ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 41 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Веденяпин В.В., Смирнова Н.С.

Уравнения Эйлера и Навье–Стокса как следствия уравнений типа Власова

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Веденяпин В.В., Смирнова Н.С. Уравнения Эйлера и Навье–Стокса как следствия уравнений типа Власова // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 41. 20 с. doi:**10.20948/prepr-2019-41**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-41**

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

В.В.Веденяпин, Н.С. Смирнова

Уравнения Эйлера и Навье-Стокса как следствия уравнений типа Власова

Москва — 2019

Веденяпин В.В., Смирнова Н.С.

Уравнения Эйлера и Навье-Стокса как следствия уравнений типа Власова.

В работе предложены новые кинетические уравнения, из которых точной подстановкой получаются уравнения Эйлера и Навье-Стокса для несжимаемой и сжимаемой жидкости. Предложены иллюстрации редукций уравнения Навье-Стокса и вид особенностей при градиентной катастрофе.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса, уравнение Лиувилля градиентная катастрофа

Victor Valentinovich Vedenyapin, Nadezhda Sergeevna Smirnova

Euler and Navier–Stokes Equations as consequences of Vlasov-type equations.

New kinetic equations are proposed from which the incompressible and compressible Euler and Navier–Stokes equations are derived by making an exact substitution. Some reductions of the Navier–Stokes equation and the form of singularities for a gradient catastrophe are obtained.

Key words: Navier–Stokes equation, Liouville equation, gradient catastrophe

Работа выполнена при финансовой поддержке министерства образования и науки РФ по программе повышения конкурентоспособности РУДН 5-100 среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016-2020 гг. и при поддержке программы ОМН 1.3.1 задачи вычислительной математической физики.

Оглавление

1. Уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

Рассмотрим уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \vartheta \Delta v_i, i = \overline{1,3}; \\ div(\mathbf{v}) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $v_i(\mathbf{x},t)$ – трехмерные скорости, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, t – время, p – давление, ϑ – вязкость, Δ – оператор Лапласа, $div(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$, суммируем по повторяющимся индексам. Запишем это уравнение в форме Лерэ [1], исключая давление. Для этого продифференцируем i-е уравнение по x_i, сложим все уравнения и получим уравнение для определения p:

$$\Delta p = -\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{1.2}$$

Получаем первое из уравнений (1.1) в замкнутой форме (форму Лерэ), обращая оператор Лапласа: $p = -\int G(\mathbf{x},\mathbf{x}') \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} (\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$, где $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ – функция Грина соответствующей задачи, которая зависит от граничных условий. Будем иметь ввиду периодическую задачу для простоты или задачу в бесконечном пространстве, когда $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ известна явно.

Сопоставим уравнению (1.1) следующее новое кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}) - (\nabla p - \vartheta \Delta \mathbf{W}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}) = 0. \tag{1.3}$$

Вместе с уравнением, аналогичным уравнению (1.2)

$$\Delta p = -\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial W_k}{\partial x_i}\frac{\partial W_i}{\partial x_k}, \tag{1.4}$$

получаем систему, похожую на уравнение Власова [2]. Здесь $f(t,\mathbf{v},\mathbf{x})$ – функция распределений по скоростям $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ и пространству $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, $W_k(\mathbf{x},t)=\frac{1}{\rho(\mathbf{x},t)}\int v_k f(t,\mathbf{v},\mathbf{x})d\mathbf{v}$ - средняя скорость, $\rho(\mathbf{x},t)$ - плотность числа частиц в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t. Для уравнения Власова известны несколько классических точных подстановок: гидродинамическая, микроскопическая , энергетическая [2-8], которые можно попробовать и для системы (1.3-1.4). Получим сначала исходную систему (1.1-1.2). Рассмотрим гидродинамическую N-слойную (или N-пучковую) подстановку в уравнение (1.3):

$$f(t,\mathbf{v},\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{Q}_i(\mathbf{x},t)). \tag{1.5}$$

Здесь $\delta(\bullet)$ - функция Дирака, $\rho_i(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{Q}_i(\mathbf{x},t)$ имеют смысл плотности числа частиц и скорости частиц i –го слоя (пучка) в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t соответственно.

Получаем следующую систему уравнений, как это делается в [2-8]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div(\rho_i \mathbf{Q}_i) = 0; \\ \frac{\partial (Q_i)_r}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}(Q_i)_k \frac{\partial (Q_i)_r}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_r} + \vartheta\Delta(Q_i)_r, \end{cases} \qquad i=1,\dots,N;\ r=1,2,3.$$

Здесь $Q=W=\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{N}\rho_i Q_i,\ \ \rho=\sum_{i=1}^{N}\rho_i$. Полагая $N=1,\ \rho=1$, мы получаем в точности систему (1.1).Если в формуле (1.5) сумму заменить интегралом, то мы получим снова точные следствия системы (1.3-1.4) - континуумслойные решения – как это делается для уравнения Власова [3-8]. Можно в качестве ещё одного следствия системы (1.3-1.4) попробовать также стационарные решения – тоже как для уравнения Власова [8-13].Имеют ли эти решения какой-либо механический смысл? Течения, где в каждой точку одна скорость можно считать ламинарными, а если скоростей несколько – турбулентными: N-слойная система имеет в каждой точке N скоростей.

Отметим, что уравнение (1.3) есть уравнение Лиувилля для незамкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}; \\ \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p + \vartheta \Delta \mathbf{W}. \end{cases}$$

Теперь, однако, используем эту аналогию для исследования возможности градиентной катастрофы для системы (1.1). Самый классический пример градиентной катастрофы дает уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + Q\frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \tag{1.6}$$

Здесь для простоты и наглядности рассматривается одномерный случай: $x \in \mathbb{R}^1, \; Q(x,t) \in \mathbb{C}^1\left(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1\right)$.

Оно получается той же самой гидродинамической подстановкой (1.5) из кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{1.7}$$

Здесь $f(t,v,x)$ - функция распределения частиц по пространству $x \in \mathbb{R}^1$ и скоростям $v \in \mathbb{R}^1$. Уравнение (1.7) является уравнением Лиувилля для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v; \\ \dfrac{dv}{dt} = 0. \end{cases}$$

Однако, хорошо известно, что добавленное слагаемое с вязкостью превращает (1.6) в уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+Q\frac{\partial Q}{\partial x}=\vartheta\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},$$

которое не испытывает градиентной катастрофы.

Обобщим ситуацию на произвольную систему нелинейных дифференциальных уравнений [3,4, 6]:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{x}),\mathbf{x}=(x_1,..,x_n),\mathbf{v}(\mathbf{x})\in C^1(\mathbb{R}^n) \tag{1.8}$$

и соответствующее уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+div(\mathbf{v}f)=0.$$

Перепишем систему (1.8) в виде:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{w}(\mathbf{q},\mathbf{p});\\ \dot{\mathbf{p}}=\mathbf{g}(\mathbf{q},\mathbf{p}),\end{cases}$$

где $\mathbf{x}=(\mathbf{q},\mathbf{p}),\mathbf{q}\in\mathbb{R}^m,\mathbf{p}\in\mathbb{R}^{n-m}$, и выполним гидродинамическую подстановку:

$$f(\mathbf{q},\mathbf{p},t)=\rho(\mathbf{q},t)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{Q}(\mathbf{q},t)).$$

Тогда получим, что ρ и $\mathbf{Q}$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\mathbf{w})=0;\\ \dfrac{\partial Q_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^m w_k(\mathbf{q},\mathbf{Q})\dfrac{\partial Q_i}{\partial q_k}=g_i(\mathbf{q},\mathbf{Q}),i=\overline{1,n-m}.\end{cases} \tag{1.9}$$

Это система уравнений с одинаковой главной частью в терминологии Куранта и Гильберта, и можно думать, что добавление $\dfrac{\partial^2\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{q}^2}$ в правую часть нижнего уравнения (1.9) снова запрещает градиентную катастрофу. При $n=2$ взятие ротора от первого уравнения системы (1.1) дает только одно уравнение, и это, совместно с условием

$$div(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0,$$

запрещает градиентную катастрофу. Двумерный случай хорошо исследован. См. например, [16,28]. В случае $n=3$ взятие ротора дает уже три уравнения, и это приводит к принципиальной возможности градиентной катастрофы. Поэтому здесь уместно исследовать частные случаи.

Рассмотрим примеры: частные подстановки в систему (1.1).

Пример 1. $\vartheta = 1, v_i(x) = w_i(x_i, t)$, т.е. каждая компонента скорости зависит только от своей переменной. Получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} + w_1 \dfrac{\partial w_1}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_1} + \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}; \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t} + w_2 \dfrac{\partial w_2}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_2} + \dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}; \\ \dfrac{\partial w_3}{\partial t} + w_3 \dfrac{\partial w_3}{\partial x_3} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_3} + \dfrac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2}; \\ \sum\limits_i \dfrac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

Мы получаем, что $p = p_1(x_1) + p_2(x_2) + p_3(x_3)$, т.к. $\dfrac{\partial p}{\partial x_1}$ есть функция только x_1.

Переходя к форме Лерэ, мы имеем редукцию к одномерной задаче:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + C_i \, \mathrm{x}_i \, .$$

И аналогичные уравнения для других компонент. Итак, мы видим в этом случае набор таких решений уравнения (1.1), где нет градиентной катастрофы.

Пример 2. Особенности градиентной катастрофы.

Так как мы хорошо понимаем поведение решений уравнения (1.6) и соответствующего уравнения с вязкостью, постараемся понять, какие особенности потребуются при аналогичном поведении уравнения Навье-Стокса.

Предположим, что начальное условие выбирается простейшим способом, т.е. с той особенностью, с которой происходит градиентная катастрофа уравнения (1.6) Бюргерса без вязкости, где появляется универсальная особенность $-x_1^{1/3}$:

$$v_1(x_1,x_2,x_3) = -x_1^{1/3}\psi(x_2,x_3).$$

Отсюда получаем дифференцированием:

$$v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{1}{3}x_1^{-1/3}\psi^2\left(x_2,x_3\right);$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} = \frac{2}{9}x_1^{-5/3}\psi\left(x_2,x_3\right).$$

Из сравнения степеней x_1 в правых частях двух равенств выше, можно видеть, как система сопротивляется градиентной катастрофе вязким членом. Постараемся подобрать начальное условие для второй компоненты скорости так, чтобы нейтрализовать влияние вязкого члена

$$v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \Rightarrow v_2 = -\frac{2}{9}x_1^{-2}\frac{\psi\left(x_2,x_3\right)}{\psi'_{x_2}\left(x_2,x_3\right)}.$$

Тогда оставшуюся компоненту скорости v_3 можно найти из равенства:

$$div\left(\mathbf{v}\right) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0.$$

Итак, мы получили, что для градиентной катастрофы по типу уравнения Бюргерса без вязкости требуются особенности второй и третьей компонент скорости, и предъявили вид этих особенностей. Но могут ли быть другие типы особенностей при градиентных катастрофах?

Пример 3. Градиентные течения. Как в уравнении Лиувилля при выводе уравнения Гамильтона-Якоби и Власова, здесь проходит градиентная подстановка:. $v_i(x)=\dfrac{\partial S}{\partial x_i}$. При этом получаем следующую систему уравнений относительно S:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial S}{\partial t}+\dfrac{1}{2}(\nabla S)^2\right)=-\dfrac{\partial p}{\partial x_i}+\vartheta\Delta\nabla_i S, i=\overline{1,3}; \\ div(\nabla S)=0. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t}+\dfrac{1}{2}(\nabla S)^2=-p+h(t); \\ \Delta S=0. \end{cases}$$

Здесь h(t) – некоторая функция только времени. Третий пример интересен тем, что у градиентных потоков исчезает вязкость.

2. О задаче тысячелетия

Приведём полностью текст задачи, которая предложена как задача тысячелетия [14], и прокомментируем его с точки зрения кинетического подхода. Для удобства выделим свои комментарии курсивом.

«Уравнения Эйлера и Навье-Стокса описывают движение жидкости в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$. Эти уравнения будем решать относительно неизвестных переменных скорости $u(x,t)=(u_i(x,t))_{1\le i\le n}\in\mathbb{R}^n$ и давления $p(x,t)\in\mathbb{R}^n$, определенных в каждой точке пространства $x\in\mathbb{R}^n$ и времени $t\ge 0$. Мы ограничиваемся несжимаемой жидкостью, заполняющей пространство $\mathbb{R}^n$. Тогда уравнения Навье-Стокса задаются

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i+\sum\nolimits_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\vartheta\Delta u_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+f_i(x,t) \qquad (x\in\mathbb{R}^n, t\ge 0) \tag{2.1}$$

$$div(u)=\sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \qquad (x\in\mathbb{R}^n, t\ge 0) \tag{2.2}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = u^0(x) \tag{2.3}$$

Здесь $u^0(x)$ - заданная величина, C^∞ бездивергентное векторное поле в $\mathbb{R}^n$, $f_i(x,t)$ - компоненты заданной внешней приложенной силы (например, гравитации), ϑ - положительный коэффициент (вязкость) и $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ - лапласиан в пространственных переменных. Уравнения Эйлера - это уравнения (2.1), (2.2), (2.3) с коэффициентом ϑ равным нулю.» [14].

Это основные уравнения, которые отличаются внешней силой: потом она исчезнет, но сейчас начинается обсуждение физического смысла, который как раз проясняется кинетическим подходом. Продолжим цитирование [14].

«Уравнение (2.1) - это закон Ньютона $f = ma$ для элемента жидкости, подверженного воздействию внешней силы $f = (f_i(\mathrm{x},\mathrm{t}))_{1\le i\le n}$ и сил, возникающих в результате давления и трения.»

Раз второй закон Ньютона, то это система уравнений на координату и скорость. Но как получается (2.1)? Правильный и естественный ход – перейти к уравнению Лиувилля, а потом сделать гидродинамическую подстановку. Но так получится уравнение невзаимодействующих частиц, а у нас несжимаемая жидкость. Поэтому вместо уравнения Лиувилля может быть предложена система (1.3-1.4).

«Уравнение (2.2) просто говорит о том, что жидкость несжимаема. Для того чтобы решения были физическими, мы хотим убедиться, что $u(x,t)$ не растет при $|x| \to \infty$. Поэтому, будем рассматривать силу f и начальные условия u^0, которые удовлетворяют

$$\left|\partial_x^\alpha u^0(x)\right| \le C_{\alpha K}(1+|x|)^{-K} \text{ на } \mathbb{R}^n \text{, для любых } \alpha \text{ и } K \tag{2.4}$$

и

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)\right| \le C_{\alpha m K}(1+|x|+t)^{-K} \text{ на } \mathbb{R}^n \times [0,\infty), \text{ для любых } \alpha, m, K. \qquad (2.5)$$

Мы считаем, что решение уравнений (2.1), (2.2), (2.3) является физически правильным только тогда, когда оно удовлетворяет

$$p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)) \qquad (2.6)$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 dx < C \text{ для } t \ge 0 \text{ (ограниченная энергия)} \qquad (2.7)$$

Альтернативно, чтобы исключить проблемы на бесконечности, мы можем искать пространственно-периодические решения (2.1), (2.2), (2.3). Таким образом, мы полагаем, что $u^0(x)$, $f(x,t)$ удовлетворяют

$$u^0(x+e_j) = u^0(x), \; f^0(x+e_j,t) = f^0(x,t) \text{ для } 1 \le j \le n. \qquad (2.8)$$

($e_j = j^{th}$ единичный вектор в $\mathbb{R}^n$).

В неравенствах (2.4) и (2.5) мы полагаем, что $u^0(x)$ гладкие и

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)\right| \le C_{\alpha m K}(1+|t|)^{-K} \text{ на } \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \text{ для любых } \alpha, m, K. \qquad (2.9)$$

Мы считаем, что решение (2.1), (2.2), (2.3) физически правильное, если оно удовлетворяет

$$u(x,t) = u(x+e_j,t) \text{ на } \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \text{ для } 1 \le j \le n \qquad (2.10)$$

и

$$p,u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)). \qquad (2.11)$$

Фундаментальная задача анализа заключается в том, чтобы решить, существуют ли такие гладкие, физически правильные решения для уравнений Навье-Стокса. Чтобы предоставить разумные пути решения данной проблемы, мы предлагаем доказать одно из следующих четырех утверждений.

(A) Существование и гладкость решений уравнений Навье-Стокса в $\mathbb{R}^3$. Возьмем $\vartheta > 0$ и $n = 3$. Пусть $u^0(x)$ любое гладкое, бездивергентное векторное поле, удовлетворяющее (2.4). Возьмем $f(x,t)$ тождественно равной нулю. Тогда существуют гладкие функции $p(x,t)$, $u_i(x,t)$ в $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, которые удовлетворяют (2.1), (2.2), (2.3), (2.6), (2.7).

(B) Существование и гладкость решений уравнений Навье-Стокса в $\mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$. Возьмем $\vartheta > 0$ и $n = 3$. Пусть $u^0(x)$ любое гладкое, бездивергентное векторное поле, удовлетворяющее (2.8). Мы берем $f(x,t)$ тождественно равной нулю. Тогда существуют гладкие функции $p(x,t)$, $u_i(x,t)$ в $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, которые удовлетворяют (2.1), (2.2), (2.3), (2.10), (2.11).

(C) Брейкдаун в решениях уравнений Навье-Стокса в $\mathbb{R}^3$. Возьмем $\vartheta > 0$ и $n = 3$. Тогда существует гладкое, бездивергентное векторное поле $u^0(x)$ в $\mathbb{R}^3$ и гладкая сила $f(x,t)$ в $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, удовлетворяющие (2.4), (2.5), для которых не существует решений (p,u) уравнений (2.1), (2.2), (2.3), (2.6), (2.7) в $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$.

(D) Брейкдаун в решениях уравнений Навье-Стокса в $\mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$. Возьмем $\vartheta > 0$ и $n = 3$. Тогда существует гладкое, бездивергентное векторное поле $u^0(x)$ в $\mathbb{R}^3$ и гладкая сила $f(x,t)$ в $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, удовлетворяющие (2.8), (2.9), для которых не существует решений (p,u) уравнений (2.1), (2.2), (2.3), (2.10), (2.11) в $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$.

Эти проблемы также открыты и очень важны для уравнений Эйлера $(\vartheta = 0)$, хотя уравнения Эйлера не входят в список призовых задач Математического института Клэя.»

Кинетический подход позволил нам хорошо представить, что такое брейкдаун, о котором говорится в пунктах (C) и (D). А именно, для гидродинамического следствия простейшей модели свободного движения (1.7) происходит градиентная катастрофа: это хорошо известный пример, а $-x_1^{1/3}$ *- это простейшее начальное условие такое, что в следующий момент наступит неоднозначность решения. Отметим, что для самого* rbytnbxtcrjuj *уравнения (1.7) ничего особенного не происходит: гидродинамическое следствие даёт обобщённое решение уравнения (1.7) на всех временах, а ммент градиентной катастрофы-означает, что в следующий момент времени появится многозначность носителя функции распределения (точнее-трёхзначность). Но пример 2, предложенный выше, показывает как можно действовать, чтобы решить проблемы (C) и (D): нужно аппроксимировать полученные особенности вблизи точки ноль бесконечно дифференцируемыми финитными функциями вне некоторой окрестности этой точки. И взять такую функцию за начальную. Но продолжим цитирование [14].*

«Позвольте мне кратко изложить основные частичные результаты, известные в отношении уравнений Эйлера и Навье-Стокса, и в заключение сделать несколько замечаний о важности вопроса.

В двумерных измерениях аналоги утверждений (A) и (B) известны давно (Ladyzhenskaya [16]), в том числе, и для более сложного случая уравнений Эйлера. Это не облегчает доказательство утверждений при обобщении на трехмерное пространство, так как основные трудности отсутствуют в двумерном измерении. В трехмерном измерении известно, что (A) и (B) выполняются при условии, что начальная скорость u^0 удовлетворяет условию малости. Для исходных данных $u^0(x)$, которые не полагаются малыми, известно, что (A) и (B) выполняются (также для $\vartheta = 0$), если временной интервал $[0,\infty)$ заменяется небольшим конечным временным интервалом $[0,T)$, с T, зависящим от начальных данных. Для заданного начального значения $u^0(x)$ максимально допустимое время T называется “blowup time”. Либо (A) и (B) выполняются, либо существует гладкая бездивергентная начальная скорость $u^0(x)$, для которой (2.1), (2.2), (2.3) имеют решение с конечным временем “blowup time”. Для уравнений Навье-Стокса $(\vartheta > 0)$ если существует решение с конечным временем T, тогда скорость $(u_i(x,t))_{1\le i\le 3}$ становится неограниченной вблизи времени “blowup time”» [14].

Мы привели аргументы, показывающие, что двумерный случай проще. В трёхмерном случае они не проходят, и мы ожидаем градиентной катастрофы.

«Известны другие неприятные вещи, которые случаются в момент времени “blowup time” T, если $T < \infty$. Для уравнений Эйлера $(\vartheta = 0)$ если существует решение (с $f \equiv 0$) с конечным временем T, тогда завихренность $w(x,t) = \operatorname{curl}_x u(x,t)$ удовлетворяет

$$\int_0^T \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |w(x,t)| \right\} dt = \infty \quad \text{(Beale–Kato–Majda)},$$

так что вихрь быстро развивается.

Многие численные расчеты демонстрируют разрушение решения уравнений Эйлера, но из-за численной неустойчивости сложно сделать надежные выводы.

Вышеуказанные результаты очень хорошо освещены в книге Bertozzi and Majda [1].»

Здесь употреблена интересная интегральная оценка для развития вихря. Но ситуация скорее всего предельно локальна: достаточно построить начальное условие такое, что в следующий момент случится перехлёст и градиентная катастрофа, чтобы реализовался пример (C) или (D).

«Начиная с Leray[17], достигнут значительный прогресс в понимании слабых решений уравнений Навье-Стокса. Чтобы прийти к идее слабого решения PDE, нужно интегрировать уравнение с тестовой функцией, а затем интегрировать по частям (формально), чтобы производные попадали на тестовую функцию. Например, если (2.1) и (2.2) выполняются, тогда для любого гладкого векторного поля $\theta(x,t)=(\theta_i(x,t))_{1\le i\le n}$ с компактным носителем на $\mathbb{R}^3\times[0,\infty)$ формальное интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} u\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t}dxdt-\sum_{ij}\iint\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} u_i u_j\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}dxdt=\vartheta\iint\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} u\cdot\Delta\theta dxdt+\iint\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} f\cdot\theta dxdt-\\ -\iint\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} p\cdot(div\theta)dxdt.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Отметим, что (2.12) имеет смысл для $u\in L^2$, $f\in L^1$, $p\in L^1$, в то время как (2.1) имеет смысл только, если $u(x,t)$ дважды дифференцируем по x. Аналогично, если $\varphi(x,t)$ гладкая функция с компактным носителем на $\mathbb{R}^3\times[0,\infty)$, то формальное интегрирование по частям и (2.2) влечет

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} u\cdot\nabla_x\varphi dxdt=0.\tag{2.13}$$

Решение (2.12), (2.13) называется слабым решением уравнений Навье-Стокса.

Широко распространенная идея анализа состоит в том, чтобы доказать существование и регулярность решений PDE, сначала построив слабое решение, а затем показав, что любое слабое решение является гладким. Этот подход был применен к уравнениям Навье-Стокса с частичным успехом. Leray в [17] показал, что уравнения Навье-Стокса (2.1), (2.2), (2.3) в трехмерном пространстве всегда имеют слабое решение (p,u) с подходящим свойством роста. Не доказана единственность решений уравнений Навье-Стокса. Для уравнений Эйлера единственность слабых решений не верна. Scheffer [18], а затем и Schnirelman [19] продемонстрировали слабые решения уравнений

Эйлера на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ с компактным носителем в пространстве - времени. Это соотносится с жидкостью, находящейся в момент времени $t = 0$ в покое, которая начинает двигаться во времени $t = 1$ без внешней силы и возвращается в состояние покоя в момент времени $t = 2$, причем ее движение ограничивается окрестностью шара $B \subset \mathbb{R}^3$.»

Ситуацию с отсутствием единственности снова интересно рассмотреть с кинетической точки зрения на фазовой диаграмме координата-скорость, но это выходит за рамки данной статьи.

«Scheffer [20] применил идею из теории геометрической меры для доказательства теоремы частичной регулярности для подходящих слабых решений уравнений Навье-Стокса. Caffarelli–Kohn–Nirenberg [21] улучшил результат Scheffer, а F.-H. Lin [22] упростил доказательства в работе Caffarelli–Kohn–Nirenberg [21]. Теорема частичной регулярности [21], [22] касается параболического аналога размерности Хаусдорфа сингулярного множества подходящего слабого решения Навье – Стокса. Здесь сингулярное множество слабого решения u состоит из всех точек $(x^0, t^0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ так, что u неограниченна в любой окрестности (x^0, t^0). (Если сила f гладкая, и если (x^0, t^0) не принадлежит единственному набору, то нетрудно показать, что u можно скорректировать на множестве нулевой меры, чтобы она стала гладкой в окрестности (x^0, t^0).)

Чтобы определить параболический аналог размерности Хаусдорфа, мы используем параболические цилиндры, $Q_r = B_r \times I_r \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, где $B_r \subset \mathbb{R}^3$ - шары радиуса r и $I_r \subset \mathbb{R}$ - интервал с длиной r^2. Учитывая, что $E \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ и $\delta > 0$, мы задаем

$$P_{K,\delta}(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^K : Q_{r_1}, Q_{r_2} \ldots \text{покрывают} \quad \text{E, и} \quad r_i < \delta \right\}$$

и определяем

$$P_{K,\delta}(E) = \lim_{\delta \to 0+} P_{K,\delta}(E).$$

Основные результаты работ [21], [22] можно сформулировать примерно следующим образом.

Теорема

(A) Пусть u есть слабое решение уравнений Навье-Стокса, удовлетворяющее подходящим условиям роста. Пусть E есть сингулярное множество u. Тогда $P_1(E) = 0$.

(B) Учитывая бездивергентное векторное поле $u^0(x)$ и силу $f(x,t)$, удовлетворяющих (2.4) и (2.5), существует слабое решение уравнений Навье-Стокса (2.1), (2.2), (2.3) , удовлетворяющее условиям роста в (A).»

Интерпретация этих результатов на кинетическом уровне может оказаться интересной задачей.

«В частности, сингулярное множество u не может содержать кривую пространства-времени вида $\{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : x = \varphi(t)\}$. Эта лучшая теорема частичной регулярности, что известна для уравнений Навье-Стокса. Кажется, очень трудно идти дальше. Позвольте мне в заключение сказать несколько слов о значении поставленных здесь проблем. Жидкости важны и трудны для понимания. Существует множество увлекательных проблем и предположений о поведении решений уравнений Эйлера и Навье – Стокса (см., например, Bertozzi–Majda [1] или Constantin [24]). Поскольку мы даже не знаем, существуют ли эти решения, наше понимание находится на очень примитивном уровне. Стандартные методы из PDE кажутся неадекватными для решения проблемы. Вместо этого нам, вероятно, нужны глубокие новые идеи.»

Кинетический подход может оказаться такой новой идеей. Мы видим, что построенные нами примеры в разделе 1 могут быть полезны при построении примеров опрокидывания (breackdown) в п. C и D данной задачи. Углубление этих примеров может оказаться полезным. Но сами кинетические уравнения, предложенные здесь для несжимаемой жидкости, имеют аналоги и *для сжимаемой жидкости, то есть газа, что мы и сделаем в следующем пункте.*

3.Уравнения Навье-Стокса для сжимаемой жидкости

Рассмотрим уравнения Навье-Стокса для сжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \dfrac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \vartheta \Delta v_i, i = \overline{1,3}; \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{v}) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Теорема.

Пусть $f(t,\mathbf{v},\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{W}(\mathbf{x},t))$, а переменные $\rho(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{W}(\mathbf{x},t)$ удовлетворяют уравнениям газовой динамики [1, 15]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} W_k \dfrac{\partial W_i}{\partial x_k} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \vartheta \Delta W_i, i = \overline{1,3}; \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{W}) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

здесь p – заданная функция плотности.

Тогда $f(t,\mathbf{v},\mathbf{x})$ удовлетворяет следующему кинетическому уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + div(f\mathbf{v}) - (\nabla p - \vartheta \Delta \mathbf{W}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}) = 0, \quad (3.3)$$

где средняя скорость и плотность определяются таким образом:

$$W_k(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x},t)} \int v_k f(t,\mathbf{v},\mathbf{x}) d\mathbf{v}, \ \rho(\mathbf{x},t) = \int f(t,\mathbf{v},\mathbf{x}) d\mathbf{v}.$$

Доказательство

Сделаем гидродинамическую подстановку в (3.3) для каждой компоненты i вектора скорости $\mathbf{W}(\mathbf{x},t)$.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))-\rho\cdot\nabla_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))\frac{\partial W_i}{\partial t}+\sum\nolimits_{k=1}^{3}\ v_k\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))-$$
$$-\sum\nolimits_{k=1}^{3}\ v_k\rho\frac{\partial W_i}{\partial x_k}\nabla_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))+\rho\cdot\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))\cdot div(\mathbf{v})-\frac{\partial p}{\partial x_i}\rho\cdot\nabla_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))+ \quad (3.4)$$
$$+\vartheta\Delta W_i\cdot\rho\cdot\nabla_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))=0, i=\overline{1,3}.$$

Рассмотрим выражение, образованное членами с функцией Дирака $\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))+\sum\nolimits_{k=1}^{3}\ v_k\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))+\rho\cdot\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))\cdot div(\mathbf{v})=$$
$$=\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))\cdot(\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\mathbf{v}))=\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))\cdot(\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\mathbf{W})) \quad (3.5)$$

Выпишем выражение, образованное членами с множителем $\nabla_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))$:

$$-\rho\cdot\nabla_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))\frac{\partial W_i}{\partial t}-\sum\nolimits_{k=1}^{3}\ v_k\rho\frac{\partial W_i}{\partial x_k}\nabla_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))-\frac{\partial p}{\partial x_i}\rho\cdot\nabla_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))+$$
$$+\vartheta\Delta W_i\cdot\rho\cdot\nabla_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))=-\rho\cdot\nabla_i\delta(\mathbf{v}-\mathbf{W}(\mathbf{x},t))\cdot(\frac{\partial W_i}{\partial t}+\sum\nolimits_{k=1}^{3}\ W_k\rho\frac{\partial W_i}{\partial x_k}+\frac{\partial p}{\partial x_i}-\vartheta\Delta W) \quad (3.6)$$

Получаем из выражений (3.5) и (3.6), что если переменные $\rho(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{W}(\mathbf{x},t)$ удовлетворяют системе (3.2), то выполняется уравнение (3.4).

4. Заключение

Таким образом, мы предложили новые кинетические уравнения, из которых точной подстановкой получаются уравнения Эйлера и Навье-Стокса для несжимаемой и сжимаемой жидкости. Такие кинетические уравнения, может быть, и описывают турбулентность. Получили примеры как гладких точных редукций для иллюстрации возможных исследований особенностей (Примеры 1,3), так и вид особенностей простейшей градиентной катастрофы

(Пример 2). Особенности решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса активно изучаются [1,14-24, 29]. Аналогия с уравнениями гидродинамического типа, которые получаются из кинетических уравнений, здесь оказывается очень полезной. Интересно было бы исследовать систему (1.3-1.4), как это делается для системы типа Власова, её стационарные решения [9-13] и более общую гидродинамическую подстановку [3-8]. Весьма интересно было бы доказать - как для уравнения Власова, так и для системы (1.3-1.4) - теорему о совпадении временных средних с экстремалями Больцмана, как это делается в работах [25-27]. Сокращённый вариант работы был опубликован в [23]. Авторы выражают благодарность А.Л.Афендикову и В.А.Дородницыну за полезные обсуждения.

Литература

1. *Bertozzi A. J., Majda A. L.* Vorticity and Incompressible Flows // Cambridge U. Press. Cambridge. 2002. V. 27. 558 p.
2. *Власов А.А.* Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356с.
3. *Веденяпин В.В, Негматов М.А., Фимин Н.Н.* Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 45–82.
4. *В.В.Веденяпин, М.А.Негматов*. О выводе и классификации уравнений типа уравнения Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа и форма Годунова // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. № 3. С. 468–480.
5. *Веденяпин В.В., Фимин Н.Н.* Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона-Якоби // ДАН. 2012. Т. 446. № 6. С. 15–22.
6. *Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Негматов М.А.* Уравнения типа Власова и Лиувилля и их микроскопические и гидродинамические следствия. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016. 51с.

7. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Гамильтонов формализм для нелинейных волн // Успехи физических наук. 1997. Т. 40. № 11. С. 1087-1116.
8. *Скубачевский А. Л. , Тсузуки Ю.* Уравнения Власова–Пуассона для двухкомпонентной плазмы в полупространстве // Докл. РАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 528–530.
9. *Скубачевский А.Л.* Уравнения Власова–Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // Успехи математических наук. 2014. Т. 69. № 2. С. 107-148.
10. *Беляева Ю. О.* Стационарные решения уравнений Власова для высокотемпературной двукомпонентной плазмы // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016.Т. 62. С. 19–31.
11. *Веденяпин В.В.* О стационарных решениях уравнения Власова-Пуассона // Доклады Академии наук. 1986. Т. 290. № 4. С. 777-780.
12. *Веденяпин В.В.* О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача // Доклады Академии наук. 1992. Т. 323. № 6. С. 1004–1006.
13. *Веденяпин В.В.* Временные средние и экстремали по Больцману // Доклады Академии наук. 2008. Т. 422. № 2. С. 161-163
14. *Fefferman.C. L.* Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation // The millennium prize problems. 2006. P. 57– 67.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. том VI. Гидродинамика // М: Наука. 1986.
16. *Ladyzhenskaya O. A.* The mathematical theory of viscous incompressible flow // New York : Gordon and Breach, 1969. V. 2.
17. *Leray J.* Sur le mouvement d'un liquide visquex emplissant l'espace Acta // Math. 1934. V. 63. P. 193-248.
18. *Scheffer V.* An inviscid flow with compact support in space-time // Journal of Geometric Analysis. 1993. V. 3. N. 4. P. 343-401.

19. *Shnirelman A.* On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation //Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences. 1997. V. 50. N. 12. P. 1261-1286.

20. *Scheffer V.* Turbulence and Hausdorff dimension, in Turbulence and the Navier–Stokes Equations, Lecture Notes in Math. 565, Springer Verlag. Berlin. 1976. P. 94–112.

21. *Caffarelli L., Kohn R., Nirenberg L.* Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations //Communications on pure and applied mathematics. 1982. V. 35. N. 6. P. 771-831.

22. *Lin F.* A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem //Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences. 1998. V. 51. N. 3. P. 241-257.

23. *Веденяпин В.В., Андреева А.А., Воробьева В.В.* Уравнения Эйлера и Навье-Стокса как самосогласованные поля // Доклады Академии наук, 2018, том 480, № 4, с. 405–407.

24. *Constantin P.* Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics //Mathematics Unlimited—2001 and beyond. Springer, Berlin, Heidelberg. 2001. P. 353-360.

Аджиев С.З., Веденяпин В.В . Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца // ЖВМиМФ. 2011. Т. 51. № 11. С. 2063–2074.

25.*Веденяпин В. В., Аджиев С.З.* Энтропия по Больцману и Пуанкаре // УМН. 2014. Т. 69. № 6(420). С. 45–80.

*26.Веденяпин В.В., Негматов М.А.*О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса // СМФН. 2013. Т. 47. С. 5–17.

27. *Andrei L. Afendikov and Alexander Mielke.* Dynamical Properties of Spatially Non-Decaying 2D Navier–Stokes Flows with Kolmogorov Forcing in an Infinite Strip // J. math. fluid mech. 7 (2005) S51–S67.

28. *J. T. Stuart,* Nonlinear Euler partial differential equations: singularities in their solution, in: Symposium to Honor C. C. Lin, D. J. Benney, F. H. Shu, C. Yuan (eds.), 81–95, World Scientific Publishing Co., Singapore 1988.