B}(t_0)|$.

На рис. 10 – 13 приведены результаты аппроксимации установившегося решения уравнений (1), рассматривавшегося в разделе 2 (рис. 1, 2). Здесь представлены графики зависимости от времени переменных Ω_i, n_i и угла γ. Графики аппроксимируемого решения – черные, графики аппроксимирующего решения – красные. На рис. 10, 11 аппроксимация выполнена на интервале длиной 3 суток, на рис. 12 – на интервале решения краевой задачи (1'), (3). В принципе, аппроксимацию периодическими решениями можно построить на весьма продолжительном интервале времени, длина которого зависит от наличия подходящей орбиты спутника. На рис. 10, 11 красные графики в малых окрестностях моментов прохождения восходящих узлов орбиты налегают друг на друга (кеплеров период несколько больше драконического), но при выбранном масштабе графиков на рис. 10, 11 налегания практически незаметны. На рис. 13 показан стык решений задачи (1'), (3) на соседних витках (красные линии) на фоне аппроксимируемого решения (черные линии). Строго говоря, в аппроксимирующую последовательность включается только отрезок периодического решения, расположенный между начальным и конечным на данном витке восходящими узлами. Отрезок решения за конечным восходящим узлом отбрасывается.

Построенная аппроксимация оказалась достаточно точной. Это обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых, кеплерова аппроксимация орбиты в данной задаче приемлема для построения вращательного движения спутника на орбитальном витке. Во-вторых, МПЗ в «замороженной» системе $Cy_1y_2y_3$ в течение витка меняется сравнительно мало, поскольку оно близко к полю диполя, момент которого расположен вблизи точки C и составляет с осью $-Cy_3$ малый угол (~12°). Поле прямого диполя в таком случае вообще не менялось бы.

Последовательность периодических решений уравнений (1′) позволяет сформировать идеальный режим одноосной ориентации спутника в случае $k_\Omega = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$. Этот режим обеспечивает ошибки ориентации, такие же как при $k_\Omega > 0$, но не может быть реализован в действительности на продолжительном отрезке времени (см. ниже). Графики переменных $\Omega_i(t)$, $n_i(t)$ и угла $\gamma(t)$ в этом режиме изображены красными линиями на рис. 14, 15 на фоне черных графиков, иллюстрирующих решение уравнений (1) при $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$ из раздела 2 (рис. 3).

На рис. 16 – 23 показаны амплитудные спектры переменных $\Omega_i(t)$ и угла $\gamma(t)$ в решениях уравнений (1) и в аппроксимирующих последовательностях периодических решений. Графики построены для решений, рассмотренных выше. Рис. 16 – 19 отвечают случаю $k_\Omega = 0.00015\text{с}^{-1}$, рис. 20 – 23 – случаю $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$. Амплитудные спектры аппроксимируемого решения изображены черными линиями, аппроксимирующих функций – красными линиями. Кое-где красные линии налегают на черные, поэтому черные не видны. Спектры функций $\Omega_i(t)$ практически совпадают. Спектры угла $\gamma(t)$ на рис. 19 отличатся только на отрезке $0 \le f \le 0.00015\text{Гц}$, на рис. 23 их отличие довольно существенно из-за специфики аппроксимирующей последовательности.

5. Периодические движения спутника. Удобство аппроксимации решений уравнений (1) последовательностью периодических решений заключается в том, что последние допускают детальное параметрическое исследование. Построив семейства решений краевой задачи (1'), (3) для различных значений l_0, k_Ω и долготы Ω_G восходящего узла орбиты в «замороженной» гринвичской системе координат, можно в сжатом виде получить достаточно полное представление о решениях уравнений (1) на продолжительных интервалах времени, выбрать нужные параметры спутника.

Результаты решения задачи (1'), (3) представлены на рис. 24 – 31 графиками зависимости начальных условий от параметров l_0 и Ω_G. Графики построены при $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$, $k_\Omega = 0.0001\text{с}^{-1}$, $k_\Omega = 0.00015\text{с}^{-1}$ и $k_\Omega = 0.0002\text{с}^{-1}$. Они изображены соответственно черными, красными, синими и зелеными линиями. В (3) принято $t_0 = 0$, элементы используемой в уравнениях (1') кеплеровой орбиты (кроме долготы восходящего узла) совпадали с элементами орбиты спутника при $t = 0$. Решения найдены методом пристрелки, первое приближение разыскиваемых начальных условий $\mathbf{\Omega}(0) = 0$, $\mathbf{n}(0) = \mathbf{B}(0)/|\mathbf{B}(0)|$.

Графики зависимости от l_0 построены при $\Omega_G = 11.67°$ на трех отрезках: $2 \le l_0 \le 6$ (рис. 24, 25), $6 \le l_0 \le 10$(рис. 26, 27) и $10 \le l_0 \le 20$ (рис. 28, 29), здесь $[l_0] = \text{А}/\text{кг}$. В случае $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$ решения задачи (1'), (3) удалось найти не для всех значений l_0. Лакуны обусловлены резонансами в системе (1′) и связанным с ними ветвлением периодических решений [2 – 4, 7]. Резонансы возникают между изменением вектора $\mathbf{B}$ вдоль орбиты спутника и колебаниями орта

n относительно этого вектора.

Графики начальных условий решений задачи (1'), (3) в функции угла Ω_G построены при $l_0 = 4$ А/кг (рис. 30, 31). В случае $k_\Omega = \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega} = 0$ решения этой задачи удалось найти не для всех значений Ω_G. Причина та же, что и у лакун черных графиков на рис. 24 – 29, – резонансы в системе (1'). Указанные резонансы проявляются не только в системе (1'), но в системе (1).

Из-за таких резонансов невозможно продолжительное существование режима магнитной ориентации спутника при $k_\Omega = 0$. Изменение режима магнитной ориентации в процессе суточного вращения Земли можно приближенно рассматривать как изменение периодического решения системы (1') в функции угла Ω_G. Решения задачи (1'), (3), на которых угол $\gamma_{\max} = \max|\gamma(t)|$ $(0 \le t \le T)$ мал, образуют однопараметрические семейства с параметром Ω_G. При $k_\Omega > 0$ существует одно такое семейство, и оно непрерывно зависит от Ω_G на весьма значительном интервале изменения этого параметра. Интервал охватывает многие сутки полета. Как следствие, режим существует продолжительное время. В случае $k_\Omega = \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega} = 0$ существует достаточно много семейств периодических решений с малым $\gamma_{\max}$ и непрерывных по Ω_G. При каждом Ω_G существует не более одного такого решения. Лакуны – интервалы значений Ω_G, при которых решения задачи (1'), (3) не обладают малым $\gamma_{\max}$, – весьма малы. Отрезок $0 \le \Omega_G \le 2\pi$ на рис. 30 содержит две таких лакуны, некоторые их детали показаны на рис. 31. При изменении Ω_G в течение суток на некоторых интервалах происходит нарушение непрерывности, и периодическое решение перескакивает с одного семейства на другое. Вблизи границ семейств значения $\gamma_{\max}$ уже не такие малые, поэтому указанные скачки приводят к постепенному нарушению ориентации (рис. 3).

Если в уравнениях (1) и (1') принять модель МПЗ в виде прямого диполя, то резонансов при изменении Ω_G не возникает. В этом случае режим магнитной ориентации существует продолжительное время (рис. 4). На рис. 32 показаны графики начальных условий решений задачи (1'), (3) в функции угла Ω_G при $k_\Omega = \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega} = 0$ и $l_0 = 4$ А/кг для двух вариантов модели МПЗ: IGRF – черные линии, прямой диполь – красные линии. На рис. 33 показаны графики начальных условий тех же решений задачи (1'), (3), пересчитанные в системы координат, которые получаются из гринвичской системы поворотом вокруг оси Cy_3 на угол Ω_G используемой орбиты спутника. В каждой такой системе ось направлена в восходящий узел используемой орбиты. Графики, полученные с использованием модели IGRF, изображены сплошными линиями. Их цвета указывают на принятые значения k_Ω: 0 – черные линии, 0.0001с^{-1} – красные линии, 0.00015с^{-1} – синие линии и 0.0002с^{-1} – зеленые линии. Графики, полученные с использованием модели прямого диполя, показаны пунктиром.

Резонансы в задаче (1'), (3) проявляются и при $k_\Omega > 0$. Рис. 34 содержит графики компонент векторов $\mathbf{\Omega}(t)$ и $\mathbf{n}(t)$, $0 \le t \le T$ решений этой задачи, вычисленных при $k_\Omega = 0.00015$ с$^{-1}$, $\Omega_G = 11.67°$ и двух значениях l_0: 4А/кг (черные линии) и 4.186 А/кг (красные линии). Амплитуды высокочастотных колебаний Ω_i в «красном» решении значительно выше, чем в «черном». Это объясняется наличием в системе (1′) резонанса при l_0 = 4.186 А/кг (см. рис. 24 и 27). Однако вследствие указанной выше непрерывности по Ω_G при $k_\Omega > 0$ такие резонансы не приводят к разрушению ориентированного движения.

6. Существование периодических движений. Чтобы доказать существование периодических решений, о которых говорилось разделах 4 и 5, уравнения (1′) запишем иначе. Введем две новые системы координат. Первая система связана с вектором $\mathbf{B}$ индукции магнитного поля Земли в точке O. Эту систему обозначим $OX_1X_2X_3$. Орты $\mathbf{e}_i$ осей OX_i $(i = 1, 2, 3)$ задаются соотношениями

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{B}}{B}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{N}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1.$$

Здесь $B = |\mathbf{B}|$, $\mathbf{N}$ – орт нормали к плоскости орбиты, направленный по вектору орбитального кинетического момента спутника. Так как орбита спутника считается кеплеровой, $\mathbf{N} = \mathrm{const}$. Проекции абсолютной угловой скорости системы $OX_1X_2X_3$ на ее собственные оси имеют вид

$$\Phi_1 = \Phi_2 \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_1}{|\mathbf{N} \times \mathbf{e}_1|}, \quad \Phi_2 = -\frac{\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{e}_3}{B}, \quad \Phi_3 = \frac{\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{e}_2}{B}.$$

Вторая система координат $Ox_1x_2x_3$ образована осями Резаля спутника. Ее ось Ox_1 направлена по орту $\mathbf{n}$. Система $Ox_1x_2x_3$ получаются из осей системы $OX_1X_2X_3$ двумя поворотами. Сначала на угол α вокруг оси OX_2, затем на угол β вокруг оси OX_3, получившейся после первого поворота. Компоненты абсолютной угловой скорости спутника в системе $Ox_1x_2x_3$ обозначим $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Уравнения (1) с использованием введенных систем координат можно записать в виде [3, 8]

$$\begin{gathered}
\lambda\dot{\omega}_1 = -k_\Omega \omega_1, \\
\dot{\omega}_2 = -k_\Omega \omega_2 - \left(\lambda\omega_1 - \omega_2 \tan\beta - \frac{\Phi_1 \cos\alpha - \Phi_3 \sin\alpha}{\cos\beta} \right)\omega_3 - \\
- l_0 B \sin\alpha - \nu(1-\lambda) x_1 x_3, \\
\\
\dot{\omega}_3 = \left(\lambda\omega_1 - \omega_2 \tan\beta - \frac{\Phi_1 \cos\alpha - \Phi_3 \sin\alpha}{\cos\beta} \right)\omega_2 - k_\Omega \omega_3 - \\
- l_0 B \cos\alpha \sin\beta + \nu(1-\lambda) x_1 x_2, \\
\\
\omega_2 = (\dot{\alpha} + \Phi_2)\cos\beta - (\Phi_1 \cos\alpha - \Phi_3 \sin\alpha)\sin\beta,
\end{gathered} \tag{4}$$

$$\omega_3 = \dot{\beta} + \Phi_1 \sin\alpha + \Phi_3 \cos\alpha .$$

Здесь x_i – компоненты геоцентрического вектора точки O в системе $Ox_1x_2x_3$. Так как орбита спутника считается кеплеровой эллиптической, время входит в систему (4) периодически с орбитальным периодом T. Исследование периодических решений этой системы при $k_\Omega = 0$ и при $k_\Omega > 0$ проводится по-разному. Рассмотрим сначала случай $k_\Omega = 0$. Доказательство существования периодических решений системы (4) в этом случае практически идентично доказательству работы [4]. В [4] использована модель МПЗ в виде прямого диполя и орбита спутника принята круговой, но эти упрощения несущественны.

Так как $\omega_1 = \mathrm{const}$ при $k_\Omega = 0$, первое уравнение системы (4) рассматривать не будем, а в остальных ее уравнениях ω_1 будем считать параметром. Введем новую независимую переменную τ и постоянную b, положив

$$\tau = \int_0^t \sqrt{B(s)}\, ds \ , \quad b = \frac{1}{2}\int_0^T \sqrt{B(s)}\, ds \ .$$

Исключим ω_2, ω_3 из последних четырех уравнений (4) и, перейдя к независимой переменной τ, получим систему, которую запишем в векторном виде [4]

$$A(q)q'' + \mu^2 \frac{\partial \Pi(q)}{\partial q} = C(\tau)q' + f(\tau, q, q'). \tag{5}$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по τ, $q = (\alpha, \beta)^{\mathrm{T}}$,

$$A(q) = \mathrm{diag}\,(\cos^2\beta,\ 1), \quad \Pi = -\cos\alpha\cos\beta\,, \quad \mu = \sqrt{l_0}\ .$$

$$C(\tau) = \begin{Vmatrix} g(\tau) & -p(\tau) \\ p(\tau) & g(\tau) \end{Vmatrix}, \quad g = -\frac{B'}{2B}, \quad p = \frac{\lambda\omega_1 - 2\Phi_1}{\sqrt{B}},$$

$$f(\tau, q, q') - f(\tau, 0, 0) = O(\| q \| + \| q' \|^2),$$

B и Φ_1 выражаются в функции τ, $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Переменная τ входит в систему (5) периодически с периодом $2b$. Рассмотрим начальную задачу $2Y' = CY$, $Y(0) = E_2 \equiv \mathrm{diag}\,(1, 1)$. Ее решение

$$Y(\tau) = \sqrt[4]{\frac{B(0)}{B(\tau)}} \begin{Vmatrix} \cos\psi(\tau) & -\sin\psi(\tau) \\ \sin\psi(\tau) & \cos\psi(\tau) \end{Vmatrix}, \quad \psi(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\tau p(s)\, ds .$$

Представим его в виде произведения $Y(\tau) = Y_1(\tau) Y_2(\tau)$, где

$$Y_1(\tau)=\sqrt[4]{\frac{B(0)}{B(\tau)}}\begin{Vmatrix}\cos\widetilde{\psi}(\tau) & -\sin\widetilde{\psi}(\tau)\\ \sin\widetilde{\psi}(\tau) & \cos\widetilde{\psi}(\tau)\end{Vmatrix},\quad Y_2(\tau)=\begin{Vmatrix}\cos a\tau & -\sin a\tau\\ \sin a\tau & \cos a\tau\end{Vmatrix},$$

$$\widetilde{\psi}(\tau)=\psi(\tau)-a\tau\,,\quad a=\frac{1}{4b}\int_0^{2b}p(s)\,ds=\frac{\lambda\omega_1 T}{4b}-\frac{1}{2b}\int_0^T\Phi_1(t)\,dt\,.$$

Функция $\widetilde{\psi}(\tau)$ и матрица $Y_1(\tau)$ – периодические по τ с периодом $2b$, матрицы $Y_1(\tau)$, $Y_2(\tau)$ удовлетворяют уравнениям

$$Y_1'+Y_1H=\frac{1}{2}CY_1,\quad Y_2'=HY_2,\quad H=\begin{Vmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{Vmatrix}.$$

В системе (5) сделаем замену переменных $q\mapsto y$: $q=Y_1(\tau)y$. Получим систему

$$y''-2Hy'+(\mu^2E_2+H^2)y=f_1(\tau,y,y')+\mu^2F(\tau,y)\,, \tag{6}$$

в которой гладкие $2b$-периодические по τ функции f_1 и F допускают оценки

$$f_1(\tau,y,y')-f_1(\tau,0,0)=O(\|y\|+\|y'\|^2)\,,\quad F(\tau,y)=O(\|y\|^2)\,.$$

Введем множество $I(\varepsilon)=\{\mu:\mu>0,|\sin b(\mu+a)\sin b(\mu-a)|\ge\varepsilon\}$, $\varepsilon\in(0,1)$. Оно не пусто и не ограниченно. При $\varepsilon<<1$ оно представляет собой интервал $(0,+\infty)$, из которого удалены попавшие в него малые окрестности точек вида $\mu=\pm a+\pi m/b$ при целом m. Справедлива следующая теорема.

Для любого $\varepsilon\in(0,1)$ существуют такие положительные числа M, C_1 и C_2, что при $\mu\ge M$, $\mu\in I(\varepsilon)$ система (6) имеет единственное решение $y_*(\tau,\mu)$, непрерывно зависящее от μ и удовлетворяющее неравенствам

$$\|y_*(\tau,\mu)\|\le\frac{C_1}{\mu^2},\quad \|y_*'(\tau,\mu)\|\le\frac{C_2}{\mu}\quad(0\le\tau\le 2b)\,.$$

К типу таких решений относятся рассмотренные выше решения в случае $k_\Omega=0$. При $k_\Omega\ne 0$ периодические решения системы (4) могут существовать только при $\omega_1=0$. Последнее соотношение позволяет отбросить первое уравнение этой системы и перейти к системе вида (5), в матрице $C(\tau)$ которой

$$g=-\frac{k_\Omega}{\sqrt{B}}-\frac{B'}{2B},\quad p=-\frac{2\Phi_1}{\sqrt{B}}\,.$$

Решение начальной задачи $2Y'=CY$, $Y(0)=E_2$ теперь имеет вид

$$Y(\tau)=\sqrt[4]{\frac{B(0)}{B(\tau)}}e^{-\varphi(\tau)}\begin{Vmatrix}\cos\psi(\tau) & -\sin\psi(\tau)\\ \sin\psi(\tau) & \cos\psi(\tau)\end{Vmatrix},$$

$$\varphi(\tau)=\frac{k_\Omega}{2}\int_0^\tau B^{-1/2}ds=\frac{k_\Omega t}{2},\quad \psi(\tau)=-\int_0^\tau \Phi_1 B^{-1/2}ds\,.$$

Представим это решение в виде произведения $Y(\tau)=Y_1(\tau)Y_2(\tau)$, где

$$Y_1(\tau)=\sqrt[4]{\frac{B(0)}{B(\tau)}}e^{-\tilde{\varphi}(\tau)}\begin{Vmatrix}\cos\tilde{\psi}(\tau) & -\sin\tilde{\psi}(\tau)\\ \sin\tilde{\psi}(\tau) & \cos\tilde{\psi}(\tau)\end{Vmatrix},\quad Y_2(\tau)=e^{-d\tau}\begin{Vmatrix}\cos a\tau & -\sin a\tau\\ \sin a\tau & \cos a\tau\end{Vmatrix},$$

$$\tilde{\varphi}(\tau)=\varphi(\tau)-d\tau,\quad d=\frac{k_\Omega T}{4b}>0,\quad \tilde{\psi}(\tau)=\psi(\tau)-a\tau,\quad a=-\frac{1}{2b}\int_0^T\Phi_1(t)\,dt\,.$$

Функции $\tilde{\varphi}(\tau)$ $\tilde{\psi}(\tau)$ и матрица $Y_1(\tau)$ зависят от τ периодически с периодом $2b$, матрица $Y_1(\tau)$, $Y_2(\tau)$ удовлетворяют уравнениям

$$Y_1'+Y_1H=\frac{1}{2}CY_1,\quad Y_2'=HY_2,\quad H=\begin{Vmatrix}-d & -a\\ a & -d\end{Vmatrix}.$$

В новой системе (5) сделаем замену переменных $q\mapsto y$: $q=Y_1(\tau)y$. Поучим систему вида (6), в которой $2b$-периодические по τ функции f_1 и F допускают указанные выше оценки.

Введем множество

$$I(\varepsilon)=\{\mu:\mu>0,\ [\mathrm{sh}^2 bd+\sin^2 b(\mu+a)][\mathrm{sh}^2 bd+\sin^2 b(\mu-a)]\ge\varepsilon^2\},$$

$0<\varepsilon<\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 db}$. Оно не пусто и не ограниченно. При $\varepsilon<\mathrm{sh}\,db$ оно совпадает с интервалом $(0,+\infty)$. С новым множеством $I(\varepsilon)$ сформулированная выше теорема справедлива и для новой системы (6). Взяв $\varepsilon<\mathrm{sh}\,db$, можно игнорировать резонансы, существующие при $k_\Omega=0$, но это потребует увеличения постоянных M, C_1 и C_2. В случае $k_\Omega>0$ влияние резонансов уменьшается по мере увеличения μ.

Множество $I(\varepsilon)$ можно рассматривать в плоскости (μ,Ω_G). На этом множестве решение $y_*(\tau,\mu)$ непрерывно зависит от обоих параметров. Именно такие решения имелись в виду в заключительной части предыдущего раздела, где говорилось о семействах решений задачи (1'), (3), зависящих от Ω_G.

7. Исследование устойчивости периодических решений сводилось к вычислению мультипликаторов соответствующей системы уравнений в вариациях. Мультипликаторы обозначим ρ_k $(k=1,2,\ldots,6)$. Пусть сначала $k_\Omega=0$. В этом случае система $(1')$ имеет первый интеграл $\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n}=\mathrm{const}$ и интегральное соотношение $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$, поэтому два ее мультипликатора $\rho_1=\rho_2=1$. Систему $(1')$ при $k_\Omega=0$ можно привести к гамильтоновой форме. Следовательно, необходимые условия устойчивости ее периодических решений выражаются равенствами $|\rho_k|=1$. Последние равенства проверялись при $k=3,4,5,6$ вместе с равенствами $\rho_1=\rho_2=1$ для каждого найденного решения задачи (1′), (3). Необходимые условия устойчивости оказались выполненными для всех таких решений. Но расчеты были сделаны для дискретного набора значений l_0 и Ω_G, поэтому малые области неустойчивости в плоскости этих параметров могли быть пропущены.

При $k_{\mathbf{\Omega}}>0$ система (1′) имеет интегральное соотношение $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$, а скалярное произведение $\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{n}=\xi$ удовлетворяет соотношению $\dot{\xi}+k_{\Omega}\xi=0$. Отсюда находим два мультипликатора $\rho_1=1$, $\rho_2=\exp(-k_{\mathbf{\Omega}}T)$. По теореме Лиувилля $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6=\exp(-3k_{\Omega}T)$, поэтому $\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6=\exp(-2k_{\mathbf{\Omega}}T)$. Достаточные условия устойчивости решений задачи (1′), (3) выражаются неравенствами $|\rho_k|<1$ $(k=3,4,5,6)$. Эти неравенства, а также выписанные соотношения для ρ_1, ρ_2 и $\rho_3\rho_4\rho_5\rho_6$ оказались выполненными для всех найденных решений. Во всех этих решениях мультипликаторы ρ_k $(k=3,4,5,6)$ образуют две комплексно-сопряженные пары, причем $|\rho_k|\approx\exp(-k_{\Omega}T/2)$.

Литература

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
2. Сарычев В.А., Сазонов В.В., Овчинников М.Ю. Периодические колебания спутника относительно центра масс под действием магнитного момента // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 1982. № 182.
3. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли. Итого науки и техники. Исследование космического пространства, т. 23. М.: ВИНИТТИ, 1985.
4. Сазонов В.В. Одноосная магнитная ориентация искусственных спутников // Механика твердого тела. 1987. № 2. С. 27-32.
5. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
6. Теребиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука, 1992.
7. Хентов А.А. Влияние магнитного и гравитационного полей Земли на колебания спутника вокруг своего центра масс // Космические исследования. 1967. Т. 5. № 4. С. 554–572.
8. Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С., Иванов Д.С. Магнитные системы ориентации малых спутников. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2016.

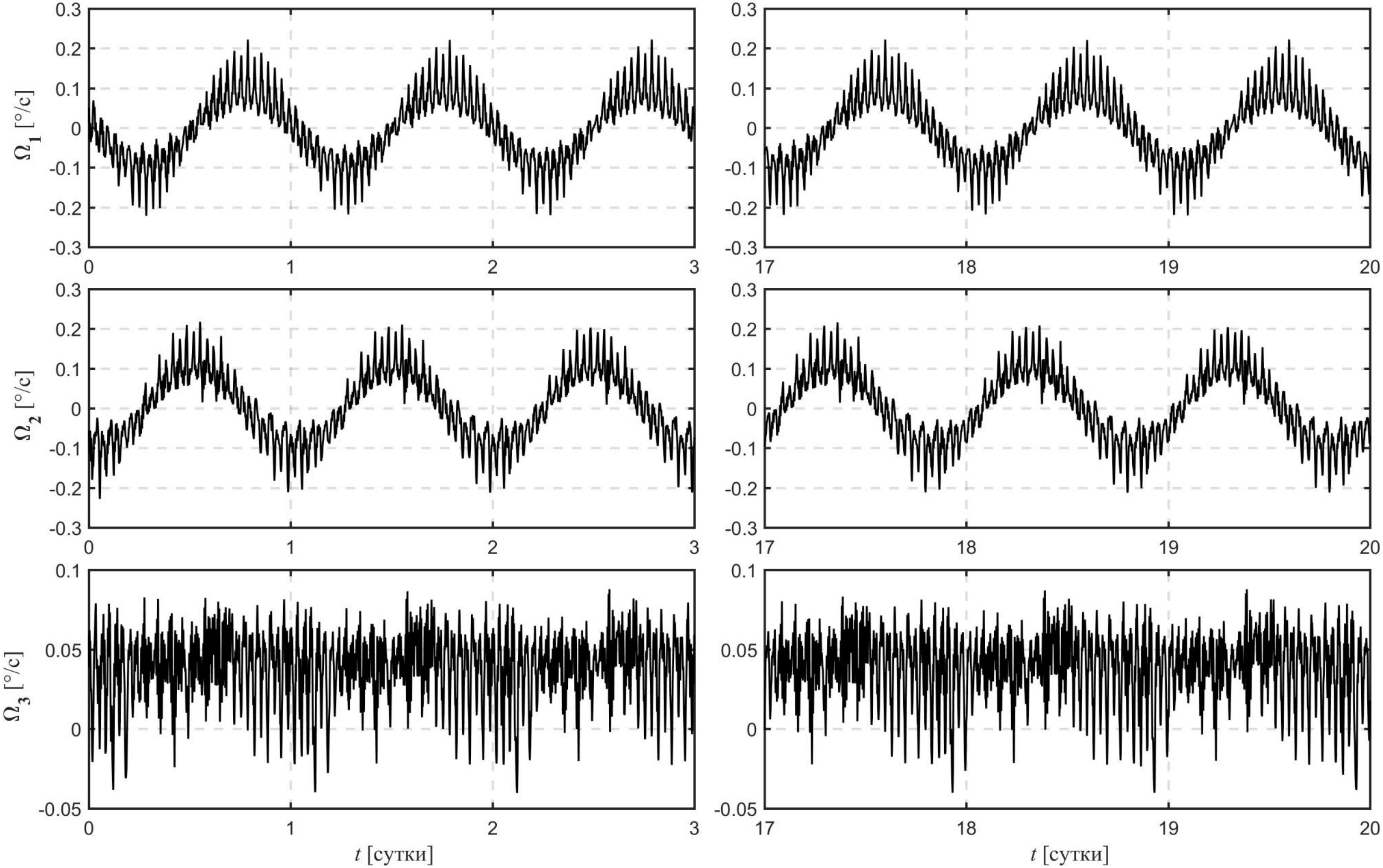

Рис. 1. Решение системы (1) при $k_{\Omega} = 0.00015\text{c}^{-1}$, модель МПЗ IGRF: компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$.

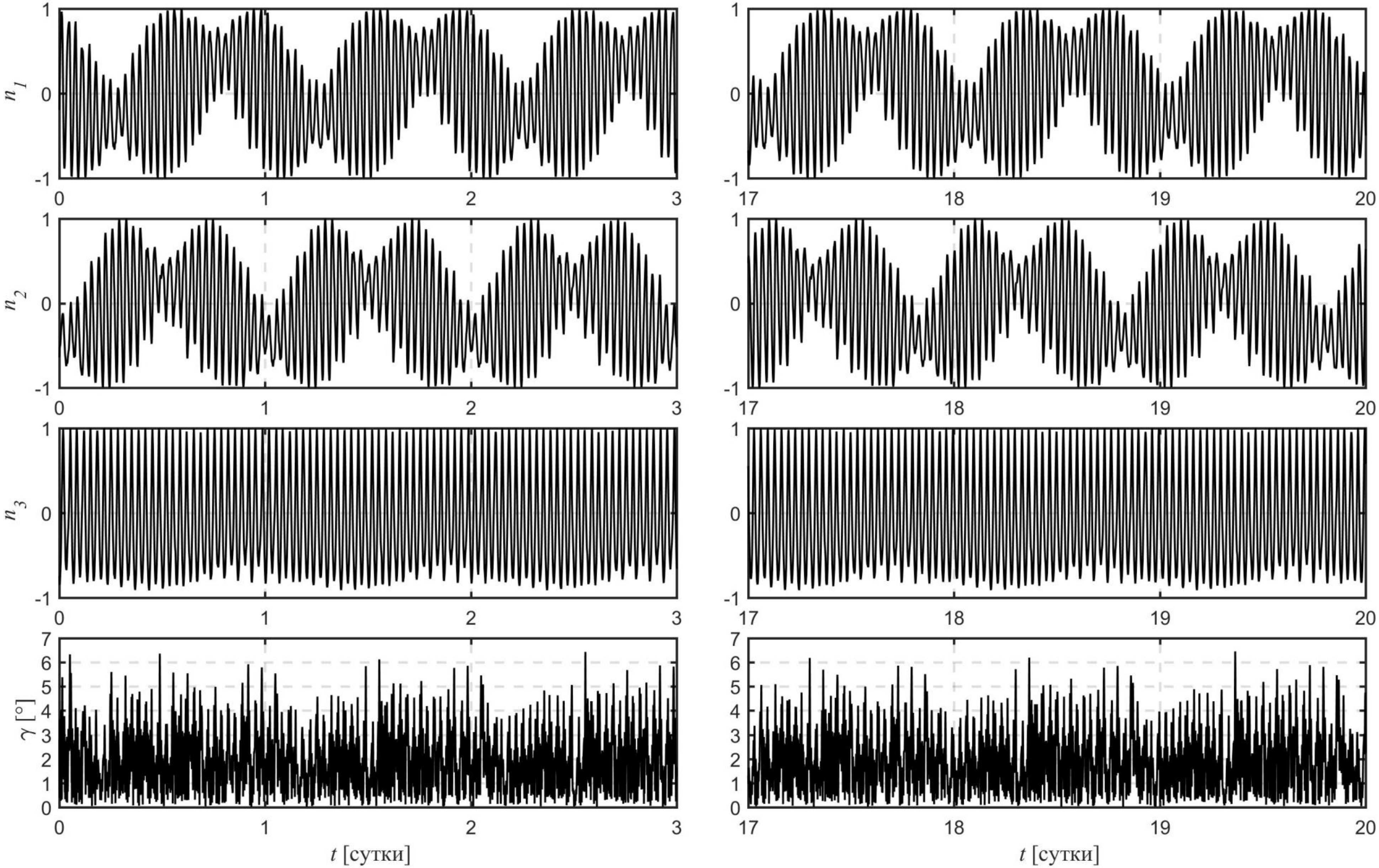

Рис. 2. Решение системы (1) при $k_\Omega = 0.00015\text{с}^{-1}$, модель МПЗ IGRF: компоненты орта $\mathbf{n}$ и угол γ.

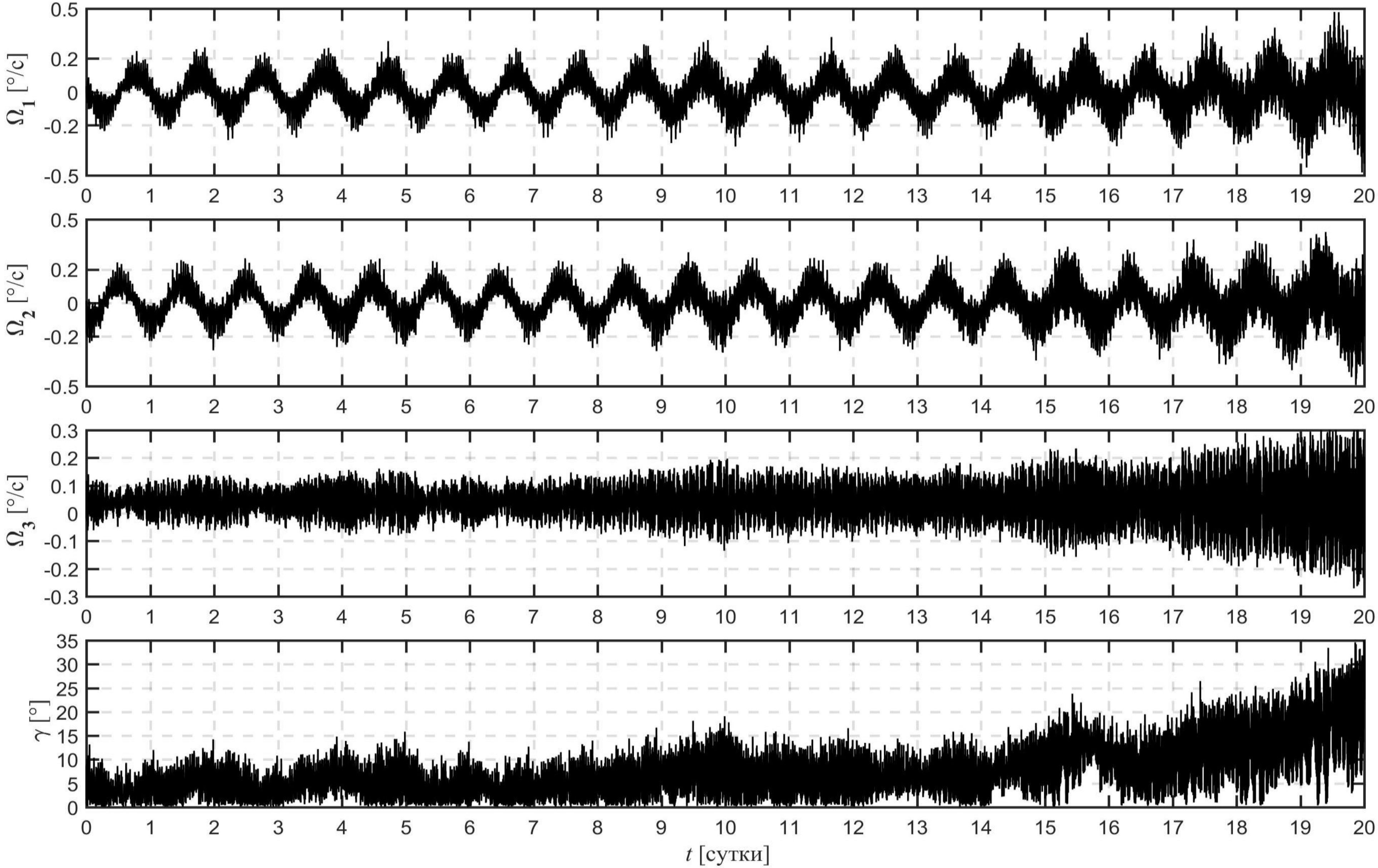

Рис. 3. Решение системы (1) при $k_\Omega = 0$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega} = 0$, модель МПЗ IGRF: компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$ и угол γ.

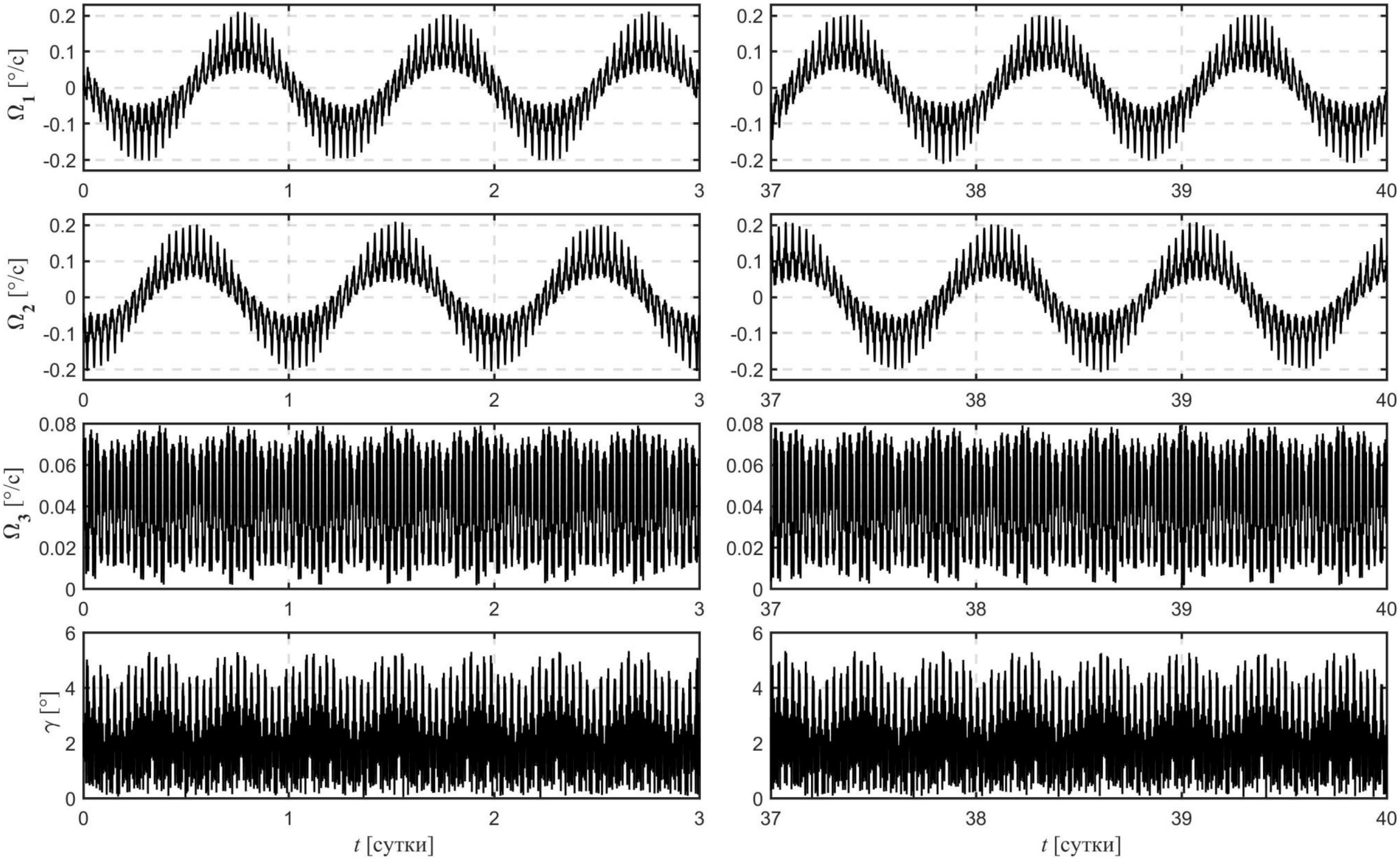

Рис. 4. Решение системы (1) при $k_\Omega = 0$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$, модель МПЗ прямой диполь: компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$ и угол γ.

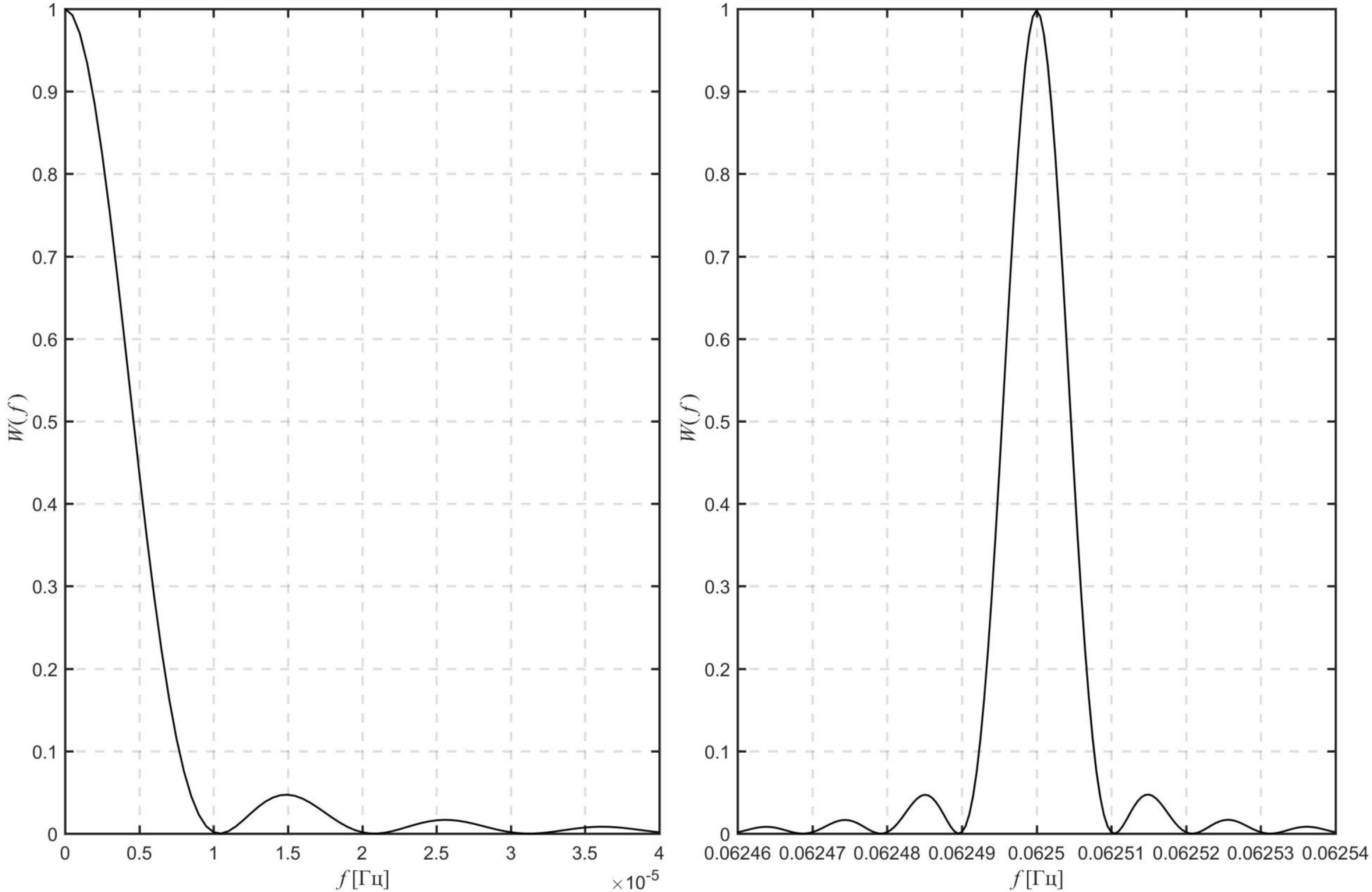

Рис. 5. Функция окна, $N = 6000$, $h = 16$ с.

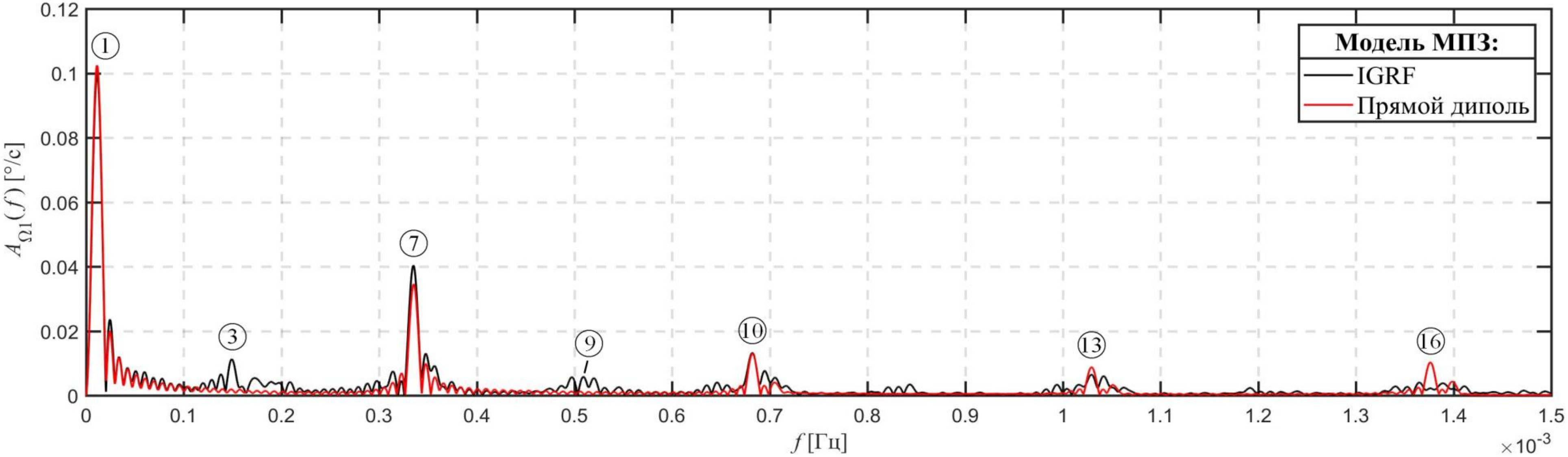

Рис. 6. Амплитудный спектр компоненты Ω_1, $k_\Omega = 0.00015\text{c}^{-1}$.

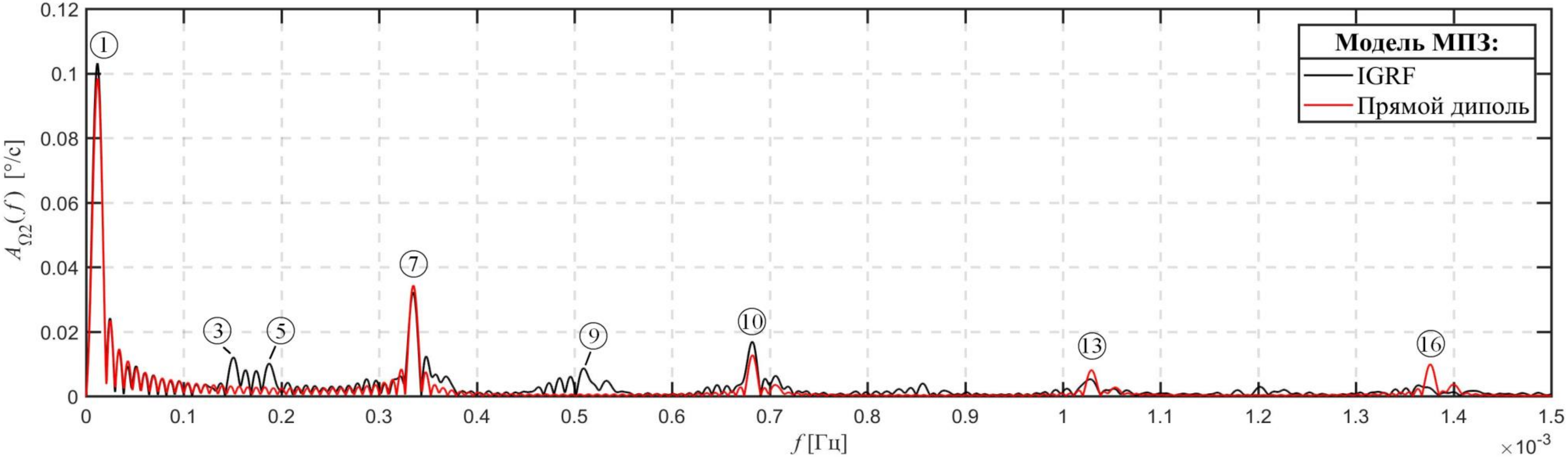

Рис. 7. Амплитудный спектр компоненты Ω_2, $k_\Omega = 0.00015\text{c}^{-1}$.

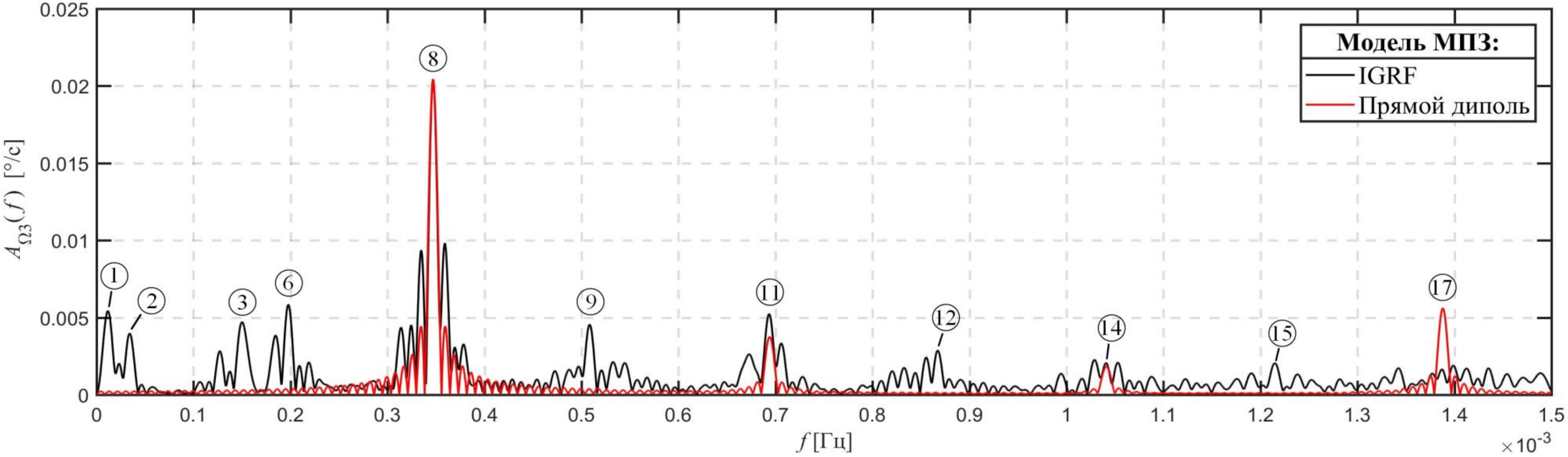

Рис. 8. Амплитудный спектр компоненты Ω_3, $k_\Omega = 0.00015 \text{c}^{-1}$.

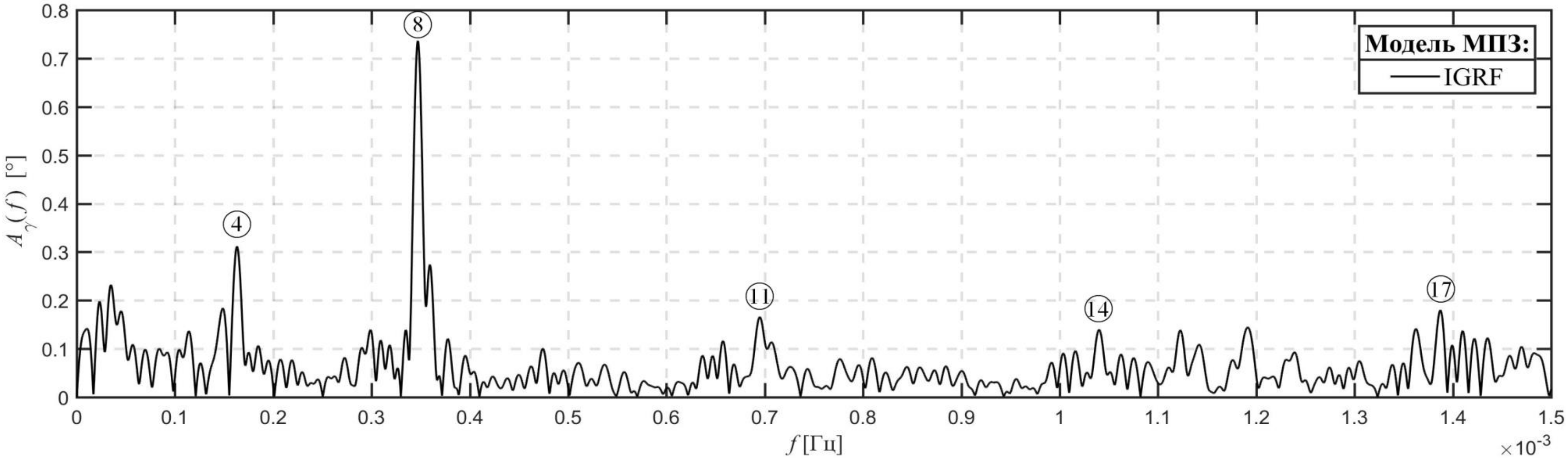

Рис. 9. Амплитудный спектр угла γ, $k_\Omega = 0.00015 \text{c}^{-1}$.

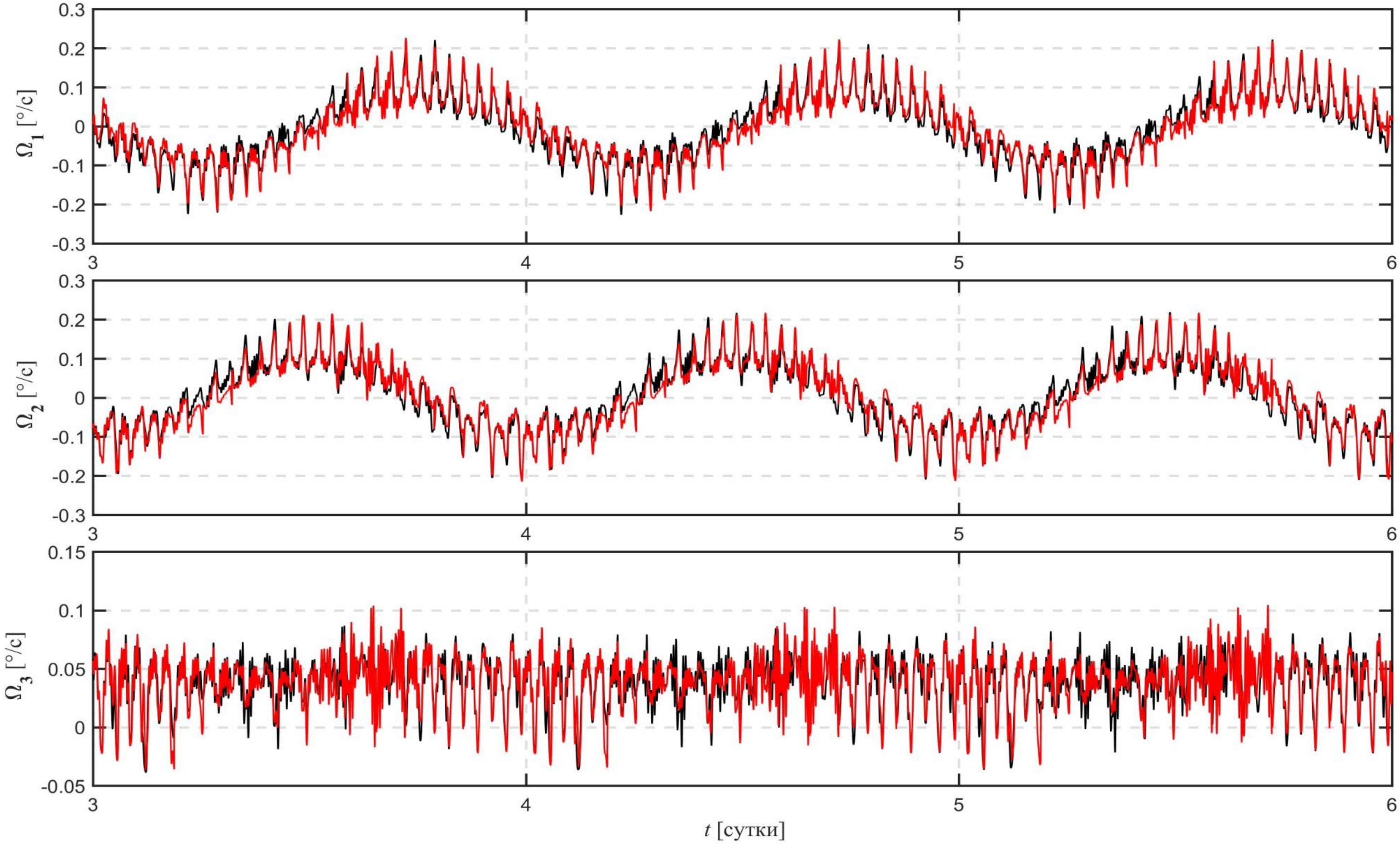

Рис. 10. Аппроксимация решений системы уравнений (1) при $k_\Omega = 0.00015\text{с}^{-1}$: компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$.
Черные линии – решения системы (1), красные линии – решения краевой задачи (1′), (3).

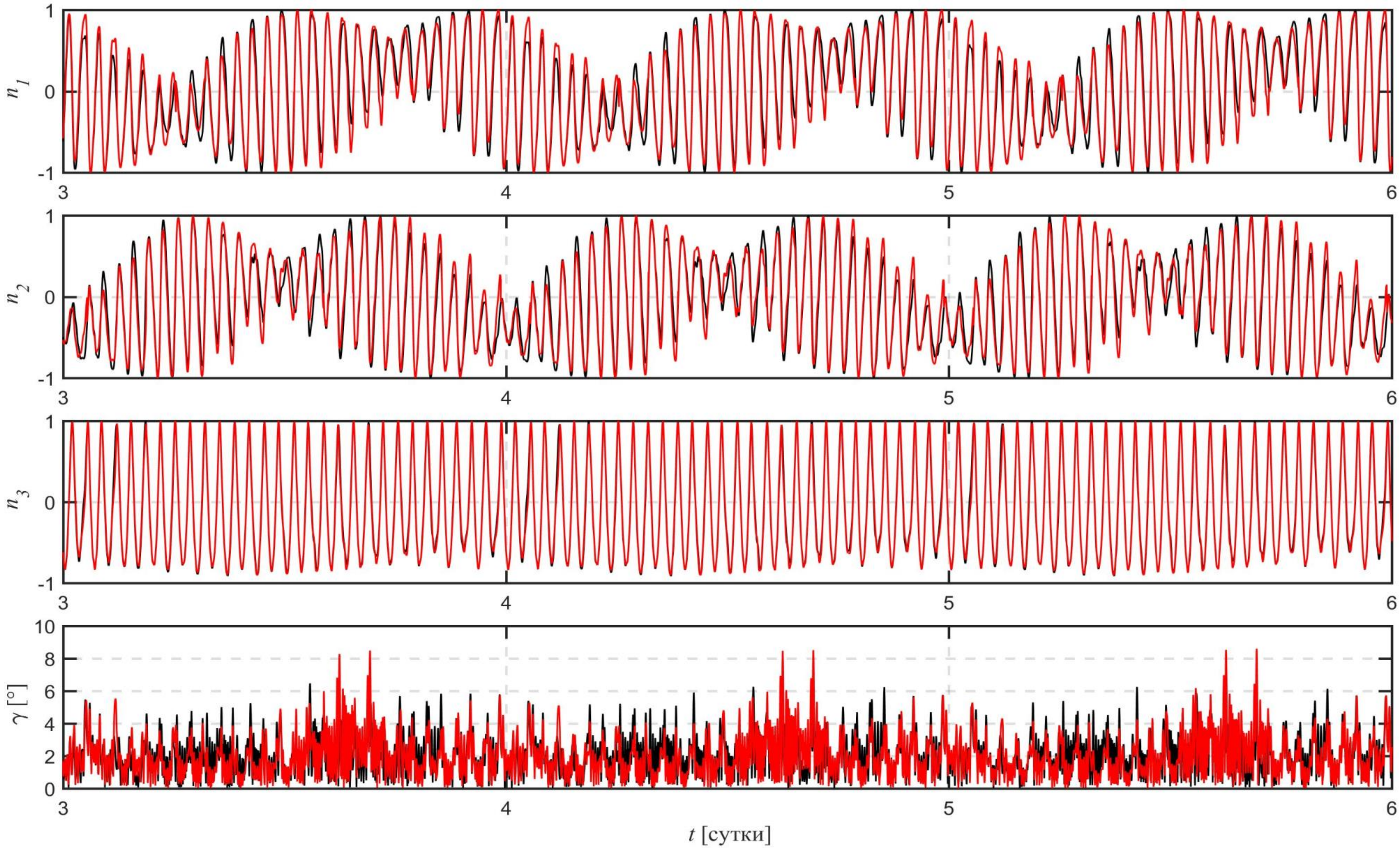

Рис. 11. Аппроксимация решений системы уравнений (1) при $k_\Omega = 0.00015\text{с}^{-1}$: компоненты орта $\mathbf{n}$ и угол γ. Черные линии – решения системы (1), красные линии – решения краевой задачи (1′), (3).

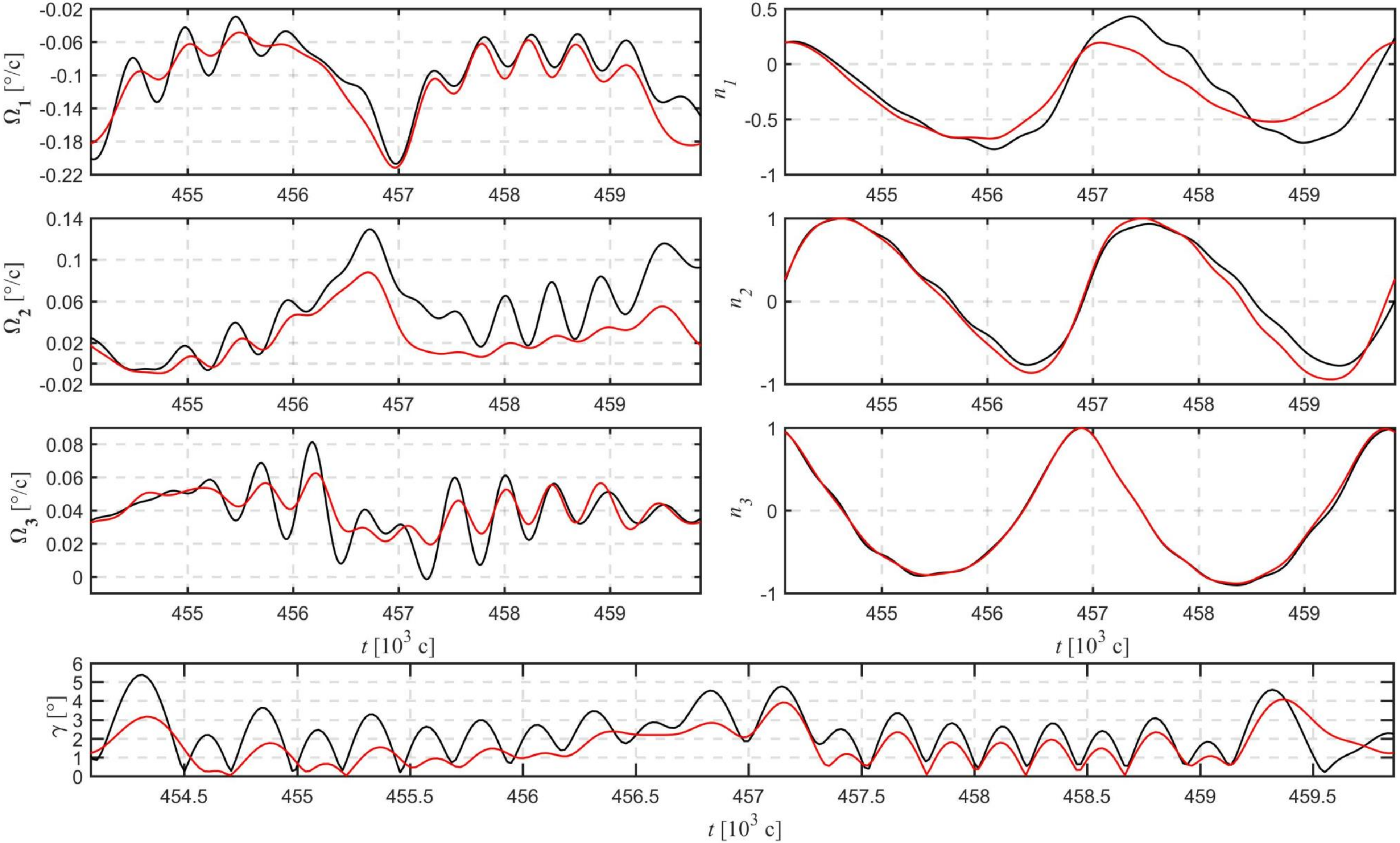

Рис. 12. Аппроксимация решений системы уравнений (1) при $k_{\Omega} = 0.00015\text{c}^{-1}$: компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$, орта $\mathbf{n}$ и угол γ. Черные линии – решения системы (1), красные линии – решения краевой задачи (1′), (3).

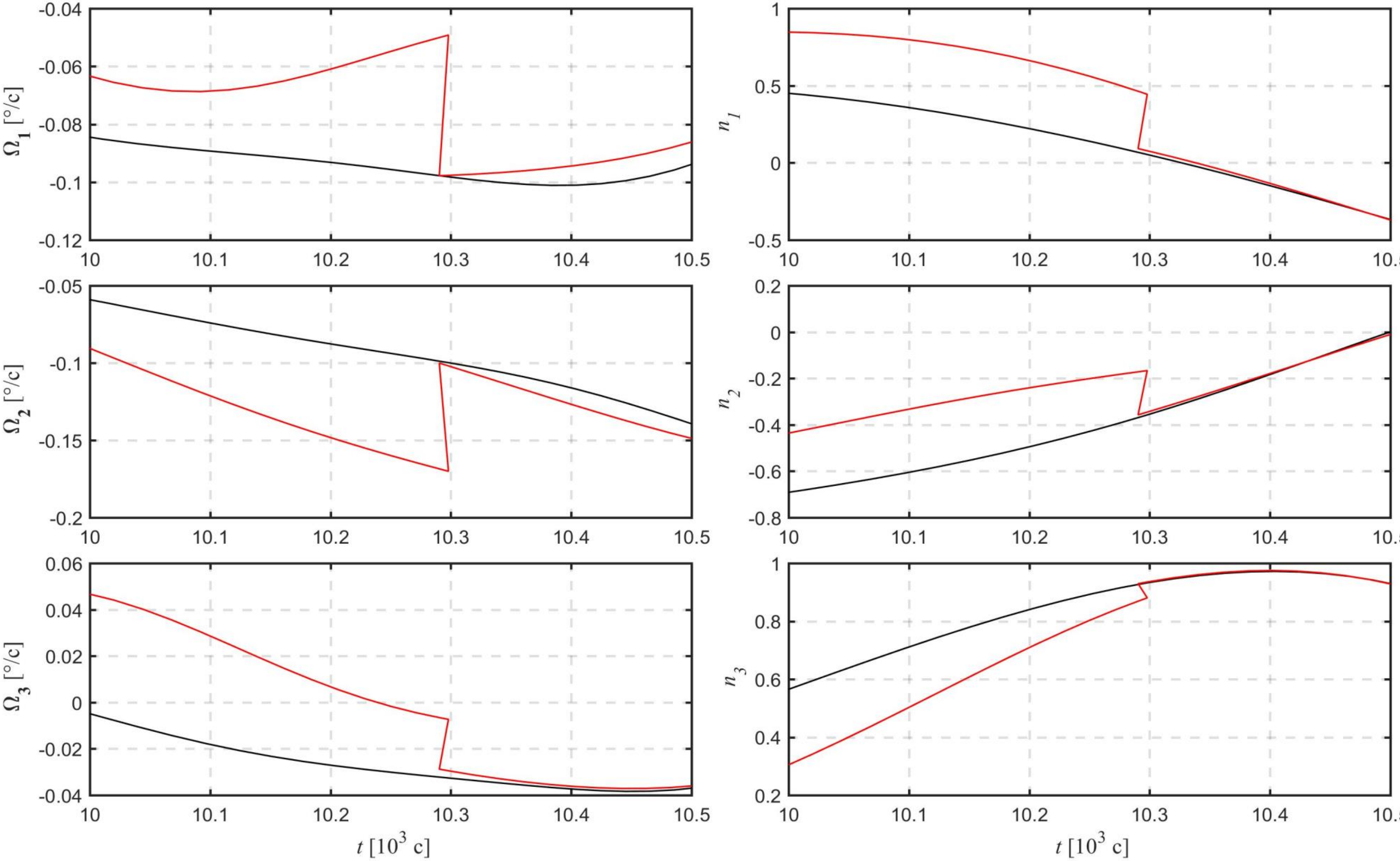

Рис. 13. Аппроксимация решений системы уравнений (1) при $k_\Omega = 0.00015\text{c}^{-1}$: компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$ и орта $\mathbf{n}$. Черные линии – решения системы (1), красные линии – решения краевой задачи (1′), (3).

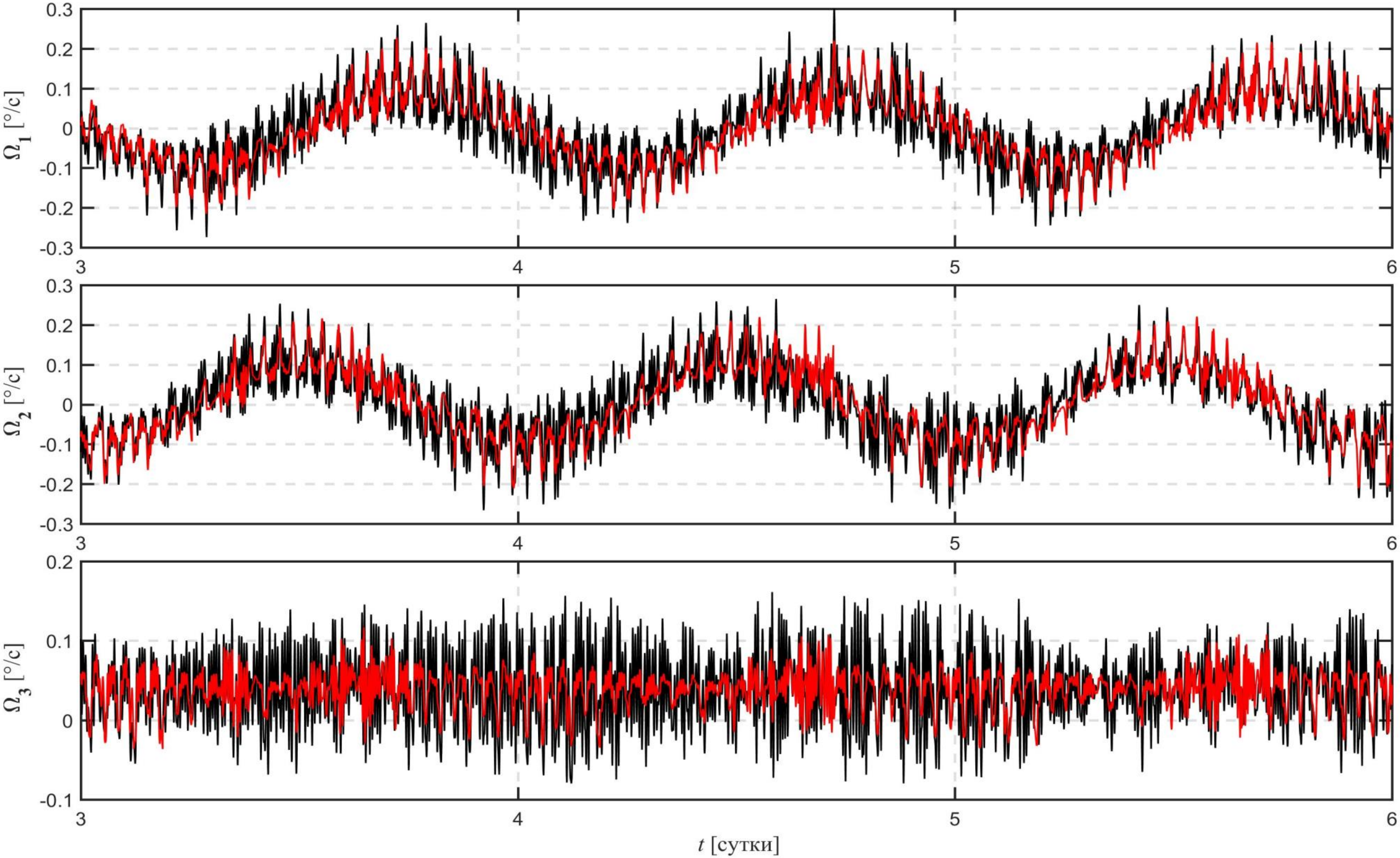

Рис. 14. Аппроксимация решений системы уравнений (1) при $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$: компоненты вектора $\mathbf{\Omega}$.
Черные линии – решения системы (1), красные линии – решения краевой задачи (1′), (3).

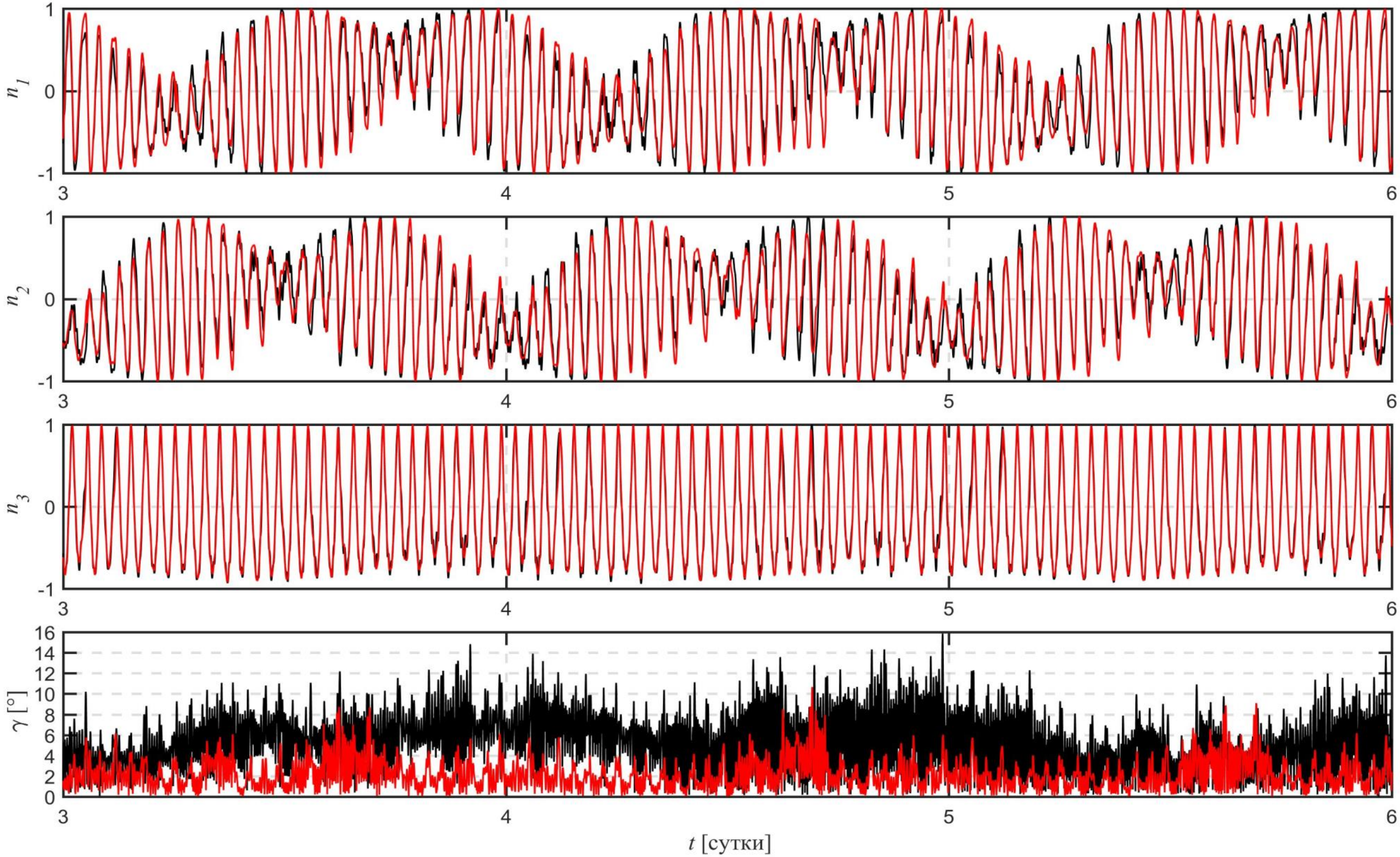

Рис. 15. Аппроксимация решений системы уравнений (1) при $k_\Omega = \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega} = 0$: компоненты орта $\mathbf{n}$ и угол γ. Черные линии – решения системы (1), красные линии – решения краевой задачи (1′), (3).

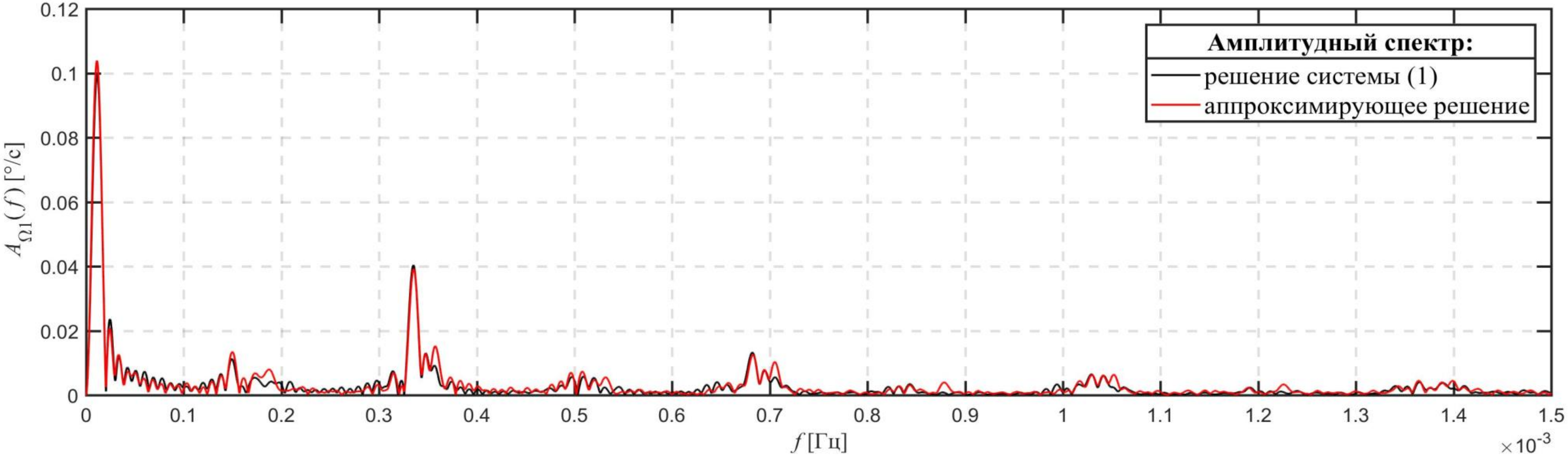

Рис. 16. Амплитудный спектр компоненты Ω_1, $k_\Omega = 0.00015\text{с}^{-1}$.

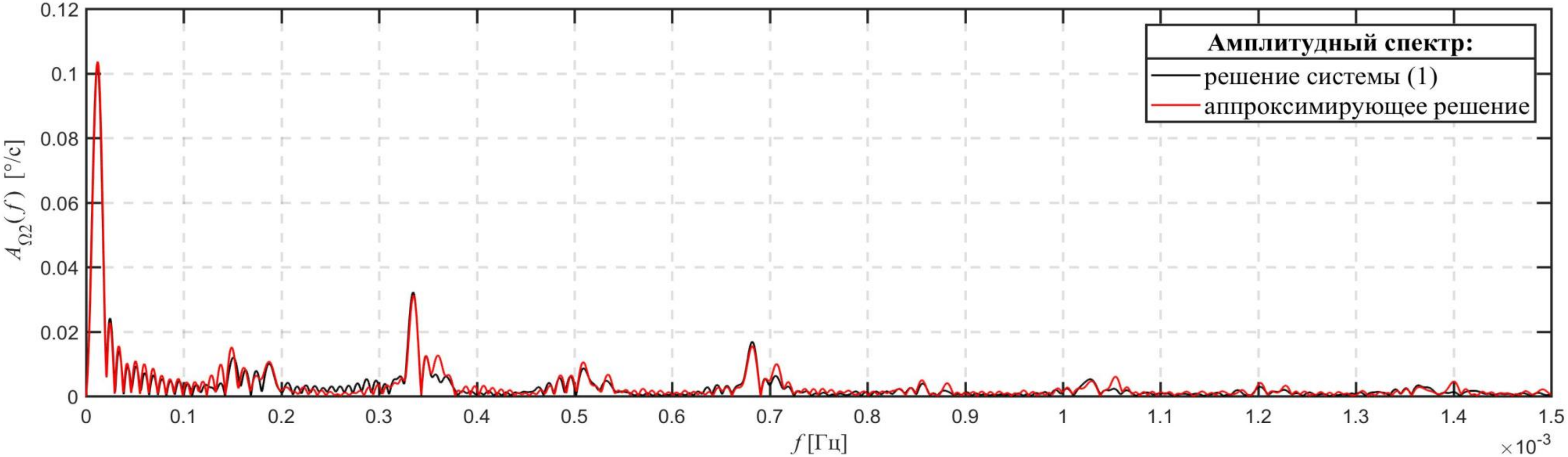

Рис. 17. Амплитудный спектр компоненты Ω_2, $k_\Omega = 0.00015\text{с}^{-1}$.

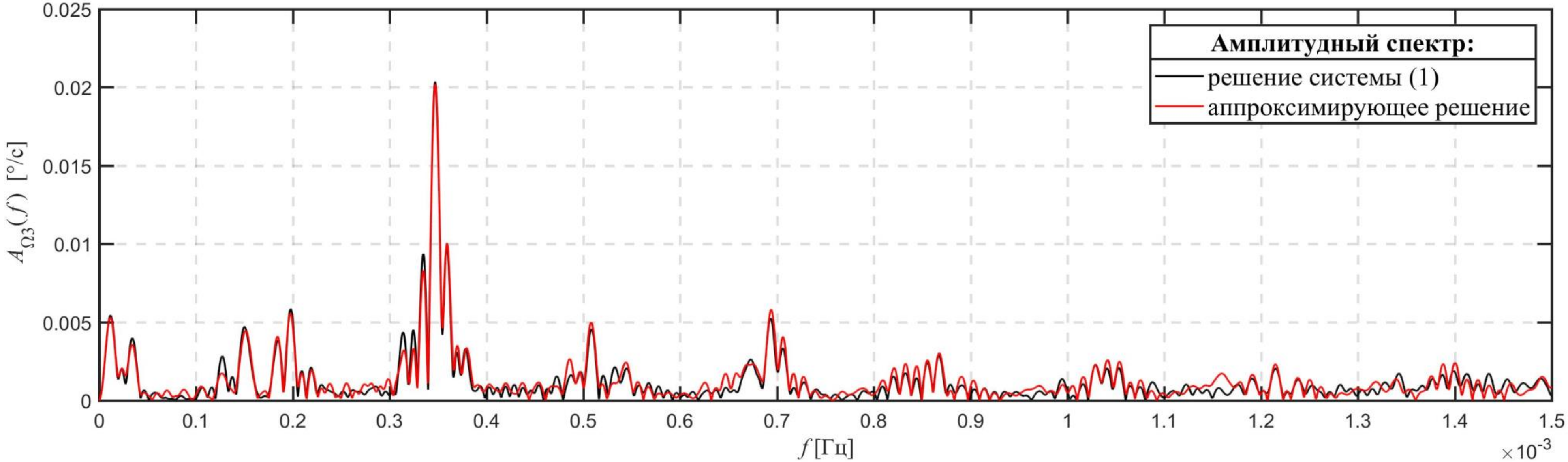

Рис. 18. Амплитудный спектр компоненты Ω_3, $k_\Omega = 0.00015\text{с}^{-1}$.

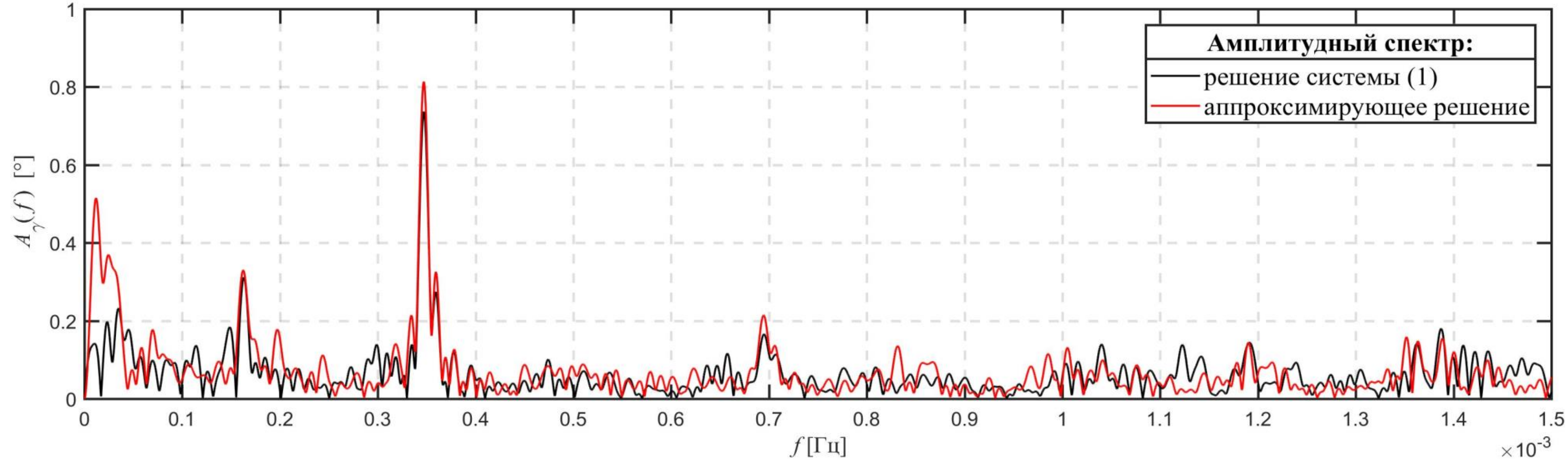

Рис. 19. Амплитудный спектр угла γ, $k_\Omega = 0.00015\text{с}^{-1}$.

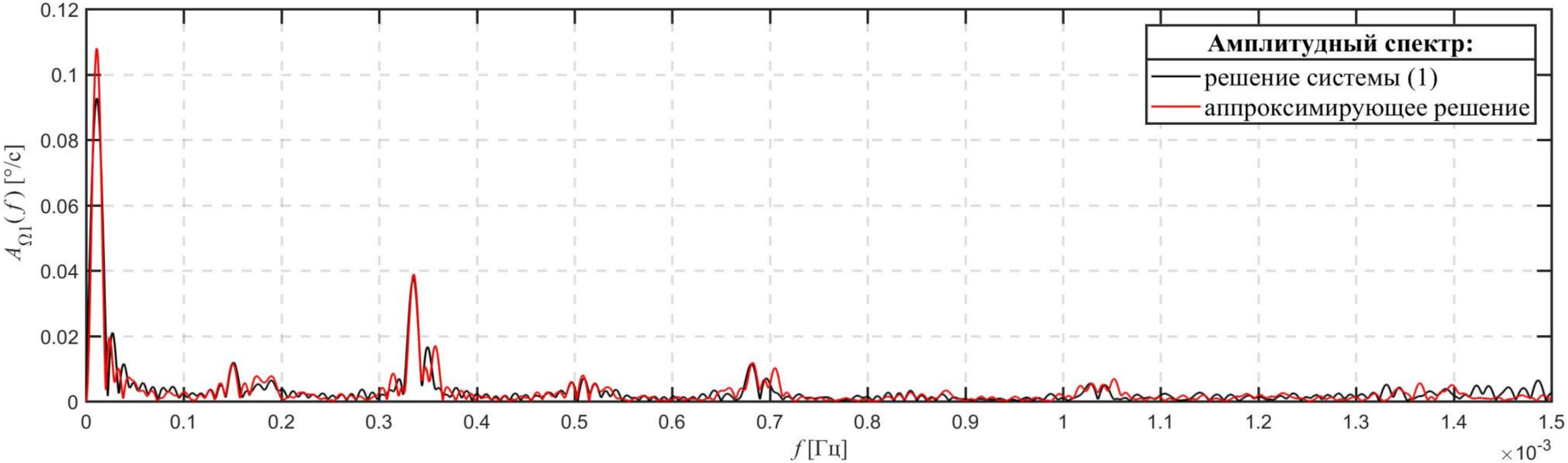

Рис. 20. Амплитудный спектр компоненты Ω_1, $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$.

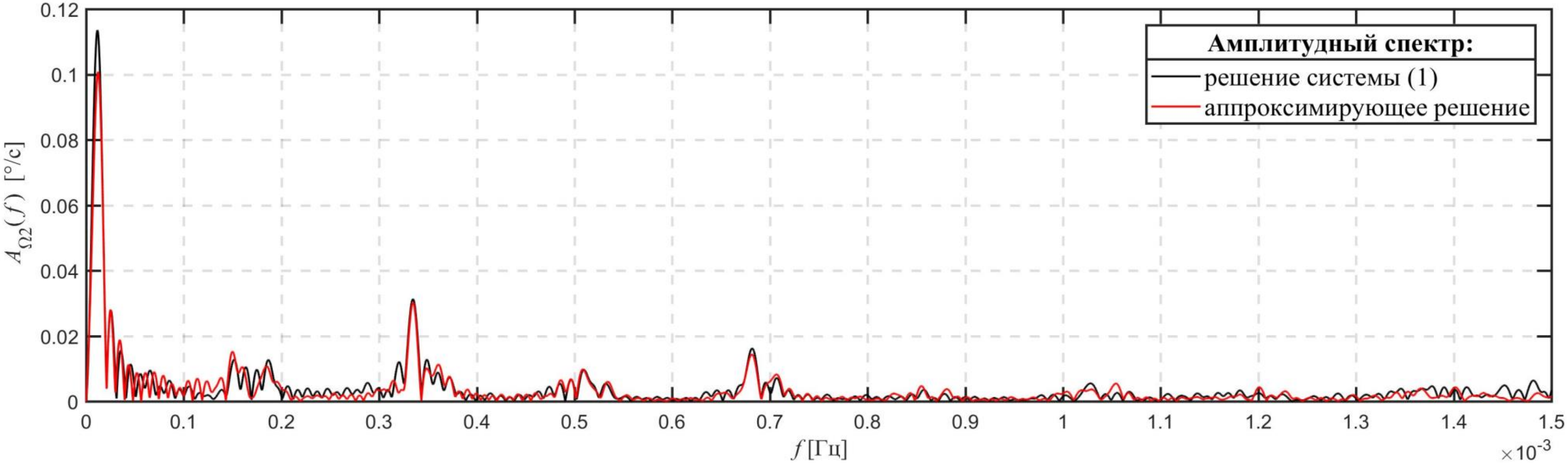

Рис. 21. Амплитудный спектр компоненты Ω_2, $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$.

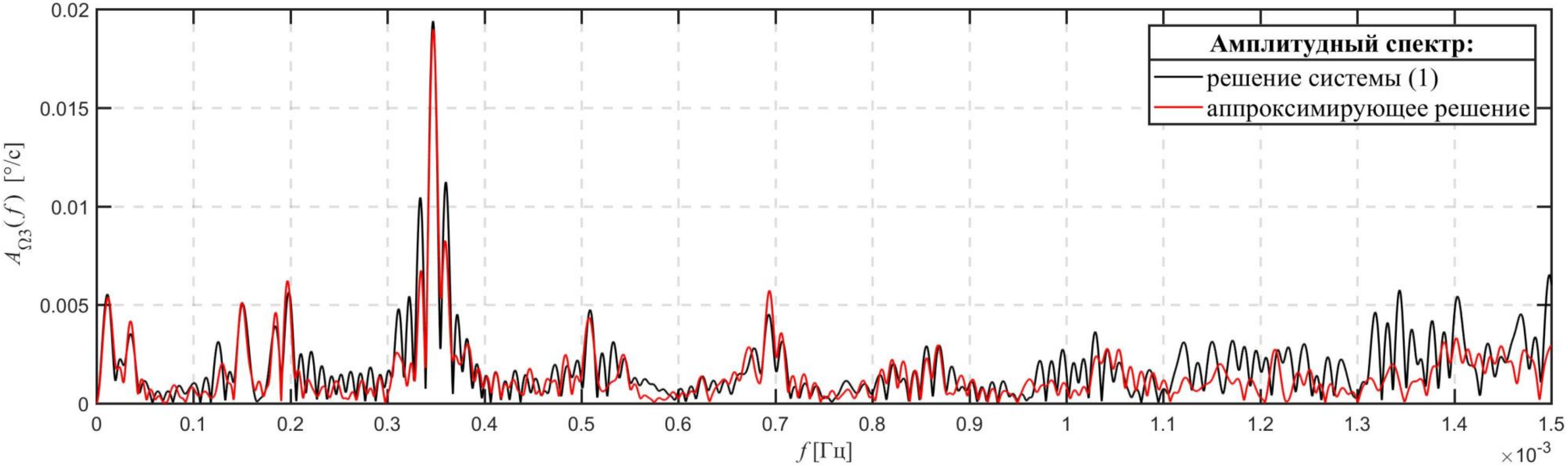

Рис. 22. Амплитудный спектр компоненты Ω_3, $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$.

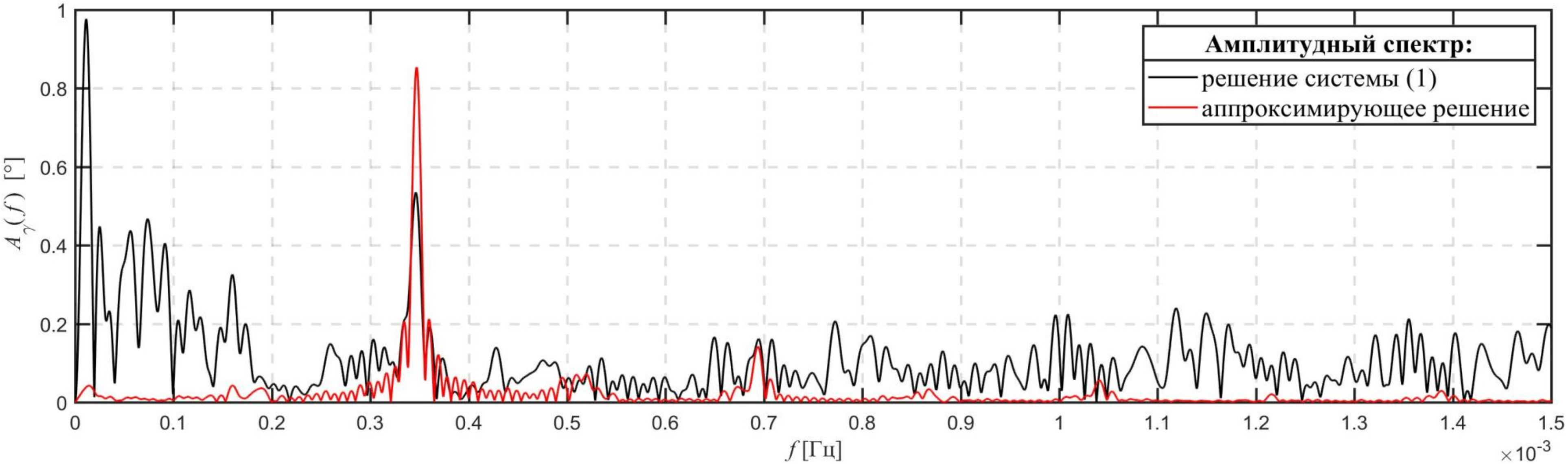

Рис. 23. Амплитудный спектр угла γ, $k_\Omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$.

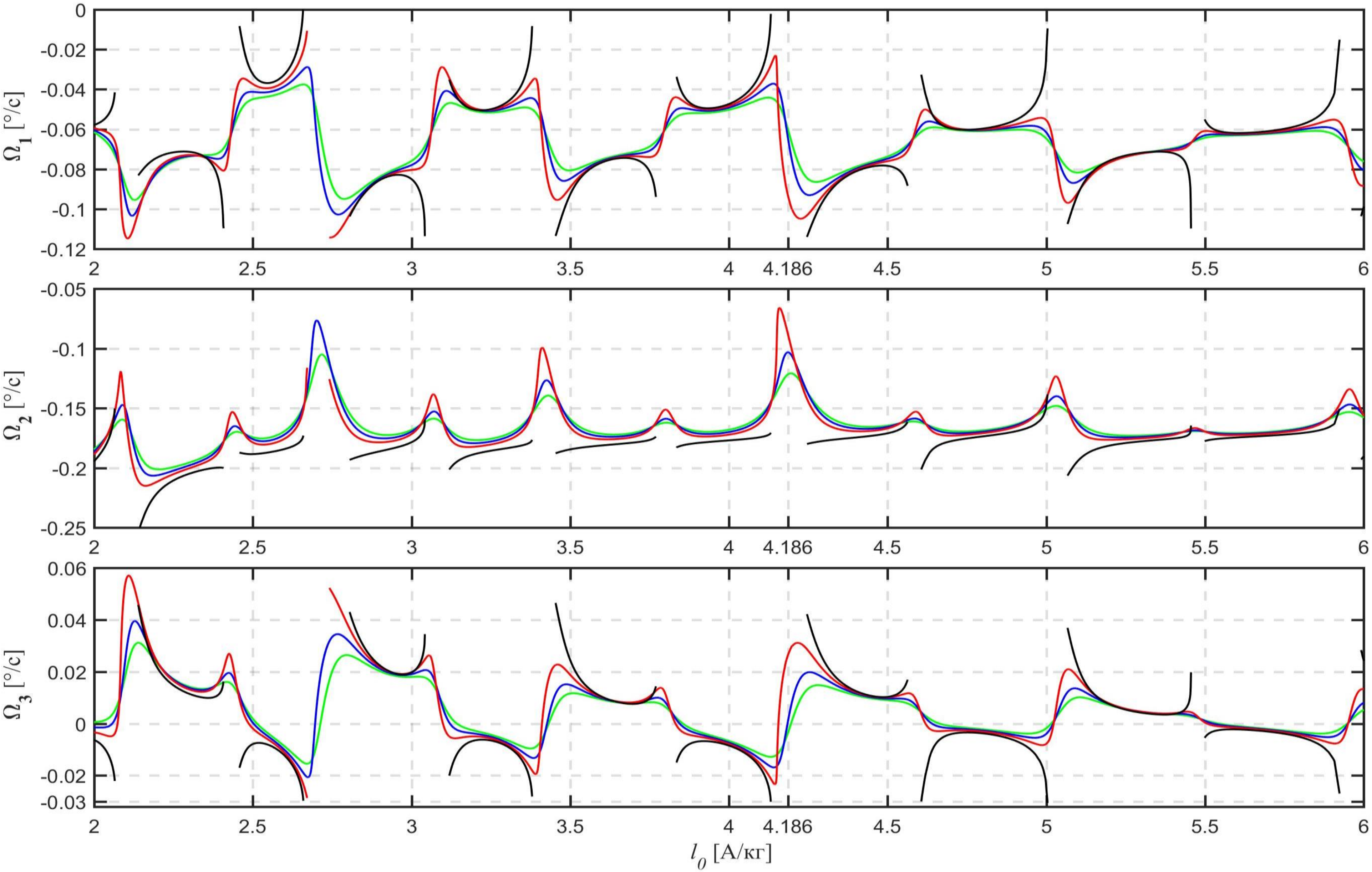

Рис. 24. Начальные условия решений краевой задачи (1′), (3) при $\Omega_G = 11.67°$: компоненты вектора $\mathbf{\Omega}(0)$.

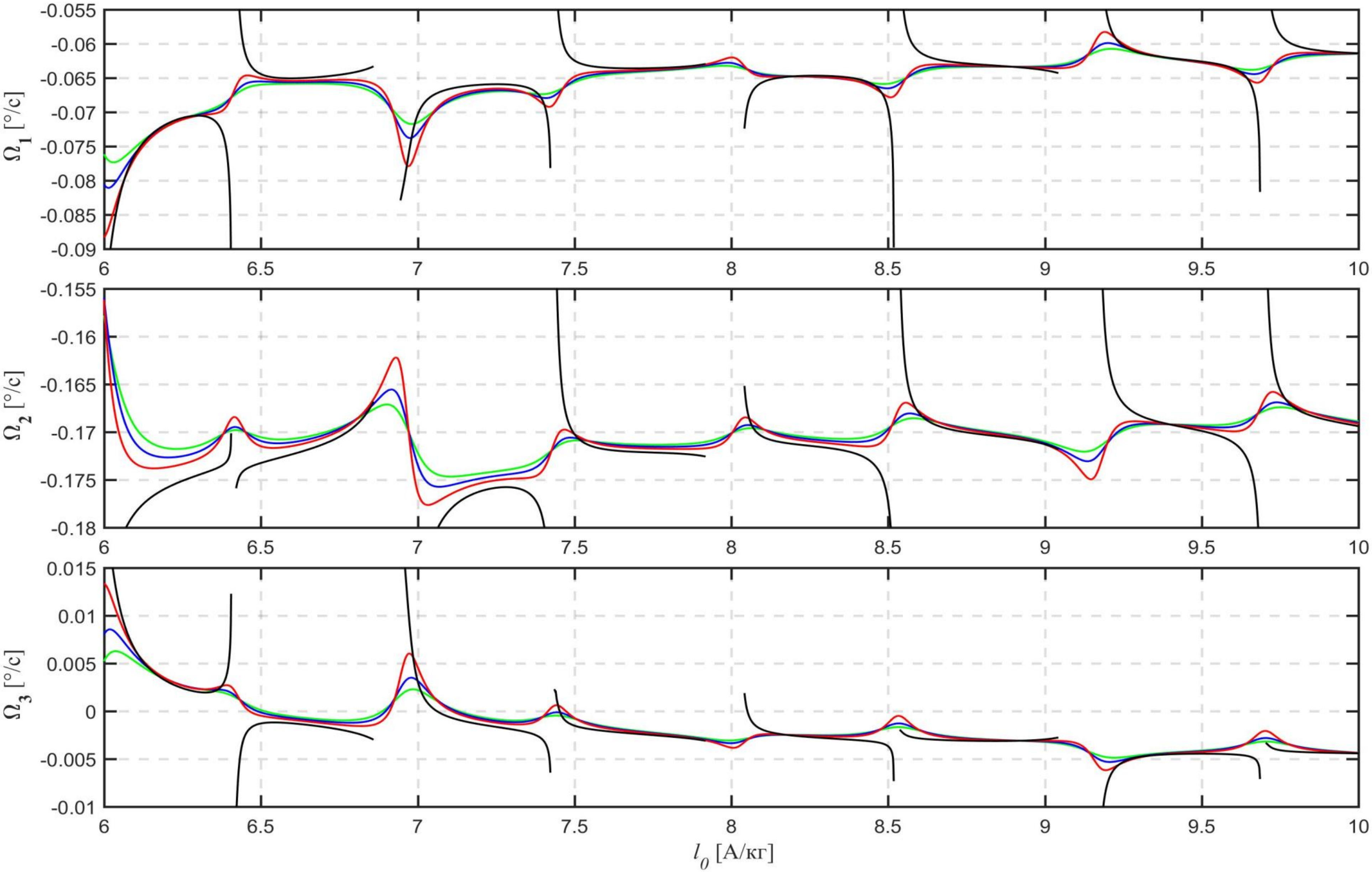

Рис. 25. Начальные условия решений краевой задачи (1′), (3) при $\Omega_G = 11.67°$: компоненты вектора $\mathbf{\Omega}(0)$.

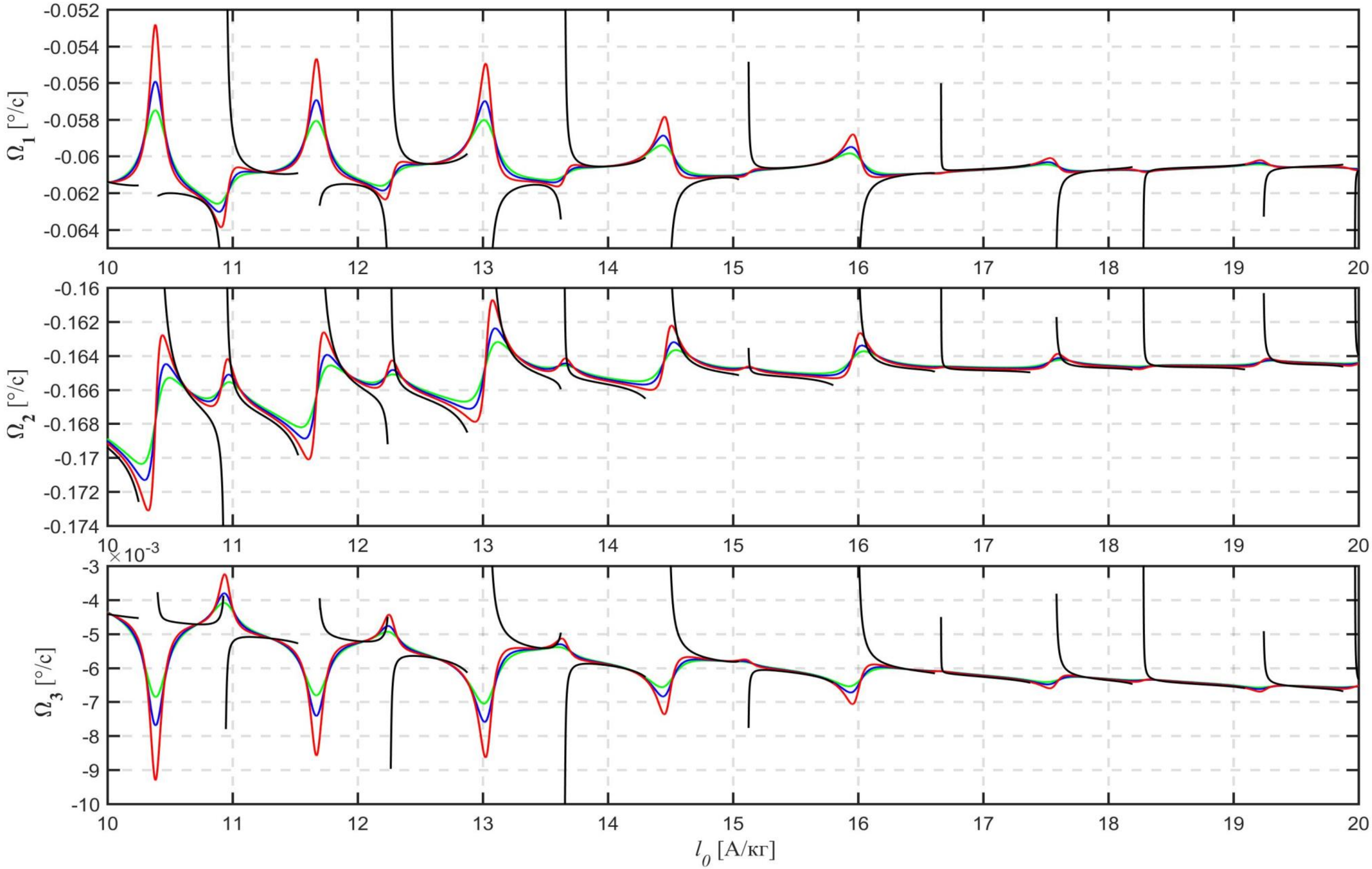

Рис. 26. Начальные условия решений краевой задачи (1′), (3) при $\Omega_G = 11.67°$: компоненты вектора $\mathbf{\Omega}(0)$.

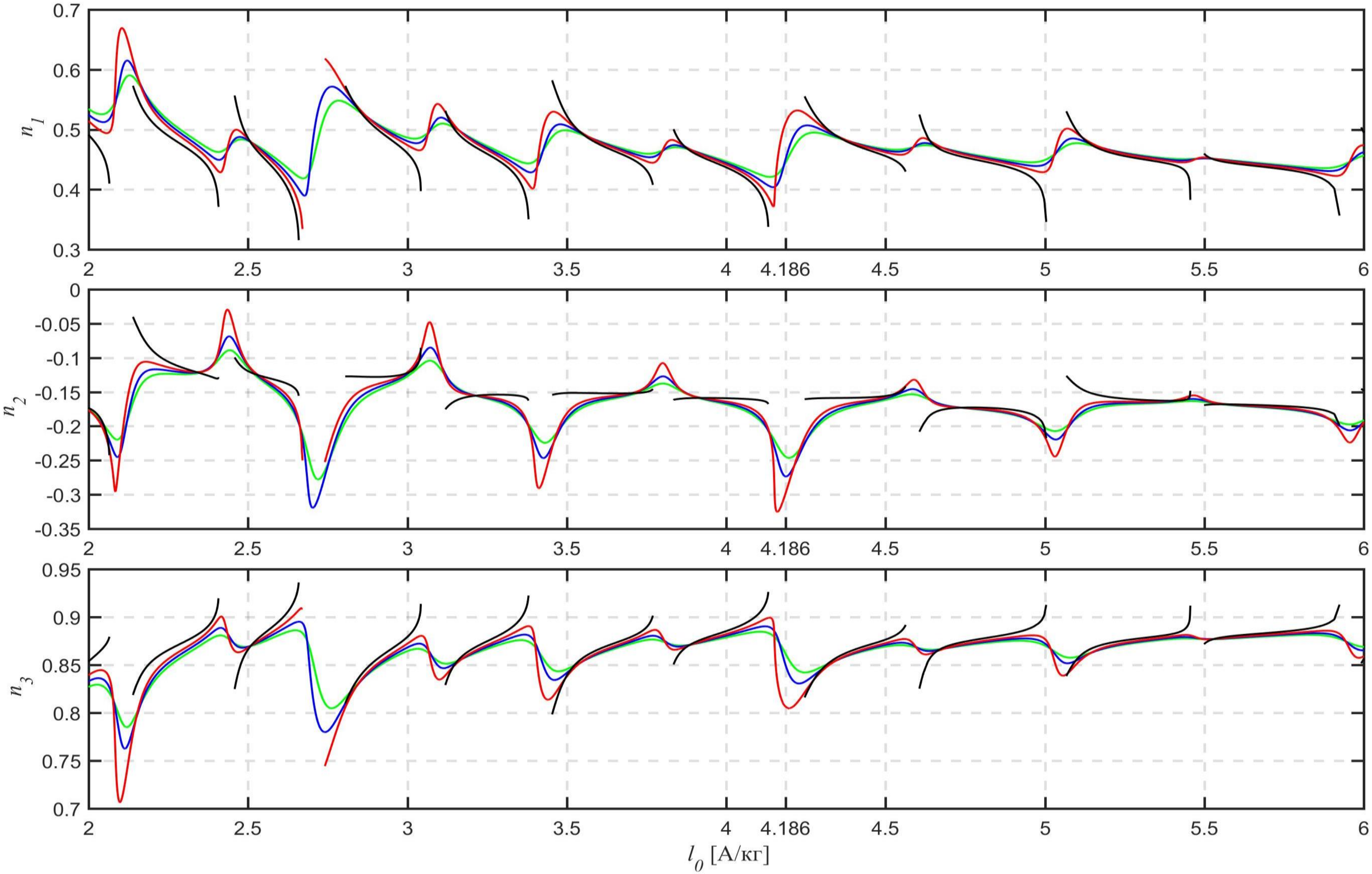

Рис. 27. Начальные условия решений краевой задачи (1′), (3) при $\Omega_G = 11.67°$: компоненты орта $\mathbf{n}(0)$.

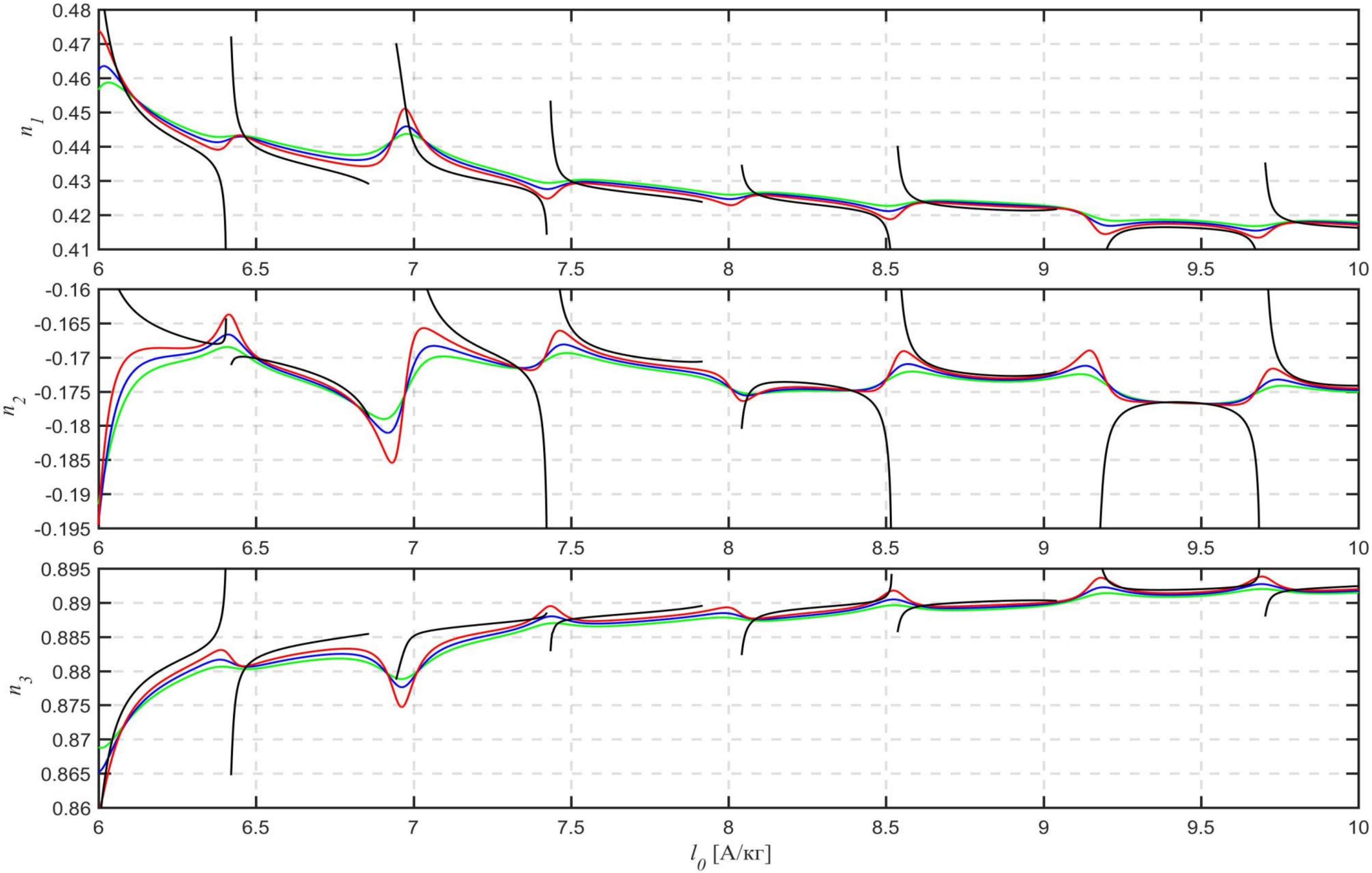

Рис. 28. Начальные условия решений краевой задачи (1′), (3) при $\Omega_G = 11.67°$: компоненты орта $\mathbf{n}(0)$.

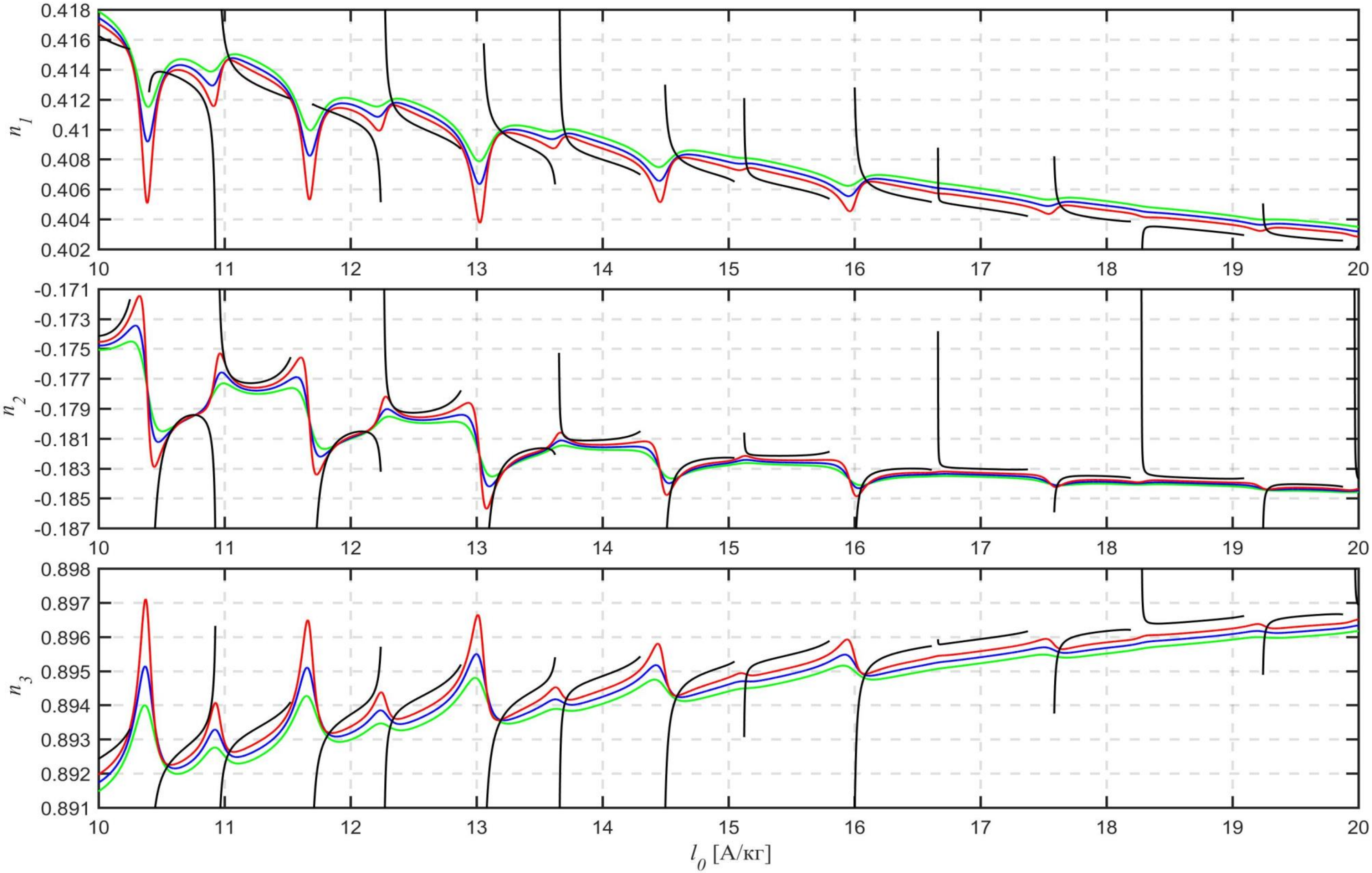

Рис. 29. Начальные условия решений краевой задачи (1′), (3) при $\Omega_G = 11.67°$: компоненты орта $\mathbf{n}(0)$.

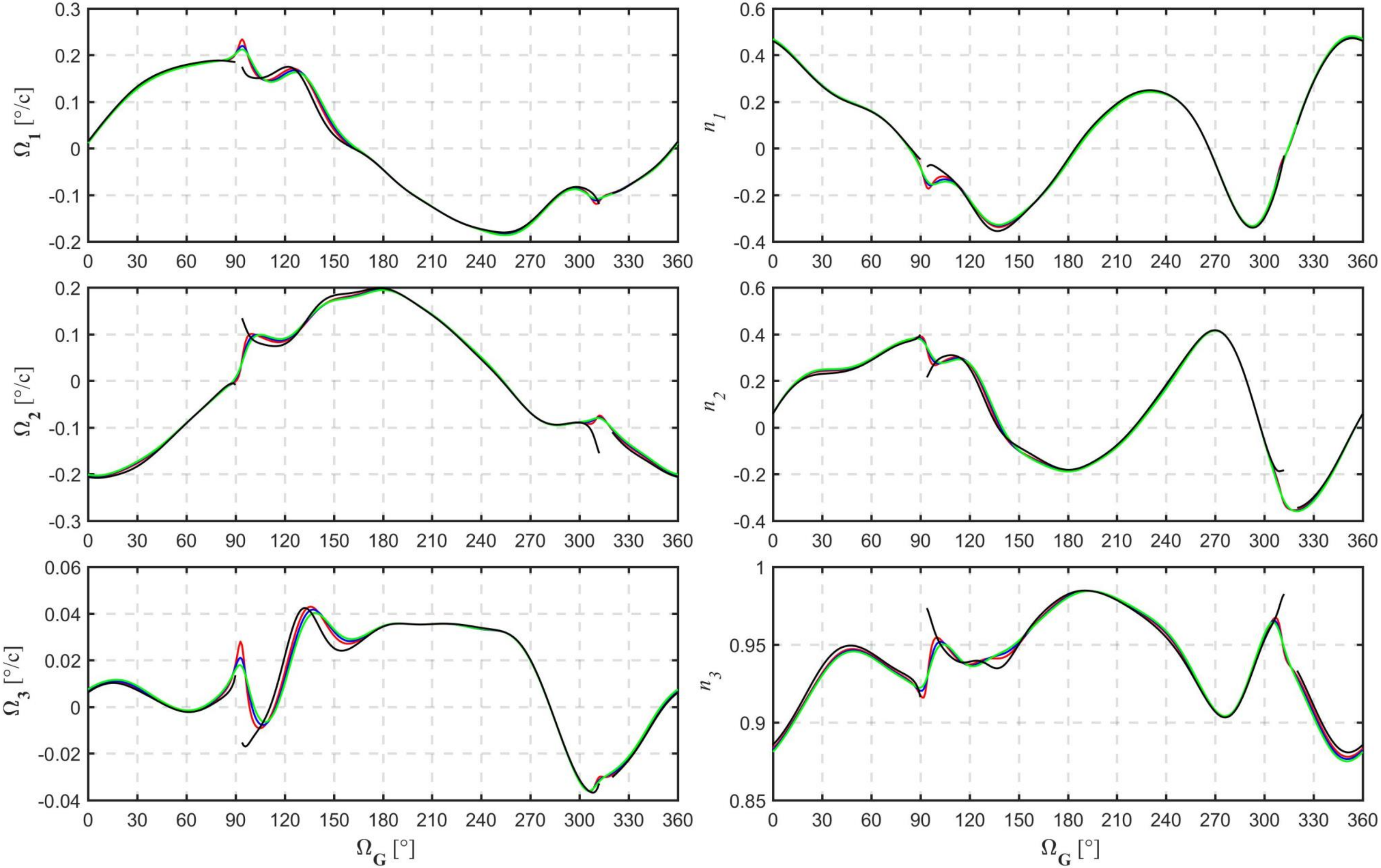

Рис. 30. Начальные условия решений краевой задачи (1′), (3) $\mathbf{\Omega}(0)$ и $\mathbf{n}(0)$, $l_0 = 4$ А/кг.

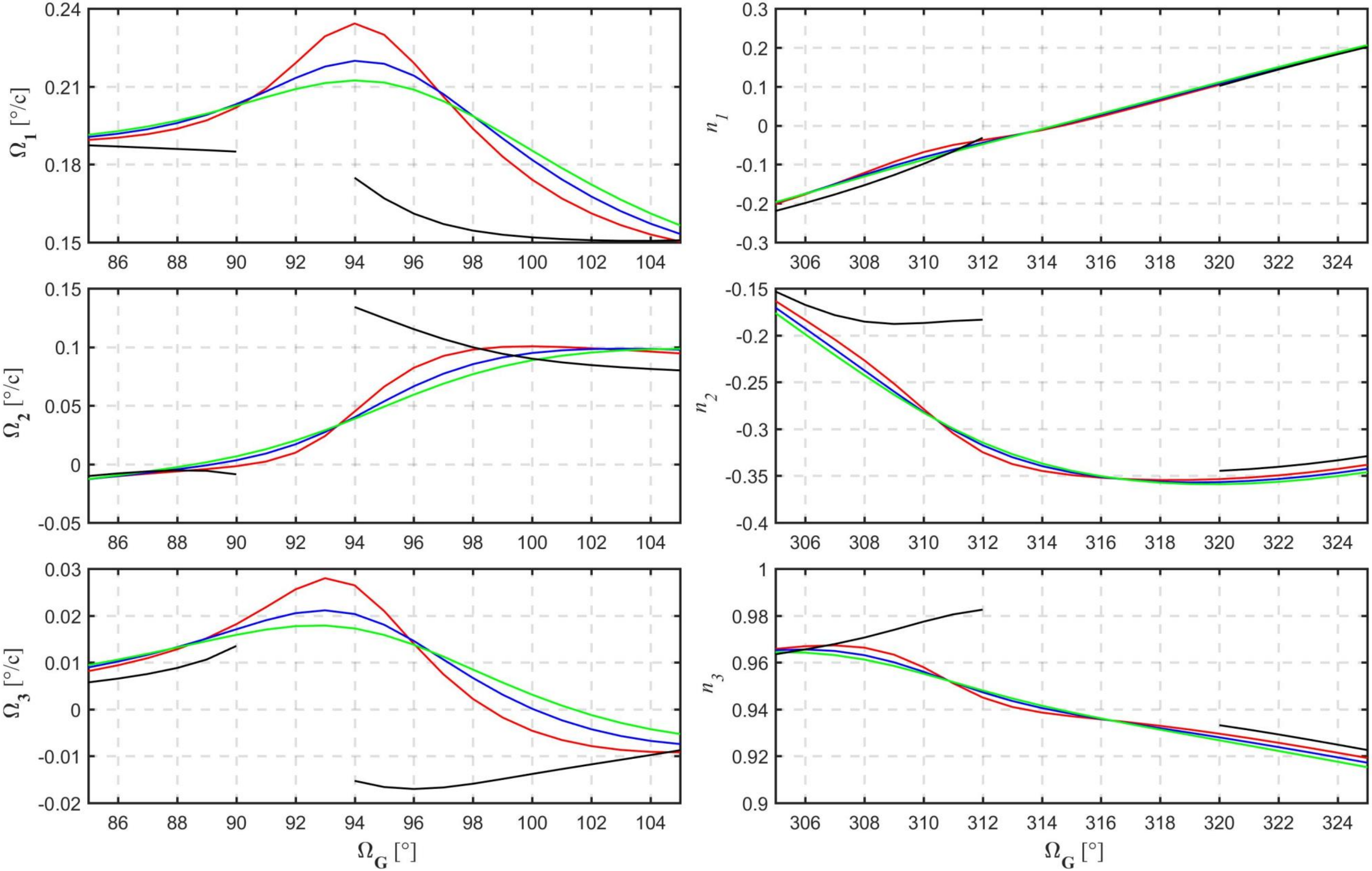

Рис. 31. Начальные условия решений краевой задачи (1′), (3) $\mathbf{\Omega}(0)$ и $\mathbf{n}(0)$, $l_0 = 4$ А/кг.

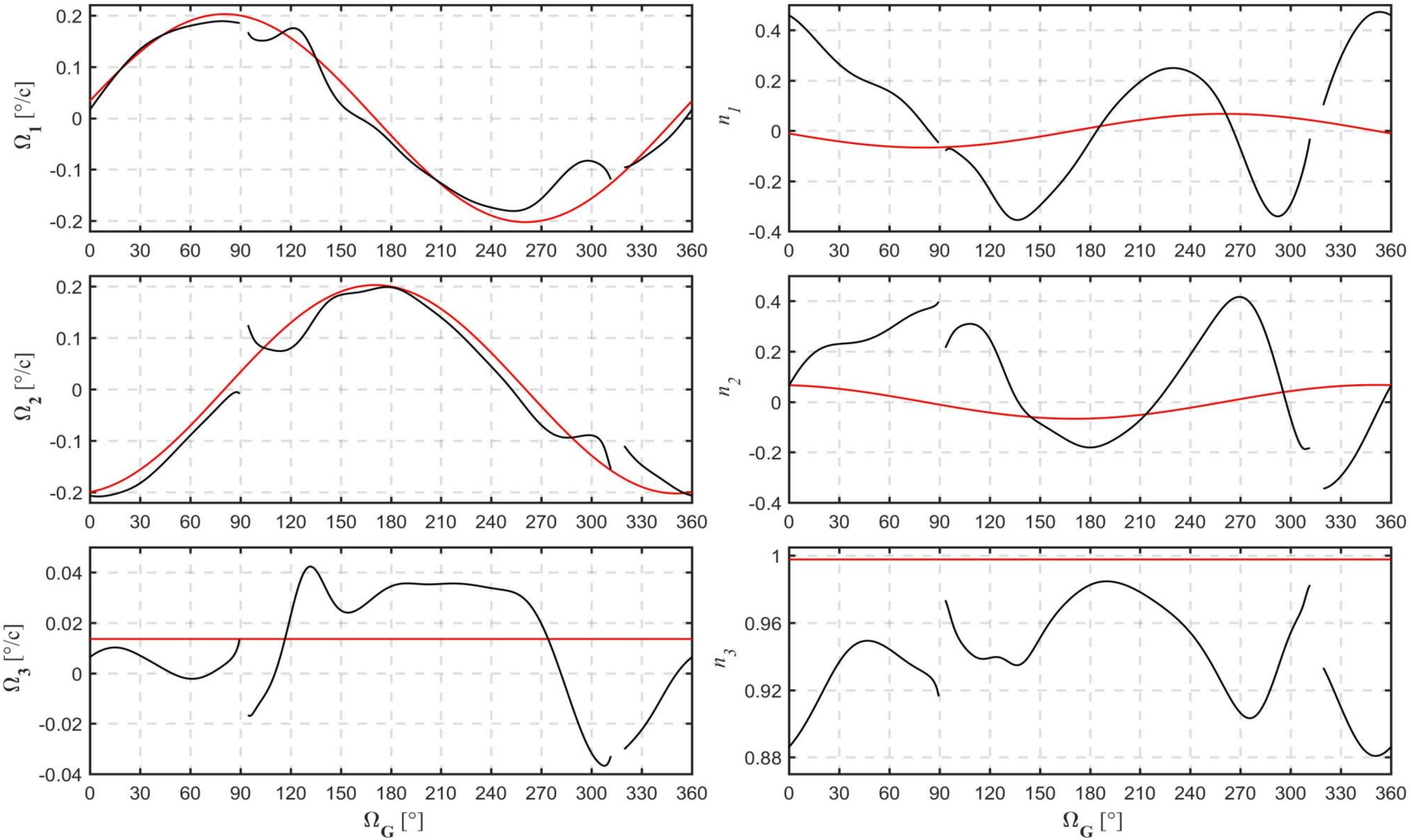

Рис. 32. Начальные условия решений краевой задачи (1′), (3) $\mathbf{\Omega}(0)$ и $\mathbf{n}(0)$, $k_\Omega = 0$, $l_0 = 4$ А/кг.
Модель МПЗ: IGRF – черные линии, прямой диполь – красные линии.

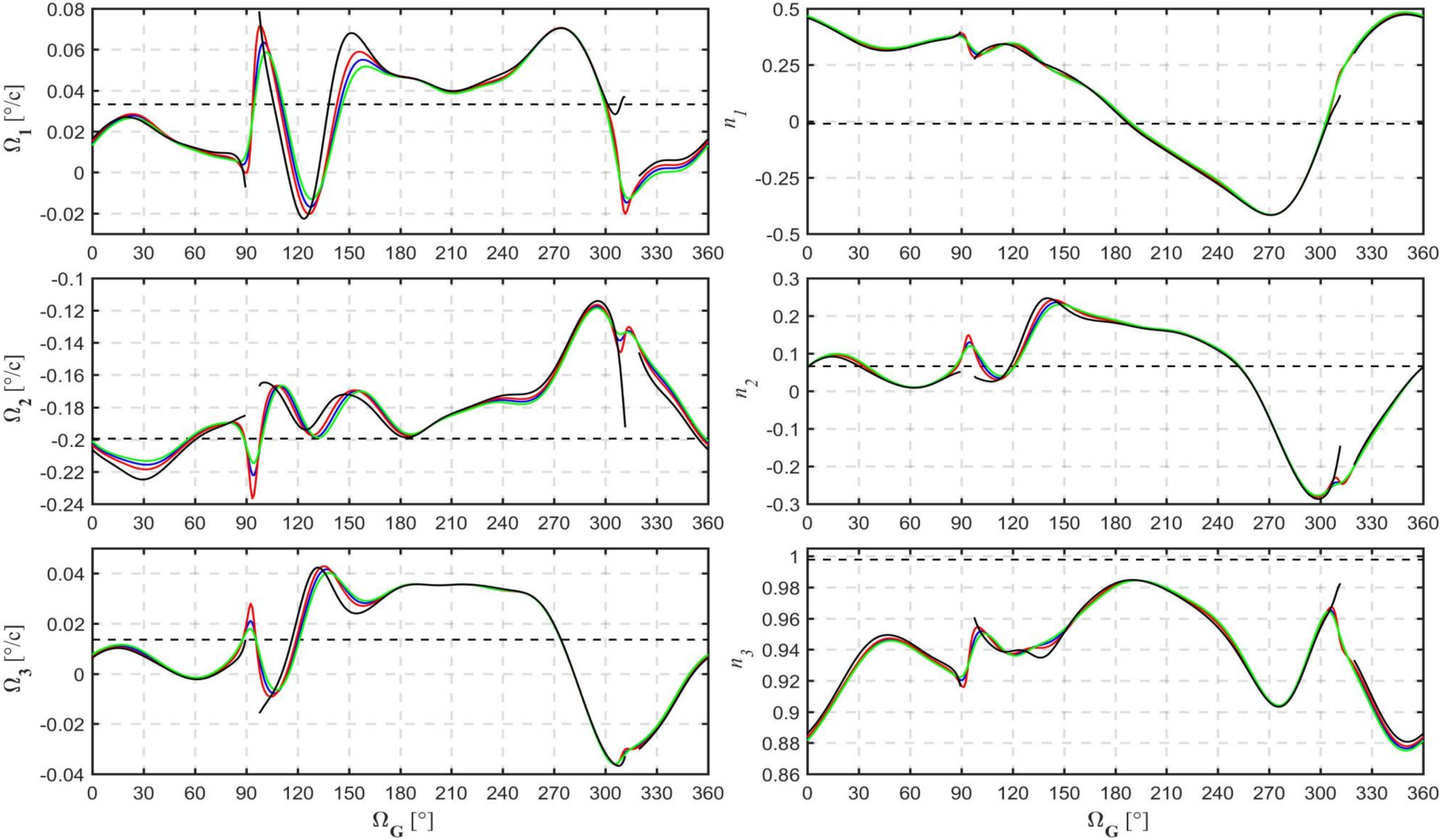

Рис. 33. Начальные условия решений краевой задачи (1′), (3), пересчитанные в узловые системы координат, $l_0 = 4$ А/кг. Модель МПЗ: IGRF ($k_\Omega = 0 \div 0.0002$ с$^{-1}$) – сплошные линии, прямой диполь ($k_\Omega = 0$) – пунктирные линии.

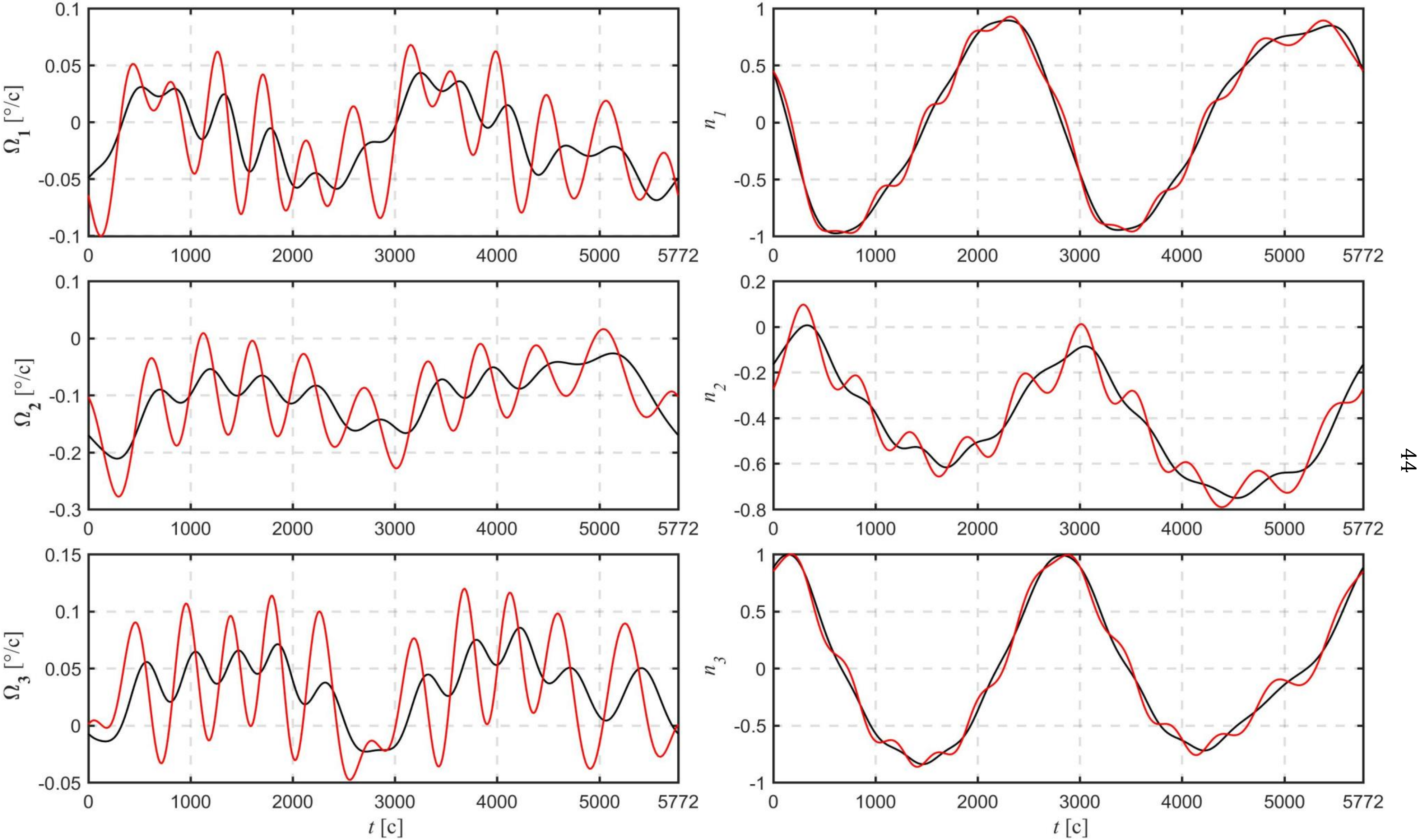

Рис. 34. Решение краевой задачи (1′), (3): компоненты вектора $\mathbf{\Omega}(t)$ и орта $\mathbf{n}(t)$ при $k_{\Omega} = 0.00015\text{с}^{-1}$, $\Omega_G = 11.67°$,
$l_0 = 4$ А/кг (черные линии), $l_0 = 4.186$ А/кг (красные линии).