



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 49 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Тихонов Д.А., Медвинский А.Б.

О корреляции временных рядов в экологии аквасистем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Тихонов Д.А., Медвинский А.Б. О корреляции временных рядов в экологии аквасистем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 49. 17 с. doi:[10.20948/prepr-2019-49](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-49)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-49>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Д.А. Тихонов, А.Б. Медвинский

**О корреляции временных рядов
в экологии аквасистем**

Москва— 2019

Д.А. Тихонов, А.Б. Медвинский

О корреляции временных рядов в экологии аквасистем

Аннотация: Предложен способ оценки взаимного влияния коротких временных рядов, основанный на обобщении понятия спектральной энтропии в применении к спектрам кросскорреляционных функций. Приведены алгоритмы расчета и программы. Проведен анализ временных рядов измерений обилия планктона в аквасистеме озер республики Беларусь с целью выявления взаимных корреляций. Выявлены корреляции обилия бактериопланктона и сезонной температуры. Проанализированы особенности корреляции обилия зоопланктона и фитопланктона с температурой в зависимости от водоема.

Ключевые слова: временные ряды, корреляции, спектральная энтропия, планктон, экология

Dmitrii Anatol'evich Tikhonov, Alexander Berel'evich Medvinsky

On the correlation of time series in ecology of aquatic systems

Abstract: A method for estimating the mutual influence of short time series, which is based on extension of the concept of spectral entropy to the spectra of cross-correlation functions is developed. Algorithms of calculations and programs are given. The time series of plankton abundance in the lake ecosystem, which is situated in the Republic of Belarus, are analyzed in order to identify mutual correlations. Correlations between the bacterioplankton abundance and variations in seasonal temperature are identified. The peculiarities of interrelations between the abundances of zooplankton/phytoplankton and temperature depending on the reservoir are analysed.

Key words: time series, correlations, spectral entropy, plankton, ecology

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (грант № 17-04-00048)

Оглавление

1	Введение	3
2	Источник данных	3
3	Алгоритм обработки	4
4	Расчет спектра корреляций	6
5	Результаты расчетов	7
6	Заключение.	15
	Библиографический список	16

1. Введение

Математическое моделирование является важной частью исследования биосферы планеты. Нелинейные математические модели позволяют воспроизводить как регулярные, так и нерегулярные колебания популяционного обилия и предлагать механизмы, ответственные за формирование пространственно-временных структур [1, 2, 3]. Однако ахиллесовой пятой математического моделирования во многих случаях является довольно слабая связь математических моделей с результатами полевых исследований. Это обстоятельство часто обуславливается недостаточным объёмом данных, получаемых в ходе трудоёмких полевых наблюдений (мониторинга). Результаты мониторинга, характеризующие колебания популяционного обилия во времени, могут быть представлены в виде временных рядов. Необходимость работы с короткими временными рядами, характерными для многих полевых исследований, порождает необходимость использования специфических методов анализа временных рядов [4, 5]. Такие методы, учитывающие нелинейную природу динамики популяций, позволяют даже для сравнительно коротких временных рядов оценивать предсказуемость этой динамики, степень её хаотичности и пр.

В данной работе мы проводим анализ данных, полученных в ходе мониторинга экосистемы Нарочанских озёр. Нарочанские озёра располагаются в северо-западной Белоруссии и представляют собой систему трёх связанных между собой короткими протоками водоёмов:

оз. Баторино, оз. Мястро и оз. Нарочь, которое, в свою очередь, подразделяется на Большой плёс и Малый плёс. Мониторинг проводился сотрудниками Белорусского государственного университета. Полученные в ходе мониторинга временные ряды приведены в работах [6, 7]. Адекватность оценки предсказуемости нерегулярной динамики планктонных популяций и степени синхронизации этой динамики с вариациями температуры, проведенных в указанных работах на основании результатов мониторинга, в значительной мере зависят от объёма и качества данных, полученных в ходе полевых наблюдений. Поэтому использование методов оценки характера взаимосвязи динамики популяций планктона и связи этой динамики с вариациями температуры, отличных от методов, применявшихся в указанных выше работах, представляется оправданным. Целью настоящей работы является установление корреляций между спектрами мощности, характеризующими динамику популяций фитопланктона, зоопланктона, бактериопланктона и сезонные колебания температуры в озёрах Нарочанской группы.

2. Источник данных

Анализируемые в данной работе результаты мониторинга экосистемы Нарочанских озёр базируются на накопленных в ходе двадцатилетних измерений

обилия планктона, которые проводились ежегодно с мая по октябрь. При этом одному месяцу соответствует одна точка временного ряда. Необходимо отметить однако, что по различным причинам в некоторые месяцы измерения не проводились, из-за чего результаты мониторинга содержат пропуски. В ходе предварительной обработки эти пропуски заполнялись средними величинами, характерными для пропущенного месяца, исходя из данных по другим годам. Временные ряды, полученные в ходе измерений обилия фитопланктона, зоопланктона, бактериопланктона и температуры, не вполне согласованы по времени, поэтому временные ряды содержат разное число точек. А именно, температурный временной ряд состоит из 120 точек, временной ряд зоопланктона — из 102 точек, временной ряд фитопланктона — из 126 точек, а временной ряд бактериопланктона — из 120 точек. Мы унифицировали все временные ряды, дополнив нулями недостающие значения так, чтобы длина каждого временного ряда составляла 126 точек. Мы отдаем себе отчет в том, что такая унификация может вносить погрешности при исследовании фазовых сдвигов. Нас, однако, интересуют взаимные корреляции временных рядов, при анализе которых сдвиг фазы усредняется; по этой причине унификация длин временных рядов не оказывает существенного влияния на результаты такого анализа. Во всех временных рядах удалялся линейный тренд. Кроме того, все временные ряды были приведены к нулевому среднему и к единичной дисперсии:

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i = 0,$$

$$\langle (x)^2 \rangle = 1.$$

На рисунке 1 приведен окончательный вид временных рядов планктона и температуры. Из рисунка видно, что временной ряд температуры выделится среди прочих своим периодическим поведением. Колебания обилия планктона отличаются нерегулярностью, сочетающейся со слабо выраженной периодичностью. Наша задача состоит в том, чтобы выявить характер периодичности и определить степень взаимного влияния вариаций температуры и планктонных осцилляций.

3. Алгоритм обработки

Для анализа взаимной сопряженности временных рядов мы используем нормированные спектры взаимных корреляций двух сигналов, который определим следующей формулой:

$$f_{xy}(\omega) = \lambda |\hat{x}(\omega) \hat{y}(\omega)|, \quad (1)$$

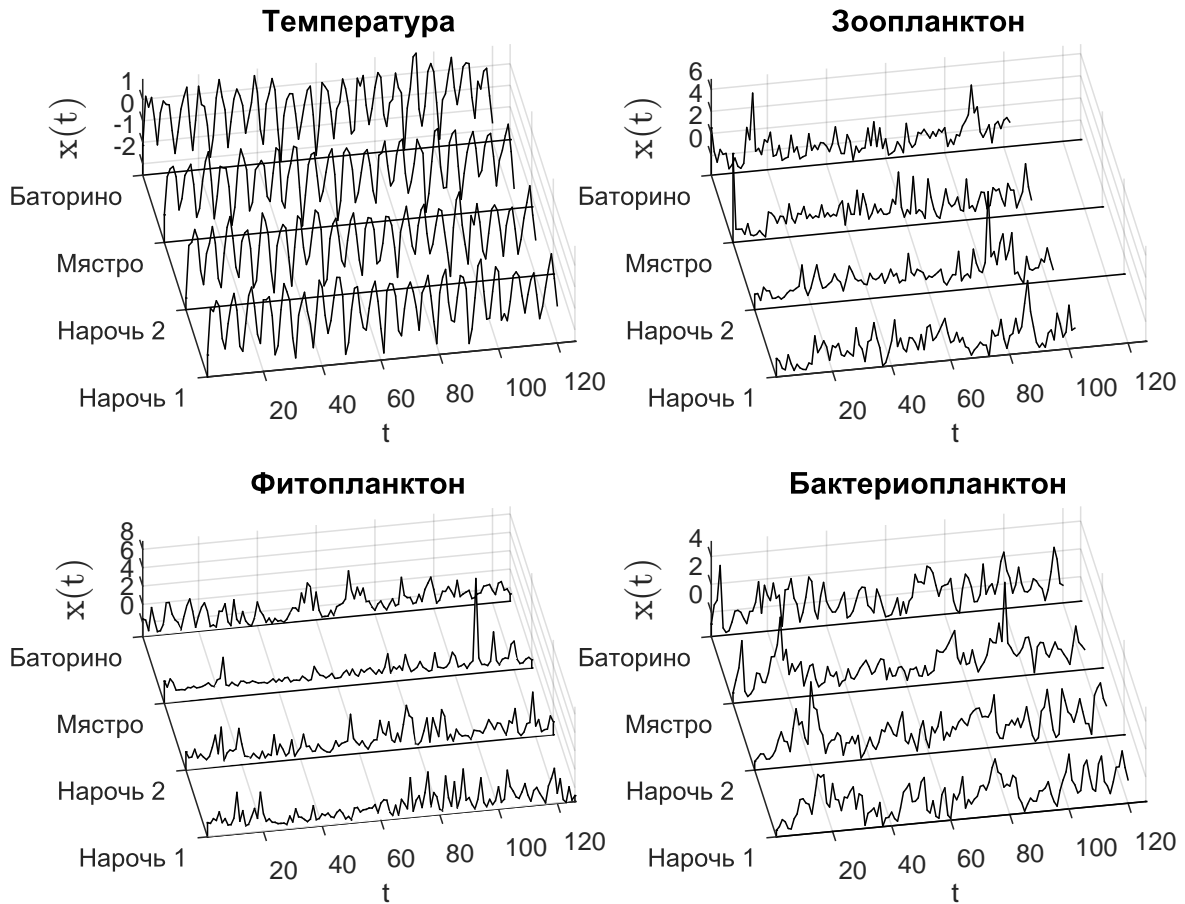


Рис. 1. Временные ряды, иллюстрирующие колебания обилия планктона различной природы и вариации температуры воды в каждом из водоёмов, входящих в систему Нарочанских озёр. Нарочь 1 – Малый плёс оз. Нарочь, Нарочь 2 – Большой плёс оз. Нарочь. Один шаг по времени соответствует одному месяцу.

где x , y — два временных ряда, \hat{x} , \hat{y} — фурье-преобразования рядов, λ — нормировочная константа, которая выбирается из условия:

$$\int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} f_{xy}(\omega) d\omega = 1.$$

где ω_{min} ω_{max} — верхняя и нижняя границы спектров. В соответствии с теоремой Найквиста границы спектров заданы, поскольку задан временной шаг и число отсчетов временных рядов.

В диагональном случае $f_{xx}(\omega)$ является нормированным спектром автокорреляционной функции для временного ряда x или нормированным спектром мощности $|\hat{x}(\omega)|^2$ сигнала x .

Вычисления проводились в среде Matlab [8]. Matlab является проприетарным программным обеспечением. Для наших целей можно воспользоваться бесплатным клоном Octave [9]. Программы для вычисления

нормированного спектра корреляций двух векторов приведены в следующей части.

4. Расчет спектра корреляций

Для расчета спектра корреляций мы воспользуемся встроенной в Matlab программой дискретного преобразования Фурье $\hat{x} = \text{fft}(x, n)$, которая преобразует вектор x в вектор \hat{x} по формуле [10]:

$$\hat{x}_k = \sum_{l=1}^n x_l \exp[-2\pi i(k-1)(l-1)], \quad k = 1, \dots, n.$$

Вычисление спектра корреляций выполняется следующей программой:

```

1 function f = fftspec(x,y,n)
2 x = [ x(:) ; zeros(n-numel(x),1) ]; % add zeros to complete series
3 y = [ y(:) ; zeros(n-numel(y),1) ];
4 x = fft( [ zeros(n,1); x ] );
5 y = fft( [ y; zeros(n,1) ] );
6 f = abs( x .* conj(y) );
7 f = f(1:n);
8 f = f / sum(f); % normalization of spectra
9 end

```

Программа принимает на вход два вектора x и y и параметр n , который определяет разрешение спектра корреляций. Длины векторов могут различны, но каждая из них должна быть меньше или равна n . Максимальное значение частоты спектра определяется временным промежутком между отсчетами (мы полагаем его равным 1), при этом максимальной частотой полагаем величину π . Таким образом, значения частоты ω — это n точек, равномерно распределенных в интервале от 0 до π . Matlab оператор $w = \text{linspace}(0, \pi, n)$; определяет вектор частот ω .

В случае, когда вектора x и y совпадают, программа существенно упрощается:

```

1 function f = xautospec(x,n)
2 x = [ x(:) ; zeros(n-numel(x),1) ]; % add zeros to complete series
3 f = abs( fft(x,2*n) ) .^2;
4 f = f(1:n);
5 f = f / sum(f); % normalization of spectra
6 end

```

Данная программа вычисляет нормированный спектр мощности вектора x с частотным разрешением в n точек спектра.

Существует альтернативный способ вычисления спектра корреляций, который основан на непосредственном вычислении кросскорреляционной

функции с последующим ее фурье - преобразованием. В системе Matlab существует встроенная программа для вычисления кросскорреляционной функции C для двух произвольных векторов A и B $C = \text{xcorr}(A,B)$. Пусть N — максимальная длина вектора, тогда кросскорреляционная функция вычисляется по следующим формулам [10]:

$$C(m) = R_{AB}(m - N), m = 1, \dots, 2N - 1$$

$$R_{AB}(m) = \sum_{k=0}^{N-m-1} A(k+m)B^*(k), m \geq 0$$

$$R_{AB}(m) = R_{AB}^*(-m), m \leq 0$$

. Программа расчетов спектров кросскорреляций приведена ниже:

```

1 function f = xcorrspc(x,y,n)
2 x = [ x(:) ; zeros(n-numel(x),1) ]; % add zeros to complete series
3 y = [ y(:) ; zeros(n-numel(y),1) ];
4 [f,lag] = xcorr(x,y); % compute crosscorrelations with lags
5 [n0,n0] = find(lag==0); % find n0 - index of zero lag
6 fp = fft(f(n0:end),2*n); % fft of crosscorrelations with lag ≥ 0
7 fn = fft(flip([f(1:n0-1);0]),2*n); % fft of crosscorrelations with lag < 0
8 f = abs(fp + conj(fn)); % sum with accounting parity
9 f = f(1:n);
10 f = f / sum(f); % normalization of spectra
11 end

```

Аргументом функции кросскорреляции являются лаги m , смещения функций друг относительно друга. Фурье–преобразование проводится с учетом аргумента. В случае когда $A = B$, мы получим симметричную четную автокорреляционную функцию, фурье–образ которой по теореме Хинчина-Колмогорова [11] совпадает со спектром мощности.

Все приведенные в этой части работы программы дают одинаковые результаты на одинаковых наборах данных. В следующей части мы приведем результаты расчетов спектров для временных рядов температуры и обилия планктона.

5. Результаты расчетов

Нами проведены расчеты спектров корреляций при помощи программ, описанных выше. На рисунке 2 приведены спектры автокорреляций колебаний температуры, бактериопланктона, фитопланктона и зоопланктона для всех четырех водоемов. Видно, что температура во всех водоемах имеет хорошо различимый сезонный пик, локализованный в области единичной частоты. Хорошо заметны также пики на удвоенной частоте; они особенно выражены

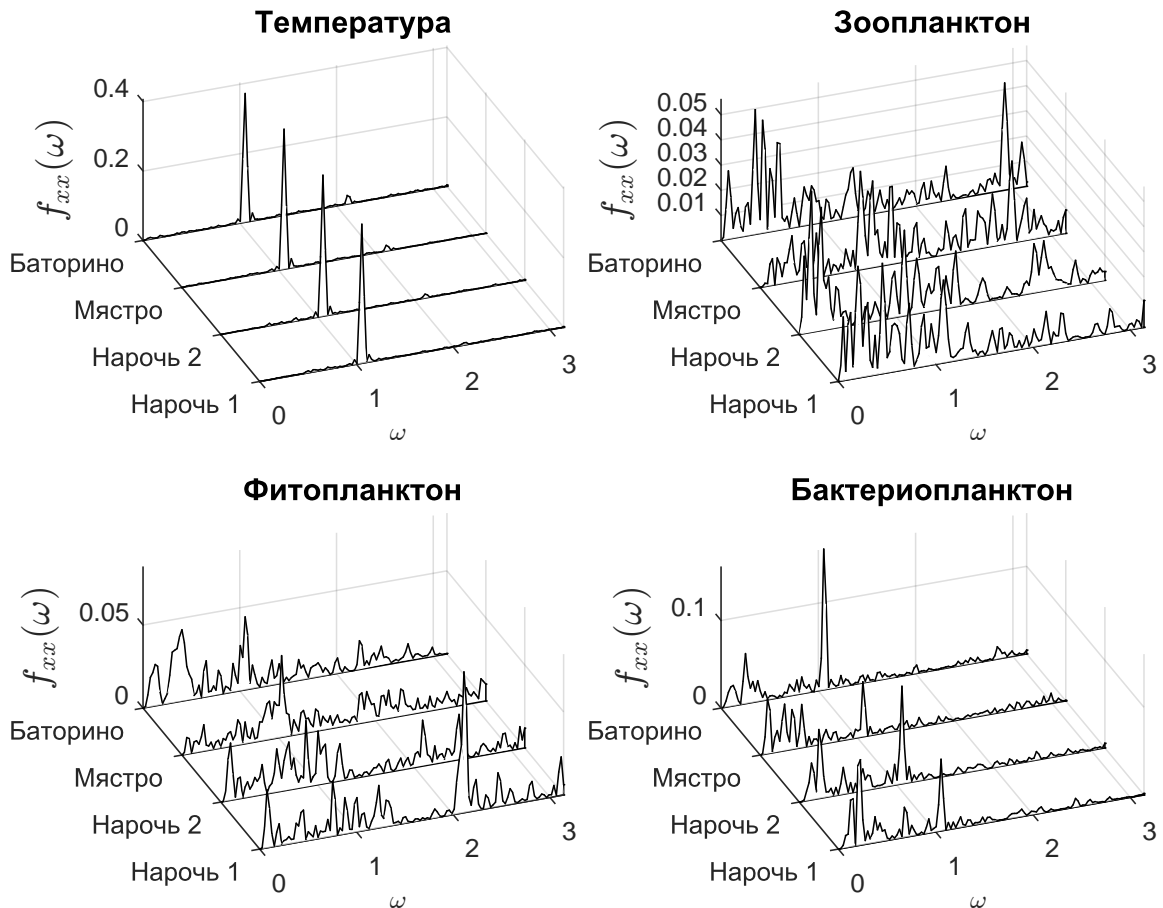


Рис. 2. Спектры автокорреляционных функций (спектры мощности) для временных рядов, представленных на рис. 1. Нарочь 1 – Малый плёс оз. Нарочь, Нарочь 2 – Большой плёс оз. Нарочь. Все спектры нормированы на единицу.

для водоемов Баторино и Мястро. Шум в температурных спектрах почти отсутствует. Второй по отсутствию зашумленности спектр — спектр бактериопланктона. В этом спектре также хорошо выделяются сезонные пики, однако их амплитуда существенно меньше, чем амплитуда пиков в спектрах температуры. Кроме того, в спектрах бактериопланктона наличествуют нерегулярные низкочастотные пики. Пики на частотах выше сезонной сильно подавлены, однако тоже присутствуют. Спектры зоопланктона и фитопланктона выглядят нерегулярными, присутствуют пики на всех частотах. Однако, если анализировать более детально, то следует отметить, что спектр фитопланктона более информативен, чем спектр зоопланктона. Например, в нем можно выделить некоторое сгущение пиков в области сезонной частоты, что особенно заметно для оз. Баторино. Также следует отметить наличие пика, располагающегося немного выше удвоенной сезонной частоты в Малом плёсе оз. Нарочь (Нарочь 1) и в Большом плёсе оз. Нарочь (Нарочь 2). В целом шумовая дорожка в спектрах фитопланктона выше, чем в спектрах бактериопланктона, но существенно меньше, чем в спектре зоопланктона.

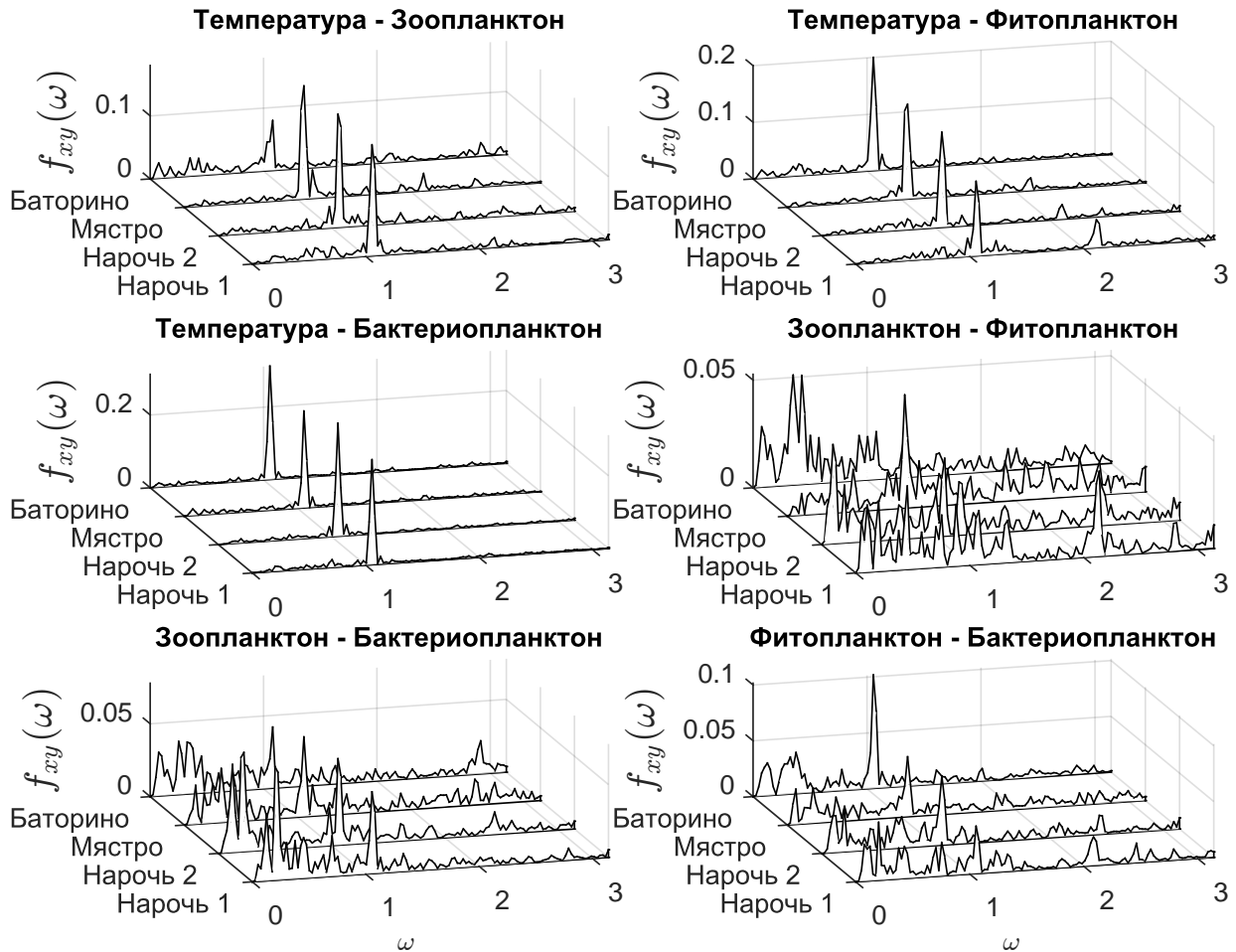


Рис. 3. Спектры взаимных корреляций временных рядов, представленных на рис. 1. Нарочь 1 – Малый плёс оз. Нарочь, Нарочь 2 – Большой плёс оз. Нарочь. Все спектры нормированы на единицу.

На рисунке 3 приведены спектры взаимных корреляций планктонных и температурных временных рядов. Из рисунка видно, что самым "чистым" является спектр корреляций рядов температуры и бактериопланктона; далее, примерно на одном уровне шумности располагаются спектры взаимных корреляций температуры с зоопланктоном и фитопланктоном. При этом спектр взаимных корреляций температуры с фитопланктоном содержит четкий пик в области удвоенной сезонной частоты для водоема Нарочь 1 (т.е. для Малого плёса оз. Нарочь). Следующими по степени шумности являются спектры корреляций бактериопланктона с фито- и зоопланктоном. В этих спектрах сезонные пики выражены слабо. Вместо них наличествуют группы пиков в области сезонной частоты. Высокочастотная дорожка у этих спектров существенно выше. И, наконец, самым шумным спектром является спектр взаимных корреляций зоо- и фитопланктона.

Для количественной оценки степени информативности спектров предлагается ввести оценку энтропии Шеннона. В диагональном случае,

когда спектр является спектром мощности, такой метод хорошо известен. Он получил название спектральной энтропии и широко используется в различных приложениях, таких как: распознавание речи, медицинская энцефалография, механика, климатические исследования. [12, 13, 14, 15]

Для произвольного спектра $f_i, i = 1, \dots, n$ энтропия Шеннона вычисляется по формуле:

$$S = - \sum_{i=1}^n f_i \log(f_i).$$

Численные значения энтропии Шеннона для спектров являются вполне условными величинами (например, они будут зависеть от разрешения спектров n). Спектр, построенный на одинаковых сигналах, но с разным разрешением, будет иметь различные значения энтропии Шеннона. Однако, если все спектры вычисляются с одним и тем же разрешением, то значения энтропии Шеннона для разных спектров можно сравнивать. Величина энтропии Шеннона будет тем больше, чем более нерегулярен спектр.

В диагональном случае спектр корреляции сигналов является спектром мощности или, что то же самое, косинус-фурье-преобразованием от симметричной и четной автокорреляционной функции [11]. В случае спектра мощности спектральная энтропия характеризует "память" автокорреляционной функции сигнала: чем она меньше, тем более регулярной и дальнедействующей является автокорреляционная функция сигнала.

Для двух произвольных сигналов может быть вычислена кросс-корреляционная функция, которая несимметрична в общем случае и может быть получена как обратное фурье-преобразование спектра (1). Обобщение понятия спектральной энтропии для общего случая позволяет нам характеризовать регулярность поведения и "память" кросс-корреляционной функции по величине энтропии Шеннона для спектра (1).

Численные значения энтропии Шеннона, полученные для всех спектров, приведены в таблице 1. Анализ численных данных в таблице полностью подтверждает все визуальные оценки спектров, приведенные выше. В каждом из четырех водоемов самым высокоэнтропийным спектром является спектр корреляций зоопланктона и фитопланктона (ЗФ). Самая большая величина энтропии корреляций, равная 4.565 наблюдается в озере Мястро (М). Однако, даже для этого спектра величина энтропии меньше, чем энтропия спектра случайного сигнала. Случайный сигнал имеет равномерный спектр на всех частотах равный, с учетом нормировки, величине $f = 1/n$. Энтропия Шеннона спектра случайного сигнала:

$$S = -n \left(\frac{1}{n} \log \left(\frac{1}{n} \right) \right) = \log(n).$$

Таблица 1

Энтропия Шеннона для авто- и кросскорреляционных нормированных спектров, приведенных на рис. (2,3). Темп. – температура, Зоопл. – зоопланктон, Фитопл. – фитопланктон, Бактпл. – бактериопланктон. В скобках - краткие обозначения типов корреляций и водоемов.

	Нарочь 1 (Н1)	Нарочь 2 (Н2)	Мястро (М)	Баторино (Б)
Темп. - Темп. (ТТ)	2.291	2.254	2.250	2.519
Бактпл. - Бактпл. (ББ)	3.811	3.940	4.101	3.849
Зоопл. - Зоопл. (ЗЗ)	4.261	4.290	4.398	4.283
Фитопл. - Фитопл. (ФФ)	4.114	4.379	4.540	4.266
Темп. - Бактпл. (ТБ)	3.252	3.134	3.505	3.149
Темп. - Зоопл. (ТЗ)	3.757	3.816	3.719	4.372
Темп. - Фитопл. (ТФ)	4.002	3.793	3.774	3.730
Зоопл. - Фитопл. (ЗФ)	4.361	4.459	4.565	4.362
Бактпл. - Зоопл. (БЗ)	4.106	4.178	4.433	4.393
Бактпл. - Фитопл. (БФ)	4.291	4.310	4.533	4.140

Таким образом, для $n = 126$ энтропия Шеннона $S = 4.836$, что превышает величину энтропии высокоэнтропийных спектров корреляции зоопланктона и фитопланктона.

Степень корреляции сигналов удобно характеризовать величиной разницы Δ между единицей и нормированной энтропией Шеннона $\bar{S} = S/\log(n)$. Разница $0 < \Delta < 1$ будет тем больше, чем сильнее коррелируют сигналы. Далее мы проведем анализ Δ для всех возможных корреляций сигналов.

На рисунке 4 приведены гистограммы величины Δ , характеризующей степень коорреляции сигналов обилия планктона и температуры. На каждой из шести гистограмм показано сравнение величины Δ для кросскорреляций и автокорреляций сигналов во всех четырех водоемах. Каждая гистограмма соответствует одной паре опорных сигналов. Например, гистограмма на рис. 4.а отражает корреляции бактериопланктона с температурой. Видно, что величина кросскорреляции температура-бактериопланктон (ТБ) лежит примерно посередине между величинами автокорреляции низкоэнтропийного сигнала (ТТ) и высокоэнтропийного (ББ) для всех водоемов. Далее идут

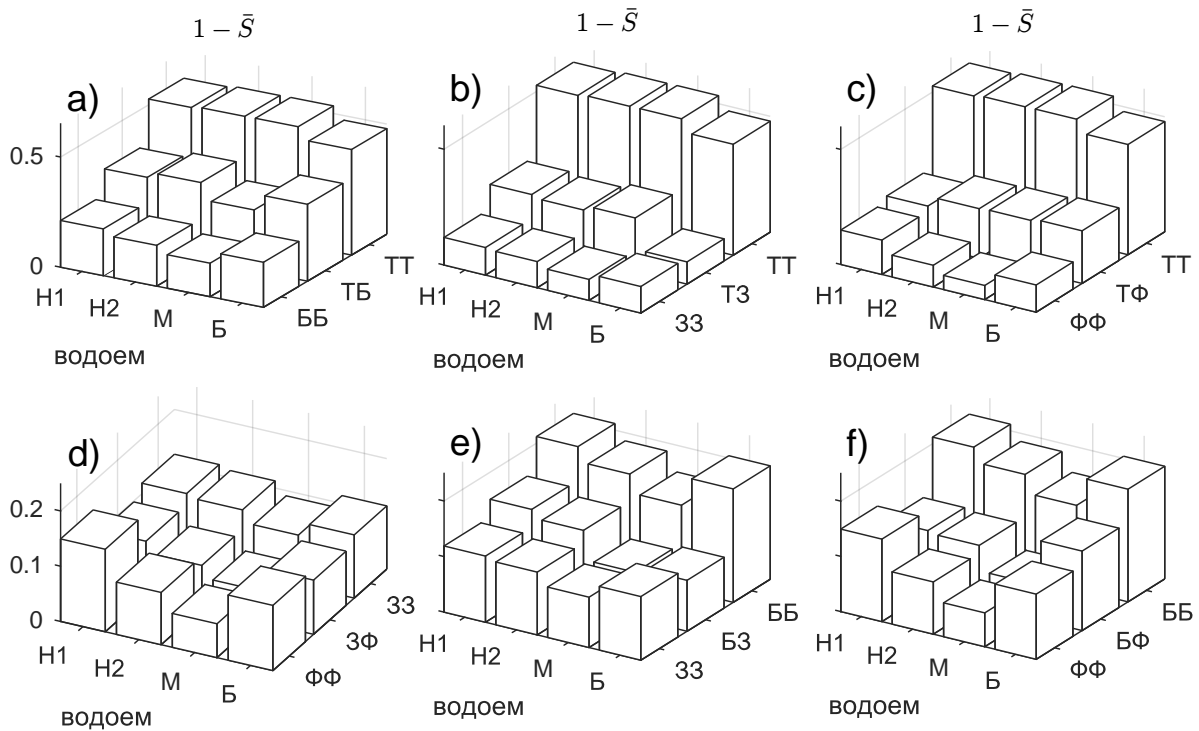


Рис. 4. Разница $\Delta = 1 - \bar{S}$ для спектров кросскорреляций в сравнении с автокорреляциями для всех сигналов во всех водоемах. Буквенные обозначения корреляций и водоемов на осях гистограмм взяты из табл. 1

две гистограммы для корреляций зоопланктона с температурой (рис. 4.b) и корреляций фитопланктона с температурой (рис. 4.c). В этих случаях кросскорреляции значительно меньше автокорреляций температуры и ближе по величине к автокорреляции высокоэнтропийного сигнала (фито- или зоопланктона). Более того, в отдельных случаях кросскорреляции приблизительно равны автокорреляциям высокоэнтропийного сигнала. Так, кросскорреляции температуры и зоопланктона в озере Баторино равны автокорреляции зоопланктона (рис. 4.b), в то же время, кросскорреляции температуры и фитопланктона почти не отличаются от автокорреляций фитопланктона в озере Нарочь 1 (см. рис. 4.c). Переходим к рассмотрению менее существенных корреляций, приведенных на рисунках 4.d – 4.f. Самыми незначительными корреляциями следует признать корреляции между обилием зоопланктона и фитопланктона (рис. 4.d). В этом случае нам сложно выделить, какой сигнал следует считать низкоэнтропийным, поскольку автокорреляции фитопланктона и автокорреляции бактериопланктона находятся примерно на одной величине, при этом они сравнимы с величинами кросскорреляции зоо- и фитопланктона. Картины корреляций бактериопланктона с зоопланктоном (рис. 4.e) и фитопланктоном (рис. 4.f) похожи в том смысле, что явно выделен низкоэнтропийный сигнал (бактериопланктон), однако кросскорреляции БЗ и БФ

сравнимы с автокорреляциями высокоэнтропийного сигнала. При рассмотрении всех трех менее существенных корреляций стоит отметить, что все корреляции в озере Мястро меньше по величине остальных корреляций. Возможно, это имеет какой-то методический смысл.

Вообще говоря, из рассмотрения картины корреляций на рис. 4 можно сделать лишь единственный достоверный вывод о том, что температура существенно влияет на обилие бактериопланктона. Это справедливо для всех водоемов. Такой результат качественно согласуется с оценками фазовой синхронизации временных рядов бактериопланктона и температуры [7]. Все остальные выводы, несмотря на отличия в величинах Δ , следует проводить с известной осторожностью, поскольку оценки спектральной энтропии зависят от шумов спектров и вполне могут быть случайными.

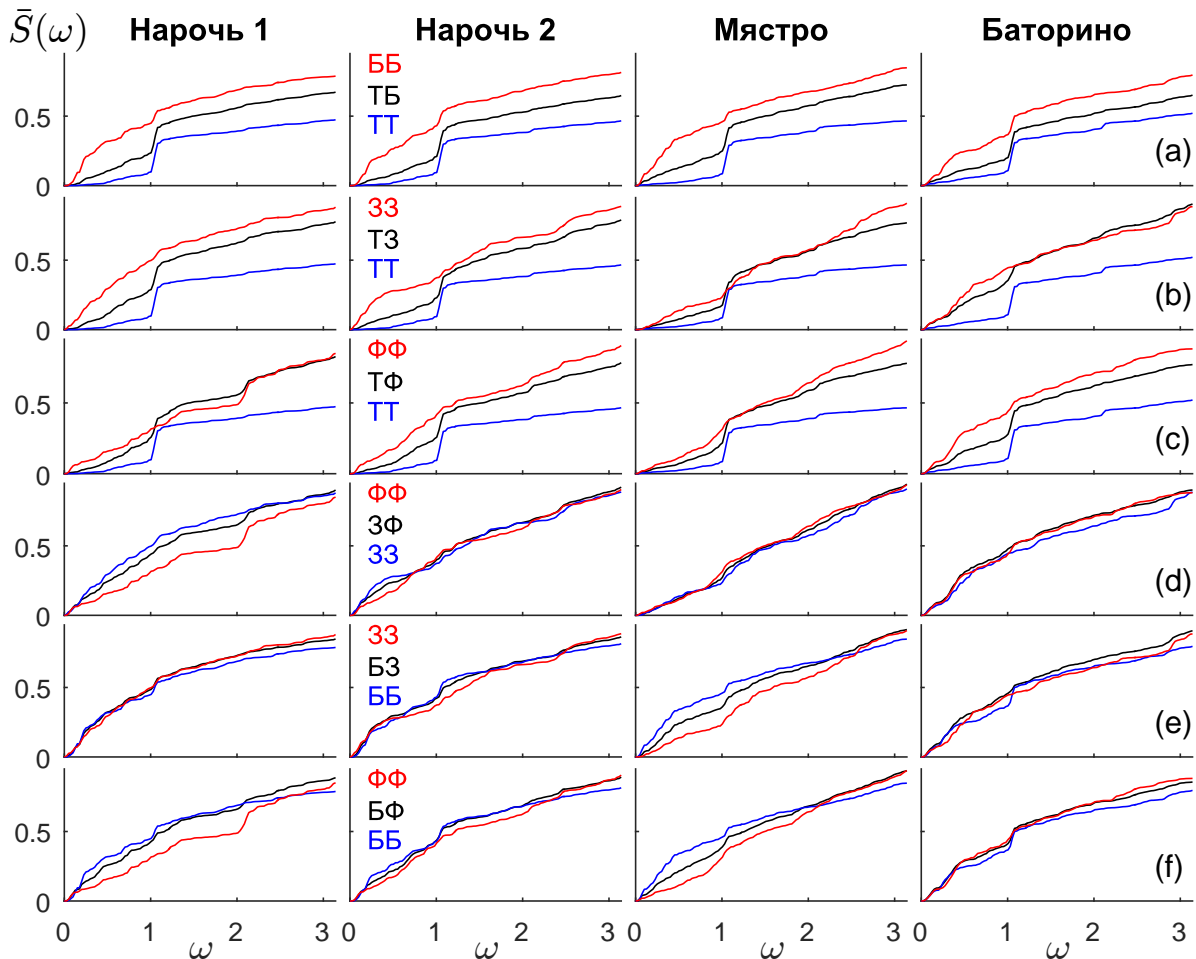


Рис. 5. Кумулятивная спектральная энтропия (КСЭ) корреляций обилия планктона и температуры для всех водоемов. Строка графиков соответствует одному типу корреляций, столбец — одному водоему. Обозначения типов корреляций такие же, как на рис.4. Черная линия — кросскорреляции, цветные — автокорреляции опорных сигналов.

С целью более детального анализа отличий величин энтропии Шеннона

для различных водоемов, приведенных на рис 4, введем определение функции нормированной куммулятивной спектральной энтропии (КСЭ) от частоты как частичную сумму до некоторой промежуточной точки спектра ω_k величины :

$$\bar{S}(\omega_k) = - \frac{\sum_{i=1}^k f_i \log(f_i)}{\log(n)}, 1 \leq k \leq n$$

. Функция куммулятивной спектральной энтропии (КСЭ) $\bar{S}(\omega)$, очевидно, неубывающая функция частоты в интервале $0 \leq \omega \leq \omega_{max}$. На нулевой частоте $\bar{S}(0) = 0$, максимальное значение функция КСЭ достигает на частоте Найквиста ω_{max} , где она равна нормированной энтропии Шеннона $\bar{S}(\omega_{max}) = \bar{S}$, которая нами рассматривалась в предыдущей части работы.

На рисунке 5 изображены КСЭ для корреляций обилия планктона с температурой для всех четырех озер. Рассмотрим первую строку (а) рис. 5, где приведены КСЭ для бактериопланктона и температуры. Видно, что функции КСЭ для кросскорреляций (ТБ) лежат строго между КСЭ автокорреляций (ТТ) и (ББ) опорных (формирующих корреляцию) сигналов на всех частотах для всех озер. Исходя из этого, мы можем утверждать, что в этом случае наличествует достоверная корреляция, которая отмечалась раньше при обсуждении рис. 4.а. Такую же картину мы наблюдаем для КСЭ корреляций температуры и зоопланктона в водоемах Нарочь 1 и Нарочь 2. Однако, для водоемов Баторино и Мястро, КСЭ кросскорреляций (ТЗ) пересекает КСЭ высокоэнтропийной автокорреляции (ЗЗ), поэтому мы полагаем, что в этих двух озерах корреляции зоопланктона с температурой под сомнением. Такую же неоднозначную картину мы видим на рис. 5.с для корреляций температуры с фитопланктоном. Функция КСЭ для (ТФ) пересекает автокорреляцию (ФФ) и лежит выше в диапазоне частот между сезонной частотой и ее первой гармоникой в водоеме Нарочь 1. В остальных водоемах КСЭ (ТФ) лежит между опорными автокорреляциями. Особая роль сигнала обилия фитопланктона в водоеме Нарочь 1 проявляется и в картине менее существенных корреляций (рис. 5.d и 5.f). На этих рисунках хорошо видно, что автокорреляция фитопланктона является низкоэнтропийной вплоть до удвоенной сезонной частоты. Это связано с наличием соответствующего пика в спектре автокорреляций фитопланктона в водоеме Нарочь 1 (см. рис. 2). Можно, также, отметить интересное поведение КСЭ для корреляций бактериопланктона с зоопланктоном и фитопланктоном (рис. 5.e и 5.f) в озере Мястро. Из рисунков видно, что КСЭ бактериопланктона является высокоэнтропийной функцией при этом КСЭ кросскорреляций лежит между опорными автокорреляциями вплоть до удвоенной сезонной частоты, а дальше КСЭ пересекаются. Можно предположить, что в водоеме Мястро фитопланктон и зоопланктон коррелирует с бактериопланктоном на больших временных масштабах.

6. Заключение

Из анализа данных можно сделать следующие выводы. Обилие бактериопланктона коррелирует с сезонной температурой во всех водоемах. Обилие зоопланктона коррелирует с температурой в озерах Нарочь 1 и Нарочь 2. Обилие фитопланктона коррелирует с температурой во всех озерах, кроме озера Нарочь 1. Обилие фитопланктона и зоопланктона коррелирует с обилием бактериопланктона на больших масштабах времени.

В целом, результаты представленного в данной работе анализа временных рядов показывают, что использование кросс-корреляционной энтропии Шеннона и связанной с ней куммулятивной спектральной энтропии оказывается эффективным методом, позволяющим приблизиться к пониманию механизмов, которые обуславливают характер взаимодействующих и зачастую нерегулярных колебаний, наблюдаемых в природе. При этом, в частности, необходимым условием дальнейшего прогресса в исследованиях природы популяционных процессов является сочетание длительного и непрерывного мониторинга экосистем с математическим моделированием динамики популяций наряду с математическим анализом характеристик временных рядов как результата полевых и модельных исследований.

Библиографический список

1. Tikhonov Dmitry, Enderlein J., Malchow H., Medvinsky Alexander B. Chaos and fractals in fish school motion // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2001. — Vol. 12. — P. 277–288. — [10.1016/S0960-0779\(00\)00049-7](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(00)00049-7).
2. Медвинский А. Б., Петровский С. В., Тихонова И. А., Тихонов Д. А., Ли Б. Л., Вентурино Э., Мальхё Х., Иваницкий Г. Р. Формирование пространственно-временных структур, фракталы и хаос в концептуальных экологических моделях на примере динамики взаимодействующих популяций планктона и рыбы // *Усп. физ. наук*. — 2002. — Т. 172, № 1. — С. 31–66. — [10.3367/UFNr.0172.200201b.0031](https://doi.org/10.3367/UFNr.0172.200201b.0031).
3. Tikhonov Dmitry, Malchow H. Chaos and fractals in fish school motion II // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2003. — Vol. 16. — P. 287–289. — [10.1016/s0960-0779\(02\)00319-3](https://doi.org/10.1016/s0960-0779(02)00319-3).
4. Turchin Peter. *Complex Population Dynamics. A Theoretical/Empirical Synthesis*. — 2003. — ISBN: 9781400847280. — URL: <https://press.princeton.edu/titles/7436.html>.
5. Solé Ricard V., Bascompte Jordi. *Self-Organization in Complex Ecosystems*. — 2006. — ISBN: 9781400842933. — URL: <https://press.princeton.edu/titles/8224.html>.
6. Medvinsky Alexander B., Adamovich Boris V., Chakraborty Amit, Lukyanova Elena V., Mikheyeva Tamara M., Nurieva Nailya I., Radchikova Natalia P., Rusakov Alexey V., Zhukova Tatyana V. Chaos far away from the edge of chaos: A recurrence quantification analysis of plankton time series // *Ecological Complexity*. — 2015. — Vol. 23. — P. 61 – 67. — <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2015.07.001>.
7. Medvinsky Alexander B., Adamovich Boris V., Aliev Rubin R., Chakraborty Amit, Lukyanova Elena V., Mikheyeva Tamara M., Nikitina Ljudmila V., Nurieva Nailya I., Rusakov Alexey V., Zhukova Tatyana V. Temperature as a factor affecting fluctuations and predictability of the abundance of lake bacterioplankton // *Ecological Complexity*. — 2017. — Vol. 32. — P. 90 – 98. — <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2017.10.002>.
8. The Mathworks, Inc., Natick, Massachusetts. — MATLAB version 8.5.0.197613 (R2015a), 2015. — URL: www.mathworks.com.
9. Eaton John W., Bateman David, Hauberg Søren, Wehbring Rik. — GNU Octave version 5.1.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations, 2019. — URL: <https://www.gnu.org/software/octave/doc/v5.1.0/>.

10. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in C. — Cambridge : Cambridge University Press, 1992. — URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_Recipes.
11. Heer C.V. Statistical mechanics, kinetic theory, and stochastic processes. — Academic Press, 1972.
12. Sharma Vikas, Parey Anand. A Review of Gear Fault Diagnosis Using Various Condition Indicators // *Procedia Engineering*. — 2016. — 12. — Vol. 144. — P. 253–263. — [10.1016/j.proeng.2016.05.131](https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.05.131).
13. Shen J., Hung J., Lee. L. Robust Entropy-Based Endpoint Detection for Speech Recognition in Noisy Environments. // *International Conference on Spoken Language Processing, ICLSP*. — 1998. — November. — Vol. 98. — URL: <http://www.ee.columbia.edu/~dpwe/papers/ShenHL98-endpoint.pdf>.
14. Li Xin, Liu Huaping, Zheng Yu, Xu Bolin. Robust Speech Endpoint Detection Based on Improved Adaptive Band-Partitioning Spectral Entropy // *Bio-Inspired Computational Intelligence and Applications* / Ed. by Kang Li, Minrui Fei, George William Irwin, Shiwei Ma. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2007. — P. 36–45.
15. Yi Weibo, Qiu Shuang, Qi Hongzhi, Zhang Lixin, Wan Baikun, Ming Dong. EEG feature comparison and classification of simple and compound limb motor imagery // *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*. — 2013. — Oct. — Vol. 10, no. 1. — P. 106. — [10.1186/1743-0003-10-106](https://doi.org/10.1186/1743-0003-10-106).