



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Зверяев Е.М., Коваленко М.Д.,
Абруков Д.А., Меньшова И.В.,
Кержаев А.П.**

О разложениях по функциям
Папковича–Фадля в задаче
изгиба пластины

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: О разложениях по функциям Папковича–Фадля в задаче изгиба пластины / Е.М.Зверяев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 38. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2019-38](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-38)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-38>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

**Е.М. Зверяев, М.Д. Коваленко, Д.А. Аbruков,
И.В. Меньшова, А.П. Кержаев**

**О разложения по функциям
Папковича–Фадля
в задаче изгиба пластины**

Москва — 2019

Зверьев Е.М., Коваленко М.Д., Аbruков Д.А., Меньшова И.В., Кержаев А.П.

О разложениях по функциям Папковича–Фадля в задаче изгиба пластины

На примере краевой задачи об изгибе тонкой упругой полубесконечной пластины, у которой длинные стороны свободны, а на торце заданы самоуравновешенные изгибающий момент и обобщенная поперечная сила, рассмотрены основные этапы построения точных решений краевых задач изгиба тонких упругих прямоугольных пластин. Решения строятся в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля. Неизвестные коэффициенты разложений определяются так же, как и в классических периодических решениях в тригонометрических рядах, и имеют такую же структуру, т.е. выражаются через интегралы Фурье от заданных на торце полуполосы граничных функций. При этом используются построенные в работе системы функций, биортогональные к собственным функциям Папковича–Фадля. Точные решения обладают свойствами, не присущими ни одному из известных решений теории изгиба пластин. Некоторые из них обсуждаются в статье. Окончательные формулы, описывающие точное решение краевой задачи, просты и легко могут быть использованы в инженерной практике. В основе работы лежат результаты, полученные авторами ранее при решении краевых задач плоской теории упругости в прямоугольной области.

Ключевые слова: изгиб полуполосы, собственные функции Папковича–Фадля, точные решения

Evgeniy Mikhailovich Zverayev, Mikhail Denisovich Kovalenko, Denis Aleksandrovich Abruков, Irina Vladimirovna Menshova, Aleksandr Petrovich Kerzhaev

On expansions in Papkovich–Fadl functions in the problem of plate bending

On the example of the boundary value problem of bending of a thin elastic semi-infinite plate in which the long sides are free, while a self-balanced bending moment and a generalized shearing force are specified at its end, the main stages of constructing exact solutions to the boundary value problems of bending of thin elastic rectangular plates are considered. The solution is constructed in the form of series in Papkovich–Fadle eigenfunctions. The unknown expansion coefficients are determined in the same way as in classical periodic solutions in trigonometric series, and have the same structure, i.e. are expressed in terms of the Fourier integrals of the boundary functions given at the end of the half-strip. Herewith the systems of functions that are constructed in the work and that are biorthogonal to the Papkovich–Fadle eigenfunctions are used. The exact solutions have properties that are not inherent in any of the known solutions of plate bending theory. Some of them are discussed in the article. The final formulas describing the exact solution to the boundary value problem are simple and can easily be used in engineering practice. The work is based on the results obtained by the authors earlier in solving boundary value problems of the plane theory of elasticity in a rectangular domain.

Key words: half-strip bending, Papkovich–Fadle eigenfunctions, exact solutions

1. Введение

Краевым задачам изгиба тонких упругих прямоугольных пластин посвящено множество исследований. Это связано, с одной стороны, с широким использованием прямоугольных пластин в инженерном деле, а с другой — с отсутствием точных решений для практически важных случаев закрепления их сторон, в частности, когда стороны пластины свободны или жестко защемлены или когда часть сторон защемлена (или имеет ребра жесткости), а другая часть свободна. К числу нерешенных относится и задача, рассматриваемая в этой статье: длинные стороны полуполосы свободны, а на торце заданы самоуравновешенные изгибающий момент и обобщенная поперечная сила (четно-симметричная деформация). Дается точное решение этой задачи. Схема решения сохраняется для всех перечисленных выше вариантов граничных условий, поэтому представленное решение можно рассматривать как пример, иллюстрирующий метод решения.

Точные решения ищутся в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля. Настоящее исследование не опирается на какие-либо предшествующие методы приближенно-аналитических решений. В его основе лежат идеи и методы, первоначально разработанные для решения краевых задач плоской теории упругости в полуполосе (прямоугольнике) с однородными граничными условиями по двум противоположным сторонам, например, [1–3]. Обзоры публикаций с приближенными решениями задач изгиба тонких прямоугольных пластин и также по бигармонической проблеме в целом, примером которой является рассматриваемая задача, можно найти в [4–11].

Собственные функции Папковича–Фадля являются обобщением систем экспонент с вещественными [12] или с комплексными [13,14] показателями (в частности, их можно рассматривать как обобщение тригонометрических систем функций). Но, в отличие от систем экспонент, собственные функции Папковича–Фадля не имеют биортогональных к ним на отрезке, совпадающем с торцом полуполосы (это было показано в статье [1]). Поэтому определить коэффициенты разложений заданной на торце полуполосы функции в ряд по какой-либо системе собственных функций Папковича–Фадля, опираясь на классический аппарат теории базиса функций, невозможно. Дело в том, что классическая теория рядов экспонент базируется на преобразовании Фурье в классе целых функций экспоненциального типа и теореме Пэли–Винера [12], тогда как в теории разложений по собственным функциям Папковича–Фадля аналогичную роль играет преобразование Бореля в классе квазицелых функций экспоненциального типа. Квазицелые функции были введены А. Пфлюгером в работе [15] как обобщение целых функций экспоненциального типа. Дальнейшее развитие теория квазицелых функций получила в книге М.М. Джрбашяна [16]. В статье [17] теория А. Пфлюгера рассматривается как обобщение теоремы Пэли–Винера и на этой основе строится теория разложений по собственным функциям Папковича–Фадля.

Построение точных решений задач изгиба прямоугольных пластин в виде разложений по собственным функциям Папковича–Фадля можно разбить на несколько этапов.

Во-первых, построение биортогональных функций. Биортогональные функции находятся из интегральных соотношений, типичных для систем экспонент с вещественными или с комплексными собственными числами [12,13]. Однако, в отличие от систем экспонент, преобразованиями Фурье функций, биортогональных к собственным функциям Папковича–Фадля, являются не целые, а суммы целых и квазицелых функций экспоненциального типа [1]. Именно этим обусловлена необходимость обращения к теории квазицелых функций экспоненциального типа.

Во-вторых, построение разложений Лагранжа. Под разложениями (или рядами) Лагранжа понимаются разложения одной вещественной функции в ряд по какой-либо одной системе собственных комплексно-сопряженных функций Папковича–Фадля, в которых неизвестные коэффициенты разложений (коэффициенты Лагранжа) определяются с помощью функций, биортогональных к собственным функциям Папковича–Фадля. Впервые разложения Лагранжа рассматривались в статье [18]. Сам термин «разложения Лагранжа», введенный в [18], обусловлен тем, что разложения порождающих функций в ряды по функциям Папковича–Фадля имеют вид интерполяционных рядов Лагранжа [12]. Разложения Лагранжа являются аналогами разложений по системам экспонент или по тригонометрическим системам функций. Они играют фундаментальную роль в решении краевых задач теории изгиба пластин в прямоугольнике, аналогичную той, какую тригонометрические ряды Фурье играют в периодических решениях в тригонометрических рядах.

В-третьих, решение краевых задач. При решении краевых задач нужно найти коэффициенты разложений не одной, как в разложениях Лагранжа, а двух заданных на торце полуполосы вещественных функций в ряды по двум системам комплексно-сопряженных собственных функций Папковича–Фадля с одним набором коэффициентов. Это всегда можно сделать благодаря неединственности представления вещественного вектора, т.е. раскладываемой вещественной функции, в виде суммы двух комплексно-сопряженных векторов — собственных функций Папковича–Фадля.

2. Формулировка краевой задачи, биортогональные функции и разложения Лагранжа

Приведем для удобства основные формулы классической теории изгиба пластин [19, 20]. Обозначим

$$W(x, y) = Dw(x, y), \quad (2.1)$$

где $w(x, y)$ — истинный прогиб пластинки, а

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (2.2)$$

— цилиндрическая жесткость пластинки, E — модуль упругости, t — толщина пластинки, ν — коэффициент Пуассона. Далее под прогибом, углами поворота, поперечными силами и моментами будем понимать их истинные значения, умноженные на D (список обозначений приведен в приложении).

Углы поворота в сечениях $x = const$ (относительно оси y) и $y = const$ (относительно оси x) соответственно определяются по формулам:

$$\Phi_x(x, y) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial x}, \quad \Phi_y(x, y) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial y}. \quad (2.3)$$

Изгибающий момент $M_x(x, y)$ в сечении $x = const$ (относительно оси y), $M_y(x, y)$ в сечении $y = const$ (относительно оси x) и крутящий момент $M_{xy}(x, y)$ равны

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= - \left[\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right], \\ M_y(x, y) &= - \left[\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \right], \quad M_{xy}(x, y) = (\nu - 1) \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Поперечные силы в сечениях $x = const$ и $y = const$ находятся по формулам:

$$Q_x(x, y) = \frac{\partial M_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y}, \quad Q_y(x, y) = \frac{\partial M_y(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Соответствующие обобщенные поперечные силы равны

$$K_x(x, y) = Q_x(x, y) + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial y}, \quad K_y(x, y) = Q_y(x, y) + \frac{\partial M_{xy}(x, y)}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial^2 M_x(x, y)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (2.7)$$

Рассмотрим только четно-симметричную деформацию полуполосы $\{ \Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq h \}$. Будем считать, что ее длинные стороны свободны, т.е.

$$K_y(x, \pm h) = M_y(x, \pm h) = 0, \quad (2.8)$$

а на торце $x = 0$ заданы изгибающий момент и обобщенная поперечная сила

$$M_x(0, y) = M(y), \quad K_x(0, y) = K(y). \quad (2.9)$$

В силу симметрии задачи функции $M(y)$ и $K(y)$ четны.

Трансцендентное характеристическое уравнение краевой задачи

$$L(\lambda) = \frac{1}{4} (1 - \nu) \lambda^3 [2(\nu - 1)\lambda h + (\nu + 3) \sin 2\lambda h] = 0 \quad (2.10)$$

имеет четыре нулевых, два действительных и бесконечное множество комплексных корней. Поэтому решение задачи можно представить так:

$$\begin{aligned}
W(x, y) &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 - \nu y^2(C_3 + 3C_4x) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \omega(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k \omega(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\
\Phi_x(x, y) &= C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2 - 3\nu y^2 C_4 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k \varphi_x(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\
\Phi_y(x, y) &= -2\nu y(C_3 + 3C_4x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k \varphi_y(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\
M_x(x, y) &= -2(1 - \nu^2)(C_3 + 3C_4x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k \mu_x(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\
M_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k \mu_y(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\
M_{xy}(x, y) &= 6\nu(1 - \nu)C_4y + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k \mu_{xy}(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\
K_x(x, y) &= -6(1 - \nu)^2 C_4 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k \chi_x(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}, \\
K_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \overline{a}_k \chi_y(\overline{\lambda}_k, y) e^{\overline{\lambda}_k x}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Входящие в (2.11) собственные функции Папковича–Фадля имеют вид

$$\begin{aligned}
\omega(\lambda_k, y) &= \frac{\lambda_k}{2} \left[((\nu + 1) \sin \lambda_k h + (\nu - 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y + (\nu - 1) \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y \right], \\
\varphi_y(\lambda_k, y) &= \frac{\lambda_k^2}{2} \left[((\nu - 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h + 2 \sin \lambda_k h) \sin \lambda_k y - \right. \\
&\quad \left. - (\nu - 1) \lambda_k y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y \right], \\
\mu_x(\lambda_k, y) &= \frac{\lambda_k^3 (1 - \nu)^2}{2} \left[(\lambda_k h \cos \lambda_k h - \sin \lambda_k h) \cos \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y \right], \\
\mu_y(\lambda_k, y) &= \frac{(1 - \nu) \lambda_k^3}{2} \left[((\nu + 3) \sin \lambda_k h + (\nu - 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y + \right. \\
&\quad \left. + (\nu - 1) \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y \right], \\
\mu_{xy}(\lambda_k, y) &= \frac{\lambda_k^3 (1 - \nu)}{2} \left[(2 \sin \lambda_k h + (\nu - 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h) \sin \lambda_k y + \right. \\
&\quad \left. + (1 - \nu) \lambda_k y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y \right], \\
\chi_x(\lambda_k, y) &= \frac{\lambda_k^4 (\nu - 1)}{2} \left[((\nu - 5) \sin \lambda_k h - (\nu - 1) \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y - \right. \\
&\quad \left. - (\nu - 1) \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y \right].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Неизвестные коэффициенты C_n ($n = 1, \dots, 4$) отвечают нулевым корням характеристического уравнения, коэффициенты a_k, \overline{a}_k ($k = 2, 3, \dots$) — его комплексным корням, коэффициент a_1 соответствует вещественному корню $\lambda_1 \approx -1,29787$ (при $\nu = 1/3$). Далее удобно вещественный корень считать комплексным, а в

конечных формулах перейти к пределу, считая, что мнимая часть корня стремится к нулю.

В формулах (2.11), (2.12) не представлены выражения для поперечных сил $Q_x(x, y)$, $Q_y(x, y)$ и соответствующих им собственных функций Папковича–Фадля. О них речь пойдет ниже.

Удовлетворяя с помощью формул (2.11) граничным условиям (2.9), приходим к задаче определения неизвестных коэффициентов C_3, C_4, a_k, \bar{a}_k из уравнений

$$\begin{cases} M_x(y) = -2(1-\nu^2)C_3 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \mu_x(\bar{\lambda}_k, y), \\ K_x(y) = -6(1-\nu)^2 C_4 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k \chi_x(\bar{\lambda}_k, y). \end{cases} \quad (2.13)$$

Коэффициенты C_3, C_4 соответствуют полиномиальной части решения. Определив их известными методами [19, 20] и перенеся в левые части уравнений (2.13), слева получим самоуравновешенные функции. Поэтому дальше будем считать, что функции $M_x(y), K_x(y)$ самоуравновешены, т.е. удовлетворяют условиям

$$\int_{-h}^h M_x(y) dy = \int_{-h}^h K_x(y) dy = 0.$$

Главная проблема заключается в определении коэффициентов a_k, \bar{a}_k . Чтобы найти их, надо построить функции, биортогональные к собственным функциям $\mu_x(\lambda_k, y)$ и $\chi_x(\lambda_k, y)$.

Построим биортогональные функции для всех функций Папковича–Фадля (2.12). Это позволит, при желании, найти точные решения в том случае, когда на торце полуполосы со свободными длинными сторонами заданы любые другие граничные условия.

Уравнения для определения функций, биортогональных к соответствующим функциям Папковича–Фадля, выглядят следующим образом ($k = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, y) W_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} = R_k(\lambda), & \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(\lambda, y) F_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_y(\lambda, y) F_{yk}(y) dy &= R_k(\lambda), & \int_{-\infty}^{\infty} \mu_x(\lambda, y) M_{xk}(y) dy &= R_k(\lambda), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{xy}(\lambda, y) M_{xyk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda), & \int_{-\infty}^{\infty} \mu_y(\lambda, y) M_{yk}(y) dy &= \lambda^2 R_k(\lambda), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \chi_x(\lambda, y) K_{xk}(y) dy &= \lambda R_k(\lambda), & \int_{-\infty}^{\infty} \chi_y(\lambda, y) K_{yk}(y) dy &= \lambda^2 R_k(\lambda). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Функции $\omega(\lambda, y)$, $\varphi_x(\lambda, y)$ и т.д. называются порождающими. Они получаются из соответствующих собственных функций Папковича–Фадля, если в них числа λ_k заменить вещественным параметром λ .

Принципы построения уравнений (2.14) в основном те же, что и в теории рядов экспонент [12,13]. Это связано с тем, что собственные функции Папковича–Фадля можно рассматривать как обобщение систем экспонент с комплексными собственными значениями в силу того, что каждая из них может быть представлена в следующем характерном виде. Например, порождающую функцию $\omega(\lambda, y)$ можно рассматривать как вещественную часть операторной функции:

$$\omega(\lambda, y) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\lambda}{2} [(\nu + 1) \sin \lambda h + (\nu - 1) \lambda h \cos \lambda h - (\nu - 1) \lambda \sin \lambda h \frac{d}{d\lambda}] e^{i\lambda y} \right\}. \quad (2.15)$$

Рассмотрим некоторые из этих принципов на примере первого уравнения (2.14).

1. Предположим, что на интервале $(-h, h)$ существует система финитных функций $W_k(y)$, удовлетворяющих этому уравнению. Тогда уравнение будет таким:

$$\int_{-h}^h \omega(\lambda, y) W_k(y) dy = R_k(\lambda). \quad (2.16)$$

В соответствии с теоремой Пэли–Винера [12] правая часть уравнения (2.16) должна быть целой функцией экспоненциального типа, равного $2h$. Это условие очевидно выполняется.

2. Биортогональные функции должны быть ортогональны к перемещениям пластины, как абсолютно жесткой. Разложим в (2.16) функции $\omega(\lambda, y)$ и $L(\lambda)$ в степенные ряды по степеням λ :

$$\int_{-h}^h \left[\lambda^2 h \nu + \lambda^4 \left(\frac{h^3(1-2\nu)}{6} - h \frac{y^2}{2} \right) + \dots \right] W_k(y) dy = \frac{\lambda^4 h(\nu^2 - 1) + \dots}{\lambda^2 - \lambda_k^2}. \quad (2.17)$$

Разделив обе части равенства на λ^2 и переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\int_{-h}^h h \nu W_k(y) dy = 0. \quad (2.18)$$

Таким образом, биортогональные функции $W_k(y)$ ортогональны к перемещению пластины, как недеформируемой.

3. Четности по параметру λ правых и левых частей уравнений (2.14) должны быть одинаковыми. В уравнении (2.16) обе его части четны по λ .

Правая часть второго уравнения легко получается из первого, т.к. $\varphi_x(\lambda, y) = \lambda \omega(\lambda, y)$. При конструировании правых частей других уравнений (2.14) функцию $R_k(\lambda)$ при необходимости, можно умножить на подходящую целую функцию. Эта функция должна быть минимального типа (полином конечной степени), поскольку в противном случае теорема Пэли–Винера не будет

выполняться. Кроме того, она не должна иметь нулей, иначе к рассматриваемой системе собственных функций Папковича–Фадля нужно будет добавить новые собственные функции с собственными числами, являющимися нулями полинома. Поэтому функцию $R_k(\lambda)$ можно умножить или разделить только на некоторую степень λ . При этом должны выполняться следующие два условия: во-первых, полученная функция должна оставаться целой; во-вторых, при $\lambda \rightarrow 0$ интеграл слева не должен убывать быстрее, чем правая часть уравнения. Поясним второе условие подробнее. Рассмотрим уравнение типа (2.17) относительно некоторой биортогональной функции $S_k(y)$

$$\int_{-h}^h [\lambda^2 a_1(y) + \lambda^4 a_2(y) + \dots] S_k(y) dy = \frac{b_0 + b_1 \lambda^2 + \dots}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (2.19)$$

в котором второе условие не выполняется. Разделим обе части уравнения на λ^2 и перейдем к пределу при $\lambda \rightarrow 0$. Тогда получим

$$\int_{-h}^h a_1(y) S_k(y) dy \rightarrow \infty \quad (\lambda \rightarrow 0, k=1, 2, \dots),$$

что невозможно.

Вернемся к первому уравнению (2.14). Обозначим $W_k(\lambda)$ преобразование Фурье функции $W_k(y)$. Тогда рассматриваемое уравнение можно записать так:

$$\frac{\lambda}{2} \{[(v+1) \sin \lambda h + (v-1) \lambda h \cos \lambda h] W_k(\lambda) - (v-1) \lambda \sin \lambda h \frac{d}{d\lambda} W_k(\lambda)\} = R_k(\lambda). \quad (2.20)$$

В статье [1] было показано, что решение уравнений типа (2.20) можно представить в виде суммы целой и квазицелой функций экспоненциального типа, равного h . Поэтому биортогональные функции $W_k(y)$, $F_{xk}(y)$ и т.д. имеют следующую структуру: они состоят из финитных (равных нулю вне отрезка $|y| \leq h$) и нефинитных частей, определенных на бесконечной спирали, лежащей на римановой поверхности логарифма, которую при вычислении интегралов, связанных с определением коэффициентов разложений, можно заменить бесконечной прямой [1]. Ниже приведены формулы для финитных частей соответствующих биортогональных функций:

$$\begin{aligned} w_k(y) &= \frac{v-1}{2} \left\{ \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k h} - [\delta(y-h) + \delta(y+h)] \right\}, \\ w_0(y) &= \frac{v}{2(v+1)} [\delta(y-h) + \delta(y+h)], \quad f_{xk}(y) = w_k(y), \quad f_{x0}(y) = w_0(y), \\ f_{yk}(y) &= \frac{(1-v) \sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h}, \quad m_{xk}(y) = \frac{\cos \lambda_k y}{2 \lambda_k \sin \lambda_k h}, \quad m_{xyk}(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h}, \\ m_{yk}(y) &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda_k \cos \lambda_k y}{\sin \lambda_k h} - [\delta(y-h) + \delta(y+h)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$m_{y_0}(y) = \frac{1}{2}[\delta(y-h) + \delta(y+h)], \quad k_{xk}(y) = -\frac{\cos \lambda_k y}{2\lambda_k \sin \lambda_k h}, \quad k_{yk}(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h},$$

где через δ обозначена дельта-функция. В формулах (2.21) есть три функции с нулевым индексом: $w_0(y)$, $m_{y_0}(y)$ и $f_{x_0}(y)$. Мы обсудим их ниже.

Нефинитные части биортогональных функций устроены следующим образом: для четных функций Папковича–Фадля они представляются убывающими ступенчатыми функциями, постоянными на интервалах $(-h, h)$, $(\pm h, \pm 3h)$ и т.д. (в статье [1] приведен пример такой функции). Для нечетных — дельта-функциями в точках $(\pm h, \pm 3h, \dots)$. Следовательно, нефинитные части биортогональных функций ортогональны на бесконечной прямой к функциям $\cos q_m y$ и $\sin q_m y$ ($q_m = m\pi/h$, $m = 1, 2, \dots$) [1]. Поэтому формулы (2.21) можно получить следующим образом. Например, построим функцию $m_{xk}(y)$ — финитную часть биортогональной функции $M_{xk}(y)$. Примем в соответствующем уравнении (2.14) $\lambda = q_m$, тогда получим ($k, m = 1, 2, \dots$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu_x(q_m, y) M_{xk}(y) dy = \int_{-h}^h \mu_x(q_m, y) m_{xk}(y) dy = \frac{L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}, \quad (2.22)$$

или

$$\int_{-h}^h m_{xk}(y) \cos q_m y dy = -\frac{(-1)^m}{q_m^2 - \lambda_k^2}.$$

Замечая, что

$$\int_{-h}^h \cos q_m y \cos \lambda_k y dy = -\frac{2\lambda_k (-1)^m \sin \lambda_k h}{q_m^2 - \lambda_k^2},$$

придем к формуле (2.21) для $m_{xk}(y)$. Функции $m_{xk}(y)$ определяются с точностью до произвольной постоянной, ортогональной ко всем функциям $\cos q_m y$. Исключить ее из рассмотрения можно, если по системе собственных функций $\{\mu_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ раскладывать только функции, ортогональные на отрезке $[-h, h]$ к постоянной. Это относится ко всем четным собственным функциям Папковича–Фадля.

Для комплексных значений параметра λ прямую интегрирования $(-\infty, \infty)$ в формулах (2.14) нужно заменить T -образным контуром, лежащим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Контур T составлен из отрезка мнимой оси $y \in [-h, h]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$ [1, 17]. Полагая в этих формулах $\lambda = \lambda_m$, получим соотношения биортогональности:

$$\begin{aligned} \int_T \omega(\lambda_m, y) W_k(y) dy &= \int_T \varphi_y(\lambda_m, y) F_{yk}(y) dy = \\ &= \int_T \mu_x(\lambda_m, y) M_{xk}(y) dy = \begin{cases} M_k & (\lambda_k = \lambda_m); \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \int_T \varphi_x(\lambda_m, y) \Phi_{xk}(y) dy &= \int_T \mu_{xy}(\lambda_m, y) M_{xyk}(y) dy = \\ &= \int_T \chi_x(\lambda_m, y) K_{xk}(y) dy = \begin{cases} \lambda_k M_k & (\lambda_k = \lambda_m); \\ 0 & (\lambda_k \neq \lambda_m), \end{cases} \\ \int_T \mu_y(\lambda_m, y) M_{xk}(y) dy &= \int_T \chi_y(\lambda_m, y) K_{yk}(y) dy = \begin{cases} \lambda_k^2 M_k & (\lambda_m = \lambda_k); \\ 0 & (\lambda_m \neq \lambda_k), \end{cases} \end{aligned}$$

в которых

$$M_k = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k} \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} = \frac{L'(\lambda_k)}{2\lambda_k}. \quad (2.24)$$

Из формул (2.14) вытекают также равенства такого вида:

$$\int_T \omega(\overline{\lambda}_m, y) \overline{W}_k(y) dy = \begin{cases} \overline{M}_k & (\overline{\lambda}_k = \overline{\lambda}_m); \\ 0 & (\overline{\lambda}_k \neq \overline{\lambda}_m) \end{cases} \quad (2.25)$$

и (k, m — любые)

$$\int_T \omega(\overline{\lambda}_m, y) W_k(y) dy = \int_T \omega(\lambda_m, y) \overline{W}_k(y) dy = 0. \quad (2.26)$$

Аналогичные равенства справедливы и для других функций Папковича–Фадля, например,

$$\int_T \mu_x(\overline{\lambda}_m, y) \overline{M}_{xk}(y) dy = \begin{cases} \overline{M}_k & (\overline{\lambda}_k = \overline{\lambda}_m); \\ 0 & (\overline{\lambda}_k \neq \overline{\lambda}_m). \end{cases} \quad (2.27)$$

Построим разложения Лагранжа по всем собственным функциям Папковича–Фадля. Эти разложения в самом общем случае можно записать так:

$$\begin{aligned} W(y) &= w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k \frac{\omega(\lambda_k, y)}{M_k} + \overline{w}_k \frac{\omega(\overline{\lambda}_k, y)}{\overline{M}_k}, \\ \Phi_x(y) &= f_{x0} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{xk} \frac{\varphi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} + \overline{f}_{xk} \frac{\varphi_x(\overline{\lambda}_k, y)}{\overline{\lambda}_k \overline{M}_k}, \\ \Phi_y(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{yk} \frac{\varphi_y(\lambda_k, y)}{M_k} + \overline{f}_{yk} \frac{\varphi_y(\overline{\lambda}_k, y)}{\overline{M}_k}, \\ \int_T \mu_x(\overline{\lambda}_m, y) M_{xk}(y) dy &= \int_T \mu_x(\lambda_m, y) \overline{M}_{xk}(y) dy = 0, \\ M_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} m_{xk} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} + \overline{m}_{xk} \frac{\mu_x(\overline{\lambda}_k, y)}{\overline{M}_k}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}
M_y(y) &= m_{y0} + \sum_{k=1}^{\infty} m_{yk} \frac{\mu_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} + m_{yk} \frac{\mu_y(\bar{\lambda}_k, y)}{\lambda_k^2 \overline{M_k}}, \\
M_{xy}(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} m_{xyk} \frac{\mu_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} + m_{xyk} \frac{\mu_{xy}(\bar{\lambda}_k, y)}{\lambda_k \overline{M_k}}, \\
K_x(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} k_{xk} \frac{\chi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} + k_{xk} \frac{\chi_x(\bar{\lambda}_k, y)}{\lambda_k \overline{M_k}}, \\
K_y(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} k_{yk} \frac{\chi_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} + k_{yk} \frac{\chi_y(\bar{\lambda}_k, y)}{\lambda_k^2 \overline{M_k}}.
\end{aligned}$$

Здесь числа w_0 , w_k и т.д. — неизвестные коэффициенты разложений или коэффициенты Лагранжа. В знаменателях выражений справа стоят нормирующие множители M_k , $\lambda_k M_k$, $\lambda_k^2 M_k$ — значения правых частей соответствующих выражений (2.14), определенные при $\lambda = \lambda_k$.

Функции $W_k(y)$, $M_{yk}(y)$ и $\Phi_{xk}(y)$ обладают следующим свойством ортогональности, вытекающим из соответствующих формул (2.14) при $\lambda \rightarrow 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_k(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} M_{yk}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xk}(y) dy = 0, \quad (2.29)$$

т. е. они ортогональны к постоянной. Поэтому в разложениях Лагранжа (2.28) добавлены коэффициенты Лагранжа с нулевым индексом w_0 , m_{y0} и f_{x0} . Биортогональные функции с нулевым индексом $W_0(y)$ и $M_{x0}(y)$ определяются из уравнений

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda, y) W_0(y) dy = \frac{\nu L(\lambda)}{(1-\nu^2)\lambda^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mu_y(\lambda, y) M_{y0}(y) dy = L(\lambda). \quad (2.30)$$

Отсюда при $\lambda = \lambda_k$ вытекают свойства ортогональности для функций $W_0(y)$ и $M_{y0}(y)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda_k, y) W_0(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_y(\lambda_k, y) M_{y0}(y) dy = 0. \quad (2.31)$$

Биортогональная функция $\Phi_{x0}(y) = W_0(y)$. Это следует из равенства $\varphi_x(\lambda, y) = \lambda \omega(\lambda, y)$ и второго уравнения (2.14).

Коэффициенты в правых частях уравнений (2.30) выбраны так, что если в них перейти к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, то получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_0(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} M_{y0}(y) dy = 1. \quad (2.32)$$

Финитные части функций $W_0(y)$, $M_{y0}(y)$ и $\Phi_{x0}(y)$ равны

$$w_0(y) = \frac{\nu}{2(\nu+1)} [\delta(y-h) + \delta(y+h)], \quad m_{y_0}(y) = \frac{1}{2} [\delta(y-h) + \delta(y+h)], \quad (2.33)$$

$$f_{x_0}(y) = w_0(y).$$

Они находятся так же, как и функции (2.21), но с использованием уравнений (2.30). Найдем, например, функцию $w_0(y)$. Полагая в соответствующем равенстве (2.30) $\lambda = q_m$ ($m = 1, 2, \dots$), получим выражение для определения $w_0(y)$

$$(-1)^m \int_{-h}^h w_0(y) \cos q_m y dy = \frac{\nu}{1+\nu}.$$

Приведем примеры разложений Лагранжа (2.28). Функции, биортогональные к функциям Папковича–Фадля, определены на контуре T , который при интегрировании слева можно заменить бесконечной прямой [1]. Поэтому первоначально заданные на отрезке $|y| \leq h$ раскладываемые функции, стоящие слева в формулах (2.28), должны быть продолжены каким-либо способом вне отрезка на всю прямую. От того, как выполнены эти продолжения будут зависеть коэффициенты разложений Лагранжа. Однако, как было показано в статье [1], в любом случае ряды Лагранжа будут сходиться к раскладываемым функциям при $|y| < h$, а при некоторых дополнительных условиях на раскладываемые функции они будут сходиться к ним на всем отрезке $[-h, h]$ (типичное свойство систем экспонент с комплексными показателями [14]).

Условимся продолжения раскладываемых функций, выполненные с помощью их представлений по системам функций $\{\cos q_m y\}_{m=1}^{\infty}$ или $\{\sin q_m y\}_{m=1}^{\infty}$, называть периодическими.

Ниже, для сокращения записи, используется операция $2 \operatorname{Re}$ от некоторой комплекснозначной функции. Ее надо понимать как сумму двух комплекснозначных функций, одна из которых зависит от λ_k , а другая — от $\overline{\lambda_k}$, тогда, например, $2 \operatorname{Re}(e^{i\lambda_k y}) = e^{i\lambda_k y} + e^{i\overline{\lambda_k} y}$.

1. Разложения по $\omega(\lambda_k, y)$.

а) Рассмотрим разложение (2.28) порождающей функции $W(y) = \omega(\lambda, y)$, где λ — произвольный вещественный параметр:

$$\omega(\lambda, y) = w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k \frac{\omega(\lambda_k, y)}{M_k} + w_k \frac{\omega(\overline{\lambda_k}, y)}{M_k}. \quad (2.34)$$

Продолжим ее, в соответствии с формулой (2.12), на всю вещественную ось и будем считать, что равенство (2.34) выполняется на всей оси (это допущение типично для представляющих систем функций [14], к которым относятся и функции Папковича–Фадля). Умножим (2.34) на биортогональную функцию $W_m(y)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$. На основании соотношений биортогональности (2.23), (2.25), (2.26) и первого равенства (2.14) получим

$$w_m = \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_m^2}. \quad (2.35)$$

Учитывая равенства (2.30)–(2.32), найдем

$$w_0 = \frac{\nu L(\lambda)}{(1 - \nu^2)\lambda^2}. \quad (2.36)$$

Разложение Лагранжа имеет вид

$$\omega(\lambda, y) = \frac{\nu L(\lambda)}{(1 - \nu^2)\lambda^2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\omega(\lambda_k, y)}{M_k} \right\} \quad (|y| \leq h). \quad (2.37)$$

б) Ту же функцию $\omega(\lambda, y)$ разложим в ряд Лагранжа, считая, что она продолжена вне отрезка $|y| \leq h$ периодически. Тогда

$$w_k = \int_{-h}^h \omega(\lambda, y) w_k(y) dy, \quad w_0 = \int_{-h}^h \omega(\lambda, y) w_0(y) dy. \quad (2.38)$$

Подставляя числа (2.38) в формулу (2.34), получим другое разложение этой же функции (с другими коэффициентами Лагранжа).

с) Рассмотрим разложение функции y^2 . В соответствии с требованием к финитным частям четных биортогональных функций, заменим ее самоуравновешенной, положив $W(y) = y^2 - h^2/3$. Пользуясь формулами (2.21), найдем

$$w_k = \int_{-h}^h \left(y^2 - \frac{h^2}{3} \right) w_k(y) dy = \frac{2(1 - \nu)(1 - \lambda_k h \cot \lambda_k h)}{\lambda_k^2}, \quad w_0 = \frac{2\nu h^2}{3(\nu + 1)}. \quad (2.39)$$

Перенося $h^2/3$ вправо, получим нужное разложение

$$y^2 = \frac{h^2(3\nu + 1)}{3(\nu + 1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k}{M_k} \omega(\lambda_k, y) + \frac{\overline{w_k}}{M_k} \omega(\overline{\lambda_k}, y) \quad (|y| \leq h). \quad (2.40)$$

2. Разложения по $\varphi_y(\lambda_k, y)$.

а) Разложение функции $\varphi_y(\lambda, y)$ имеет вид

$$\varphi_y(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\varphi_y(\lambda_k, y)}{M_k} \right\} \quad (|y| \leq h). \quad (2.41)$$

б) Будем считать, что раскладываемая функция $\Phi_y(y) = y^3 - y$ периодически продолжается вне отрезка $[-h, h]$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{yk} &= \int_{-h}^h (y^3 - y) f_{yk}(y) dy = \\ &= \frac{(\nu - 1)[(h^2 \lambda_k^2 - \lambda_k^2 - 6)\lambda_k h \cot \lambda_k h + (1 - 3h^2)\lambda_k^2 + 6]}{\lambda_k^4}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

3. Разложения по $\mu_y(\lambda_k, y)$.

а) Разложение функции $\mu_y(\lambda, y)$ имеет вид

$$\mu_y(\lambda, y) = L(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\mu_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right\} \quad (|y| \leq h). \quad (2.43)$$

б) Пусть раскладываемая функция $M_y(y) = y^2 - h^2/3$ самоуравновешена.

Тогда

$$m_{yk} = \int_{-h}^h M_y(y) m_{yk}(y) dy = \frac{2(1 - \lambda_k h \cot \lambda_k h)}{\lambda_k^2}, \quad (2.44)$$

$$m_{y0} = \int_{-h}^h M_y(y) m_{y0}(y) dy = \frac{2h^2}{3}.$$

Соответствующий ряд будет сходиться к раскладываемой функции на всем отрезке $[-h, h]$.

4. Разложения по $\chi_y(\lambda_k, y)$.

а) Разложение функции $\chi_y(\lambda, y)$ таково:

$$\chi_y(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\chi_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right\}. \quad (2.45)$$

б) Найдем коэффициенты Лагранжа для функции $K_y(y) = y^3$:

$$k_{yk} = - \int_{-h}^h y^3 \frac{\sin \lambda_k y}{2 \sin \lambda_k h} dy = \frac{6 - 3\lambda_k^2 h^2 + \lambda_k h (\lambda_k^2 h^2 - 6) \cot \lambda_k h}{\lambda_k^4}. \quad (2.46)$$

Ряд (2.45) равномерно сходится на всем отрезке $[-h, h]$, а ряд с коэффициентами (2.46) сходится только во внутренних точках отрезка.

5. Разложения по $\chi_x(\lambda_k, y)$.

а) Разложение функции $\chi_x(\lambda, y)$ получается так же, как (2.37), (2.41), (2.43):

$$\chi_x(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\chi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right\}. \quad (2.47)$$

б) Коэффициенты Лагранжа для самоуравновешенной функции $K_x(y) = y^2 - h^2/3$ равны

$$k_{xk} = - \int_{-h}^h \left(y^2 - \frac{h^2}{3} \right) \frac{\cos \lambda_k y}{2\lambda_k \sin \lambda_k h} dy = \frac{2(3 - \lambda_k^2 h^2 - 3\lambda_k h \cot \lambda_k h)}{3\lambda_k^4}. \quad (2.48)$$

На концах отрезка при $y = \pm h$ ряд (2.47) и ряд Лагранжа с коэффициентами (2.48) не сходятся к раскладываемой функции.

6. Разложения по $\mu_x(\lambda_k, y)$.

Собственные функции $\mu_x(\lambda_k, y)$ удовлетворяют условию самоуравновешенности

$$\int_{-h}^h \mu_x(\lambda_k, y) dy = 0. \quad (2.49)$$

Поэтому будем считать, что раскладываемая функция $M_x(y)$ удовлетворяет этому же условию

$$\int_{-h}^h M_x(y) dy = 0. \quad (2.50)$$

а) Разложение самоуравновешенной на функции $\mu_x(\lambda, y)$ имеет вид:

$$\mu_x(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right\}. \quad (2.51)$$

б) Пусть раскладываемая функция $M_x(y) = y^2 - h^2/3$. Она самоуравновешенная. Тогда

$$m_{xk} = -\frac{2(3 - \lambda_k^2 h^2 - 3\lambda_k h \cot \lambda_k h)}{3\lambda_k^4}. \quad (2.52)$$

Ряд (2.51) и ряд Лагранжа с коэффициентами (2.52) не сходятся к раскладываемой функции при $y = \pm h$.

7. Разложения по $\mu_{xy}(\lambda_k, y)$.

а) Разложение функции $\mu_{xy}(\lambda, y)$:

$$\mu_{xy}(\lambda, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \frac{\mu_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right\} \quad (|y| \leq h). \quad (2.53)$$

б) Если раскладываемая функция $M_{xy}(y) = y^3$, то

$$m_{xyk} = \frac{6 - 3\lambda_k^2 h^2 + \lambda_k h (\lambda_k^2 h^2 - 6) \cot \lambda_k h}{\lambda_k^4}. \quad (2.54)$$

Соответствующий ряд Лагранжа сходится к функции $M_{xy}(y) = y^3$ только при $|y| < h$.

Сходимость всех рядов Лагранжа проверяется с помощью теоремы о вычетах. Причем для периодических продолжений отсюда вытекает равносходимость разложений по собственным функциям Папковича–Фадля с разложениями этих же функций в тригонометрические ряды по системам функций $\{\cos q_m y\}_{m=1}^{\infty}$ или $\{\sin q_m y\}_{m=1}^{\infty}$.

Другой способ определения коэффициентов в разложениях Лагранжа состоит в следующем. Рассмотрим, например, разложение самоуравновешенной функции $M_x(y)$

$$M_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_x(\lambda_k, y) + \overline{a_k} \overline{\mu_x(\lambda_k, y)}. \quad (2.55)$$

Обозначим $a_k = \alpha_k + i\beta_k$. Тогда ряд (2.55) можно записать так

$$M_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\mu_x(\lambda_k, y) + \mu_x(\overline{\lambda_k}, y)] + i\beta_k [\mu_x(\lambda_k, y) - \mu_x(\overline{\lambda_k}, y)]. \quad (2.56)$$

Спроектируем его сначала на сумму биортогональных функций $M_{xm}(y) + \overline{M_{xm}(y)}$, а затем на их разность $M_{xm}(y) - \overline{M_{xm}(y)}$ ($m = 1, 2, \dots$). На основании соотношений биортогональности (2.23), (2.27) для собственных функций $\mu_x(\lambda_k, y)$ получим следующие два равенства ($m = 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} m_{xm} + \overline{m_{xm}} = \alpha_m (M_m + \overline{M_m}) + i\beta_m (M_m - \overline{M_m}), \\ m_{xm} - \overline{m_{xm}} = \alpha_m (M_m - \overline{M_m}) + i\beta_m (M_m + \overline{M_m}). \end{cases} \quad (2.57)$$

Решая систему уравнений (2.57), придем к тем же выражениям для коэффициентов разложений, что и в (2.28):

$$a_m = \frac{m_{xm}}{M_m}, \quad m_{xm} = \int_{-\infty}^{\infty} M_x(y) M_{xm}(y) dy. \quad (2.58)$$

На рис. 1 приведена графическая интерпретация разложений Лагранжа.

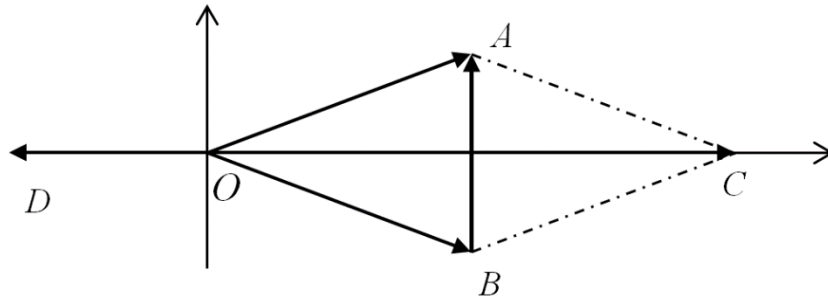


Рис. 1.

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= a_k \mu_x(\lambda_k, y), \quad \overline{OB} = \overline{a_k} \mu_x(\overline{\lambda_k}, y), \quad \overline{OC} = \alpha_k [\mu_x(\lambda_k, y) + \mu_x(\overline{\lambda_k}, y)], \\ \overline{BA} &= \beta_k [\mu_x(\lambda_k, y) - \mu_x(\overline{\lambda_k}, y)], \quad \overline{OD} = i\beta_k [\mu_x(\lambda_k, y) - \mu_x(\overline{\lambda_k}, y)]. \end{aligned}$$

На горизонтальной оси откладываются вещественные значения компонентов векторов, а на вертикальной — мнимые. Умножение на мнимую единицу i превращает мнимый вектор в вещественный (и наоборот), разворачивая его на 90° против часовой стрелки. Так из вектора \overline{BA} получается вектор \overline{OD} .

3. Решение краевых задач

Вернемся к уравнениям (2.13), считая, что функции $M_x(y)$, $K_x(y)$ самоуравновешены и, значит, $C_3 = C_4 = 0$. Коэффициенты a_k определяются из этих уравнений следующим образом. Спроектируем равенства (2.13) на вещественные подпространства: первое на $M_{xm}(y) + \overline{M_{xm}(y)}$, а второе — на $K_{xm}(y) + \overline{K_{xm}(y)}$ ($m = 1, 2, \dots$). Для каждого номера $m \geq 1$, в соответствии с соотношениями биортогональности для собственных функций $\mu_x(\lambda_k, y)$, $\chi_x(\lambda_k, y)$, получим систему из двух уравнений

$$\begin{cases} m_{xm} + \overline{m_{xm}} = a_m M_m + \overline{a_m M_m}, \\ k_{xm} + \overline{k_{xm}} = a_m \lambda_m M_m + \overline{a_m \lambda_m M_m}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Решая ее, найдем

$$a_m = \frac{2 \operatorname{Re} k_{xm} - \overline{\lambda_m} 2 \operatorname{Re} m_{xm}}{(\lambda_m - \overline{\lambda_m}) M_m}, \quad (3.2)$$

где

$$m_{xm} = \int_{-\infty}^{\infty} M_x(y) M_{xm}(y) dy, \quad k_{xm} = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(y) K_{xm}(y) dy, \quad (3.3)$$

а $M_x(y)$, $K_x(y)$ — некоторые продолжения соответствующих функций, первоначально заданных на отрезке $[-h, h]$, на всю вещественную ось (для них оставлены прежние обозначения).

Замечание 1. От того, как выполнены эти продолжения, будут зависеть числа m_{xm} , k_{xm} и, следовательно, решение краевой задачи. Каждому выбранному продолжению функций $M_x(y)$, $K_x(y)$ вне отрезка $[-h, h]$ соответствует своя физическая задача. Поэтому выбираться они должны из физических соображений. В том случае, когда раскладываемые функции продолжаются через границы отрезка $[-h, h]$ периодически, коэффициенты Лагранжа определяются только по заданным на торце полуполосы функциям по формулам:

$$m_{xm} = \int_{-h}^h M_x(y) m_{xm}(y) dy, \quad k_{xm} = \int_{-h}^h K_x(y) k_{xm}(y) dy. \quad (3.4)$$

Никакая особая информация не требуется. Примерами особой (дополнительной) информации могут быть, например, данные о прогибах или углах поворота в угловых точках полуполосы.

Впервые на необходимость в дополнительных условиях относительно поведения решения в угловых точках границы для обеспечения единственности решения краевых задач для бигармонического уравнения в областях с негладкой границей обратил внимание Е.И. Шемякин [21]. Вопрос о способах продолжения граничных функций за пределы отрезка $[-h, h]$ и отвечающих этим продолжениям физических свойствах решений требует отдельного исследования и в этой работе не обсуждается.

Замечание 2. В периодических решениях в тригонометрических рядах в разложениях (2.13) вместо собственных функций Папковича–Фадля будут участвовать тригонометрические системы функций. Эти системы функций двукратно полны. Именно поэтому можно найти один набор коэффициентов разложений для двух заданных на торце полуполосы граничных функций (в отличие от разложений в тригонометрический ряд Фурье, где одна функция раскладывается в ряд по однократно полной системе тригонометрических функций). Двукратно полные системы тригонометрических функций можно рассматри-

вать как вырожденный случай собственных функций Папковича–Фадля, когда две комплексно-сопряженные функции превращаются в две тождественно совпадающие вещественные. При определении неизвестных коэффициентов в периодических решениях из разложений вида (2.13) каждое из равенств (2.13) фактически проектируется на подпространства вида $A \cos k\pi y + B \cos k\pi y$, где A и B – некоторые вещественные числа, а стоящие при них косинусы относятся к какой-либо одной из двух полных систем косинусов. При $A = B = 1/2$ две системы косинусов становятся неразличимыми, сливаясь в одну систему косинусов. Именно так обычно выглядит система косинусов в классических решениях в тригонометрических рядах [19], т.е. как одна, а не как сумма двух. При определении коэффициентов разложений (3.2) используется тот же метод. В качестве линейных комбинаций биортогональных функций, на которые выполняется проектирование, выбраны наиболее удобные: $M_{xm}(y) + \overline{M_{xm}(y)}$ и $K_{xm}(y) + \overline{K_{xm}(y)}$ ($m = 1, 2, \dots$).

Подставляя коэффициенты (3.2) в формулы (2.11), получим решение рассматриваемой краевой задачи. Однако этим решением нельзя пользоваться до тех пор, пока из него не исключены нуль-ряды. Так были названы в [18] представления чисто мнимых составляющих, входящих в решение. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Подставим (3.2) в первый ряд (2.13), а потом прибавим и вычтем из него ряд Лагранжа

$$M_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} m_{xk} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} + \overline{m_{xk}} \frac{\mu_x(\overline{\lambda_k}, y)}{M_k}, \quad (3.5)$$

и запишем полученное выражение в таком виде:

$$\begin{aligned} M_x(y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2 \operatorname{Re} k_{xk}}{\lambda_k - \overline{\lambda_k}} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} - \frac{2 \operatorname{Re} k_{xk}}{\lambda_k - \overline{\lambda_k}} \frac{\mu_x(\overline{\lambda_k}, y)}{M_k} \right] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2 \operatorname{Re}(\lambda_k m_{xk})}{\lambda_k - \overline{\lambda_k}} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} - \frac{2 \operatorname{Re}(\lambda_k m_{xk})}{\lambda_k - \overline{\lambda_k}} \frac{\mu_x(\overline{\lambda_k}, y)}{M_k} \right] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[m_{xk} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} + \overline{m_{xk}} \frac{\mu_x(\overline{\lambda_k}, y)}{M_k} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Элементы первого и второго рядов в (3.6) можно представить следующим образом:

$$i s_k \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} - i s_k \frac{\mu_x(\overline{\lambda_k}, y)}{M_k}, \quad (3.7)$$

где s_k — вещественные числа ($k = 1, 2, \dots$). Из соотношений биортогональности для $\mu_x(\lambda_k, y)$

$$\int_T \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} [M_{xm}(y) + \overline{M_{xm}(y)}] dy = \begin{cases} 1 & (\lambda_m = \lambda_k); \\ 0 & (\lambda_m \neq \lambda_k), \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\int_T \frac{\mu_x(\overline{\lambda_k}, y)}{\overline{M_k}} [M_{xm}(y) + \overline{M_{xm}(y)}] dy = \begin{cases} 1 & (\overline{\lambda_m} = \overline{\lambda_k}); \\ 0 & (\overline{\lambda_m} \neq \overline{\lambda_k}) \end{cases}$$

следует, что проекция выражения (3.7) на вещественные подпространства биортогональных функций $M_{xm}(y) + \overline{M_{xm}(y)}$ ($m=1, 2, \dots$) равна нулю. Следовательно, функция (3.7) чисто мнимая. Поэтому первые два ряда в формуле (3.6) должны быть исключены из решения.

В некоторой степени сказанное можно проиллюстрировать графически, как показано на рис. 2

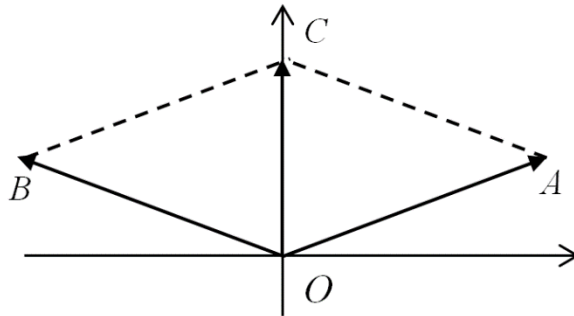


Рис. 2.

Здесь введены обозначения:

$$\overrightarrow{OA} = is_k \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k}, \quad \overrightarrow{OB} = -is_k \frac{\mu_x(\overline{\lambda_k}, y)}{\overline{M_k}}, \quad \overrightarrow{OC} = is_k \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} - is_k \frac{\mu_x(\overline{\lambda_k}, y)}{\overline{M_k}}.$$

На горизонтальной и вертикальной осях откладываются соответственно вещественные и мнимые компоненты векторов.

Нуль-ряды нужно исключать из полученных решений, приводя их тем самым к разложениям Лагранжа не только на торце, но и в каждом сечении x полуполосы. Дело в том, что при $x \neq 0$ чисто мнимые векторы «поворачиваются» так, что их проекции на вещественные подпространства в общем уже не будут равны нулю.

Покажем на примерах, как получаются окончательные формулы, дающие решение краевой задачи, т.е. при произвольных значениях переменной x .

Рассмотрим выражение (2.11) для $M_x(x, y)$ (без элементарного решения). Подставим в него коэффициенты (3.2), в которых будем считать для простоты, что все $k_{xk} = 0$. Тогда каждый элемент полученного ряда (для каждого номера $k = 1, 2, \dots$) можно представить так:

$$(m_{xk} + \overline{m_{xk}}) \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x}}{2i \operatorname{Im} \lambda_k} - (m_{xk} + \overline{m_{xk}}) \frac{\mu_x(\overline{\lambda_k}, y)}{\overline{M_k}} \frac{\lambda_k e^{\overline{\lambda_k} x}}{2i \operatorname{Im} \lambda_k}. \quad (3.9)$$

Проектируя (3.9) на $M_{xm}(y) + \overline{M_{xm}(y)}$, получим

$$(m_{xm} + \overline{m_{xm}}) \left(\frac{\overline{\lambda_k} e^{\lambda_m x}}{2i \operatorname{Im} \lambda_m} - \frac{\lambda_k e^{\overline{\lambda_m} x}}{2i \operatorname{Im} \lambda_m} \right) = (m_{xm} + \overline{m_{xm}}) \frac{\operatorname{Im} \overline{\lambda_k} e^{\lambda_m x}}{\operatorname{Im} \lambda_m}. \quad (3.10)$$

Следовательно, вещественная часть выражения (3.9) равна

$$\left[m_{xk} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} + \overline{m_{xk}} \frac{\mu_x(\overline{\lambda_k}, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im} \overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x}}{\operatorname{Im} \lambda_k}. \quad (3.11)$$

Соответствующий ряд Лагранжа, т.е. формула для $M_x(x, y)$, будет выглядеть так

$$M_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[m_{xk} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} + \overline{m_{xk}} \frac{\mu_x(\overline{\lambda_k}, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im} \overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x}}{\operatorname{Im} \lambda_k}. \quad (3.12)$$

Получим формулу для $M_{xy}(x, y)$. Подставим в соответствующую формулу (2.11) коэффициенты (3.2), умножив числитель и знаменатель на λ_k так, чтобы в знаменателе получить нормирующий множитель $\lambda_k M_k$, соответствующий собственной функции $\mu_{xy}(\lambda_k, y)$. Тогда получим

$$(m_{xk} + \overline{m_{xk}}) \frac{\mu_{xy}(\lambda_k, y) \lambda_k \overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x}}{\lambda_k M_k 2i \operatorname{Im} \lambda_k} - (m_{xk} + \overline{m_{xk}}) \frac{\mu_{xy}(\overline{\lambda_k}, y) \overline{\lambda_k} \lambda_k e^{\overline{\lambda_k} x}}{\lambda_k M_k 2i \operatorname{Im} \lambda_k}. \quad (3.13)$$

Проделав те же преобразования, что и выше, получим следующую формулу:

$$M_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[m_{xk} \frac{\mu_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} + \overline{m_{xk}} \frac{\mu_{xy}(\overline{\lambda_k}, y)}{\lambda_k M_k} \right] \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im} e^{\lambda_k x}}{\operatorname{Im} \lambda_k}. \quad (3.14)$$

Аналогично получают другие формулы. При этом важно, чтобы, прежде чем исключать из решения нуль-ряды, в знаменателях выражений типа (3.9) стояли нормирующие множители, соответствующие рассматриваемой собственной функции Папковича–Фадля.

Приведем окончательные формулы для всех прогибов, углов поворота, поперечных сил и моментов, разделив их на две группы:

1) если на торце полуполосы $M_x(0, y) = M_x(y)$, $K_x(0, y) = 0$:

$$\begin{aligned} W(x, y) &= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 - \nu y^2 (C_3 + 3C_4 x) - \\ &- m_{x1} \frac{\omega(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x}}{M_1} (\lambda_1 x - 1) - \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\omega(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\ \Phi_x(x, y) &= C_2 + 2C_3 x + 3C_4 x^2 - 3\nu y^2 C_4 - m_{x1} \frac{\varphi_x(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 M_1} \lambda_1^2 x - \\ &- \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\varphi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right] \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_y(x, y) &= -2vy(C_3 + 3C_4x) - \\
&- m_{x1} \frac{\varphi_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{M_1} (\lambda_1 x - 1) - \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\varphi_y(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
M_x(x, y) &= -2(1-v^2)(C_3 + 3C_4x) - m_{x1} \frac{\mu_x(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{M_1} (\lambda_1 x - 1) - \\
&- \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\overline{\lambda_k} e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
M_y(x, y) &= -m_{x1} \frac{\mu_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1^2 M_1} \lambda_1^2 (\lambda_1 x + 1) - \\
&- \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\mu_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right] \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
M_{xy}(x, y) &= 6v(1-v)C_4 y - m_{x1} \frac{\mu_{xy}(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 M_1} \lambda_1^2 x - \\
&- \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\mu_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right] \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
K_x(x, y) &= -6(1-v)^2 C_4 - m_{x1} \frac{\chi_x(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 M_1} \lambda_1^2 x - \\
&- \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\chi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right] \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
K_y(x, y) &= -m_{x1} \frac{\chi_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1^2 M_1} \lambda_1^2 (\lambda_1 x + 1) - \\
&- \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\chi_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right] \lambda_k \overline{\lambda_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

2) если на торце полуполосы $K_x(0, y) = K_x(y)$, $M_x(0, y) = 0$:

$$\begin{aligned}
W(x, y) &= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 - vy^2(C_3 + 3C_4x) + \\
&+ k_{x1} \frac{\omega(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{M_1} x + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\omega(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
\Phi_x(x, y) &= C_2 + 2C_3 x + 3C_4 x^2 - 3vy^2 C_4 - k_{x1} \frac{\omega(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{M_1} (\lambda_1 x + 1) - \\
&- \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\omega(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_y(x, y) &= -2vy(C_3 + 3C_4x) + \\
&+ k_{x1} \frac{\varphi_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{M_1} x + \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\varphi_y(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
M_x(x, y) &= -2(1-v^2)(C_3 + 3C_4x) + k_{x1} \frac{\mu_x(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{M_1} x + \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \tag{3.16} \\
M_y(x, y) &= k_{x1} \frac{\mu_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1^2 M_1} \lambda_1 (\lambda_1 x + 2) + \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\mu_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
M_{xy}(x, y) &= 6v(1-v)C_4 y + k_{x1} \frac{\mu_{xy}(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 M_1} (\lambda_1 x + 1) + \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\mu_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
K_x(x, y) &= -6(1-v)^2 C_4 + k_{x1} \frac{\chi_x(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 M_1} (\lambda_1 x + 1) + \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\chi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}, \\
K_y(x, y) &= k_{x1} \frac{\chi_y(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1^2 M_1} \lambda_1 (\lambda_1 x + 2) + \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[k_{xk} \frac{\chi_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right] \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}.
\end{aligned}$$

Числа m_{xk} , k_{xk} определяются по формулам:

$$m_{xk} = \int_{-h}^h M_x(y) m_{xk}(y) dy, \quad k_{xk} = \int_{-h}^h K_x(y) k_{xk}(y) dy. \tag{3.17}$$

В формулах (3.15), (3.16) слагаемые, соответствующие первому (вещественному) корню уравнения (2.10), вынесены за знаки суммирования. Они получаются из общих выражений для комплексных λ_k при $\operatorname{Im} \lambda_1 \rightarrow 0$.

Формулам (3.15), (3.16) можно придать другой вид, если раскрыть в них выражения для Im . Например,

$$\begin{aligned}
M_x(x, y) &= -2(1-v^2)(C_3 + 3C_4x) + m_{x1} \frac{\mu_x(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{M_1} (1 - \lambda_1 x) + \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\mu_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right] \left[\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right] e^{c_k x}, \\
K_x(x, y) &= -6(1-v)^2 C_4 - m_{x1} \frac{\chi_x(\lambda_1, y)e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 M_1} \lambda_1^2 x -
\end{aligned}$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty} 2\operatorname{Re} \left[m_{xk} \frac{\chi_x(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right] \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x},$$

где $c_k = \operatorname{Re} \lambda_k$, $b_k = \operatorname{Im} \lambda_k$, $c_k < 0$.

Покажем, как найти неизвестные коэффициенты C_3 и C_4 в том случае, когда функции $M_x(y)$ и $K_x(y)$ не самоуравновешены. Функции Папковича–Фадля $\mu_x(\lambda_k, y)$ самоуравновешены. Поэтому, интегрируя первое уравнение (2.13) по y от $-h$ до h , получим простое выражение для определения C_3 :

$$\int_{-h}^h M_x(y) dy = -4h(1-\nu^2)C_3. \quad (3.18)$$

Найдем C_4 . Если функция $K_x(y)$ не самоуравновешена, то вместо нее будем рассматривать самоуравновешенную функцию

$$K_x(y) - \frac{1}{2h} \int_{-h}^h K_x(y) dy.$$

Тогда коэффициенты Лагранжа k_{xk} будут определяться по формуле

$$k_{xk} = \int_{-h}^h \left[K_x(y) - \frac{1}{2h} \int_{-h}^h K_x(t) dt \right] k_{xk}(y) dy, \quad (3.19)$$

а для определения C_4 получим равенство

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h K_x(t) dt = -6(1-\nu)^2 C_4. \quad (3.20)$$

Замечание 3. Собственные функции Папковича–Фадля для поперечных сил $Q_x(x, y)$ и $Q_y(x, y)$ соответственно

$$\kappa_x(\lambda_k, y) = -\lambda_k^3 \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y, \quad \kappa_y(\lambda_k, y) = \lambda_k^3 \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y \quad (k \geq 1)$$

имеют структуру, отличную от структуры собственных функций (2.12). Следовательно, они не могут быть представлены в виде (2.15). Отсюда следует, что не существует функций, биортогональных к функциям (2.12). Поэтому задание на границах полуполосы в качестве одного из граничных условий поперечных сил $Q_x(0, y)$ или $Q_y(\pm h, y)$ математически некорректно в рамках классической теории изгиба прямоугольных пластин. По этой же причине для них не существует представлений типа (3.15). Однако после того, как решение построено, поперечные силы $Q_x(x, y)$ и $Q_y(x, y)$ можно найти, воспользовавшись формулами (2.6).

4. Заключение

Начиная с работы Кирхгофа [22] вокруг теории изгиба тонких пластин, предложенной Пуассоном, возникла продолжительная дискуссия, в которой приняли участие многие выдающиеся ученые. Некоторое время считалось, что

Томсон и Тэт [23] поставили точку в обсуждении. Однако вопросы, затронутые во время той давней дискуссии, по-прежнему привлекают внимание исследователей [24–26]. В значительной мере это обусловлено отсутствием точных решений краевых задач теории изгиба пластин в конечных областях с угловыми точками границы. В этой статье получены первые примеры таких решений. Аналогичные решения нетрудно построить для прямоугольника, а также для полуполосы (прямоугольника) с другими граничными условиями на длинных сторонах и торце полуполосы. Опираясь на новые точные решения, можно надеяться на решение некоторых фундаментальных вопросов классической теории пластин.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 18-01-00064.

Приложение. Список принятых обозначений

$W(x, y) = Dw(x, y)$;

$w(x, y)$ — прогиб пластины;

D — цилиндрическая жесткость;

$\omega(\lambda_k, y)$ — собственная функция Папковича–Фадля, соответствующая прогибу $W(x, y)$;

$W_k(y)$ — функция, биортогональная к $\omega(\lambda_k, y)$;

$w_k(y)$ — финитная часть функции $W_k(y)$;

w_k — коэффициент Лагранжа в разложении по $\omega(\lambda_k, y)$;

$\Phi_x(x, y) = \frac{\partial W}{\partial x}$ — угол поворота относительно оси y ;

$\varphi_x(\lambda_k, y)$ — собственная функция Папковича–Фадля, соответствующая Φ_x ;

$F_{xk}(y)$ — функция, биортогональная к $\varphi_x(\lambda_k, y)$;

$f_{xk}(y)$ — финитная часть функции $F_{xk}(y)$;

f_{xk} — коэффициент Лагранжа в разложении по $\varphi_x(\lambda_k, y)$;

$\Phi_y(x, y) = \frac{\partial W}{\partial y}$ — угол поворота относительно оси x ;

$\varphi_y(\lambda_k, y)$ — собственная функция Папковича–Фадля, соответствующая Φ_y ;

$F_{yk}(y)$ — функция, биортогональная к $\varphi_y(\lambda_k, y)$;

$f_{yk}(y)$ — финитная часть функции $F_{yk}(y)$;

f_{yk} — коэффициент Лагранжа в разложении по $\varphi_y(\lambda_k, y)$;

$\mu_x(\lambda_k, y)$ — собственная функция Папковича–Фадля, соответствующая изгибающему моменту $M_x(x, y)$;

$M_{xk}(y)$ — функция, биортогональная к $\mu_x(\lambda_k, y)$;

$m_{xk}(y)$ — финитная часть функции $M_{xk}(y)$;

m_{xk} — коэффициент Лагранжа в разложении по собственным функциям μ_x ;

$\mu_y(\lambda_k, y)$ — собственная функция Папковича–Фадля, соответствующая изгибающему моменту $M_y(x, y)$;

$M_{yk}(y)$ — функция, биортогональная к $\mu_y(\lambda_k, y)$;

$m_{yk}(y)$ — финитная часть функции $M_{yk}(y)$;

m_{yk} — коэффициент Лагранжа в разложении Лагранжа по собственным функциям $\mu_y(\lambda_k, y)$;

$\mu_{xy}(\lambda_k, y)$ — собственная функция Папковича–Фадля, соответствующая крутящему моменту $M_{xy}(x, y)$;

$M_{xyk}(y)$ — функция, биортогональная к $\mu_{xy}(\lambda_k, y)$;

$m_{xyk}(y)$ — финитная часть функции $M_{xyk}(y)$;

m_{xyk} — коэффициент Лагранжа в разложении по собственным функциям μ_{xy} ;

$\chi_x(\lambda_k, y)$ — собственная функция Папковича–Фадля, соответствующая обобщенной поперечной силе $K_x(x, y)$;

$K_{xk}(y)$ — функция, биортогональная к $\chi_x(\lambda_k, y)$;

$k_{xk}(y)$ — финитная часть функции $K_{xk}(y)$;

k_{xk} — коэффициент Лагранжа в разложении по собственным функциям χ_x ;

$\chi_y(\lambda_k, y)$ — собственная функция Папковича–Фадля, соответствующая обобщенной поперечной силе $K_y(x, y)$;

$K_{yk}(y)$ — функция, биортогональная к $\chi_y(\lambda_k, y)$;

$k_{yk}(y)$ — финитная часть функции $K_{yk}(y)$;

k_{yk} — коэффициент Лагранжа в разложении по собственным функциям χ_y .

Библиографический список

1. Коваленко М.Д., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 78–98.
2. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158.
3. Зверяев Е.М., Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П. О свойствах точных решений краевых задач теории упругости в полуполосе и их приложение к теории остаточных напряжений в горных породах // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 56. 28 с. DOI: 10.20948/prepr-2018-56.
4. Meleshko V.V. Bending of an elastic rectangular clamped plate: Exact versus ‘engineering’ solutions. J. Elast. 1997. Vol. 48, no. 1. P. 1–50.

5. Meleshko V.V. Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem. *Appl. Mech. Rev.* 2003. Vol. 56, no. 1. P. 33–85.
6. Hassan K., Guirguis S., El-Hamouly H. Bending of an elastic rectangular clamped plate using Bergan–Wang approach // *Afr. J. Eng. Res.* 2017. Vol. 5, no. 1. P. 7–17.
7. Frederic Y.M. Wan. Stress boundary conditions for plate bending // *Int. J. Solids Struct.* 2003. Vol. 40, no. 16. P. 4107–4123.
8. Li R., Zhong Y., Li M. Analytic bending solutions of free rectangular thin plates resting on elastic foundations by a new symplectic superposition method // *Proc. R. Soc. A* 469: 20120681 (2013).
9. Fu Z., Chen W. A truly boundary-only meshfree method applied to Kirchhoff plate bending problems // *Adv. Appl. Math. Mech.* 2009. Vol. 1, no. 3. P. 341–352.
10. Bloor M.I.G., Wilson M.J. An approximate analytic solution method for the biharmonic problem // *Proc. R. Soc. A.* 2006. Vol. 462. P. 1107–1121.
11. Batista M. New analytical solution for bending problem of uniformly loaded rectangular plate supported on corner points // *The IES Journal Part A: Civil & Structural Engineering.* 2010. Vol. 3, no. 2. P. 75–84.
12. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
13. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 536 с.
14. Коробейник Ю.Ф. Представляющие системы // *УМН.* 1981. Т. 36, вып. 1. С. 73–126.
15. Pfluger A. Über Eine Interpretation Gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichletscher Reihen // *Comment. Math. Helv.* 1935. Vol. 8, no. 1. P. 89–129.
16. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
17. Kerzhaev A.P., Kovalenko M.D., Menshova I.V. Borel transform in the class W of quasi-entire functions // *Complex Anal. Oper. Theory.* 2018. Vol. 12, no. 3, P. 571–587.
18. Коваленко М.Д. Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям // *Доклады Академии наук.* 1997. Т. 352, № 4. С. 480–482.
19. Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
20. Reddy J.N. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells.* Boca Raton: CRS Press, 2007.

21. Шемякин Е.И. О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) // Доклады Академии наук. 1996. Т. 347, № 3. С. 342–345.
22. Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // J. Reine Angew. Math. 1850. Vol. 40. P. 51–58.
23. Thomson W., Tait P. Treatise on Natural Philosophy. Part 2. Cambridge: Cambridge University Press, 1883.
24. Volokh K.Y. On the classical theory of plates // J. Appl. Math. Mech. 1994. Vol. 58, no. 6. P. 1101–1110.
25. Васильев В.В. О преобразованиях Кирхгофа и Томсона–Тэта в классической теории пластин // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 5. С. 98–107.
26. Зверьяев Е.М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.

Оглавление

1. Введение	3
2. Формулировка краевой задачи, биортогональные функции и разложения Лагранжа	4
3. Решение краевых задач	17
4. Заключение	24
Приложение. Список принятых обозначений	25
Библиографический список	26