ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 44 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Москаленко А.В., Тетуев Р.К., Махортых С.А.

К вопросу о современном состоянии теории колебаний

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Москаленко А.В., Тетуев Р.К., Махортых С.А. К вопросу о современном состоянии теории колебаний // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 44. 32 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2019-44
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-44

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А. В. Москаленко, Р. К. Тетуев, С. А. Махортых

К вопросу о современном состоянии теории колебаний

Москва — 2019

Москаленко А. В., Тетуев Р. К., Махортых С. А.

К вопросу о современном состоянии теории колебаний

Отражены основные вехи становления теории колебаний, а также рассмотрены перспективы её развития. Предложено обобщающее определение понятия «колебание», сформулированное на основе теории циклических марковских случайных процессов.

Ключевые слова: математическая физика, физика биологических объектов, релаксационные колебания, хаотические колебания, случайные колебания, ритм, марковский процесс, матрица переходных вероятностей, нелинейная динамика, Физиом

Moskalenko Andrey Vitalievich,
Tetuev Ruslan Kurmanbievich,
Makhortykh Sergey Aleksandrovich

On the current state of the theory of oscillations

The main milestones of the development of the theory of oscillations are reflected, and the prospects for its development are also considered. A generalized definition for the concept “oscillation”, formulated on the basis of the theory of cyclic Markov random processes, is proposed.

Key words: mathematical physics, physics of biological objects, relaxation oscillations, chaotic oscillations, stochastic oscillations, rhythm, Markov processes, the matrix of transition probabilities, nonlinear dynamics, Physiome

Перечень сокращений:

БМС	—	быстро-медленные системы
БВП	—	модель Бонхёффера—ван дер Поля
ВДП	—	модель ван дер Поля
ФХН	—	модификации модели Бонхёффера—ван дер Поля, обозначаемые в литературе как «*модель ФитцХью–Нагумо*».

Введение

Ранее нами был предоставлен [1] краткий исторический обзор развития математической физики биологических объектов в мире вообще и в России в частности. Был указан ряд общего плана недостатков биофизического подхода к описанию биообъектов. В наиболее общих словах эти недостатки можно охарактеризовать как господство редукционизма (механистического подхода).

Редукционизм следует понимать в общем смысле как стремление к излишне упрощённому описанию объекта исследования. Такое упрощение, с одной стороны, значительно облегчает проведение исследований. С другой стороны, такая редукция может приводить к тому, что в редуцированном математическом описании исследуемого объекта (денотата) утрачиваются некоторые его существенные свойства. Одним из следствий такой склонности к упрощённому описанию объекта исследования является сопутствующее стремление исследователя описать целостную систему через описание всё большего количества её всё более мелких частей — методологический подход, который представителями противоположной научной позиции, т. е. сторонниками холизма, считается принципиально ошибочным. Как компромисс между холизмом и редукционизмом в XXI веке был предложен интегративизм. Более детально эти вопросы были рассмотрены в [1].

В этом обзоре нами предпринята попытка более детально рассказать о недостатках биофизического редукционизма при описании так называемых релаксационных биологических систем, т. е. таких систем, в которых возможно наблюдать так называемые релаксационные колебания. Как известно, для описания таких систем сложилась традиция использовать тот же математический аппарат дифференциальных уравнений, который для аналогичных систем механических или электрических, т. е. для физических систем, принят в классической теории колебаний. Редукция описания биологических систем до уровня систем физических, тем не менее, представляется далёкой от совершенства; для их адекватного описания требуется развитие современной теории колебаний.

1. Колебания устойчивые и релаксационные

Как было установлено в недавнем достаточно тщательном ретроспективном исследовании [2], термин «релаксационные колебания» ассоциируется обычно с именем Бальтазара ван дер Поля благодаря его статье с тем же названием [3], в которой он, по-видимому, впервые ввёл это словосочетание в оборот, используя его для описания нелинейных колебаний, создаваемых самоподдерживающимися электрическими колебательными системами, такими как простой автоколебательный триодный контур. Обосновывалось введение такого термина лишь тем обстоятельством, что указанному исследователю казались все подобные колебания связанными с наличием «времени релаксации» — т. е. с концептом, который на тот исторический момент развития науки представлялся наиболее понятным и широко распространённым. С конца XIX века до середины 1920-х годов термин «УСТОЙЧИВЫЕ КОЛЕБАНИЯ» (англ.: sustained oscillations) обозначал колебания, которые производятся системами, движимыми внешней силой; с целью выделить определённый тип устойчивых колебаний [4] ван дер Поль ввёл новый термин. Указывается [2, 4], что от других физиков стали сразу же поступать критические замечания об уместности выбора именно такого термина для вновь обнаруженных колебаний, отличающихся по ряду признаков от «классических» уже ранее известных колебаний гармонических.

Полезно вспомнить, что в конце XIX века среди ученых — прежде всего среди физиков и математиков — господствовало представление, что гармонические колебания являются «естественными», «натуральными», а остальные колебания представляют лишь суперпозицию (линейную комбинацию) таких гармонических колебаний. Сама концепция «гармонического мира» возникла ещё как проекция философско-эстетического понятия гармонии на область звуковых явлений, а сам термин «гармония» восходит к древнегреческой теории музыки (гармонике). В философии гармония — категория, отражающая закономерный характер развития действительности, внутреннюю и внешнюю согласованность, цельность и соразмерность содержания и формы. Слово «гармония» встречается в гомеровских «Илиаде» и «Одиссее». «*Гармония всегда рождается из противоположностей, ведь гармония — это единение многосмешанных* [сущностей] *и согласие разногласных*», — написано в трактате «Введение в арифметику» Никомаха из Герасы (др.-греч.: Νικόμαχος ὁ Γερασένος, II в. н. э.) — древнегреческого философа, математика и теоретика музыки. В латинской науке такое же определение можно найти в книгах «Основы арифметики» и «Основы музыки» Боэция (лат.: Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius, ок. 500 г.) — римского государственного деятеля, философа-неоплатоника и теоретика музыки. Гармоника в античности, в Средние века и в эпоху Возрождения — наука и учение о звуковысотной структуре музыки; она является прообразом современной научной и учебной дисциплины гармонии (отрасли музыкознания). Позже было обнаружено, что так называемый «натуральный звукоряд» соответствует гармоническому спектру сложных колебаний осциллятора — физического источника звука (например, струны или воздушного столба в трубе). Ещё позже были обнаружены аналогичные колебательные процессы электромагнитной природы. Так, в XVII веке Снелл (Willebrord Snel van Royen — голландский математик, физик и астроном), выявив закон преломления света, тем самым открыл дорогу новым применениям тригонометрических функций в оптике; а Гюйгенс выпустил «Трактат о свете» — набросок волновой теории света. В 1822 году Фурье выявил, что любое периодическое колебание может быть представлено как сумма гармонических колебаний путём разложения соответствующей функции в ряд Фурье. В 1864–1868 годах Джеймс Максвелл как ряд следствий из своей теории получил предсказание электромагнитных волн и электромагнитной природы света; волны эти подчинялись математическому описанию гармонических колебаний. Всеми этими открытиями оказались лишь укреплены прежние наивные научные представления тех времён о том, что весь натуральный мир составлен лишь из гармонических колебаний, — и это следует рассматривать как вполне естественное широко распространенное научное заблуждение, сформировавшееся по механизму известной со времён Аристотеля логической ошибки «поспешное обобщение» (лат.: fallacia accidens) [5]. Этими историческими особенностями развития научного знания и был обусловлен весь тот ажиотаж, что возник после публикаций ван дер Поля 1926 г. о колебаниях, свойства которых существенно отличались от колебаний гармонических, в то время уже всем привычных.

Однако следует отметить, что подобные негармонические колебательные процессы были описаны и до указанной статьи ван дер Поля, и можно выделить четыре автоколебательные системы, в которых прежде уже наблюдались релаксационные колебания: 1) серийная динамо-машина, описанная Гёрардом-Лескуйером (1880), 2) музыкальная дуга, открытая Дудделлом (1901) и исследованная Блонделем (1905), 3) триод, изобретенный Лесом (1907) и 4) мультивибратор, разработанный Абрахамом и Блохом (1917). Дифференциальное уравнение, описывающее такую автоколебательную систему, было предложено Пуанкаре для музыкальной дуги (1908), Джанет для серийной динамо-машины (1919) и Блонделем для триода (1919). Лишь затем, опубликовав в 1926 г. сразу четыре статьи с весьма сходными названием и содержанием [3, 6, 7, 8], ван дер Поль предложил общее безразмерное уравнение: формула (6) в [3], — которое описывает наиболее существенные динамические свойства таких систем:

$$\ddot{\upsilon} - \varepsilon (1 - \upsilon^2)\, \dot{\upsilon} + \upsilon = 0\,. \qquad \mathbf{(1a)}$$

Именно в таком виде оно исследовалось советской школой математиков (см., например, [9]). Позже разные авторы словами «*уравнения ван дер Поля*» стали обозначать и иные близкие уравнения. Так, представители французской школы математиков (например, [10, 11]) предпочитают записывать это уравнение в виде:

$$\varepsilon\, \ddot{x} + (x^2 - 1)\, \dot{x} + x = 0\,. \qquad \mathbf{(1b)}$$

Выражение (**1b**) получают из (**1a**) подстановкой $\varepsilon_{1b} = 1/\varepsilon_{1a}{}^2$ и $t_{1b} = t_{1a}/\varepsilon_{1a}$.

Иные авторы называют словами «*уравнения ван дер Поля*» даже те модификации исходного уравнения, в которые добавлен аддитивный член, описывающий действие вынуждающих сил. Так, в качестве вынуждающей силы добавлен в [10, 11] дополнительный переменный параметр a; а в [12, с. 165] — это $A\cos\varphi$. Существенной модификацией оригинального уравнения стала так называемая МОДЕЛЬ БОНХЁФФЕРА–ВАН ДЕР ПОЛЯ, обсуждению которой посвящён 3 раздел этого обзора.

При выводе уравнения (**1a**) ван дер Поль выполнил два существенных действия, отличающих его работу от работ его предшественников: 1) заменил константу затухания на квадратично зависящий от переменной состояния коэффициент затухания; 2) произвёл обезразмеривание уравнения. Важным считаем также и то обстоятельство, что ван дер Поль предложил (похоже, впервые) использовать безразмерный параметр в качестве УПРАВЛЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА (англ.: control parameter), — тем самым положив как традицию исследования систем при помощи так называемого «МАЛОГО ПАРАМЕТРА» (как варианта управляющего параметра), так и традицию обозначения такого «малого параметра» при помощи греческой литеры ε.

Как указано в [2], попытки ван дер Поля обобщение «*релаксационные колебания*» распространить на все типы колебаний, не являющиеся линейными, были ещё в начале XX века восприняты весьма скептически. Среди французских учёных сомнения высказывали Лиенар (Alfred-Marie Liénard), указавший [13, с. 952] на ошибку в вычислении ван дер Полем периода колебаний, и Рокард (Yves-André Rocard), критиковавший чрезмерное обобщение [14, с. 402] (ориг.: “*very extended generalization*”). В качестве ещё одного недостатка была отмечена размытость приведённого ван дер Полем определения — и, в частности, невозможность установить, следует ли кроме колебаний гармонический и релаксационных рассматривать какие-либо иные типы колебаний, или же дихотомическая классификация, продвигаемая ван дер Полем, является полной.

Тем не менее, как отмечено в исследовании [2], напористость самого Бальтазара ван дер Поля, а также его «ученика» Ле Корбиллера (Philippe Le Corbeiller; впоследствии 7-го мая 1964 г. в Нью-Йорке женившегося на вдове ван дер Поля, — и это обстоятельство в [2] специальным образом отмечено) привели к тому, что термин «РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ» вследствие его активной популяризации получил в Европе широкое признание как наиболее привычный, превратившись в некий концепт без достаточно точного семантического наполнения. Вместе с тем время ничуть не уменьшило значимость тех критических нареканий, какие изначально были высказаны в отношении удачности выбора именно этого термина для обозначения нового класса колебательных процессов.

Авторы указанного ретроспективного исследования [2] делают следующие выводы, с которыми мы склоны согласиться. Ключевым свойством колебаний нового типа, описанных рядом перечисленных выше исследователей, было то, что они существенно отличались от линейных, — что проявляло себя в первую очередь как отклонение от известной формулы Томсона [15] для периода колебательного контура:

$$T = 2\pi \Big/ \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}\ .$$

Такое свойство отметил уже Блондель, а затем и Ван дер Поль. Последний предложил общее название, «релаксационные колебания», однако сколь-нибудь чёткого математического определения для этого нового термина опубликовано им не было. Формулировка, представленная Ван дер Полем: «*Медленная эволюция, сопровождаемая внезапным прыжком*» (в оригинале: "slow evolution followed by a sudden jump"), — недостаточна, чтобы избежать неоднозначной интерпретации. Как следствие такой размытости определения, «релаксационные колебания» стали обнаруживаться во многих самых различных контекстах. Если термин «релаксация» считать оправданным для обозначения некоторого своего рода «разрядного свойства», по аналогии с конденсатором, то некоторые из примеров, представленных ван дер Полем, явно не относятся к этому классу колебаний, иллюстрацией чему может служить движение листьев растений. Вместе с тем следует признать, что так называемое уравнение ван дер Поля — «*в его интересном упрощенном виде*» (ориг.: "in its interesting simplified form") — было, по-видимому, впервые написано и опубликовано ван дер Полем в [3]. И хотя это уравнение не было первым, в котором возможно наблюдать автоколебательные явления, но это первое «*редуцированное уравнение*» в указанном Кюри [16] смысле, поскольку предыдущие уравнения были получены для некоторой конкретной экспериментальной установки: примером таковых являются результаты Пуанкаре, Блондель и Джанет. Следует отметить, что ван дер Поль в 1926 г. ещё не осознавал того обстоятельства, что открытое им физическое явление «релаксационные колебания» соответствует введённому Пуанкаре [17] математическому понятию «ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ», и понял он это [18] лишь уже после вышедшей в 1929 г. публикации А. А. Андронова [19]. Немало энергии было потрачено Ван дер Полем на то, чтобы убедить людей в том, что предложенное им простое уравнение и решения этого уравнения могут служить парадигмой для объяснения самых различных форм поведения; прорыв состоял и в том, что важна динамика сама по себе, а не конкретные физические процессы, лежащие в её основе. С его графическим представлением он также внёс свой вклад в изменение способа исследования нелинейных явлений. В этом отношении установление связи между именем ван дер Поля и этим довольно простым уравнением является одной из возможностей выразить признательность ему.

«*В его интересном упрощенном виде*» уравнение ван дер Поля представляет собой тип моделей, который в [2] обозначен как «прототипное уравнение» (ориг.: "*prototypical equation*"). Позже в российской литературе такого типа уравнения получили название «*концептуальные модели*» [20]. Говоря точнее, оригинальное уравнение является простейшим описанием концепции предельного цикла, и именно это вменяется Бальтазару ван дер Полю в качестве основного достижения [11]: «*Фундаментальный результат состоит в том, что это уравнение имеет периодическое решение, а все остальные решения уравнения* (**1**)*, за исключением решения* $x = 0$*, асимптотически приближаются к периодическому*».

Дополнительно находим необходимым указать на ещё две, практически оставленные без внимания в [2], заслуги ван дер Поля.

Во-первых, он вывел своё уравнение двумя разными способами, притом во втором способе было использовано предположение о том, что провода, соединяющие сетку триода и конденсатор, обладают некоторой собственной индуктивностью — хотя и малой, но существенной для влияния на поведение системы. Позже такие факторы, которые малы по своей величине, однако существенно влияют на свойства модели, стали обозначаться как «*"паразитные" параметры системы*» (см., напр., [21, § 3, с. 745; 22, 23]), и затем эти представления были развиты до вычислительного приёма, получившего название «ГИПОТЕЗА СКАЧКА» [21, с. 76; 23, 24]; из него затем постепенно сложилась современная теория СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ.

Во-вторых, ван дер Поль попытался период колебаний выразить через параметр, записав в 1926 г. $T \approx \varepsilon$ (отметим, что в уравнении (**1a**) этот параметр считается «большим»; однако систему нетрудно преобразовать так, чтобы параметр стал «малым», как в (**1b**) это было проделано), а затем в 1927 г. [25] привел более точную формулу: $T = [3 - 2\ln 2]\,\varepsilon$, — и это можно рассматривать как предтечу метода представления решения системы дифференциальных уравнений в виде АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СТЕПЕНЯМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА (см., например, [9, 23, 26 — 30]). Через 17 лет при помощи уже развитого к тому времени асимптотического метода была получена более точная аппроксимация [31; 32, с. 103]:

$$T = [3 - 2\ln 2]\varepsilon + \frac{12.89}{\varepsilon^{1/3}} + \frac{2}{\varepsilon}\left[-3.31 + \frac{19}{9}\ln\varepsilon\right] - \frac{4}{\varepsilon^{5/3}} + \ldots$$

Позже было показано [33, с. 86] при помощи методов НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА, что наименьшие периоды T_ε периодических решений при $\varepsilon \to +0$ сходятся к числу T_0, представляющему собой ТЕНЬ наименьшего периода такого решения при бесконечно малом $\varepsilon > 0$, причём $T_0 = [3 - \ln 4]$ (отметим, что в этом случае было рассмотрено уравнение (**1b**), т. е. с ε уже в качестве «малого параметра»).

Несмотря на недостатки оригинального определения термина «*релаксационные колебания*», похожим образом подобные феномены определяются и в намного более поздних работах. Например, Е. Ф. Мищенко и соавт. [12, с. 22], определяют релаксационные колебания как такие «*периодические движения*» по замкнутой фазовой траектории, при которых «*сравнительно медленные, плавные изменения фазового состояния чередуются с весьма быстрыми, скачкообразными*». Притом далее указывается [12, с. 28], что «*сингулярно возмущённую систему, допускающую такое периодическое решение, называют релаксационной*».

2. Быстро-медленные системы и разрывные колебания

Как отметил С. М. Рытов [34, с. 6], «*с конца 20-х и начала 30-х годов* (XX века) *началось широкое развитие нелинейной теории колебаний*», — таким образом, можно считать очевидным, что «*широкое развитие нелинейной теории колебаний*» непосредственно последовало за публикациями в 1926 г. статей ван дер Поля и этими публикациями было непосредственно стимулировано. 1-я Международная конференция нелинейных колебаний состоялась с 28 по 30 января 1933 года в Институте Анри Пуанкаре в Париже; организована она была по инициативе голландского физика Бальтазара ван дер Поля и советского математика Н. Д. Папалекси [35]. Первые исследования нелинейных колебаний были связаны в основном с развитием электротехники. Несколько позже, в 1930-х годах, русскими математиками Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [29, 30, 36] стала развиваться теория «нелинейной механики». Ещё позже появились попытки обобщить теорию «нелинейных» и «релаксационных» колебаний на такие области науки, как химия и затем биология. И в этой связи обычно упоминают исследования реакции Белоусова–Жаботинского и теорию АКТИВНЫХ СРЕД и АВТОВОЛНОВЫХ процессов (см. подробнее, например, в [1, 20, 37 — 39]), развиваемую в рамках биофизики главным образом выходцами советской научной школы.

Указывая на важность работ А. А. Андронова его научной школы в развитии нелинейной теории колебаний, Г. С. Горелик писал [40]: «*Для того чтобы понять принципиальное значение первых работ А. А. Андронова по теории колебаний, необходимо иметь в виду, что почти вся "колебательная культура", которой располагали в 1920-х годах физики и инженеры (в том числе и радиоинженеры), была <u>линейной</u> — она была связана с вопросами, <u>решаемыми с помощью принципа суперпозиции и линейных дифференциальных уравнений.</u>* (…) *Между тем процессы генерации колебаний могут быть поняты <u>только с помощью нелинейных дифференциальных уравнений</u>*» (подчёркнуто нами). Анализ литературы привёл нас к выводам, что в советской научной школе предпочтительным считали использование терминов «РАЗРЫВНЫЕ КОЛЕБАНИЯ» (А. А. Андронов и соавт.; например, см. [21, гл. X]) и «БЫСТРО-МЕДЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ» (А. С. Понтрягин и его ученики). Похожий вывод сделан и в [2]: «*В СССР Леонид Мандельштам* [41] *и его студенты Андронов, Хайкин и Витт* [21, 21b] *не приняли в употребление термин "релаксационные колебания", предложенный ван дер Полем. Они предпочитали термин "разрывные движения", используемый Блонделем, в частности потому, что предполагалось эти колебания описывать в терминах медленных и быстрых режимов. Этот подход стал зрелым только в контексте теории сингулярных возмущений, ранние мотивы которой, по словам О'Малли, возникли из работ Пуанкаре в небесной механике, из работ Людвига Прандтля (1875-1953) в механике жидкости и некоторого вклада ван дер Поля*» (перевод с английского выполнен нами). Небезынтересно проследить, как из начальных интуитивных представлений физиков об «*условии скачка*» постепенно формировалась математически аккуратная теория быстро-медленных систем — дискуссию об этом можно найти, например, в [23]. Утверждается [40], что изначально «*условие скачка*» было сформулировано Э. Фридлендером, а также Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси как постулат непрерывности энергии. Дальнейшее развитие теории было первую очередь стимулировано обнаружением в эксперименте необычного поведение мультивибратора в работах середины XX века, основными исполнителями которых являются А. А. Дородницын, Е. Ф. Мищенко, Н. А. Железцов Л. В. Родыгин (см., например, [9, 24, 27, 42]). Разработанная советской научной школой концепция «БЫСТРО-МЕДЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ» позволяет устранить размытость термина «*релаксационные колебания*», семантически связав последний с определённым типом циклического движения фазовой точки в БЫСТРО-МЕДЛЕННОЙ СИСТЕМЕ, как это сделали Е. Ф. Мищенко и соавт. в процитированной выше работе [12].

Вскоре стала очевидной необходимость среди БЫСТРО-МЕДЛЕННЫХ СИСТЕМ чётко различать (см., например, [26, с. 29]) два случая: 1) систему, решение которой непрерывно зависит от параметра ε, называют СИСТЕМОЙ С РЕГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ; 2) в отличие от неё, систему, у которой при вырождении (т. е. при $\varepsilon = 0$) происходит принижение порядка, называют СИСТЕМОЙ С СИНГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ, или СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННОЙ СИСТЕМОЙ. Такое различение хорошо согласуется с предложенной ранее А. А. Андроновым и А. С. Понтрягиным концепцией «ГРУБОСТЬ СИСТЕМЫ» [43, 44] — той самой, которая позже последователями была охарактеризована как «*плодотворная физическая и математическая идея*» [40, с. 455].

Вместе с тем С. Э. Хайкин в [45] указывает и ясно демонстрирует в эксперименте, что «*разрывные*» колебания возникают только в математических моделях, причём в случае излишнего упрощения модели в сравнении с реальной физической системой («*действительно разрывных решений физически не существует*» [45, с. 32]). В указанной работе такие «*разрывные*» колебания обозначаются в кавычках для реальных физических систем — в отличие от *разрывных* колебаний в системах дифференциальных уравнений, которые использованы для редуцированного описания такого типа колебаний. Проблема существования таких «*разрывных*» колебаний обусловлена лишь тем, что для реальной системы выбирается излишне упрощённое её математическое описание. Однако такой выбор в ряде случаев оказывается вполне оправданным практическими особенностями самой решаемой технической задачи.

Таким образом, существуют «*разрывные колебания*» в системах дифференциальных уравнений (а именно в тех местах фазового пространства редуцированной системы, где производная обращается в бесконечность), а не в реальных системах. Тем не менее, поиск корректного решения для математических систем с «*разрывными колебаниями*» представлял значительную проблему, которая была решена лишь в середине 1990-х в работе [12] Е. Ф. Мищенко и соавт.

Интересно замечание С. Э. Хайкина [45, с. 32] о модели ван дер Поля: «*схема мультивибратора с двухсеточной лампой, предложенная Ф. д. Полем (Van der Pohl)* [25]*, если не учитывать действия паразитных самоиндукций, приводит к разрывным колебаниям. Эта же схема, если принять во внимание ёмкость между первой (катодной) сеткой и нитью, даёт, как указал Розенштейн (Roosenstein) (см. у Van der Pohl'я), только непрерывные колебания*». Так что всё определяется лишь точкой математического зрения. Эти два случая как раз и соответствуют выше упомянутым сингулярно-возмущённой и регулярно-возмущённой системам; С. Э. Хайкин указывает [45, с. 32], что в случае сингулярного возмущения «*уравнения, описывающие систему, не допускают непрерывных периодических решений, но допускают разрывные периодические решения, которым не соответствует какой-либо предельный цикл*». Иными словами, согласно позиции советской школы физиков, «РЕЛАКСАЦИОННЫМ КОЛЕБАНИЯМ» соответствует на фазовой плоскости предельный цикл, однако «РАЗРЫВНЫМ КОЛЕБАНИЯМ» на фазовой плоскости какой-либо предельный цикл не соответствует, — и в этом состоит принципиальное математическое различие этих двух разновидностей колебательных движений в быстро-медленных системах (хотя в реальных системах эту разницу обнаружить на практике не удаётся).

Термин «БЫСТРО-МЕДЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ» (далее: БМС) используется в ранних работах биофизиков, занимающихся изучением активных сред [37], а также продолжает ныне использоваться рядом авторов: например, А. И. Нейштадт [46, 47, 48], M. Diener [49], — однако общепризнанным этот термин всё ещё не стал. При этом полезно заметить, что в перечисленных работах не удалось найти аккуратного определения для термина «*разрывные колебания*»; возможно, следует думать, что авторы придерживаются того же понимание, которое в [45] предложил С. Э. Хайкин.

Естественным продолжением исследований БМС стали релаксационные колебания В СРЕДЕ С ДИФФУЗИЕЙ (см, к примеру, [12, Глава 2]). Значительную роль в исследовании «релаксационных колебаний» сыграла развитая советскими биофизиками теория «АВТОВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ» (см., к примеру, в [1, 20, 37, 38, 39, 50] и список литературы там), тесно связанная и исследованием параболических систем дифференциальных уравнений.

В исследовании таких распределенных быстро-медленных систем большую роль сыграли работы по изучению концептуальных моделей, и в первую очередь модифицированного «*уравнения ван дер Поля*» — так называемая МОДЕЛЬ БОНХЁФФЕРА–ВАН ДЕР ПОЛЯ [51]. Следует отметить, что название «МОДЕЛЬ ФИТЦХЬЮ–НАГУМО» (далее: ФХН) стало более распространённым обозначением этой модели и её вариаций; такое переобозначение было исторически обусловлено тем обстоятельством, что её исследования проводились в рамках биофизических задач, т.е. в той области науки, где более известны имена ФитцХью и Нагумо.

Её более детальному обсуждению посвящён следующий раздел.

3. Модель Бонхёффера—ван дер Поля

Напомним [52, с. 260–262], что систему дифференциальных уравнений, которая разрешена относительно старших производных всех входящих в неё функций, называют КАНОНИЧЕСКОЙ; частным случаем канонической системы является одно уравнение, разрешённое относительно старшей производной. Её возможно заменить системой, состоящей из уравнений 1-го порядка, разрешённых относительно входящих в систему производных от искомых функций, — НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ Коши.

Таким образом, модель ван дер Поля (**1**) изначально была записана в КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ.

Модель, предложенную в статье Ричарда ФитцХью 1961 года [51], удобно рассматривать как классический пример исследования концептуальных моделей быстро-медленных систем. При помощи общепринятого преобразования Лиенара [13]:

$$y = \dot{x}/c + x^3/3 - x$$

ФитцХью переписал модель ван дер Поля (**1**) в её НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c(y + x - x^3/3), \\ \dot{y} &= -x/c, \end{aligned} \qquad (\mathbf{2})$$

где $x \equiv \upsilon$. Отметим, что здесь и в [51] эта БМС записана, в соответствии с более поздней классификацией Винфри [53], в ФОРМАТЕ 1 (см. ниже), где [1] $\varepsilon \equiv 1/c$. В таком виде её называют СИСТЕМОЙ ВАН ДЕР ПОЛЯ [12, стр. 19].

Далее, путём добавления новых членов, Р. ФитцХью получает в НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую он обозначил как «МОДЕЛЬ БОНХЁФФЕРА—ВАН ДЕР ПОЛЯ» (в оригинале [51]: “the Bonhoeffer-van der Pol model (BVP for short)”):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c(y + x - x^3/3 + z). \\ \dot{y} &= -(x - a + by)/c \end{aligned} \qquad (\mathbf{3})$$

Для краткости будем, подобно Р. ФитцХью, указывать её далее как БВП, переобозначив при этом $x = u$ и $y = v$ для совместимости с упомянутыми уже выше форматами в стиле Винфри. Тогда в ФОРМАТЕ 4 её можно переписать как

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{u} &= v + u - u^3/3 + z \\ \dot{v} &= bv - u + a. \end{aligned} \qquad (\mathbf{4})$$

В КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ она должна быть записана как

$$\varepsilon\ddot{u} + (u^2 - 1)\dot{u} + u - bv - a = 0. \qquad (\mathbf{5})$$

Следует отметить, что система (**4**) в общем случае системой Лиенара не является, — в отличие от исходной системы (**2**). Точно так же уравнение (**5**) уже не является уравнением Лиенара — в отличие от исходного уравнения ван дер Поля (**1a**). Поэтому, в отличие от систем Лиенара, в системе БВП появляется несколько новых решений, в дополнение к устойчивому предельному циклу. Напомним, что для систем Лиенара [13] существует лишь единственное решение — устойчивый предельный цикл около начала координат, если система удовлетворяет трём критериям теоремы Лиенара.

Уравнение Лиенара записывают в как

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0\,, \tag{6}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — две гладкие функции в пространстве R^3, причём $f(x)$ — чётная и $g(x)$ — нечётная. Очевидно, что для случая гармонического осциллятора в уравнении Лиенара (**6**) имеем:

$$f(x) \equiv 0 \quad \text{и} \quad g(x) = \omega^2 x\,.$$

Для случая модели ВДП в уравнении Лиенара (**6**) имеем:

$$f(x) = -\varepsilon(1 - x^2) \quad \text{и} \quad g(x) = x\,.$$

Если в формуле (**5**) параметры a и b приравнять 0, то получаем нарушение 1-го типа условия грубости по Андронову — уравнение БВП вырождается в уравнение ВДП. В случае же, когда ε становится равным 0, возникнет нарушение 2-го типа условия грубости по Андронову, т.е. сингулярное возмущение.

При рассмотрении аналогичной системы БВП (**4**) проблема сингулярного возмущения не устраняется, даже если систему переписать в формате 0 — т. е. формальное устранение проблемы сингулярного возмущения не даёт никаких практических выгод (см. об этом, к примеру, в [12, стр. 15]).

Следует также отметить, что у разных авторов можно встретить несколько различающиеся формы записи правых частей в нормальной форме записи модели, которые весьма отличаются от оригинала, причём такие авторы обозначают употреблённые ими варианты правых частей как «*модель ФитцХью–Нагумо*», ссылаясь притом на статью Р. ФитцХью [51]. Такая небрежность затрудняет читателю понимание новизны и значимости результатов и ведёт к ощутимому запутыванию исследований модели БВП.

Естественным продолжением исследований БМС стали релаксационные колебания в среде с диффузией (см, к примеру, [12, Глава 2]); и даже была исторически сформирована специальная подобласть, обозначенная как «автоволновые процессы». Интерес исследователей в этой новой области был привлечён, естественным образом, прежде всего снова к моделям концептуальным, — т.е. к модели БВП в её вариантах (в научной литературе уже традиционно обозначаемых часто как «*модель ФитцХью–Нагумо*»).

К началу 1990-х годов таких исследований БМС в среде с диффузией уже накопилось количество достаточное для того, чтобы сделать эту новую для того времени область науки весьма запутанной, — и потому возникла объективная необходимость в упорядочивании накопленных научных наблюдений.

В 1991 г. А. Винфри [53] провёл анализ и обобщение нотаций таких систем в разных публикациях; он выделил четыре формата записи БМС:

ФОРМАТ 0:

$$\frac{\partial u}{\partial\, {}^{0}t} = f(u,v) + D\frac{\partial^2 u}{\partial\, {}^{0}x^2}, \qquad \textbf{(7.0a)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\, {}^{0}t} = {}^{0}\varepsilon\, g(u,v) + \delta D\frac{\partial^2 v}{\partial\, {}^{0}x^2}; \qquad \textbf{(7.0b)}$$

ФОРМАТ 1:

$$\frac{\partial u}{\partial\, {}^{1}t} = f(u,v)/{}^{1}\varepsilon + D\frac{\partial^2 u}{\partial\, {}^{1}x^2}, \qquad \textbf{(7.1a)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\, {}^{1}t} = {}^{1}\varepsilon\, g(u,v) + \delta D\frac{\partial^2 v}{\partial\, {}^{1}x^2}; \qquad \textbf{(7.1b)}$$

ФОРМАТ 2:

$$\frac{\partial u}{\partial\, {}^{2}t} = f(u,v)/{}^{2}\varepsilon + D\frac{\partial^2 u}{\partial\, {}^{2}x^2}, \qquad \textbf{(7.2a)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\, {}^{2}t} = g(u,v) + \delta D\frac{\partial^2 v}{\partial\, {}^{2}x^2}; \qquad \textbf{(7.2b)}$$

ФОРМАТ 3:

$$\frac{\partial u}{\partial\, {}^{3}t} = f(u,v)/{}^{3}\varepsilon + {}^{3}\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial\, {}^{3}x^2}, \qquad \textbf{(7.3a)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\, {}^{3}t} = g(u,v) + \delta\, {}^{3}\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial\, {}^{3}x^2}, \qquad \textbf{(7.3b)}$$

где $x \in R^2$ и t измеряются в «условных единицах» соответственно пространства и времени, для определённости; переменная «активатор» (ориг.: “*propagator*”) u обычно представляет собой либо электрический потенциал, либо химическую концентрацию, либо температуру; D — это коэффициент диффузии, измеряемый в (у. е. пространства)^2 / (у. е. времени); и переменная «восстановления» (ориг.: “*recovery*”) v соответствует либо вероятности нахождения ионных каналов в открытом состоянии, либо некоторой локальной концентрации, распространяющейся со скоростью δD. Для электрофизиологических задач обычно принято $\delta = 0$ — «однодиффузионный» случай (ориг.: “*the "single-diffusion" case*”). Для задач горения или изотермической химической реакции $\delta = O(1)$; при $\delta = 1$ получается «равнодиффузный» случай (ориг.: “*the "equal-diffusion" case*”).

Таблица 1

		в формат 0	**в формат 1**	**в формат 2**	**в формат 3**
из формата 0	${}^{0}\varepsilon$ ${}^{0}x$ ${}^{0}t$	$=$	${}^{1}\varepsilon^{2}$ ${}^{1}\varepsilon^{-1/2}\ {}^{1}x$ ${}^{1}\varepsilon^{-1}\ {}^{1}t$	${}^{2}\varepsilon$ ${}^{2}\varepsilon^{-1/2}\ {}^{2}x$ ${}^{2}\varepsilon^{-1}\ {}^{2}t$	${}^{3}\varepsilon$ ${}^{3}\varepsilon^{-1}\ {}^{3}x\,D^{1/2}$ ${}^{3}\varepsilon^{-1}\ {}^{3}t$
из формата 1	${}^{1}\varepsilon$ ${}^{1}x$ ${}^{1}t$	${}^{0}\varepsilon^{1/2}$ ${}^{0}\varepsilon^{1/4}\ {}^{0}x$ ${}^{0}\varepsilon^{1/2}\ {}^{0}t$	$=$	${}^{2}\varepsilon^{1/2}$ ${}^{2}\varepsilon^{-1/4}\ {}^{2}x$ ${}^{2}\varepsilon^{-1/2}\ {}^{2}t$	${}^{3}\varepsilon^{1/2}$ ${}^{3}\varepsilon^{-3/4}\ {}^{3}x\,D^{1/2}$ ${}^{3}\varepsilon^{-1/2}\ {}^{3}t$
из формата 2	${}^{2}\varepsilon$ ${}^{2}x$ ${}^{2}t$	${}^{0}\varepsilon$ ${}^{0}\varepsilon^{1/2}\ {}^{0}x$ ${}^{0}\varepsilon\ {}^{0}t$	${}^{1}\varepsilon^{2}$ ${}^{1}\varepsilon^{1/2}\ {}^{1}x$ ${}^{1}\varepsilon\ {}^{1}t$	$=$	${}^{3}\varepsilon$ ${}^{3}\varepsilon^{-1/2}\ {}^{3}x\,D^{1/2}$ ${}^{3}t$
из формата 3	${}^{3}\varepsilon$ ${}^{3}x$ ${}^{3}t$	${}^{0}\varepsilon$ ${}^{0}\varepsilon\ {}^{0}x\,D^{-1/2}$ ${}^{0}\varepsilon\ {}^{0}t$	${}^{1}\varepsilon^{2}$ ${}^{1}\varepsilon^{2/3}\ {}^{1}x\,D^{-1/2}$ ${}^{1}\varepsilon\ {}^{1}t$	${}^{2}\varepsilon$ ${}^{2}\varepsilon^{1/2}\ {}^{2}x\,D^{-1/2}$ ${}^{2}t$	$=$

В таблице 1, на основе скорректированной таблицы из [53, с. 305], приведены правила замены переменных ${}^{i}\varepsilon$, ${}^{i}x$, ${}^{i}t$ для перехода между форматами $i = 0 \cdots 3$ уравнений (7.*). Для приведения уравнений из формата i к формату j следует подставить выражение из ячейки: строка = i столбец = j, — вместо соответствующих символов в левом краю таблицы (это и означает «из» «к»). Полезно помнить, что все коэффициенты ${}^{i}\varepsilon$ тождественно равны, кроме коэффициента ${}^{1}\varepsilon$ из-за его появления дважды в ФОРМАТЕ 1. В ФОРМАТЕ 3 не используется D, и по этой причине D появляется в формуле перехода.

Отметим, что в советской и затем российской научной школе более привычным является такой формат записи БМС, когда ε стоит перед производными «быстрой» части системы (обозначим его как ФОРМАТ 4):

$$ {}^{4}\varepsilon \frac{\partial u}{\partial\, {}^{4}t} = f(u,v) + D \frac{\partial^2 u}{\partial\, {}^{4}x^2}, \qquad (7.4a)$$

$$ \frac{\partial v}{\partial\, {}^{4}t} = g(u,v) + \frac{\delta D}{{}^{4}\varepsilon} \frac{\partial^2 v}{\partial\, {}^{4}x^2}. \qquad (7.4b)$$

В ФОРМАТ 4 удобнее всего переходить из ФОРМАТА 0 при помощи стандартной подстановки, как это сделано, к примеру, в [12, с. 15]:

$$^{0}t = {}^{4}t/{}^{4}\varepsilon, \qquad {}^{0}\varepsilon = {}^{4}\varepsilon, \qquad {}^{0}x = {}^{4}x. \tag{8}$$

В литературе указывается [54, с. 26], что первое наблюдение спиральных волн химической активности, как экспериментальное подтверждение существования такого типа релаксационных колебаний в среде с диффузией, принадлежит именно А. Винфри в 1972 г.

Тогда же, в начале 1970-х, были обнаружены [55] и некие особенные бифуркационные явления, которые позднее стали описываться под названиями «*задержка потери устойчивости*», «*решения-утки*» и «*бифуркационная память*». Подробное обсуждение «*бифуркационной памяти*» выходит далеко за рамки этого обзора, однако отметим здесь бегло несколько событий.

Явления задержки и памяти в системе БВП (ФХН) были в 1989 г. опубликованы Т. Эрню и соавт. [56, 57], причём указывалось на сходство с явлениями «*задержки потери устойчивости*», которые примерно в то же время исследовал А. И. Нейштадт [46, 47, 48]. Для возмущённого уравнения ВДП такие феномены описаны в [10]. Исследования сингулярно-возмущенных систем привели в конце 1970-х к выявлению «*решений-уток*» и развитию теории, поучившей название «НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ» [11, 33, 58, 59, 60, 61]. Для ФХН «*решения-утки*» продолжают изучаться и в более поздних работах [62]. Прямую связь между «*решениями-утками*» и «*задержкой потери устойчивости*» усматривали в [63] Е. А. Щепакина и соавт.; сходного мнения придерживался М. И. Фейгин [64, 65]. См. также [12, Глава 4].

Следует признать, что ещё в 1961 г. [51] ФитцХью описал явления, которые весьма похожи на «*решения-утки*»: некоторая часть фазовых траекторий движется вдоль сепаратрисы. Возможно, те результаты 1961 г. и следует считать наиболее ранними наблюдениями «*бифуркационной памяти*». ФитцХью их обозначает словами «*квазипороговые феномены*», подчёркивая тем самым то обстоятельство, что полученные в его имитационных экспериментах результаты существенно отличались от тех, которые наблюдались в экспериментальных работах по физиологии возбудимых тканей и которые были обозначены физиологами как «*пороговый эффект*» или ответ про принципу «*всё или ничего*». Отметим, что ФитцХью часть своих имитационных экспериментов выполнил на аналоговых ЭВМ, а иную часть — на цифровых ЭВМ; ФитцХью высказал предположение [51], что такие «*квазипороговые явления*» были обусловлены несовершенством ЭВМ.

Наблюдения явлений «*бифуркационной памяти*» в распределённых системах, насколько нам известно, ограничены лишь двумя исследованиями: в модели миокарда для 2D-задачи [39, 66, 67] и в модели системы свёртывания крови для 1D-задачи [68, 69]. Но в общем можно сказать, что этот вопрос находится ещё только в самом начале изучения.

4. К вопросу о классификации колебаний

Актуальна ли необходимость развивать теорию колебаний?

Можно обозначить несколько различных проблем, указывающих на невозможность применения классической теории колебаний к биологическим системам. На это указывал ещё Ю. С. Колесов [70], а позже А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, В. А. Садовничий [12, 71]; эти авторы предлагали выделять три уровня сложности систем: простые физические, сложные физические и биологические системы, — причём отмечалось, что в большинстве случаев недопустима редукция более сложных систем к более простым. В частности, проблема вызвана тем обстоятельством, что математические модели «*настолько сложны, что единственный способ определения динамических свойств модели — это использование численного интегрирования*» [54, с. 74], а верный выбор методов численного интегрирования требует понимания уровня сложности исследуемой системы, её особенностей. Так, к примеру, численные методы исследования регулярно-возмущённых систем обычно оказываются неверными при выборе их для исследования сингулярно-возмущённых систем. Для выбора корректного способа численной аппроксимации решения требуется, в частности, учитывать, соблюдено ли так называемое «*условие нормального переключения*» [12, с. 44–48]. В работах же биофизиков, исследовавших автоволновые процессы во 2-й половине XX века и в начале XXI века, эта особенность игнорировалась, — и потому следует ожидать, что далеко не все результаты исследований, полученные при излишней биофизической редукции, являются верными результатами.

Подобная проблема выбора адекватной вычислительной схемы наблюдается даже в существенно более простых системах. Например, в смежной области распространения колебаний в упругой сплошной среде [72]. Основная часть энергии от колеблющегося источника излучается в продольную и поперечную компоненты поля упругих волн. Однако наличие свободной поверхности приводит к перестройке волнового поля и смещению основной части энергии в коротковолновую область поверхностных волн Рэлея. Использование стандартных конечноэлементных методов расчета с учетом масштабов продольных и поперечных волн в среде приводит к полной потере коротковолновой составляющей с существенной ошибкой в оценке амплитуды колебаний в среде в сторону ее уменьшения, что приводит к крайне негативным последствиям в задачах экологического прогноза [73].

Другой проблемой является сложная организация циклических процессов в биологических системах — и этим обусловлена неприменимость для них методов и выводов, заимствованных из классической теории колебаний, которая была развита для простых физических систем. Как пример можно привести работу М. Е. Мазурова [74], оспаривающую некоторые классические результаты теории автоволновых процессов, согласно которым в системе автоколебательных элементов якобы всегда должен устанавливаться ритм самого высокочастотного элемента системы.

Кроме того, отмечается, что «*тщательные измерения любой физиологической переменной никогда не дают временной последовательности, которая была бы абсолютно стационарной или периодической. Даже системы, которые считаются стационарными или периодическими, всегда дают флуктуации вокруг некоторого фиксированного уровня или периода колебаний*» [54, с. 15]. Кроме того, колебания могут быть не только циклическими, но иметь и более сложный ритм. Это привело к возникновению в биологии направления исследований различных механизмов возникновения ритма, т.е. ритмогенеза. Смена режима, в т. ч. и хаотическая, может приводить к достаточно сложным ритмам, — таким, которые являются колебаниями, однако весьма мало похожи на те, что рассматриваются традиционно в рамках в классической теории колебаний (см., например, [54, с. 74–79]).

Поэтому требуется пересмотр и развитие положений классической теории колебаний и вывод её на новый, современный уровень.

Прежде чем перейти к рассмотрению вариантов современной классификации колебаний, полезно обсудить содержание самого этого базового понятия. Приведём ряд определений «*колебания*» из классической теории колебаний.

В лекциях самого начала 1930-х годов, Л. И Мандельштам [34, с. 11] сетовал: «*Совсем нелегко дать определение того, что составляет предмет теории колебаний*», — этим замечанием и ограничившись. Столь же малосодержательное определение дал и другой классик теории колебаний Р. Е. Бишоп (R. E. D. Bishop) [75, § 1.3, с. 18]: «*…в основном, колебания есть просто "движения в одну и другую сторону"*». Несколько более точное определение можно найти у С. Э. Хайкина [76, с. 394]: «*общий признак всех колебательных движений состоит в том, что они представляют собой движения, многократно повторяющиеся или приблизительно повторяющиеся через определённые промежутки времени*». И. В. Савельев [77, с. 221] даёт похожее определение: «*Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости.* (...) *на колебательных процессах основана вся радиотехника*».

Явным недостатком приведённых выше примеров определений является отсутствие приемлемой точности, поскольку неясным остаётся, что именно повторяется и в каком порядке. Едва ли намного лучше стало положение с осмыслением предмета и ныне. В этом смысле для классической книги Андронова и соавторов «Теория колебаний» [21], учитывая всё разнообразие рассматриваемых в ней в рамках столь широкого определения процессов, более подходящим названием можно считать «Книга перемен» (по аналогии с известным древним классическим произведением китайской литературы [78], в котором, похоже, впервые в истории человечества была предпринята попытка при помощи точных методов анализа в наиболее обобщённой форме исследовать циклические явления в системах самой различной природы, а также заложены основы двоичной системы исчисления).

Таким образом, к концу второго десятилетия XXI века сложилась ситуация, когда теорией колебаний занимаются уже полтора столетия, но до сих пор не удалось предложить достаточно полноценное определение самому понятию «колебания». Мы сейчас хотим попробовать восполнить этот пробел.

Поскольку нам не удалось найти в литературе сколь-нибудь точного и аккуратного определения для понятий «колебания», «колебательный процесс», то в результате тщательного анализа известной нам научной литературы мы пришли к выводу, что в наиболее общем виде «колебания» удобно определить через такие понятия, как «марковский процесс», «марковская цепь», в их применении к понятию «ЦИКЛ». Последнее у Е. С. Вентцеля [79, с. 227] описывается так: «*Марковский случайный процесс, протекающий в системе, называется циклическим, если состояния связаны между собой в кольцо (цикл) с односторонними переходами*». Теорию циклических марковских случайных процессов как часть теории очередей следует рассматривать как значительный прогресс в развитии теории колебаний. Заимствуя оттуда понятие «ЦИКЛИЧЕСКИЙ МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС», предлагаем следующее определение:

Определение 1. Колебаниями, или колебательными процессами, будем называть такие процессы (в т. ч. и такие сигналы), которые возможно описать при помощи паттернов (шаблонов) состояний, в которых состояния связаны между собой в кольцо (цикл) с односторонними переходами.

Отметим, что для регулярных непериодических процессов вместо понятия «одно колебание» уже давно стало традиционным использование понятия «один цикл» (к примеру «*один сердечный цикл*»). Цикл принято рассматривать как состоящий из нескольких ФАЗ — т.е. участков процесса (ПАТТЕРНОВ), более или менее надёжно идентифицируемых как идентичные и повторяющиеся из цикла в цикл с некоторой регулярностью. С позиций нового определения удобным оказывается обобщённое описание всевозможных циклических процессов (колебаний) при помощи ПЕРЕХОДНЫХ МАТРИЦ. Для этого все состояния переходной матрицы должны быть СООБЩАЮЩИМИСЯ; бесконечный колебательный процесс получается в том случае, если марковская цепь НЕПРИВОДИМА; в ином случае колебательный процесс может прерваться на некоторой своей фазе — и процесс попадёт в иной КЛАСС ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ (см. также [80, с. 52–66]). Под «состоянием» в смысле теории колебаний здесь следует понимать «фазу» колебательного процесса, т.е. некоторый надёжно идентифицируемый элемент колебательного паттерна. В связи со смысловой перегруженностью в разных отраслях науки таких терминов, как «фаза» и «состояние», требуется дополнительное обсуждение их взаимоотношений в рамках современной теории колебаний, выходящее за рамки этого обзора.

С учётом сложности биологических систем, следует различать процессы с сохранением определённого порядка следования повторяющихся фаз цикла, — и процессы, в которых фазы цикла повторяются как совокупность. К примеру, суточному циклу в биологических системах также свойственна повторяемость, однако в общем случае последовательность фаз из цикла в цикл может несколько меняться. Ещё следует отметить, что такие переходные матрицы формально могут описывать не только стохастический процесс, но и процесс детерминированный. Как пример можем привести из кардиологии хорошо известное нарушение ритма сердца, называемое «ритмом Венкебаха» (см., например, [81, с. 16–17]): выпадает каждый n-й цикл ритма, т.е. это процесс детерминированный и хорошо предсказуемый, однако формально переходную матрицу возможно заполнить величинами эмпирических вероятностей («частотами встречаемости» событий). Поэтому в смысле развиваемой теории колебаний важно учитывать дополнительные критерии, которые позволят надёжно различать колебательные процессы стохастические, хаотические и детерминированные, — описываемые одинаковыми переходными матрицами.

Ещё оно важное замечание состоит в том, что сама по себе «переходная матрица» в её «классическом» виде — т. е. в таком, где в её ячейках указаны вероятности, — для детальной классификации колебательных процессов является недостаточным основанием, а лишь даёт достаточное основание для причисления наблюдаемого процесса к «колебательному». Для примера снова приведём анализ ритма сердца. Известно, что нормальный ритм сердца состоит из одних и тех же фаз, однако могут в достаточно широких пределах варьировать длительности фаз; причём эти вариации длительностей ритма сердца имеют важное диагностическое и прогностическое значение ([82]). Иными словами, для всякого условно нормального ритма переходные матрицы будут идентичными, — и потребуются некие дополнительные «матрицы учёта длительностей» для более точной диагностики колебательного процесса сердечной деятельности.

Рассмотрим теперь ряд примеров, чтобы продемонстрировать удобство и универсальность такой техники описания колебательных процессов, а также для их классификации.

Основной интерес для науки представляют воспроизводимые события. Поэтому не должно быть удивительным то обстоятельство, что среди процессов в первую очередь внимание было привлечено процессами строго ПЕРИОДИЧЕСКИМИ — как наиболее хорошо воспроизводимым потоком событий. Далее менее воспроизводимые события: РЕГУЛЯРНЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ. За ними интерес был привлёён к НЕРЕГУЛЯРНЫМ ЦИКЛИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ. Под первыми понимаются те, в которых все фазы воспроизводятся из цикла в цикл в одной и той же их последовательности; для второго отдельные фазы могут выпадать или меняться местами. Вместе с тем в широком смысле к колебаниям относятся и процессы абсолютно нерегулярные — такие, к примеру, как пуассоновский процесс, — и они составляют огромную непознанную и плохо моделируемую группу процессов, которые в литературе обозначают как «СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ». Между случайными и строго регулярными колебательными процессами оказалась группа, которую с конца 1980-х годов стало принято обозначать как ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ (см., например [54, с. 17]); и сюда относят колебательные процессы, которые выглядят как случайный колебательный процесс, однако при более тщательном исследовании в них удаётся выявить некоторую скрытую регулярность («ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС»).

В простейшем случае, когда для марковского процесса все ячейки диагонали переходной матрицы, ближайшей к её главной диагонали, заполнены единицами, получается детерминированный процесс с регулярной последовательностью фаз; и если притом ещё и длительность каждой фазы во времени оказывается постоянной, то получается ПЕРИОДИЧЕСКИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС из классической теории колебаний.

Если же длительности фаз описанного выше марковского процесса несколько разнятся, то получаем РЕГУЛЯРНЫЙ ЦИКЛИЧЕСКИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС, наподобие тех, которые обычно и наблюдаются в биологических системах, — к примеру, при нормальной работе сердца.

Далее можно сконструировать такую переходную матрицу, в которой некоторые (в том числе и каждая) последующие фазы наступают лишь с некоторой отличной от единицы вероятностью, — и в результате получится тоже колебательный процесс, но ещё менее регулярный; такие процессы в биологических системах наблюдаются ещё более часто, — например, в циркадных ритмах. Иными словами, таким способом мы можем сконструировать НЕРЕГУЛЯРНЫЙ ЦИКЛИЧЕСКИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС. Конечно же, и в этом случае могут также колебаться в каких-то пределах и длительности каждой фазы такого процесса, и за счёт этого нерегулярность процесса, т.е. его хаотичность, ещё более увеличивается.

Можно предположить, что в случаях ещё менее регулярных колебаний в цикле переходной матрицы 1) количество фаз значительно увеличивается, притом 2) вероятность каждой из них становится достаточно малой и 3) длительности каждой фазы начинают варьировать в широком диапазоне значений. В таких колебательных процессах цикличность уже выявить на практике оказывается весьма сложно, и потому обычно такие процессы обозначают уже не как циклические, а как РИТМИЧЕСКИЕ — притом нередко с весьма сложным ритмом.

Ещё менее регулярные колебательные процессы — ХАОТИЧЕСКИЕ: в этом случае повторяемость фаз процесса продолжает наблюдаться, однако последовательность их появления оказывается трудно предсказать.

Соответственно, в практике использования математического моделирования колебательных процессов разных классов, из выше предложенной классификации, можно ожидать, что некоторые из таких процессов окажется достаточно легко описать при помощи системы дифференциальных уравнений, как это изначально было принято в классической теории колебаний. Примеры успешного использования дифференциальных уравнения хорошо известны для описания и строго периодических систем, и систем с хаотическим поведением.

В иных же случаях — в более сложных, но и более распространённых в природе — можно предположить, что аппарат дифференциальных уравнений может оказаться принципиально неприемлемым для описания колебательного процесса; в таких случаях подумать следует об иных вариантах построения математических моделей. К примеру, может удачным оказаться аппарат агентного моделирования, который был развит сравнительно недавно.

Следующая проблема современной теории колебаний состоит в выяснении логической связи между понятиями «ЛИНЕЙНОСТЬ» и «СУПЕРПОЗИЦИЯ». В классической теории колебаний понятия «*линейность системы*» и «*принцип суперпозиции*» были семантически тесно связанными; более того, именно линейность фундаментальной теории в классической физике следует считать причиной возникновения в ней ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ. Приведём несколько цитат из классических работ.

Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский утверждали: «*Свойство линейности дифференциальных операторов, интерпретируемое как принцип суперпозиции колебаний, факт перехода гармонических функций времени при применении этих операторов в гармонические же функции с той же частотой позволили сводить исследование влияния произвольных приложенных сил на линейную колебательную систему к исследованию влияния сил простейшего типа, гармонически зависящих от времени. Тем самым выработался "спектральный" подход к колебательным процессам, получивший громадное значение и вне теории колебаний в собственном смысле*» [29, с. 7]. «*Ещё раз подчеркнём, что из-за нелинейности нарушается принцип суперпозиции, и отдельные гармоники колебаний вступают во взаимодействие между собой, вследствие чего делается невозможным индивидуальное рассмотрение поведения каждого гармонического слагающего колебаний в отдельности*» [29, с. 13]. Аналогично у Р. Е. Бишопа находим: «*любая регулярно повторяющаяся кривая может быть получена путем наложения (суперпозиции) подходящего набора синусоидальных кривых*» и притом «*обратный процесс (нахождения синусоидальных составляющих данной сложной периодической кривой) называют гармоническим анализом*» [75, § 1.3].

Согласно определению научной школы А. А. Андронова, нелинейными называют такие дифференциальные уравнения, «*коэффициенты которых зависят от координат и скоростей*» [21, с. 24].

Колебания периодические, КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ, НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ и АПЕРИОДИЧЕСКИЕ различались уже в начале XX века [21] как варианты линейных колебаний. Некоторыми авторами используется также термин «*антипериодические колебания*» [83, 84] (под таковыми принято понимать такие, когда при любом значении аргумента τ имеем, что $f(t+\tau) = -f(t)$). Используется и понятие «*колебаний, достаточно близких к линейным*», под которыми Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский [29, с. 9] предложили понимать такие «*колебания, для которых соответствующие дифференциальные уравнения хотя и являются нелинейными, содержат некоторый параметр ε, входящий в эти уравнения так, что при нулевом значении в они вырождаются в линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*». Следует ли отождествлять понятия «*колебаний, достаточно близких к линейным*» и «*квазипериодических колебаний*», остаётся неясным, хотя из общих соображений представляется очевидным, что периодическими — а значит и квазипериодическими! — могут быть также и колебания нелинейные. Поэтому «*колебания, достаточно близкие к линейным*» было бы верно называть «КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИМИ», как мы покажем чуть ниже.

Считается общеизвестным [85] то обстоятельство, что, как установил в 1822 году Фурье, любое периодическое колебание может быть представлено как сумма гармонических колебаний путём разложения соответствующей функции в ряд Фурье; среди слагаемых этой суммы существует гармоническое колебание с наименьшей частотой, которая называется основной частотой, а само это колебание — первой гармоникой или основным тоном, частоты же всех остальных слагаемых, гармонических колебаний, кратны основной частоте, и эти колебания называются высшими гармониками или обертонами — первым, вторым и т.д. Однако, например, если поляризуемость или намагниченность среды нелинейно зависят от приложенного поля, это приводит к нелинейным поправкам в уравнениях Максвелла, и прямым следствием этого является нарушение принципа суперпозиции в такой нелинейной среде. Так, например, два луча света, распространяющиеся в нелинейной среде, могут изменять траекторию друг друга. Более того, даже один луч света в нелинейной среде может воздействовать сам на себя и изменять свои характеристики. Многочисленные эффекты такого типа изучает НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА.

Так следует ли НЕЛИНЕЙНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ называть все те колебания, для которых не выполняется принцип суперпозиции?

Согласно научной школе А. А. Андронова [21, с. 28], «*провести строгое разделение реальных физических систем на "линейные" и "нелинейные", их разделение оп числу свобод и т.д. невозможно.* (...) *Реальные физические системы* (...) *вообще не могут быть описаны совершенно точно при помощи математических соотношений*». Таким образом, приведённые выше определения линейности следует относить не к реальным физическим системам, а лишь к способу их математического описания. Недостаточность математического описания выявляется одним из двух способов [21, с. 15–16]: либо «*можно считать расхождение теории и опыта бесспорным доказательством недостаточности*», либо «*из сопоставления результатов двух различных теорий, одна из которых развита с использованием данной идеализации, а другая — без этой идеализации*». Замечание, сформулированное

Л. И Мандельштамом [21, с. 10], также выглядит весьма красноречивым: «*"линеаризирование" всегда искусственно, редко бывает полезным, большей частью вообще ничему не научает, а иногда и прямо вредно. И действительно в литературе известны ошибочные утверждения, вошедшие даже в учебники, обусловленные таким незаконным линеаризированием*»; и «*нелинейность принципиальна*» [21, с. 28].

В более современных источниках (например, [86, с. 26–28]) общее решение для линейных систем принято сразу записывать «*как линейную комбинацию*», т.е. в виде формулы СУПЕРПОЗИЦИИ:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j x^j(t)\,. \qquad (\mathbf{9})$$

Примечательно, что в более общем случае для нелинейных систем общее решение возможно представить аналогичной формулой, если в выражении (**9**) сменить базис ДЕКОМПОЗИЦИИ на собственные функции соответствующей нелинейной системы — на функции негармонические, естественно.

Дальнейшее развитие теории подсказало, что нелинейные (и даже непериодические) процессы также возможно описывать при помощи ДЕКОМПОЗИЦИИ по некоторому ортогональному базису, отличному от гармонического базиса классического разложения Фурье, — так были сформулированы основные принципы обобщённого спектрально-аналитического метода (ОСАМ) [87, 88, 89]. Иными словами, современная теория допускает возможность применять «*принцип суперпозиции*» и для тех систем, которые традиционно считаются нелинейными в смысле их разложения по гармоническому базису, — однако при выборе иного подходящего базиса спектрального представления процесса.

Восстановление исходной функции (сигнала, процесса) из полученных компонентов разложения предлагаем называть РЕКОМПОЗИЦИЕЙ нелинейного процесса (чтобы чётко различать эту процедуру с понятием «*суперпозиция*», используемым для процессов линейных). Отметим, что некоторые исследователи (например, [90, 91]) предпочитают для нелинейных процессов использовать неустоявшийся термин «*гиперпозиция*».

Заключение

Развитие методов РЕКОМПОЗИЦИИ нелинейных процессов — в рамках обобщённого спектрального анализа, — наверное, и следует рассматривать как естественное продолжение методов гармонического анализа прошлого века, а также и как неотъемлемую часть современной теории колебаний. Ещё одной важной задачей современной теории колебаний следует признать развитие классификации колебательных процессов на основе теории марковских цепей.

Список литературы

1. Москаленко А. В., Тетуев Р. К., Махортых С. А. История становления математической физики сердца в России // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. **2018**. №. 61. 32 с. DOI: 10.20948/prepr-2018-61 URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-61

2. Ginoux J.-M. and Letellier Ch.Van der Pol and the history of relaxation oscillations: Toward the emergence of a concept // Chaos. **2012**. V. 22, P. 023120 DOI: 10.1063/1.3670008

3. Van der Pol. On „relaxation-oscillations“ // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical magazine and Journal of Science. **1926**. V. 2. № 11. P 978–992. 10.1080/14786442608564127

4. Ginoux J.-M. History of Nonlinear Oscillations Theory in France (1880-1940). New York: Springer. **2017**. 402 p. DOI: 10.1007/978-3-319-55239-2.

5. Философская Энциклопедия. В 5-х т. / Под ред. Ф. В. Константинова. М.: Советская энциклопедия. **1960**–**1970**.

6. Van der Pol B. Over „Relaxatie-trillingen” // Tijdschrift van het Nederlandsch Radiogenootschap. **1926**. № 3. 3. 25–40.

7. Van der Pol B. Über „Relaxationsschwingungen” // Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie. **1926**. V. 28. P. 178–184.

8. Van der Pol B. Over Relaxatietrillingen // Physica. **1926**. V. 6. P. 154-157.

9. Дородницын А. А. Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля // Прикладн.матем. и мех. **1947**. Т. 11. № 3. С. 313–328.

10. Fruchard A. and Schäfke R. Exceptional Complex Solutions of the Forced van der Pol Equation. // Funkcialaj Ekvacioj. **1999**. V. 42. P. 201–223. URL: fe.math.kobe-u.ac.jp/FE/FullPapers/vol42/fe42-2-3.pdf

11. Картье П. Сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений и нестандартный анализ // УМН, **1984**. Т. 39. № 2(236). С. 57–76. URL: http://mi.mathnet.ru/umn2267

12. Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, **1995**. 336 с. ISBN 5-02-015129-7.

13. Liénard A. Étude des oscillations entretenues // Revue Générale de l'Électricité. **1928**. V. 23, P. 901–912, 946–954.

14. Rocard Y., Sur certains types nouveaux d’oscillations mécaniques // Livre jubilaire de M. Brillouin. **1935**. Paris: Gauthier-Villars. P. 400–408.

15. Thomson W. On transient electric currents // Philosophical magazine. **1853**. V. 6. № 5. P. 393–405.

16. Curie P. Équations réduites pour le calcul des mouvements amortis // La Lumière Électrique. **1891**. V. xli. № 31. P. 201–209.

17. Poincaré H. Sur les courbes définies par une équation différentielle // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. **1886**. V. 4. № 2. P. 151–217. (Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ГИТТЛ, **1947**.)

18. Van der Pol. Oscillations sinusoïdales et de relaxation // Onde Électrique. **1930**. № 9. P. 245–256 & 293–312.

19. Andronov A. A. Les cycles limities de Poincaré et théorie des oscillations auto-entretenues // Comptes-Rendus de l'Académie des Sci. **1929**. V. 189. P. 559–561.

20. Алиев Р. Р. Концептуальные и детальные математические модели электрической активности миокарда: дис. … док. физ.-мат. наук: 03.00.02. — Пущино, 2007. — 215 с.

21. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний / 2-е изд., перераб. и испр. М.: Наука, **1981**. 918 с.

21b. Andronow, A. A.; Chaikin, C. E. Theory Of Oscillations. Princeton University Press. **1949**. 381 p. URL: http://archive.org.

22. Петров Ю. П. Очерки истории теории управления. СПб.: БХВ-Петербург. **2012**. 272 с. ISBN 9785977500364

23. Мищенко Е. Ф. Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Известия АН СССР, серия математическая. **1957**. Т. 21. № 5. С. 627–654.

24. Железцов Н. А., Родыгин Л. В. К теории симметричного мультивибратора // ДАН СССР, серия математическая. **1951**. Т. 81. № 3, С. 391–394.

25. Van der Pol. Über „Relaxationsschwingungen II" // Jahrbuch der drahtlosen Telegraphic und Telephonie. **1927**. V. 29. P. 114–118.

26. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, **1973**. 272 с.

27. Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Известия АН СССР, серия математическая. **1957**. Т. 21. № 5. С. 605–626.

28. Мищенко Е. Ф. Асимптотическая теория релаксационных колебаний, описываемых системами второго порядка // Матем. сб. **1958**. Т. 44(86). № 4 С. 457–480. URL: http://mi.mathnet.ru/msb4953.

29. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / 2-е изд. М.: Наука, **1974**. 410 с.

30. Ginoux J.-M. The Krylov-Bogolyubov method: Towards a nonlinear mechanics // History of Nonlinear Oscillations Theory in France (1880–1940). Springer, **2017**. P 291–304. DOI: 10.1007/978-3-319-55239-2_11

31. Haag J. Étude asymptotique des oscillations de relaxation // Annales de l'École Normale Supérieure. **1943**. V. 3. № 60, P. 35–64, 65–111 and 289 (errata).

32. Haag J. Exemples concrets d'études asymptotiques d'oscillations de relaxation // Annales de l'École Normale Supérieure, **1944**. V. 3. № 61. P. 73–117 (errata).

33. Звонкин А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН, **1984**. Т. 39. № 2(236) . С. 77–127.
URL: http://www.mathnet.ru/rm2266

34. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука. **1972**. 470 с.

35. Ginoux J.-M. The first “lost” International Conference on Nonlinear Oscillations (I.C.N.O.) // International Journal of Bifurcation and Chaos. **2012**. V. 22. № 4. DOI: 10.1142/S0218127412500976

36. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. 1937.

37. Автоволновые процессы в системах с диффузией / Сборник научных трудов. Горький: Институт прикладной физики АН СССР. **1981**.

38. Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е. Математическая биофизика клетки. М.: Наука. **1978**. 308 с.

39. Елькин Ю. Е., Москаленко А. В. Глава «Базовые механизмы аритмий сердца» (с. 45–74) В кн.: Клиническая аритмология. Под ред. проф. А. В. Ардашева. М.: ИД Медпрактика-М, **2009**, 1200 с. ISBN 978-5-98803-198-7

40. Горелик Г. С. Памяти А. А. Андронова // УФН. **1953**. Т. 49. С. 449–468.

41. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Витт А. А., Горелик Г. С., Хайкин С. Э. Новые исследования нелинейных колебаний. М.: Радиоиздат. **1936**. 96 с.

42. Мищенко Е. Ф. и Понтрягин Л. С. Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным // ДАН СССР, серия математическая. **1955**. Т. 102. № 5. С. 889–891.

43. Андронов А. А. Понтрягин Л. С. Грубые системы // ДАН СССР. **1937**. Т. 14. № 5. С. 247–250.

44. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, **1961**. 388 с.

45. Хайкин С. Э. Непрерывные и «разрывные» колебания. // Журнал прикл. физики. **1930**. Т. VII. № 6. С. 21–43.

46. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. I // Дифференциальные уравнения. **1987**. Т. 23. № 12. С. 2060–2067.

47. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II // Дифференциальные уравнения. **1988**. Т. 24. № 2. С. 226–233.

48. Neishtadt A. On stability loss delay for dynamical bifurcations // Discrete and continuous dynamical systems, Series S. **2009**. V. 2. № 4. P. 897–909.

49. Diener M. The canard unchained or how fast/slow dynamical systems bifurcate // The Mathematical Intelligencer. **1984**. V. 6. P. 38–48.

50. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, **2010**. 400 с. URL: http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_26774.

51. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. **1961**. V. 1. P. 445–466.

52. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, **1961**. 436 с.

53. Winfree A. T. Varieties of spiral wave behavior: An experimentalist's approach to the theory of excitable media // Chaos. **1991**. V. 1. № 3. P. 303–334.

54. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни. Пер. с англ. М.: Мир, **1991**. 248 с. ISBN 5-03-001834-4

55. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // ДАН СССР. **1973**. Т. 209. № 3. С. 576–579.

56. Baer S. M., Erneux T. and Rinzel J. The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects and resonance // SIAM J. Appl. Math., **1989**. V. 49. № 1. P. 55–71. URL: http://www.jstor.org/stable/2102057

57. Mandel P., Erneux T. The slow passage through a steady bifurcation: delay and memory effects // J. Statist. Phys. **1987**. V. 48. P. 1059–1070.

58. Callot J. L., Diener M., Diener F. (1978).

59. Benoît E., Callot J. L., Diener F., Diener M. Chasse au canard // Collect. Math. **1981**. V. 31. № 1–3. P. 37–119.

60. Shchepakina E. Black swans and canards in self-ignition problem // Nonlinear Analysis: Real World Application. **2003**. V. 4. P. 45–50.

61. Shchepakina E., Sobolev V. Black swans and canards in laser and combustion models // Singular perturbation and hysteresis. / Eds. Mortell M. P., O'Malley R. E., Pokrovskii Al., Sobolev V. SIAM, **2005**. 360 c. ISBN 9780898715972

62. Ginoux J.-M. & Llibre J. Canards Existence in FitzHugh-Nagumo and Hodgkin-Huxley Neuronal Models // Mathematical Problems in Engineering. V. **2015**. Article ID 342010. 17 pages. DOI: 10.1155/2015/342010

63. Голодова Е. С., Щепакина Е. А. Оценка затягивания потери устойчивости в дифференциальных системах с траекториями-утками // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. **2013**. №. 3. С. 12–24.

64. Feigin, M. & Kagan, M. Emergencies as a manifestation of effect of bifurcation memory in controlled unstable systems // International Journal of Bifurcation and Chaos. **2004**. V. 14. № 7. P. 2439–2447. DOI: 10.1142/S0218127404010746.

65. Фейгин М. И. О двукратных проявлениях эффекта бифуркационной памяти в динамических системах // Вестник научно-технического развития. **2008**. Т. 3. № 7. С. 21–25.

66. Елькин Ю. Е., Москаленко А. В., Стармер Ч. Ф. Спонтанная остановка дрейфа спиральной волны в однородной возбудимой среде // Математическая биология и биоинформатика. **2007**. Т. 2. № 1. С. 73–81.

67. Moskalenko A.V., Elkin Yu. E. The lacet: a new type of the spiral wave behavior // Chaos, Solitons and Fractals. **2009**. V. 40. № 1. P. 426–431. DOI: 10.1016/j.chaos.2007.07.081.

68. Zarnitsina V. I., Ataullakhanova F. I., Lobanov A. I., Morozova O. L. Dynamics of spatially nonuniform patterning in the model of blood coagulation // Chaos. **2001** V. 11, № 1. P. 57–70. DOI: 10.1063/1.1345728.

69. Атауллаханов Ф. И., Лобанова Е. С., Морозова О. Л., Шноль Э. Э., Ермакова Е. А., Бутылин А. А., Заикин А. Н. Сложные режимы распространения возбуждения и самоорганизации в модели свертывания крови // УФН. **2007**. Т. 177. № 1. С. 87–104. DOI: 10.3367/UFNr.0177.200701d.0087.

70. Колесов Ю. С. Проблема адекватности экологических уравнений. Ярославль, 1985. Деп. ВИНИТИ, **1985**. № 1901-85. 160 с.

71. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Многоликий хаос. М.: Физматлит, **2012**. 432 с. ISBN 978-5-9221-1423-3

72. Kostarev S. A., Makhortykh S. A., Rybak S. A. Calculations of ground vibrations induced by underground sources: analytical and numerical approaches. — In Noise and vibration from high-speed trains. London, Thomas Telford Publishing, **2001**. P. 397–422.

73. Костарев С. А., Махортых С. А., Рыбак С. А. Свод правил «Оценка вибрации при проектировании, строительстве и эксплуатации объектов метрополитена». СП 23-105-2004. Госстрой России, М.: **2004**. 66 с.

74. Мазуров М. Е. К проблеме формирования единого ритма в синоатриальном узле сердца // Биофизика. **2009**. Т. 54. № 1. С. 81–88.

75. Бишоп Р. Е. Колебания. М.: Наука. **1968**. 144 с.

76. Хайкин С. Э. Механика. Общий курс физики, том 1, издание второе, доп. и перераб. Москва-Ленинград. ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы. **1947**. 574 с.

77. Савельев И. В. Курс общей физики, том 1. Механика, колебания и волны, молекулярная физика. М.: Наука, **1970**. 511 с.

78. Щуцкий Ю. К. Китайская классическая «Книга перемен» / 2-е изд. исп. и доп., под ред. А. И. Кобзева. М.: «Восточная литература».**1993**. 629 с. ISBN: 5-02-017385-1

79. Вентцель Е. С. Исследование операций. М.: Сов. радио. **1972**. 552 с.

80. Карлин С. Основы теории случайных процессов. Пер. с англ. М.: Мир, **1971**. 537 с.

81. Аритмия сердца. В 3 томах, том 1. / под ред. В. Дж. Мандела. / перевод с англ. — М.: Медицина, **1996**; —512 с.

82. Рябыкина Г. В., Соболев А. В. Вариабельность ритма сердца. М.: Стар'Ко, **1998**. 135 с.

83. Колесов А. Ю. Структура окрестности однородного цикла в среде с диффузией // Изв. АН СССР. Сер. матем. **1989**. Т. 53, №. 2, С.345–362. URL: mi.mathnet.ru/izv1244

84. Троицкая А. В., Сазонов В. В. Периодические решения дифференциального уравнения второго порядка с большим параметром // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. **2018**. № 71. 16 с. DOI: 10.20948/prepr-2018-71

85. Элементарный учебник физики / Под ред. Г.С. Ландсберга. — 13-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, **2003**. — Т. 3. Колебания и волны. Оптика. Атомная и ядерная физика.

86. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, **2002**. 560 стр. ISBN 5-93972-200-8

87. Дедус Ф. Ф., Махортых С. А., Устинин М. Н., Дедус А. Ф. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. М.: Машиностроение, **1999**, 356 с.

88. Dedus A. F., Dedus F. F., Makhortykh S. A., Ustinin M. N. Analytical description of multidimensional signals for solving problems of pattern recognition and image analysis. // Pattern recognition and image analysis. **1993**. V. 3. № 4. P. 459–469.

89. Тетуев Р. К., Москаленко А. В., Алёшин С. А., Махортых С. А. Перспективы использования языка SpecML для математического моделирования в задачах кардиофизики. // Доклады Международной конференции Математическая биология и биоинформатика. Т. 7. ИМПБ РАН Пущино, **2018**. DOI: 10.17537/icmbb18.22.

90. Мартынюк А. Н. Тестопригодная декомпозиция автоматных моделей // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. **2008**. Т. 14. № 6 (33). С. 142–145.

91. Федосов Б. Т. О построении систем ортогональных функций. URL: model.exponenta.ru/bt/bt_127_Ort_Fnct.htm (дата обращения: 14.04.2019).

Оглавление