



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Круковский А.Ю.,  
Повещенко Ю.А., Ключкова Л.В.,  
Сузан Д.В.

Оценки сходимости  
итерационного алгоритма  
численного решения  
двумерных нестационарных  
задач магнитной  
гидродинамики

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Оценки сходимости итерационного алгоритма численного решения двумерных нестационарных задач магнитной гидродинамики / А.Ю.Круковский [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 28. 15 с. doi:[10.20948/prepr-2019-28](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-28)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-28>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**А.Ю. Круковский, Ю.А. Повещенко, Л.В. Клочкова,  
Д.В. Сузан**

**Оценка сходимости итерационного алгоритма  
численного решения  
двумерных нестационарных задач  
магнитной гидродинамики**

**МОСКВА  
2019**

***А.Ю. Круковский, А.Ю. Повещенко, Л.В. Клочкова, Д.В. Сузан***  
**Оценки сходимости итерационного алгоритма численного решения  
двумерных нестационарных задач магнитной гидродинамики**

В работе исследуется сходимость примененного к полностью консервативным разностным схемам (ПКРС) магнитной гидродинамики (МГД) метода комбинированного решения групп разностных уравнений, разбитых по физическим процессам (метода расщепления по физическим процессам). Показана область применимости данного метода. Справедливость полученных в работе оценок подтверждена численными расчетами.

**Ключевые слова:** магнитная гидродинамика, неявная полностью консервативная разностная схема, сходимость итерационного процесса

***Alexander Yuryevich Krukovskiy, Yuriy Andreevich Poveschenko,  
Liudmila Viktorovna Klochkova, Dmitriy Valerievich Suzan***

**Convergence estimates of the iterative algorithm for numerical solution  
of two-dimensional nonstationary problems of Magnetohydrodynamics**

In this paper, we investigate the convergence of the applied to the completely conservative difference schemes (CCDS) of Magnetohydrodynamics (MHD) Method of the combined decisions of groups of difference equations broken down by physical processes (the Method of splitting into processes). The area of applicability of this method is shown. The validity of the estimates obtained is confirmed by numerical calculations.

**Keywords:** magnetic hydrodynamics, implicit completely conservative difference scheme, convergence of iterative process

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-01- 00361\_a, 16-29-15081-офи\_m, 18-07-00841-а.

## **Оглавление**

1. Введение .....	3
2. Исходная система уравнений.....	4
3. Разностная схема.....	4
4. Оценки сходимости алгоритма.....	6
5. Примеры расчетов.....	11
6. Заключение .....	12
7. Список литературы .....	13

# 1. Введение

При моделировании конкретной задачи МГД обычно определяется специфика задачи и, исходя из этого, выбирается численный метод ее решения. Созданный на основе численного метода решения разностных уравнений комплекс программ (КП) способен решать сравнительно узкий класс задач, а задачи вне данного класса решаются неэффективно или вообще не могут быть решены. Создание же универсального алгоритма для достаточно широкого класса задач редко приводит к хорошим результатам из-за чрезвычайной сложности его программной реализации. Кроме того, применение такого алгоритма к конкретной задаче требует машинных ресурсов существенно больше, чем решение той же задачи с помощью алгоритмов, учитывающих его специфику. В случае проведения вычислительного эксперимента (ВЭ), требующего достаточно большого числа расчетов, это существенно тормозит работу.

ПКРС гарантируют не только выполнение разностных аналогов основных законов сохранения (массы, импульса и энергии), но и ряда дополнительных сеточных соотношений, необходимость которых диктуется физическими соображениями [1]. Неявность разностных схем снижает ограничения на величину временного шага интегрирования уравнений. При проведении широкомасштабного ВЭ большое значение имеют затраченные машинные ресурсы на один расчет. Машинное время на расчет зависит от величины временного шага на протяжении всего расчета и "стоимости" одного шага по времени. Кратко требования к алгоритмам и их программным реализациям можно сформулировать следующим образом: 1) экономичность, т.е. минимальные машинные ресурсы при расчете одного варианта задачи; 2) универсальность, т.е. алгоритм должен обеспечивать проведение расчетов в достаточно широкой предметной области; 3) гибкость, т.е. переход от одной конкретной постановки задачи к другой должен требовать минимум затрат труда и времени.

В данной работе исследуется сходимость примененного к неявной ПКРС МГД метода комбинированного решения групп разностных уравнений, разбитых по физическим процессам ("динамическая группа", "тепловая группа" и "электромагнитная группа"). Данный метод заключается в том, что эти три группы объединяются следующим образом: в первую "новую" группу включаются уравнения динамики и электромагнитного поля, а вторая группа состоит из уравнений энергии. Уравнение состояния является уравнением-связкой между этими группами. Уравнения этих двух групп решаются методом Ньютона относительно определенных переменных, а переменные, которые не входят в эту группу, считаются "замороженными", берутся с предыдущей итерации. Последовательное решение групп уравнений связывается внешним итерационным процессом, сходимость которого контролируется по точности выполнения общего баланса энергии и

точности распределения полной энергии по ее отдельным видам. Полученные в данной работе оценки подтверждены численными расчетами.

## 2. Исходная система уравнений

Мы будем исходить из обычной записи системы уравнений МГД в декартовой системе координат [4].

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{U} &= 0; \\
 \rho \frac{d\vec{U}}{dt} &= \operatorname{grad} P + \frac{1}{c} [\vec{j} \times \vec{B}]; \\
 \rho \frac{d}{dt} \left( \varepsilon + \frac{\vec{U}^2}{2} \right) &= \operatorname{div} (\rho \vec{U}) + \vec{E} \cdot \vec{j} + \operatorname{div} \vec{W}; \\
 \vec{W} &= -\kappa \operatorname{grad} T; \\
 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -c \cdot \operatorname{rot} \vec{E}; \\
 \operatorname{div} \vec{B} &= 0; \\
 \vec{E} &= c \left( \frac{1}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} [\vec{U} \times \vec{B}] \right); \\
 \vec{j} &= \sigma \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{U} \times \vec{B}] \right) = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{B}; \\
 P &= \rho R T, \quad \varepsilon = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho}; \\
 \vec{U} &= (u, w, v) \quad \vec{B} = (B_x, B_y, B_z); \quad \vec{E} = (E_x, E_y, E_z); \\
 \vec{W} &= (W_x, W_y, W_z).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $t$  – время,  $\vec{U}$  – скорость вещества,  $\rho$  – плотность,  $R$  – газовая постоянная,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $P$  – газодинамическое давление,  $T$  – температура,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия, отнесенная к единице массы,  $\vec{W}$  – поток тепла через поперечное сечение области,  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции,  $\vec{E}$  – вектор электрического поля,  $\vec{j}$  – плотность тока,  $c$  – скорость света в вакууме,  $\sigma$  и  $\kappa$  – коэффициенты электро- и теплопроводности.

## 3. Разностная схема

Отметим одно обстоятельство. Анализ сходимости итерационного процесса решения системы разностных уравнений МГД методом отдельных прогонок был проведен для одномерного плоского случая в [5]. Рассматривался случай  $\sigma = \infty$  и  $\kappa = 0$ . Было показано, что для неявных схем процесс будет безусловно устойчивым лишь при выполнении условия:

$$\frac{B^2}{8\pi} \leq (2 - \gamma) P, \tag{2}$$

а при условии  $\frac{B^2}{8\pi} > (2-\gamma)P$  условие устойчивости имеет вид

$$\Delta t < \frac{\Delta m}{2\rho \sqrt{\frac{B^2}{8\pi\rho} + (\gamma-2)\frac{P}{\rho}}}. \quad (3)$$

Это ограничение на временной шаг для широкого класса задач оказывается весьма жестким. Заметим, что оно возникает при решении методом отдельных прогонок уравнений динамики и электромагнитного поля, например, в рамках адиабатической МГД. Дальнейший учет диссипативных процессов, как показано в [5], ослабляет ограничение на временной шаг. Поэтому при исследовании устойчивости процесса решения системы разностных уравнений МГД методом комбинированного решения будем считать, что диссипативные процессы отсутствуют. Кроме того, ограничимся случаем течения в магнитном поле, ориентированным перпендикулярно плоскости течения ( $B_x=B_y=0$ ).

Введем пространства сеточных функций, определенных в узлах и ячейках разностной сетки, обозначив их  $H_\Omega$  и  $H_\omega$  соответственно. Для записи сеточных функций  $f \in H_\Omega$  будем использовать индексы (i,j):  $f_{ij} = f \in H_\Omega$ . Сеточные функции  $g \in H_\omega$  будем отмечать индексами (m,l):  $g_{ml} = g \in H_\omega$ . Положим массы всех ячеек  $\Delta m_{ml} = \Delta m = \text{const}$ .

В предположениях, описанных выше, система (1) аппроксимируется неявной ПКРС в лагранжевых переменных:

$$\Delta m u_t = \sum_{n \in \Omega} \left( \frac{\partial S_n}{\partial x} \right)^{(\sigma_1)} \left( R \hat{\rho}_n \hat{T}_n + \frac{\hat{B}_n B_n}{8\pi} \right); \quad (4)$$

$$\Delta m w_t = \sum_{n \in \Omega} \left( \frac{\partial S_n}{\partial y} \right)^{(\sigma_2)} \left( R \hat{\rho}_n \hat{T}_n + \frac{\hat{B}_n B_n}{8\pi} \right); \quad (5)$$

$$\Delta m \left( \frac{1}{\rho} \right)_t = S_t = \sum_{k \in \Omega} \left[ \left( \frac{\partial S_n}{\partial x_k} \right)^{(\sigma_1)} u_k^{(0,5)} + \left( \frac{\partial S_n}{\partial y_k} \right)^{(\sigma_2)} w_k^{(0,5)} \right]; \quad (6)$$

$$\hat{B} \hat{S} = B S; \quad (7)$$

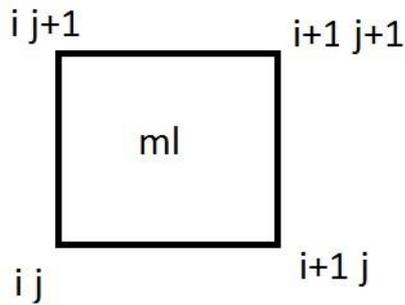
$$\frac{1}{\gamma-1} (\hat{T} - T) = - \frac{\hat{\rho} \hat{T}}{\Delta m} (\hat{S} - S), \quad (8)$$

где  $S_{ml} = 0,5 [(x_{i+1j} - x_{ij+1})(y_{i+1j+1} - y_{ij}) + (x_{i+1j+1} - x_{ij})(y_{ij+1} - y_{i+1j})]$  – площадь ячейки,

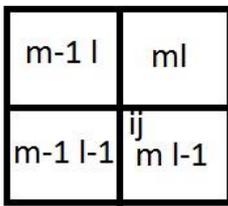
$\Delta m_{ml} = \hat{\rho}_{ml} \hat{S}_{ml} = \rho_{ml} S_{ml} = \Delta m = \text{const}$ ,  $\sigma_k$  ( $k=1,2$ ) – весовые множители.

Уравнения системы (4)-(8) записаны на разностных шаблонах  $\Omega_1(m,l)$  и  $\Omega_2(i,j)$ .

$\text{Ш}_1$  – шаблон ячейки



$\text{Ш}_2$  – шаблон узла



При записи системы уравнений (4)-(8) использованы безындексные представления сеточных функций [1].

Сеточные функции  $x$ ,  $y$ ,  $u$  и  $w$  определены в узлах разностной сетки, а сеточные функции  $\rho$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $B$  и  $S$  – в ячейках.

При анализе устойчивости ограничимся случаем  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ .

#### 4. Оценки сходимости алгоритма

Отметим, что для расчетов течений излучающей многозарядной плазмы исходные модели типа (1) значительно усложняются – добавляются уравнения кинетики ионизации, радиационного электрообмена, учитываются двухтемпературность, процессы тепло- и электропроводности и влияния на них магнитного поля, применяются различные модификации закона Ома (например, учитывается эффект Холла), используются табличные данные по состоянию вещества, транспортным коэффициентам и оптическим свойствам. Полный анализ сходимости методов решения нелинейных уравнений, соответствующих таким методам, провести зачастую либо не удастся, либо количество упрощающих предположений таково, что результаты анализа мало пригодны для практического исследования.

В настоящей работе сходимость алгоритма исследуется для линеаризованной системы уравнений (4)-(8). Такой подход к изучению решения нелинейной системы МГД-уравнений, несмотря на теоретическую неполноту, позволяет сформулировать физически содержательные критерии сходимости, которыми удобно пользоваться при проведении практических

расчетов. Полученные при анализе линеаризованной системы оценки можно далее использовать для изучения сходимости метода решения в нелинейном случае, поскольку линеаризация является центральным пунктом многих методик [1,6,7]. Выводы из линейного анализа проверены, как это обычно и делается, в методических расчетах.

При построении алгоритма решения системы нелинейных уравнений МГД используется принцип локального расщепления физических процессов, реализующийся через разделение системы разностных уравнений по видам физических процессов: уравнения динамики плазмы (D), уравнения электромагнитного поля (EM) и уравнения теплового баланса (T), описывающие энергообмен между компонентами плазмы (если рассматривается процесс релаксации температур ионов и электронов), а также энергетику ионизации-рекомбинации и взаимодействия вещества с излучением. В простейшем случае уравнение (T) одно – (8). Оно описывает изменение температуры жидкой частицы при адиабатических изменениях ее объема. Для построения конкретного алгоритма уравнения различных видов объединяются в группы (аналогично [1]). В данной работе рассматривается алгоритм, в котором разбиение на группы таково: к первой группе относят динамические (D) и электромагнитные (EM) уравнения, а ко второй – тепловые (T) уравнения. Уравнения в каждой из этих двух групп решаются относительно определенных переменных, причем переменные, которые не входят в эту группу, считаются "замороженными" и берутся с предыдущей итерации. Последовательное решение групп уравнений связывается внешним итерационным процессом, в котором контролируется как точность решения разностных уравнений, так и точность выполнения энергобаланса.

Линеаризованные уравнения системы (4)-(8), соответствующие принятым выше ограничениям и характеру итерационного процесса, запишем в виде

$$\Delta m \frac{u_{ij}^{s+1} - u_{ij}}{\Delta t} = \sum_{n \in III_2} \left( \frac{\partial S_n}{\partial x_{ij}} \right) \left( R(\rho_n T_n + T_n \delta \rho_n^{s+1} + \rho_n \delta T_n^s) + \frac{B_n^{s+1} B_n}{8\pi} \right); \quad (9)$$

$$\Delta m \frac{w_{ij}^{s+1} - w_{ij}}{\Delta t} = \sum_{n \in III_2} \left( \frac{\partial S_n}{\partial y_{ij}} \right) \left( R(\rho_n T_n + T_n \delta \rho_n^{s+1} + \rho_n \delta T_n^s) + \frac{B_n^{s+1} B_n}{8\pi} \right); \quad (10)$$

$$\delta \rho_{ml}^{s+1} = -\frac{\rho_{ml}^2}{\Delta m} (S_{ml}^{s+1} - S_{ml}); \quad (11)$$

$$B_{ml}^{s+1} = B_{ml} \left( 1 - \frac{\rho_{ml}}{\Delta m} (S_{ml}^{s+1} - S_{ml}) \right); \quad (12)$$

$$\delta T_{ml}^s = -\frac{\gamma - 1}{\Delta m} \rho_{ml} T_{ml} (S_{ml}^s - S_{ml}), \quad (13)$$

где

$$S_{ml}^{s+1} - S_{ml} = \frac{\Delta t}{4} \left[ (y_{ij+1} - y_{i+1j}) (u_{i+1j+1} - u_{ij} + u_{i+1j+1}^{s+1} - u_{ij}^{s+1}) + (x_{i+1j} - x_{ij+1}) (w_{i+1j+1} - w_{ij} + w_{i+1j+1}^{s+1} - w_{ij}^{s+1}) + (y_{i+1j+1} - y_{ij}) (u_{i+1j} - u_{ij+1} + u_{i+1j}^{s+1} - u_{ij+1}^{s+1}) + (x_{i+1j+1} - x_{ij}) (w_{ij+1} - w_{i+1j} + w_{ij+1}^{s+1} - w_{i+1j}^{s+1}) \right].$$

Здесь искомые величины будем обозначать индексом "s" – соответственно номеру итерации. Исключая из (9) и (10)  $\delta\rho_{ml}^{s+1}$ ,  $B_{ml}^{s+1}$  и  $\delta T_{ml}^s$  с помощью (11)-(13), получим систему уравнений, связывающую  $U_{ij}^{s+1}$  и  $U_{ij}^s$  ( $\vec{U} = (u, w)$ );

$$(\Lambda_1 U^{s+1})_{ij} = -(\Lambda_2 U^s)_{ij} + F_{ij}, \quad (14)$$

где  $F_{ij} = (F_{ij}^{(1)}, F_{ij}^{(2)})$ ,  $F_{ij}^{(1)}$  и  $F_{ij}^{(2)}$  – свободные члены в преобразованных уравнениях (9) и (10) соответственно, в которые входят величины с предыдущего слоя по времени.

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 U)_{ij} &= (\Lambda_1(u)_{ij}, \Lambda_1(w)_{ij}); & (\Lambda_2 U)_{ij} &= (\Lambda_2(u)_{ij}, \Lambda_2(w)_{ij}); \\ \Lambda_1(u)_{ij} &= \kappa u_{ij} + \sum_{n \in \mathcal{M}_2} c1_n \left( \frac{\partial S_n}{\partial x_{ij}} \right) H_n; \\ \Lambda_1(w)_{ij} &= \kappa w_{ij} + \sum_{n \in \mathcal{M}_2} c1_n \left( \frac{\partial S_n}{\partial y_{ij}} \right) H_n; & (15) \\ \Lambda_2(u)_{ij} &= \sum_{n \in \mathcal{M}_2} c2_n \left( \frac{\partial S_n}{\partial x_{ij}} \right) H_n; \\ \Lambda_2(w)_{ij} &= \sum_{n \in \mathcal{M}_2} c2_n \left( \frac{\partial S_n}{\partial y_{ij}} \right) H_n. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_{ml} &= (y_{ij+1} - y_{i+1j})(u_{i+1j+1} - u_{ij}) + (x_{i+1j} - x_{ij+1})(w_{i+1j+1} - w_{ij}) + \\ &+ (y_{i+1j+1} - y_{ij})(u_{i+1j} - u_{ij+1}) + (x_{i+1j+1} - x_{ij})(w_{ij+1} - w_{i+1j}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\kappa = 4 \left( \frac{\Delta m}{\Delta t} \right)^2, \quad c1_{ml} = RT_{ml} \rho_{ml}^2 + \frac{B_{ml}^2 \rho_{ml}}{8\pi} = P_{ml} \rho_{ml} + \frac{B_{ml}^2 \rho_{ml}}{8\pi}, \quad c2_{ml} = (\gamma - 1) RT_{ml} \rho_{ml}^2 = (\gamma - 1) P_{ml} \rho_{ml}.$$

Рассмотрим итерационный процесс (14) на множестве сеточных функций, принимающих нулевые значения на границе:

$$U \in \Omega_h^\circ, \quad U|_{\Gamma_h} = 0.$$

Покажем, что разностные операторы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  обладают следующими свойствами:  $\Lambda_1 = \Lambda_1^* > 0$ ,  $\Lambda_2 = \Lambda_2^* > 0$ .

Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 U, U) &= \sum_{ij} (\Lambda_1(u)_{ij} u_{ij} \Delta m + \Lambda_1(w)_{ij} w_{ij} \Delta m) = \\ &= \Delta m \kappa \sum_{ij} (u_{ij}^2 + w_{ij}^2) + \Delta m \sum_{ij} \sum_{n \in \mathcal{M}_2} c1_n H_n \left[ \left( \frac{\partial S_n}{\partial x_{ij}} \right) u_{ij} + \left( \frac{\partial S_n}{\partial y_{ij}} \right) w_{ij} \right] = \\ &= \Delta m \kappa \sum_{ij} (u_{ij}^2 + w_{ij}^2) + \frac{\Delta m}{2} \sum_{ij} c1_{m-l-1} \left[ (y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + \right. \\ &\left. + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \right]^2 = (U, \Lambda_1 U) > 0, \end{aligned}$$

т. е.  $\Lambda_1 = \Lambda_1^* > 0$ .

Тут суммирование идет по всем узлам, кроме граничных;  $m=i$ ,  $l=j$ .

Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\Lambda_2 U, U) &= \sum_{ij} \left( \Lambda_2(u)_{ij} u_{ij} \Delta m + \Lambda_2(w)_{ij} w_{ij} \Delta m \right) = \Delta m \sum_{ij} \sum_{n \in \mathbb{N}_2} c 2_n H_n \left[ \left( \frac{\partial S_n}{\partial x_{ij}} \right) u_{ij} + \left( \frac{\partial S_n}{\partial y_{ij}} \right) w_{ij} \right] = \\ &= \frac{\Delta m}{2} \sum_{ij} c 2_{m-l-1} \left[ (y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + \right. \\ &\left. + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \right]^2 = (U, \Lambda_2 U) > 0, \end{aligned}$$

т.е.  $\Lambda_2 = \Lambda_2^* > 0$ .

Запишем итерационный процесс (14) в каноническом виде:

$$BU_t + AU = F, \quad U_t = \frac{U^{s+1} - U^s}{\tau_s}, \quad (17)$$

где  $B = \Lambda_1$ ,  $A = \Lambda_1 + \Lambda_2$ ,  $\tau_s \equiv 1$ , причем  $B = B^* > 0$ ,  $A = A^* > 0$ .

Операторы  $A$  и  $B$  не зависят от номера итерации, т.е. процесс является стационарным. Как показано в [7], достаточным условием для сходимости этого итерационного процесса является выполнение неравенства:

$$B \geq 0,5 \tau_s A, \quad (18)$$

или, что эквивалентно в силу (14),  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ .

Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned} R &= ((\Lambda_1 - \Lambda_2)U, U) = \sum_{ij} \left( (\Lambda_1 - \Lambda_2)(u)_{ij} u_{ij} \Delta m + (\Lambda_1 - \Lambda_2)(w)_{ij} w_{ij} \Delta m \right) = \\ &= \Delta m \kappa \sum_{ij} (u_{ij}^2 + w_{ij}^2) + \frac{\Delta m}{2} \sum_{ij} (c 1_{m-l-1} - c 2_{m-l-1}) \left[ (y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + \right. \\ &\left. + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \right]^2. \end{aligned}$$

Заметим, что для всех  $(i, j)$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \max \left( |u_{ij} - u_{i-1j-1}|, |u_{ij-1} - u_{i-1j}|, |w_{ij} - w_{i-1j-1}|, |w_{i-1j} - w_{ij-1}| \right) &\leq \\ &\leq \sqrt{2(u_{ij}^2 + u_{i-1j-1}^2 + u_{i-1j}^2 + u_{ij-1}^2 + w_{ij}^2 + w_{i-1j-1}^2 + w_{i-1j}^2 + w_{ij-1}^2)}. \end{aligned}$$

Поэтому для любого  $U$  справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \left[ (y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + \right. \\ \left. + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \right]^2 &\leq \\ &\leq 2 \sum_{ij} (u_{ij}^2 + u_{i-1j-1}^2 + u_{i-1j}^2 + u_{ij-1}^2 + w_{ij}^2 + w_{i-1j-1}^2 + w_{i-1j}^2 + w_{ij-1}^2) \cdot \\ &\cdot \left[ (y_{i-1j} - y_{ij-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j}) + (y_{ij} - y_{i-1j-1}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1}) \right]^2 &\leq \\ &\leq 8(h_x + h_y)^2 \sum_{ij} (u_{ij}^2 + u_{i-1j-1}^2 + u_{i-1j}^2 + u_{ij-1}^2 + w_{ij}^2 + w_{i-1j-1}^2 + w_{i-1j}^2 + w_{ij-1}^2), \end{aligned}$$

где

$$h_x = \max_{ij} \left( |x_{ij-1} - x_{i-1j}|, |x_{ij} - x_{i-1j-1}| \right),$$

$$h_y = \max_{ij} \left( |y_{ij-1} - y_{i-1j}|, |y_{ij} - y_{i-1j-1}| \right).$$

Кроме того, справедливо тождество:

$$\sum_{ij} (u_{ij}^2 + w_{ij}^2) = \frac{1}{4} \sum_{ij} (u_{ij}^2 + u_{i-1j-1}^2 + u_{i-1j}^2 + u_{ij-1}^2 + w_{ij}^2 + w_{i-1j-1}^2 + w_{i-1j}^2 + w_{ij-1}^2).$$

Поэтому для любого  $U$  справедливо неравенство

$$32(h_x + h_y)^2 \sum_{ij} (u_{ij}^2 + w_{ij}^2) \geq \sum_{ij} \left[ (y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \right]^2.$$

Учитывая последнее неравенство, имеем

$$\begin{aligned} R &\geq \frac{\Delta m}{2} \sum_{ij} \left( \frac{\kappa}{16(h_x + h_y)^2} + c1_{m-1l-1} - c2_{m-1l-1} \right) \left[ (y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + \right. \\ &\quad \left. + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \right]^2 \geq \\ &\geq \frac{\Delta m}{2} N \min_{ij} \left( \frac{\kappa}{16(h_x + h_y)^2} + c1_{m-1l-1} - c2_{m-1l-1} \right) \left[ (y_{i-1j} - y_{ij-1})(u_{ij} - u_{i-1j-1}) + (x_{ij-1} - x_{i-1j})(w_{ij} - w_{i-1j-1}) + \right. \\ &\quad \left. + (y_{ij} - y_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j}) + (x_{ij} - x_{i-1j-1})(w_{i-1j} - w_{ij-1}) \right]^2, \end{aligned}$$

где  $N$  – число узлов разностной сетки, за исключением граничных.

Таким образом, сходимость итерационного процесса (14) имеет место, если условие

$$\frac{\kappa}{16(h_x + h_y)^2} + c1_{m-1l-1} - c2_{m-1l-1} \geq 0$$

справедливо в каждой ячейке разностной сетки, т.е. при

$$\frac{B^2}{8\pi} \geq (\gamma - 2)P, \quad (19)$$

а в противном случае условие сходимости имеет вид:

$$\Delta t < \frac{\Delta m}{2(h_x + h_y) \sqrt{(\gamma - 2) \frac{P}{\rho} - \frac{B^2}{8\pi\rho}}}, \quad (20)$$

что хорошо согласуется с одномерными оценками для метода комбинированных прогонок [8].

Заметим, что для большинства задач  $\gamma < 2$  и, следовательно, условие сходимости (19) выполняется автоматически.

Рассмотрим сходимость метода раздельного решения основных уравнений системы (4)-(8). В этом случае система разностных уравнений разделяется на три группы: к первой группе относятся динамические уравнения, ко второй – уравнения энергии, к третьей – уравнения электромагнитного поля. Далее решение проводится аналогично предыдущему по группам и связывается общим итерационным циклом.

Анализ устойчивости данного алгоритма проводится таким же способом, как показано выше. Итерационный процесс, соответствующий этому алгоритму, можно свести к виду (15)-(16) при

$$c1_{ml} = RT_{ml}\rho_{ml}^2; c2_{ml} = (\gamma - 1)RT_{ml}\rho_{ml}^2 + \frac{B_{ml}^2\rho_{ml}}{8\pi}.$$

Следовательно, метод раздельного решения МГД-уравнений будет сходящимся, если условие

$$\frac{B^2}{8\pi} \leq (2 - \gamma)P \quad (21)$$

справедливо в каждой ячейке разностной сетки, а в противном случае данный метод сходится при условии

$$\Delta t < \frac{\Delta m}{2\rho(h_x + h_y)\sqrt{(\gamma - 2)\frac{P}{\rho} + \frac{B^2}{8\pi\rho}}}, \quad (22)$$

что хорошо согласуется с одномерными оценками для метода раздельных прогонок (2)-(3).

## 5. Примеры расчетов

Проведенное выше исследование алгоритма комбинированного решения групп разностных уравнений носит в основном качественный характер, поэтому справедливость полученных оценок необходимо проверить численными расчетами.

Рассмотрим следующую модельную задачу. В начальный момент времени  $t=0$  покоящееся вещество занимает область:  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Начальная плотность и температура равны соответственно  $\rho_0 = 1$ ,  $T_0 = 1$ . Вещество – идеальный газ с уравнением состояния  $p = \rho T$ ,  $\varepsilon = \frac{T}{\gamma - 1}$ , нетеплопроводный,  $\kappa = 0$ . Он помещен в однородное магнитное поле

$$B = (B_x, B_y, B_z),$$

которое является практически «вмороженным»:  $\sigma = 10^{20}$ . На границах  $x = x_{\text{лев}}(t)$  и  $x = x_{\text{прав}}(t)$  задана малая скорость  $U_{\text{лев}}(t) = -U_{\text{прав}}(t) = \pm 0.01$ , на границах  $y = y_{\text{лев}}(t)$  и  $y = y_{\text{прав}}(t)$  задана нулевая скорость. По обоим направлениям начальное разбиение сетки было равномерным.

В данной постановке акустические колебания в среде должны распространяться со скоростью, много большей скорости выдвигания (вдвигания) поршня, поэтому в любой момент времени распределение плотности газа и магнитного поля почти однородно.

Задача решалась для различных значений величин  $\gamma$  и  $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ :  $1 < \gamma \leq 10$ ,  $0 \leq B \leq 1000$ .

Расчеты проводились методами раздельного и комбинированного решения групп разностных уравнений.

Практические ограничения на временной шаг хорошо согласуются с полученными в данной работе оценками. При  $\gamma \leq 2$  все расчеты комбинированным методом проходили без ограничения на временной шаг (в расчетах  $\Delta t = 1$ ). Расчеты отдельным методом абсолютно устойчивы лишь при  $B < 4.6$ , при  $B = 100$  шаг интегрирования  $t \approx 0.0013$ , а при  $B = 1000$   $\Delta t \approx 0.00012$ , что практически неприемлемо.

Рассмотрим расчет, моделирующий сжатие плазмы лайнером (газоплазменной оболочкой), ускоряемым электродинамически импульсом тока (см. [9, 10]). В начальный момент времени неподвижная плазма занимает область  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Начальная температура  $T_0 = 1$ . Плазма  $\rho_{nl}^{(0)} = 0,2$  моделируется в области  $0,2 \leq x \leq 0,8$ ,  $0,2 \leq y \leq 0,8$ , а в остальной области моделируется лайнер  $\rho_l^{(0)} = 1$ . Вещество – идеальный газ с уравнением состояния  $P = (z+1)R\rho T$ ,  $E = R(z+1)T/(\gamma-1)$ ,  $z=1$  (водородная полностью ионизованная плазма),  $\gamma = 5/3$ ,  $R = 958$  ( $R$  – газовая постоянная в уравнении состояния). Газ предполагается нетеплопроводным  $k = 0$ , он помещен в однородное магнитное поле, которое является практически "вмороженным":  $\sigma = 10^{20}$ . В начальный момент времени  $B_x(0) = B_1$ ,  $B_y(0) = 0$ ,  $B_z(0) = B_3$ . На границе области  $P(t) = 0$ ,  $B_x(t) = B_1$ ,  $B_z(t) = B_3$ ,  $B_y(t) = B_2 \sin(\pi t/2)$ .

Задача решалась для различных значений величины индукции магнитного поля:  $0 \leq B_x \leq 1000$ ,  $0 \leq B_y \leq 1000$ ,  $0 \leq B_z \leq 1000$ .

Расчеты проводились методами отдельного и комбинированного решения групп разностных уравнений.

## 6. Заключение

Решение данной задачи, как и предыдущие тесты, подтверждает практическую ценность полученных в данной работе оценок. Метод комбинированного решения устойчив для любых значений магнитного поля  $B$ , а метод отдельного решения устойчив лишь для  $B < 4,6$ , а при  $B \gg 4,6$  приводит к ограничениям на временной шаг, не пригодным для практического решения данного класса задач. В то же время при небольших магнитных полях ( $B < 4,6$ ) метод отдельного решения групп разностных уравнений оказывается более предпочтительным из-за его большей простоты и дешевизны по сравнению с комбинированным методом решения групп разностных уравнений.

## 7. Список литературы

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука. 1992.
2. Гасилов В.А., Круковский А. Ю., Новикова Т.П., Оточин А.А. Оценки сходимости некоторых итерационных алгоритмов численного решения задач двумерной магнитной гидродинамики // М., 1995. Препринт ИММ РАН, № 6, 20 с.
3. Гасилов В.А., Гуськов В.Ю., Захаров С.В., Круковский А.Ю., Новикова Т.П. Математическая модель и метод расчета имплозии электродинамически ускоряемой плазмы // М., 1995. Препринт ФИАН № 29, 20 с.
4. Куликовский А.Г., Любимов В.А. Магнитная гидродинамика. — М.: Физматиздат, 1962.
5. Самарский А.А., Волосевич П.П., Волчинская М.И., Курдюмов С.П. Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // ЖВМ и МФ, 1968, т.8, №5, с. 1025-1038.
6. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику — М.: Издательство физико-технического института, 1994.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы — М.: Наука, 1989.
8. Круковский А.Ю. Сходимость метода комбинированных прогонок для разностной схемы одномерной магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1988. №113, 12 с.
9. Дюдерштадт Дж., Мозес Г. Инерциальный термоядерный синтез — М.: Энергоатомиздат, 1984.
10. Zakharov S.V., Smirnov V.P., Grabovskii E.V., Nedoseev S.L., Oleinik G.M. and Zaitsev V.I. Imploding Liner as Driver for Indirect Driven Target Physics Studies // Proc. of the IAEA Technical Committee Meeting on Drivers for Inertial Confinement Fusion. Paris, 1994 (International Atomic Energy Agency Vienna, 1995), p. 395.