ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 57 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 57. 27 с. doi:10.20948/prepr-2019-57
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-57

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А. Д. Брюно

Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением

Москва — 2019

УДК 517.93+531.314

Александр Дмитриевич Брюно
Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением. Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2019.

Вблизи стационарного решения рассматривается возмущённая система Гамильтона, у которой невозмущённая часть не зависит от времени, а возмущение периодично по времени. Сначала напоминается нормальная форма автономной функции Гамильтона. Затем описывается нормальная форма периодического возмущения. Она всегда приводится к автономному гамильтониану. Он позволяет вычислять локальные семейства периодических решений исходной системы. Первые приближения некоторых из этих семейств находятся с помощью вычисления многогранника Ньютона приведённой нормальной формы гамильтониана. Кратко обсуждаются задачи компьютерной алгебры, возникающие в этих вычислениях.

Ключевые слова: система Гамильтона, периодическое возмущение, приведённая нормальная форма, семейства периодических решений.

Alexander Dmitrievich Bruno
Normal form of a Hamiltonian system with a periodic perturbation.
Near a stationary solution we consider the Hamiltonian system with such perturbation, that the unperturbed Hamiltonian function is autonomous and the perturbation of the Hamiltonian function is periodic in time. First we remind the normal form of the autonomous Hamiltonian function. Second we describe the normal form of the periodic perturbation of the Hamiltonian function. It can always be reduced to the time independent Hamiltonian. It allows to compute the local families of periodic solutions to the initial system. The first approximations of some of these families are found by means of computation of the Newton polyhedron of the reduced normal form of Hamiltonian. We also discuss problems of the computer algebra arising in these computations.

Key words: Hamiltonian system, periodic perturbation, normal form, reduced normal form, family of periodic solutions.

Работа поддержана РФФИ, проект № 18-01-00422а.

e-mail: abruno@keldysh.ru

1. Введение

Пусть $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ — малые параметры. В окрестности стационарного решения

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n) = 0, \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_s) = 0 \tag{1.1}$$

рассматривается система Гамильтона с n степенями свободы

$$\frac{d\xi_j}{d\psi} = \frac{\partial\gamma}{\partial\eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{d\psi} = -\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_j}, \quad j = 1, \ldots, n\,, \tag{1.2}$$

где γ — степенной ряд по $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}$ с 2π-периодическими по ψ коэффициентами.

При этом функция Гамильтона имеет вид

$$\gamma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}, \psi) = \gamma_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \gamma_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}, \psi)\,, \tag{1.3}$$

где γ_0 не зависит от $\boldsymbol{\mu}$ и ψ, а $\gamma_1 \equiv 0$ при $\boldsymbol{\mu} = 0$, т.е. $\gamma_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ — это невозмущённая автономная часть функции Гамильтона γ, а γ_1 — это её периодическое возмущение.

Наша цель — построить такую обратимую формальную каноническую замену координат

$$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \psi \to \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \varphi,$$

которая преобразует функцию Гамильтона (1.3) к *приведённой нормальной форме* [1]

$$\tilde{h}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\mu}) = \tilde{h}_0(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \tilde{h}_1(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\mu}). \tag{1.4}$$

При этом $\tilde{h}_0$ и $\tilde{h}_1$ получаются из γ_0 и γ_1 соответственно. Это делается с помощью теории нормальных форм, развитой в главах I и II [2]. Локальным семействам периодических решений исходной системы (1.2), т.е. проходящим через решение (1.1), соответствуют локальные семейства стационарных решений системы Гамильтона

$$\frac{d\tilde{u}_j}{d\varphi} = \frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{v}_j}, \quad \frac{d\tilde{v}_j}{d\varphi} = -\frac{\partial\tilde{h}}{\partial\tilde{u}_j}, \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

т.е. проходящие через решение

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n) = 0, \quad \tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n) = 0, \quad \boldsymbol{\mu} = 0.$$

Для вычисления этих семейств стационарных решений можно использовать степенную геометрию [3].

В настоящей работе эта программа осуществляется при следующем ограничении.

Ограничение 1. *Просты все элементарные делители матрицы линейной части системы с функцией Гамильтона $\gamma_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ вблизи точки $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$.*

Структура работы

В разделе 2 напоминается теория нормальной формы автономной функции Гамильтона $\gamma_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$, изложенная в гл. I книги [2].

В разделе 3 теория нормальной формы периодического возмущения $\gamma_1(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu},\psi)$, описанная в гл. II книги [2], доводится до приведённой нормальной формы $\tilde{h}_1(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{v},\boldsymbol{\mu})$, введённой в [1]. При этом локальным семействам периодических решений системы (1.2) соответствуют локальные семейства неподвижных точек системы (1.4).

В разделе 4 излагается алгоритм вычисления локальных семейств неподвижных точек системы (1.4), основанный на степенной геометрии [3].

Затем в разделе 5 рассматривается пример параметрического резонанса с $n = 2$, в котором описываются вычисления локальных семейств периодических решений исходной системы.

В разделе 6 обсуждаются те части этих вычислений, в которых может быть полезна компьютерная алгебра.

Отметим, что понятия «нормальная форма системы Гамильтона» и «нормальная форма функции Гамильтона» взаимозаменяемы: в нормальной форме системы функция Гамильтона имеет нормальную форму и наоборот.

2. Нормальная форма автономной системы Гамильтона [2], гл. I

Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial\gamma}{\partial\eta_j}\,, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_j}\,, \quad j = 1,\ldots,n \tag{2.1}$$

с n степенями свободы в окрестности неподвижной точки

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\ldots,\xi_n) = 0, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1,\ldots,\eta_n) = 0. \tag{2.2}$$

Если функция Гамильтона $\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ аналитична в этой точке, то она разлагается в степенной ряд

$$\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \sum \gamma_{\mathbf{pq}}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}}\,, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1,\ldots,q_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \geqslant 0$, $\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} = \prod \xi_i^{p_i}$, $\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}} = \prod \eta_i^{q_i}$. Здесь $\gamma_{\mathbf{pq}}$ — постоянные коэффициенты. Поскольку точка (2.2) неподвижная, то разложение (2.3) начинается с квадратичных членов. Им соответствует линейная часть системы (2.1).

Собственные числа её матрицы разбиваются на пары

$$\lambda_{j+n} = -\lambda_j\,, \quad j = 1,\ldots,n\,.$$

Пусть $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Канонические замены координат

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \longrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{2.4}$$

сохраняют гамильтоновость системы. Здесь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Теорема 1. *Существует каноническое формальное преобразование* (2.4)*, приводящее систему* (2.1) *к нормальной форме*

$$\dot{x}_j = \frac{\partial g}{\partial y_j}, \quad \dot{y}_j = -\frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.5}$$

где ряд

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum g_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} \tag{2.6}$$

содержит только члены с $\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$*, а квадратичная часть* $g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *имеет свою нормальную форму (так что матрица линейной части системы является гамильтоновым аналогом жордановой нормальной формы). Здесь* $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = p_1\lambda_1 + \ldots + p_n\lambda_n$ *— скалярное произведение.*

Если $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$, то нормальная форма (2.5), (2.6) эквивалентна системе с меньшим числом степеней свободы и дополнительными параметрами. При нормализующем преобразовании (2.4) сохраняются малые параметры и линейные автоморфизмы

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \longrightarrow (\widetilde{\boldsymbol{\xi}}, \widetilde{\boldsymbol{\eta}}), \quad t \to \widetilde{t}\,.$$

Локальные семейства периодических решений системы (2.5) удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \lambda_j x_j a, \quad \frac{\partial g}{\partial x_j} = \lambda_j y_j a, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где a — свободный параметр.

Для вещественной исходной системы (2.1) коэффициенты $g_{\mathbf{pq}}$ комплексной нормальной формы (2.6) удовлетворяют специальным соотношениям вещественности и при стандартной канонической линейной замене координат $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ система (2.5), (2.6) переходит в вещественную систему.

Имеется несколько способов вычисления коэффициентов $g_{\mathbf{pq}}$ нормальной формы (2.6). Наиболее простой описан в книге Журавлёва, Петрова, Шундерюка [4].

3. Нормальная форма периодического возмущения [2], гл.II

Здесь кратко излагается последовательность упрощающих преобразований периодической функции Гамильтона с n степенями свободы в специальном случае. При этом везде, кроме подраздела 3.4, используется теория из главы II [2].

3.1. Постановка упрощённой задачи. В окрестности стационарного решения

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = 0, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n) = 0, \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_s) = 0 \qquad (3.1)$$

рассматривается система Гамильтона с n степенями свободы

$$\frac{d\xi_j}{d\psi} = \frac{\partial\gamma}{\partial\eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{d\psi} = -\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_j}, \quad j = 1, \dots, n\ , \qquad (3.2)$$

где γ — степенной ряд по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu}$ с 2π-периодическими по ψ коэффициентами с s малыми параметрами $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_s)$. В нашем случае линейная по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ часть этой системы при $\boldsymbol{\mu} = 0$ является постоянной. Согласно ограничению 1 её матрица имеет только простые элементарные делители с собственными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n$. Положим $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

3.2. Линейная нормализация. Сделаем линейное каноническое преобразование $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \to \mathbf{x},\mathbf{y}$, которое приводит линейную часть системы (3.2) при $\boldsymbol{\mu} = 0$ к линейной нормальной форме с гамильтонианом

$$\frac{1}{2}\langle \mathbf{z}, G\mathbf{z}\rangle\ ,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение, $\mathbf{z} = (\mathbf{x},\mathbf{y})$ и G — диагональная матрица $G = \{\boldsymbol{\lambda}, -\boldsymbol{\lambda}\}$. При этом функция Гамильтона $\gamma(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\mu},\psi)$ принимает вид $g(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\mu},\psi)$.

3.3. Нелинейная нормализация. Существует нелинейное каноническое периодическое преобразование

$$\mathbf{x},\mathbf{y},\psi \to \mathbf{u},\mathbf{v},\varphi, \qquad (3.3)$$

которое переводит функцию Гамильтона $g(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\mu},\psi)$ в ряд Пуассона (нормальную форму)

$$h(\mathbf{u},\mathbf{v},\boldsymbol{\mu},\varphi) = \sum h_{\mathbf{pqr}m}\mathbf{u}^{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{q}}\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{r}}\exp(im\varphi), \qquad (3.4)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{u}^{\mathbf{p}} = u_1^{p_1} \cdots u_n^{p_n}$, $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^s$, $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r} \geqslant 0$, и в разложении (3.4) имеются только резонансные члены с

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}\rangle + im = 0.$$

3.4. Приведённая нормальная форма. Затем замена

$$u_j = \tilde{u}_j \exp\left(-i \operatorname{Im} \lambda_j \varphi\right), \quad v_j = \tilde{v}_j \exp\left(i \operatorname{Im} \lambda_j \varphi\right), \quad j = 1, \ldots, n,$$

приводит периодическую нормальную форму (3.4) к постоянной функции Гамильтона

$$\tilde{h}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\mu}) = \sum \tilde{h}_{\mathbf{pqr}m} \tilde{\mathbf{u}}^{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{q}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{r}}, \tag{3.5}$$

где

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \operatorname{Re} \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \operatorname{Im} \boldsymbol{\lambda} \rangle = -m. \tag{3.6}$$

При $\boldsymbol{\mu} = 0$ в $\tilde{h}$ отсутствует квадратичная часть по $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$.

3.5. Понижение числа степеней свободы. Пусть k — число линейно независимых решений $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ системы уравнений

$$\langle \mathbf{p}, \operatorname{Re} \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0 = \langle \mathbf{p}, \operatorname{Im} \boldsymbol{\lambda} \rangle .$$

Тогда существует каноническая замена координат

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) \Leftrightarrow \left(\underset{\sim}{\mathbf{u}}, \underset{\sim}{\mathbf{v}}\right),$$

в результате которой приведённая нормальная форма гамильтониана (3.5) сводится к гамильтониану с $k+1$ степенью свободы и $n-k-1+s$ параметрами. Эта замена описана в § 3 главы I книги [2].

3.6. Вещественный случай. Если исходная система Гамильтона (3.2) была вещественной, то в приведённой нормальной форме (3.5) коэффициенты $\tilde{h}_{\mathbf{pqr}m}$ связаны соотношениями вещественности и комплексные координаты $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}$ переводятся в вещественные координаты $\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}}$ стандартной линейной заменой

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{V}} \end{pmatrix}$$

с постоянной блочной матрицей Q, которая описана в [2, гл. I].

Малые параметры $\boldsymbol{\mu}$ и линейные автоморфизмы системы (3.2) сохраняются при нормализующем преобразовании (3.3).

3.7. Периодические решения. Даже если нормализующее преобразование (3.3) расходится в окрестности решения (3.1), то оно сходится на локальных семействах периодических решений (проходящих через решение (3.1)), которым в системе с приведённой нормальной формой функции Гамильтона (3.5) соответствуют локальные семейства неподвижных точек.

Они являются решениями $\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{v}},\boldsymbol{\mu}$ системы $2n$ уравнений

$$\frac{\partial\widetilde{h}(\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{v}},\boldsymbol{\mu})}{\partial\widetilde{u}_j}=0,\quad \frac{\partial\widetilde{h}(\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{v}},\boldsymbol{\mu})}{\partial\widetilde{v}_j}=0,\quad j=1,\ldots,n\,. \tag{3.7}$$

При $\boldsymbol{\mu}=0$ разложение гамильтониана $\widetilde{h}$ начинается с членов третьей степени по $\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{v}}$, но при $\boldsymbol{\mu}\neq 0$ — с членов первой степени.

4. Вычисление семейств неподвижных точек

4.1. Общее описание метода. Для вычисления семейств решений системы (3.7), проходящих через точку

$$\widetilde{\mathbf{u}}=\widetilde{\mathbf{v}}=0,\ \boldsymbol{\mu}=0, \tag{4.1}$$

надо найти все первые приближения системы (3.7) в окрестности точки (4.1). Для этого можно воспользоваться степенной геометрией [3]. Она предписывает для каждого из уравнений системы (3.7) вычислить границу выпуклой оболочки целочисленных показателей $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}\geqslant 0$, удовлетворяющих системе (3.6) и присутствующих в этом уравнении (многогранник Ньютона), и с их помощью находить «укороченные системы» системы (3.7). Решения укороченных систем дают первые приближения для решений полной системы (3.7).

Но часть этих решений можно находить проще. А именно, выделять укороченные гамильтонианы $\widehat{h}(\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{v}},\boldsymbol{\mu})$ с помощью многогранника Ньютона самого гамильтониана $\widetilde{h}(\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\mathbf{v}},\boldsymbol{\mu})$. Затем из них отбираются те, для которых система уравнений

$$\frac{\partial\widehat{h}}{\partial\widetilde{u}_j}=0,\quad \frac{\partial\widehat{h}}{\partial\widetilde{v}_j}=0,\quad j=1,\ldots,n, \tag{4.2}$$

является укороченной системой для системы (3.7).

Для этих укороченных гамильтонианов $\widehat{h}$ решения системы (4.2) являются первыми приближениями для решений полной системы (3.7). Вычисление укороченных гамильтонианов $\widehat{h}$ основано на следующей конструкции.

4.2. Многогранник и нормальные конусы. Пусть в $\mathbb{R}^m$ задано несколько точек $\{Q_1,\ldots,Q_k\}=\mathbf{S}$. Здесь $Q=(q_1,\ldots,q_m)$. Их выпуклая оболочка

$$\Gamma(\mathbf{S})=\left\{Q=\sum_{i=1}^{k}\mu_iQ_i,\ \mu_i\geqslant 0,\quad \sum\mu_i=1\right\} \tag{4.3}$$

является многогранником. Его граница $\partial\Gamma$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$, рёбер $\Gamma_j^{(1)}$ и граней $\Gamma_j^{(d)}$ разных размерностей $d : 1 < d \leqslant m-1$. Если задан вещественный m-вектор $P = (p_1, \ldots, p_m)$, то максимум и минимум скалярного произведения $\langle P, Q \rangle = p_1 q_1 + \ldots + p_m q_m$ на $\mathbf{S}$ достигаются на точках Q_i, лежащих на границе $\partial\Gamma$. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует *граничное подмножество* $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{S} \bigcap \Gamma_j^{(d)}$. Выделим для каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ (включая вершины $\Gamma_j^{(0)}$ и рёбра $\Gamma_j^{(1)}$) то множество векторов P, для которых максимум $\langle P, Q \rangle$ достигается на точках $Q_i \in \Gamma_j^{(d)}$. Это будет её *нормальный конус*

$$\mathbf{U}_j^{(d)} = \left\{ P : \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle > \langle P, Q''' \rangle \text{ для } Q', Q'' \in \Gamma_j^{(d)}, Q''' \in \Gamma \backslash \Gamma_j^{(d)} \right\}. \quad (4.4)$$

При этом вектор P лежит в пространстве $\mathbb{R}_*^m$, двойственном пространству $\mathbb{R}^m$. Вообще, здесь мы находимся в ситуации аффинной геометрии.

Пусть все грани размерности $d+1$, содержащие грань $\Gamma_j^{(d)}$ размерности d, суть $\Gamma_1^{(d+1)}, \ldots, \Gamma_k^{(d+1)}$. Тогда нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ является выпуклой конической оболочкой нормальных конусов $\mathbf{U}_1^{(d+1)}, \ldots, \mathbf{U}_k^{(d+1)}$. Поэтому вычисление нормальных конусов удобнее начинать с граней максимальной размерности.

Все векторы нормального конуса $\mathbf{U}_j^{(d)}$ ортогональны грани $\Gamma_j^{(d)}$. В силу однородности нормальных конусов достаточно рассмотреть их пересечения с двумя гиперплоскостями (скажем, $\sum p_j = \pm 1$) и отмечать на них пересечения $\widetilde{\mathbf{U}}_{j\pm}^{(d)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{U}_j^{(d)} \cap \{\sum p_j = \pm 1\}$, которые назовём *приведёнными нормальными конусами*. Имеются стандартные программы как для вычисления выпуклых оболочек, так и для вычисления их граней и их нормальных конусов [5, 6]. В частности, они имеются в системе Maple.

Пусть множество $\mathbf{S}$ лежит в линейном подпространстве $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^m$, нормальном векторам $L_1, \ldots, L_l : \mathcal{L} = \{Q : \langle Q, L_i \rangle = 0, \, i = 1, \ldots, l\}$. Тогда всякий нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ равен прямому произведению линейного подпространства $\mathcal{M} = \left\{ P = \sum\limits_{i=1}^{l} \beta_i L_i, \beta_i \in \mathbb{R} \right\}$, нормального к $\mathcal{L}$, и некоторого конуса $\overset{*}{\mathbf{U}}_j{}^{(d)}$, лежащего в $\mathcal{L}$. Поэтому в этом случае удобно рассматривать *концентрированные нормальные конусы*

$$\overset{\circ}{\mathbf{U}}_j{}^{(d)} = \mathbf{U}_j^{(d)} \cap \mathcal{L} \cap \mathcal{K}_{\pm},$$

где $\mathcal{K}_{\pm} = \{P : \langle P, E \rangle = \pm 1\}, \; E = (1, 1, \ldots, 1)$. Они определяются формулами (4.4) и

$$\langle P, L_i \rangle = 0, \, i = 1, \ldots, l, \, \langle P, E \rangle = \pm 1. \quad (4.5)$$

4.3. Укороченные многочлены и степенные ряды. Пусть задан многочлен (или степенной ряд)

$$f(\mathbf{w}) = \sum f_Q \mathbf{w}^Q, \tag{4.6}$$

где $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_m)$, $Q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{Z}^m$, $Q \geqslant 0$, f_Q — постоянные коэффициенты. Ему соответствует носитель

$$\mathbf{S}(f) = \{Q : f_Q \neq 0\}.$$

По множеству $\mathbf{S} = \mathbf{S}(f)$ строится его выпуклая оболочка $\Gamma(f) = \Gamma(\mathbf{S})$, которая называется *многогранником Ньютона* суммы (4.6). Каждой его грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствуют: *укороченный многочлен*

$$\hat{f}_j^{(d)}(\mathbf{w}) = \sum f_Q \mathbf{w}^Q \text{ по } Q \in \mathbf{S}_j^{(d)} \tag{4.7}$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ по (4.4).

4.4. Укороченные системы. Рассмотрим систему $2n$ «алгебраических» уравнений

$$f_i(\mathbf{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum f_{iQ} \mathbf{w}^Q = 0, \quad i = 1, \ldots, 2n, \tag{4.8}$$

от m неизвестных $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_m)$ с $m > 2n$, где f_{iQ} — постоянные коэффициенты, $Q \in \mathbb{Z}^m$, $Q = (q_1, \ldots, q_m) \geqslant 0$. Пусть точка $\mathbf{w} = 0$ является решением системы (4.8). Надо найти семейства решений системы (4.8), проходящие через эту точку. Если в точке $\mathbf{w}^0$ ранг матрицы

$$\operatorname{Rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}\right) = 2n, \quad i = 1, \ldots, 2n;\ j = 1, \ldots, m\,, \tag{4.9}$$

то по теореме о неявной функции $2n$ координат w_j можно разложить в степенные ряды по оставшимся координатам w_j. Если условие (4.9) не выполнено, то можно искать степенные разложения

$$\mathbf{w}_i = \Omega_i(\tau_1, \ldots, \tau_l), \quad i = 1, \ldots, 2n;\ l = m - 2n, \tag{4.10}$$

решений системы (4.8) по параметрам $\tau_1, \ldots, \tau_l \to \infty$. Для вычисления первых членов этих разложений надо для каждого $f_i(\mathbf{w})$ вычислить его носитель $\mathbf{S}_i = \mathbf{S}(f_i)$, его многогранник Ньютона $\Gamma_i = \Gamma(S_i)$ по (4.3), все его грани $\Gamma_{ik}^{(d)}$ и их нормальные конусы $\mathbf{U}_{ik}^{(d)}$ по (4.4). Набор граней

$$\Gamma_{1,k_1}^{(d_1)}, \Gamma_{2,k_2}^{(d_2)}, \ldots, \Gamma_{2n,k_{2n}}^{(d_{2n})}$$

называется *согласованным*, если не пусто пересечение их нормальных конусов

$$\mathbf{U}_{1,k_1}^{(d_1)} \cap \mathbf{U}_{2,k_2}^{(d_2)} \cap \ldots \cap \mathbf{U}_{2n,k_{2n}}^{(d_{2n})} . \tag{4.11}$$

Тогда система укороченных уравнений

$$\hat{f}_{i,k_i}^{(d_i)}(\mathbf{w}) = 0, \quad i = 1, \ldots ,2n, \tag{4.12}$$

является *укороченной системой* для системы (4.8). Решения этой системы являются первыми приближениями решений (4.10) полной системы (4.8), содержащими кривые вида

$$w_i = \text{const} \cdot \tau^{p_i}, \quad i = 1, \ldots , m,$$

где m-вектор $P = (p_1, \ldots , p_m)$ лежит в пересечении (4.11). Здесь параметр $\tau \to \infty$.

Отметим следующие **свойства** укороченных систем (4.13).

1. Каждая сумма $\hat{f}_{i\,k_i}^{(d_i)}(\mathbf{w})$ содержит хотя бы одно слагаемое $f_{iQ}\mathbf{w}^Q$.

2. Укороченные системы, у которых одна из сумм $\hat{f}_{i\,k_i}^{(d_i)}(\mathbf{w})$ состоит только из одного слагаемого $f_{iQ}\mathbf{w}^Q$, не дают первых приближений решений.

3. Этот подход даёт только решения, у которых все координаты w_i отличны от тождественного нуля. Для отыскания решений с тождественно нулевыми координатами надо их занулить в исходной системе и в полученной системе строить многогранник Ньютона и т.д.

4. Нас интересуют только те укороченные системы (4.13), у которых нормальный конус (4.11) пересекается с *конусом задачи* $K = \{P \,:\, P < 0\}$.

4.5. Укороченные системы, полученные из укороченной функции Гамильтона. Пусть $\tilde{h}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}},\boldsymbol{\mu})$ — функция Гамильтона и $\hat{h}_j^{(d)}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}},\boldsymbol{\mu})$ — её укороченный многочлен (4.7).

Теорема 2. *Система* (4.2) *с* $\hat{h} = \hat{h}_j^{(d)}$ *является укороченной системой системы* (3.7)*, если каждая из частных производных в* (4.2) *содержит хотя бы одно слагаемое. При этом пересечение* (4.11) *совпадает с нормальным конусом* $\mathbf{U}_j^{(d)}$ *грани* $\Gamma_j^{(d)}$ *для* $\Gamma = \Gamma(\tilde{h})$.

Согласно свойству 2 укороченные системы (4.2), где хотя бы одна из частных производных состоит из одного монома, не годятся. Согласно свойству 3 для тех решений укороченной системы (4.2), у которых хотя бы одна координата тождественно равна нулю, надо проверить их существование в системе с обнулёнными соответствующими координатами.

4.6. Дальнейшие члены разложений. Для вычисления дальнейших членов разложений семейств неподвижных решений надо выделить особые точки на вычисленных семействах, т.е. те точки $(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}},\boldsymbol{\mu})$, в которых ранг матрицы

$$\mathrm{Rank}\left(\frac{\partial\hat{h}/\partial\tilde{\mathbf{u}},\partial\hat{h}/\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial\left(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{v}},\boldsymbol{\mu}\right)}\right) < 2n. \tag{4.13}$$

Тогда в неособых точках, где этот Rank $= 2n$, можно применить соответствующее степенное преобразование [3] и теорему о неявной функции. Для анализа решений вблизи особой точки вычисленного семейства надо эту точку сдвинуть в начало координат и снова выделять укороченные системы, находить их решения и т. д.

Замечание 1. Вся изложенная выше теория справедлива и без ограничения 1. Но при нём вычисления упрощаются.

5. Пример

5.1. Постановка задачи. Пусть число степеней свободы $n = 2$, система (3.2) аналитически зависит от s малых параметров $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots,\mu_s)$, имеет линейный автоморфизм $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \to -\boldsymbol{\xi}, -\boldsymbol{\eta}$, при $\boldsymbol{\mu} = 0$ гамильтониан γ не зависит от ψ и собственные числа λ_1, λ_2 линейной части системы суть $\pm i, \pm \dfrac{i}{2}$.

Введём обозначения

$$w_1 = \tilde{u}_1, w_2 = \tilde{v}_1, w_3 = \tilde{u}_2, w_4 = \tilde{v}_2, w_{4+i} = \mu_i,\ i = 1, \ldots,s.$$

Тогда в приведённой нормальной форме (3.5), опуская тильды, получаем

$$\tilde{h}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{v}_1,\tilde{v}_2,\boldsymbol{\mu}) = h(w_1,w_2,w_3,w_4,\boldsymbol{\mu}) = \sum h_{q_1q_2q_3q_4\mathbf{r}m} w_1^{q_1} w_2^{q_2} w_3^{q_3} w_4^{q_4} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{r}}, \tag{5.1}$$

где

$$(q_1 - q_2) + \frac{\sigma}{2}(q_3 - q_4) = -m, \quad \sigma = \pm 1, \tag{5.2}$$

ибо $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\lambda} = \left(1,\dfrac{\sigma}{2}\right)$, $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\lambda} = 0$. При $\boldsymbol{\mu} = 0$ квадратичная часть ряда h по w_1, w_2, w_3, w_4 отсутствует. При этом в разложении (5.1) имеются только члены с чётными степенями $q_1+q_2+q_3+q_4$, ибо нормальная форма сохраняет линейный автоморфизм $w_1,w_2,w_3,w_4 \to -w_1, -w_2, -w_3, -w_4$.

5.2. Укорочения невозмущённого гамильтониана. Поскольку при $\boldsymbol{\mu} = 0$ гамильтониан γ не зависит от угловой переменной ψ, т. е. является гамильтонианом автономной системы вблизи неподвижной точки $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$, то при $\boldsymbol{\mu} = 0$ приведённая нормальная форма (5.1) содержит только члены, у которых

$$q_1 - q_2 + \frac{\sigma}{2}(q_3 - q_4) = 0, \quad \sigma = \pm 1\,. \tag{5.3}$$

Ниже рассмотрим случай

$$\sigma = 1. \tag{5.4}$$

Это же верно и для приведённой нормальной формы (5.1). Её часть

$$h_0(w_1,w_2,w_3,w_4) = h(w_1,w_2,w_3,w_4,0) = \sum h_{q_1q_2q_3q_4} w_1^{q_1} w_2^{q_2} w_3^{q_3} w_4^{q_4} \tag{5.5}$$

содержит только члены, для которых выполнено (5.3); сумма $q_1+q_2+q_3+q_4 \overset{\text{def}}{=} r$ чётна и $r \geqslant 4$.

Предположим, что все члены в (5.5) с этими свойствами обладают ненулевыми коэффициентами $h_{q_1q_2q_3q_4}$. Тогда многогранник Ньютона $\mathbf{N} = \Gamma(h_0)$ разложения (5.5) является трёхмерным, имеет четыре вершины в точках $M = (q_1,q_2,q_3,q_4) : M_1 = (2,2,0,0), M_2 = (0,0,2,2), M_3 = (0,2,4,0), M_4 = (2,0,0,4)$;
9 рёбер:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1^{(1)} = [M_1, M_2] \supset M_5 = (1,1,1,1), \quad \Gamma_2^{(1)} = [M_1, M_3], \quad \Gamma_3^{(1)} = [M_2, M_3],\\
&\Gamma_4^{(1)} = [M_1, M_4], \quad \Gamma_5^{(1)} = [M_2, M_4], \quad \Gamma_6^{(1)} = \{M_1, M_6 = (4,4,0,0)\},\\
&\Gamma_7^{(1)} = \{M_2, M_7 = (0,0,4,4)\}, \quad \Gamma_8^{(1)} = \{M_3, M_8 = (0,4,8,0)\},\\
&\Gamma_9^{(1)} = \{M_4, M_9 = (4,0,0,8)\};
\end{aligned}$$

и 6 граней:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1^{(2)} = [M_1, M_2, M_3], \quad \Gamma_2^{(2)} = \{M_1, M_3, M_6, M_8\}, \quad \Gamma_3^{(2)} = \{M_2, M_3, M_7, M_8\},\\
&\Gamma_4^{(2)} = [M_1, M_2, M_4], \quad \Gamma_5^{(2)} = \{M_1, M_4, M_6, M_9\}, \quad \Gamma_6^{(2)} = \{M_2, M_4, M_7, M_9\}.
\end{aligned}$$

Здесь квадратные скобки обозначают выпуклую оболочку, а фигурные — часть линейного многообразия, натянутого на указанные точки. Все остальные показатели $Q = (q_1,q_2,q_3,q_4)$ в разложении (5.5) являются положительными линейными комбинациями точек $M_1, \ldots, M_4$. Многогранник Ньютона **N** показан на рис. 1. Этот результат получен как выпуклая оболочка точек M, удовлетворяющих уравнению (5.3) с целыми $q_i \geqslant 0$ и с суммой $r \leqslant 12$ согласно разделу 4.2.

Согласно разделу 4.2 вычислим концентрированные нормальные конусы граней и рёбер многогранника Ньютона **N**. Здесь $l = 1$ и $L_1 = (2, -2, 1, -1)$

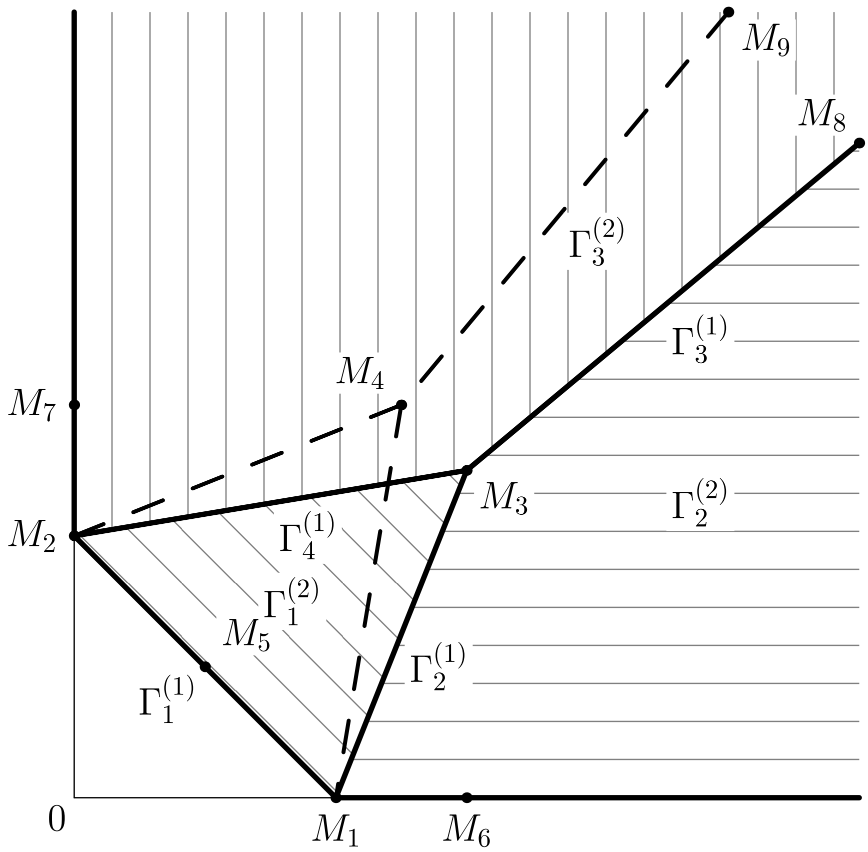

Рис. 1. Многогранник Ньютона **N** гамильтониана (5.5).

согласно (5.3) и (5.4). По формулам (4.4) и (4.5)

$$\mathbf{U}_1^{(2)} = \{P = (p_1,p_2,p_3,p_4) \ : \ \langle P,M_1\rangle = \langle P,M_2\rangle = \langle P,M_3\rangle \ >$$

$$\langle P,M_4\rangle,\ \langle P,M_6\rangle,\ \langle P,M_7\rangle,\ \langle P,M_8\rangle,\ \langle P,L_1\rangle = 0,\ \langle P,E\rangle = -1\},$$

т. е.

$$\mathring{\mathbf{U}}_1^{(2)} = P_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\left(\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{20}, \frac{7}{20}\right) \ .$$

Аналогично находим

$$\mathring{\mathbf{U}}_2^{(2)} = P_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ -\frac{1}{10}, \ -\frac{9}{10}\right) \ ,$$

$$\mathring{\mathbf{U}}_3^{(2)} = P_3 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(-\frac{3}{5}, \ -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \ -\frac{1}{5}\right) \ ,$$

$$\mathring{\mathbf{U}}_4^{(2)} = P_4 \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{7}{20}, \frac{3}{20}\right) \ ,$$

$$\mathring{\mathbf{U}}_5^{(2)} = P_5 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{5},\ -\frac{1}{5},\ -\frac{9}{10},\ -\frac{1}{10}\right)\ ,$$
$$\mathring{\mathbf{U}}_6^{(2)} = P_6 \stackrel{\text{def}}{=} \left(-\frac{2}{5},\ -\frac{3}{5},\ -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)\ .$$

Расположение всех концентрированных нормальных конусов в координатах p_1, p_2 показано на рис. 2.

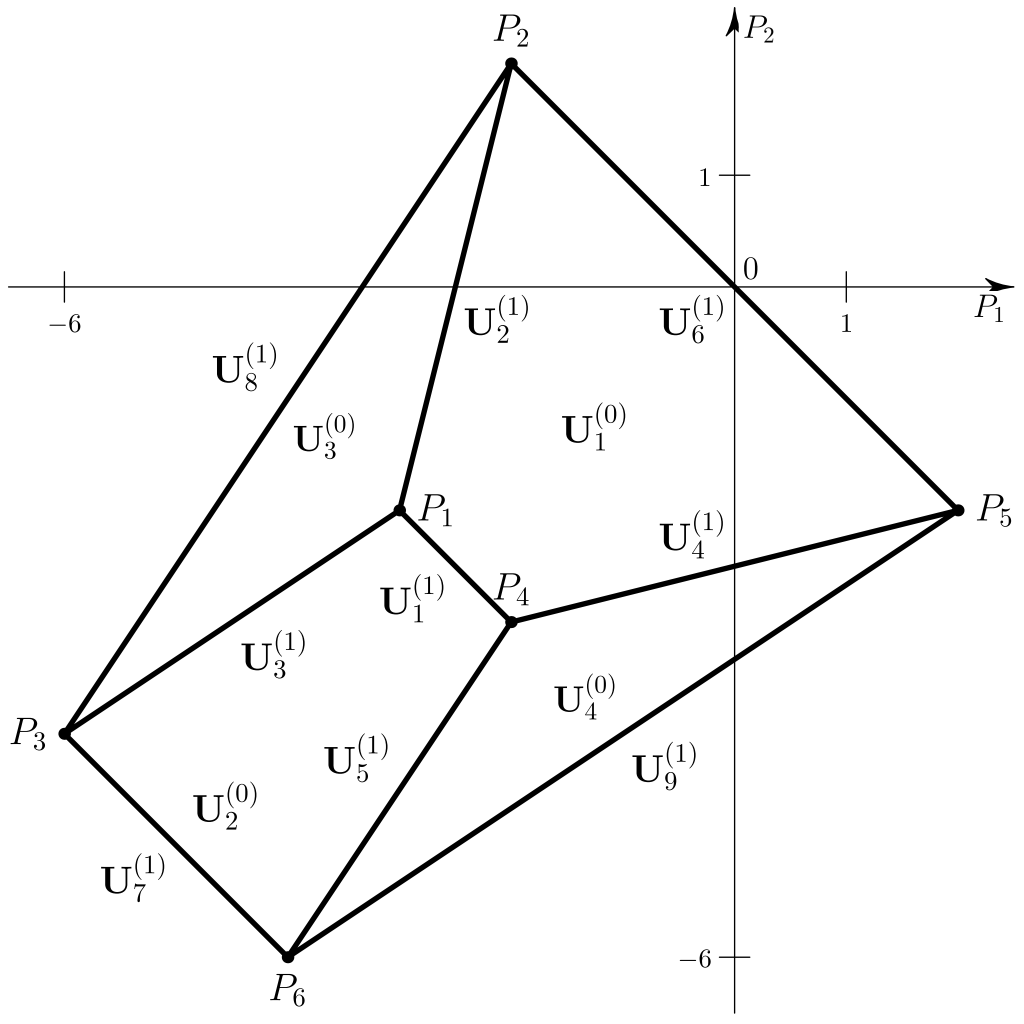

Рис. 2. Концентрированные нормальные конусы $\mathring{\mathbf{U}}_j^{(d)}$ в координатах p_1,p_2. Верхние кружочки опущены.

При этом

$$\mathring{\mathbf{U}}_1^{(1)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_1^{(2)},\mathring{\mathbf{U}}_4^{(2)}\right], \mathring{\mathbf{U}}_2^{(1)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_1^{(2)},\mathring{\mathbf{U}}_2^{(2)}\right], \mathring{\mathbf{U}}_3^{(1)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_1^{(2)},\mathring{\mathbf{U}}_3^{(2)}\right],$$

$$\mathring{\mathbf{U}}_4^{(1)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_4^{(2)},\mathring{\mathbf{U}}_5^{(2)}\right], \mathring{\mathbf{U}}_5^{(1)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_4^{(2)},\mathring{\mathbf{U}}_6^{(2)}\right], \mathring{\mathbf{U}}_6^{(1)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_2^{(2)},\mathring{\mathbf{U}}_5^{(2)}\right],$$

$$\mathring{\mathbf{U}}_7^{(1)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_3^{(2)},\mathring{\mathbf{U}}_6^{(2)}\right], \mathring{\mathbf{U}}_8^{(1)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_2^{(2)},\mathring{\mathbf{U}}_3^{(2)}\right], \mathring{\mathbf{U}}_9^{(1)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_5^{(2)},\mathring{\mathbf{U}}_6^{(2)}\right].$$

Наконец, если вершины M_i обозначить

$$\Gamma_i^{(0)} = M_i, \, i = 1,2,3,4,$$

то получим

$$\mathring{\mathbf{U}}_1^{(0)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_1^{(2)}, \mathring{\mathbf{U}}_2^{(2)}, \mathring{\mathbf{U}}_4^{(2)}, \mathring{\mathbf{U}}_5^{(2)}\right], \quad \mathring{\mathbf{U}}_2^{(0)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_1^{(2)}, \mathring{\mathbf{U}}_3^{(2)}, \mathring{\mathbf{U}}_4^{(2)}, \mathring{\mathbf{U}}_6^{(2)}\right],$$

$$\mathring{\mathbf{U}}_3^{(0)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_1^{(2)}, \mathring{\mathbf{U}}_2^{(2)}, \mathring{\mathbf{U}}_3^{(2)}\right], \quad \mathring{\mathbf{U}}_4^{(0)} = \left[\mathring{\mathbf{U}}_4^{(2)}, \mathring{\mathbf{U}}_5^{(2)}, \mathring{\mathbf{U}}_6^{(2)}\right].$$

Теперь заметим, что у всех $Q = (q_1,q_2,q_3,q_4)$, лежащих на грани $\Gamma_2^{(2)}$, координата $q_4 \equiv 0$, на грани $\Gamma_3^{(2)}$ координата $q_1 \equiv 0$, на грани $\Gamma_5^{(2)}$ координата $q_3 \equiv 0$, на грани $\Gamma_6^{(2)}$ координата $q_2 \equiv 0$. Это означает, что укорочения $\widehat{h}_0$ гамильтониана h_0 не содержат одну из координат. Следовательно, частная производная укороченного гамильтониана по этой координате тождественно равна нулю. По теореме 2 такой укороченный гамильтониан не даёт укороченную систему. Кроме того, $\mathbf{U}_2^{(2)}, \mathbf{U}_3^{(2)}, \mathbf{U}_5^{(2)}, \mathbf{U}_6^{(2)}$ не пересекаются с конусом задачи $K = \{P < 0\}$. Остаются только грани $\Gamma_1^{(2)},\Gamma_4^{(2)}$ и ребро $\Gamma_1^{(1)}$. Все остальные рёбра $\Gamma_2^{(1)}, \ldots ,\Gamma_9^{(1)}$ и все вершины $\Gamma_1^{(0)}, \ldots ,\Gamma_4^{(0)}$ лежат на гранях $\Gamma_2^{(2)}, \Gamma_3^{(2)}, \Gamma_5^{(2)}, \Gamma_6^{(2)}$. Поэтому соответствующие им укороченные функции Гамильтона не дают укороченных систем.

Найдём пересечения нормальных конусов $\mathbf{U}_1^{(2)}$ и $\mathbf{U}_4^{(2)}$ с замыканием конуса задачи $\overline{K} = \{P \leqslant 0\}$. Нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(2)}$ состоит из векторов $P = \alpha_1 P_1 + \omega L_1$, где $\alpha_1 > 0$ и $\omega \in \mathbb{R}$. Поскольку $P_1 = \left(-\frac{3}{10}, -\frac{1}{5}, -\frac{3}{20}, -\frac{7}{20},\right)$ и $L_1 = (2, -2,1, -1)$, то условие $P \leqslant 0$ означает выполнение 4 неравенств

$$-\frac{3}{10}\alpha_1 + 2\omega \leqslant 0, \quad -\frac{3}{20}\alpha_1 + \omega \leqslant 0, \quad -\frac{1}{5}\alpha_1 - 2\omega \leqslant 0, \quad -\frac{7}{20}\alpha_1 - \omega \leqslant 0.$$

Они эквивалентны неравенствам

$$-\frac{1}{10}\alpha_1 \leqslant \omega \leqslant \frac{3}{20}\alpha_1, \quad -\frac{7}{20}\alpha_1 \leqslant \omega \leqslant \frac{3}{20}\alpha_1 \,. \tag{5.6}$$

Поскольку $\alpha_1 \geqslant 0$, то $-\dfrac{1}{10}\alpha_1 \geqslant -\dfrac{7}{20}\alpha_1$, и неравенства (5.6) сводятся к

$$-\frac{1}{10}\alpha_1 \leqslant \omega \leqslant \frac{3}{20}\alpha_1\,.$$

Здесь 2 крайних положения:
$\omega = \dfrac{3}{20}\alpha_1$, ему соответствует $R_1 = \left(0, -\dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$, и
$-\dfrac{1}{10}\alpha_1 = \omega$, ему соответствует $R_2 = \left(-\dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$.

Итак,

$$\mathbf{U}_1^{(2)} \bigcap \overline{K} = \{P = \beta_1 R_1 + \beta_2 R_2,\ \beta_1,\beta_2 \geqslant 0\}. \tag{5.7}$$

Аналогично вычисляем

$$\mathbf{U}_4^{(2)} \bigcap \overline{K} = \{P = \beta_1 R_1 + \beta_3 R_3,\ \beta_1,\beta_3 \geqslant 0\},$$

где $R_3 = \left(-\dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Поэтому здесь имеем три укороченных гамильтониана, дающих укороченные системы,

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_{01}^{(1)} &= \alpha u_1^2 v_1^2 + \beta u_1 v_1 u_2 v_2 + \gamma u_2^2 v_2^2,\\
\widehat{h}_{01}^{(2)} &= \widehat{h}_{01}^{(1)} + \delta v_1^2 u_2^4,\\
\widehat{h}_{04}^{(2)} &= \widehat{h}_{01}^{(1)} + \varepsilon u_1^2 v_2^4,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ — постоянные, отличные от нуля.

5.3. Укорочения возмущённого гамильтониана. При $q_1+q_2+q_3+q_4 = r = 2$ уравнение (5.2) имеет 6 решений (q_1,q_2,q_3,q_4):

$$\begin{aligned}
&N_1 = (2,0,0,0), N_2 = (1,1,0,0), N_3 = (0,2,0,0),\\
&N_4 = (0,0,2,0), N_5 = (0,0,1,1), N_6 = (0,0,0,2).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Выпуклая оболочка этих шести точек является трёхмерным тетраэдром, показанным на рис. 3. Им соответствуют мономы

$$u_1^2, u_1 v_1, v_1^2, \quad u_2^2, u_2 v_2, v_2^2. \tag{5.10}$$

Все остальные допустимые решения уравнения (5.2) являются положительными линейными комбинациями указанных 6 решений (5.9). Более того, выпуклая оболочка решений уравнения (5.2) с $r = 2k$ является также трёхмерным тетраэдром, подобным тетраэдру рис. 3.

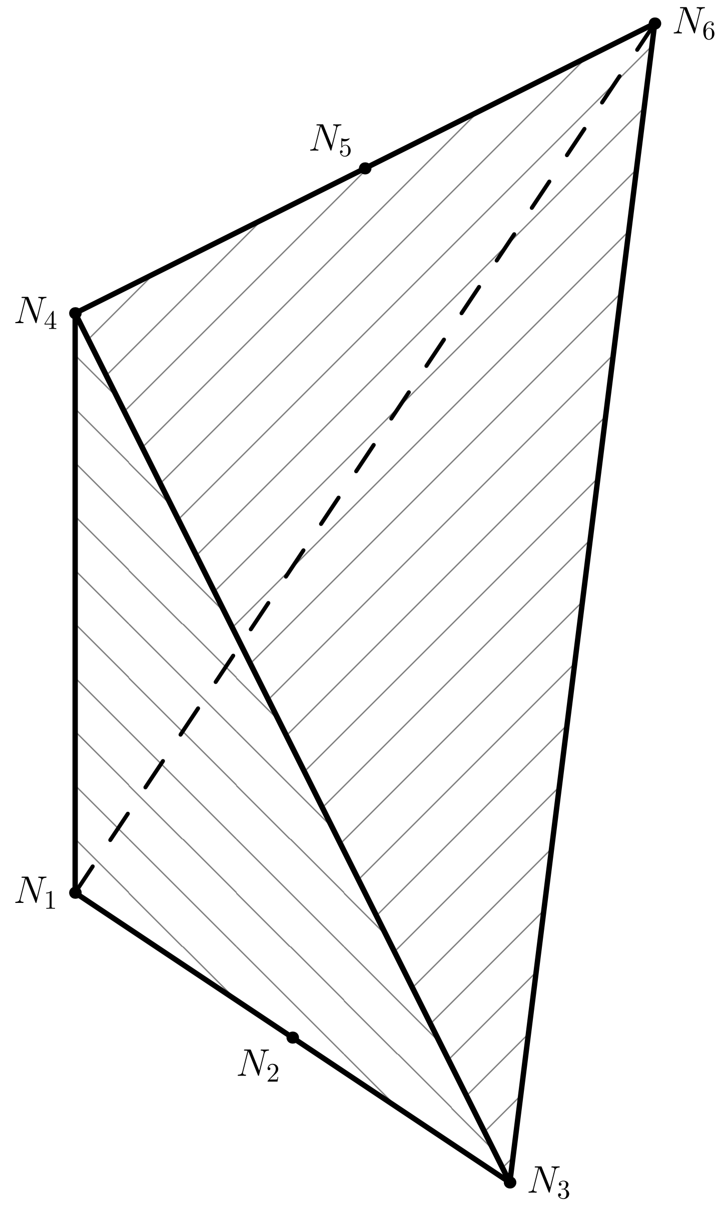

Рис. 3. Выпуклая оболочка точек (5.9).

Точкам (5.9) в возмущении гамильтониана (5.1) соответствуют слагаемые

$$F = \sum_{j=1}^{s} \mu_j (A_j u_1^2 + B_j u_1 v_1 + C_j v_1^2 + a_j u_2^2 + b_j u_2 v_2 + c_j v_2^2)\,.$$

Предположим, что в приведённой нормальной форме (5.1) коэффициенты указанных 6 мономов (5.10) отличны от нуля. Вектор $-E = -(1,1,1,1) \in \mathbb{Z}^4$

нормален ребру $\Gamma_1^{(1)}$ и набору точек (5.9), т.е.

$$\langle E,M_1\rangle = \langle E,M_2\rangle = \langle E,M_5\rangle = 4, \quad \langle E,N_1\rangle = \langle E,N_i\rangle = 2, i = 2,\dots,6.$$

Поэтому согласно разделу 4 сумма

$$\hat{h}_1 = \hat{h}_{01}^{(1)} + F \tag{5.11}$$

является укороченным гамильтонианом для (5.1).

Внешние нормали R к грани $\Gamma_1^{(2)}$, лежащие в конусе задачи $R \leqslant 0$, образуют сектор, натянутый на векторы $R_1 = (0,-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})$ и $R_2 = (-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$, т.е. $R = aR_1 + bR_2$, где $a,b \in \mathbb{R}$ и $a,b \geqslant 0$. Если ограничиться только такими векторами R, у которых $\langle R,E\rangle = -1$, то $a + b = 1$. Следовательно,

$$R = \left(\frac{a-1}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a-1}{4}, \frac{-a-1}{4}\right) \tag{5.12}$$

и $a \in [0,1]$.

Вычислим скалярные произведения $\langle R,N_i\rangle$, где R из (5.12) и N_i из (5.8). Получим

$$\begin{aligned}
&\langle R,N_1\rangle = a-1 = f_1(a), && \langle R,N_2\rangle = -\frac{1}{2} = f_2(a)\\
&\langle R,N_3\rangle = -a = f_3(a), && \langle R,N_4\rangle = \frac{a-1}{2} = f_4(a),\\
&\langle R,N_5\rangle = -\frac{1}{2} = f_5(a), && \langle R,N_6\rangle = \frac{-a-1}{2} = f_6(a).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Графики этих функций $f_i(a)$ на интервале $a \in [0,1]$ показаны на рис. 4. При этом номера i этих функций соответствуют N_i в (5.13).

Из рис. 4 видно, что наибольшие значения принимают $f_3(a)$ и $f_4(a)$. Следовательно, согласно разделу 4, грани $\Gamma_1^{(2)}$ соответствует укороченный гамильтониан

$$\widehat{h}_2 = \widehat{h}_{01}^{(2)} + \sum_{j=1}^{s} \mu_j (C_j v_1^2 + a_j u_2^2). \tag{5.14}$$

Аналогично находим, что грани $\Gamma_4^{(2)}$ соответствует укороченный гамильтониан

$$\widehat{h}_3 = \widehat{h}_{04}^{(2)} + \sum_{j=1}^{s} \mu_j (A_j u_1^2 + c_j v_2^2). \tag{5.15}$$

Положим

$$\begin{aligned}
&A^* = \sum \mu_j A_j,\ B^* = \sum \mu_j B_j,\ C^* = \sum \mu_j C_j,\\
&a^* = \sum \mu_j a_j,\ b^* = \sum \mu_j b_j,\ c^* = \sum \mu_j c_j\,.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

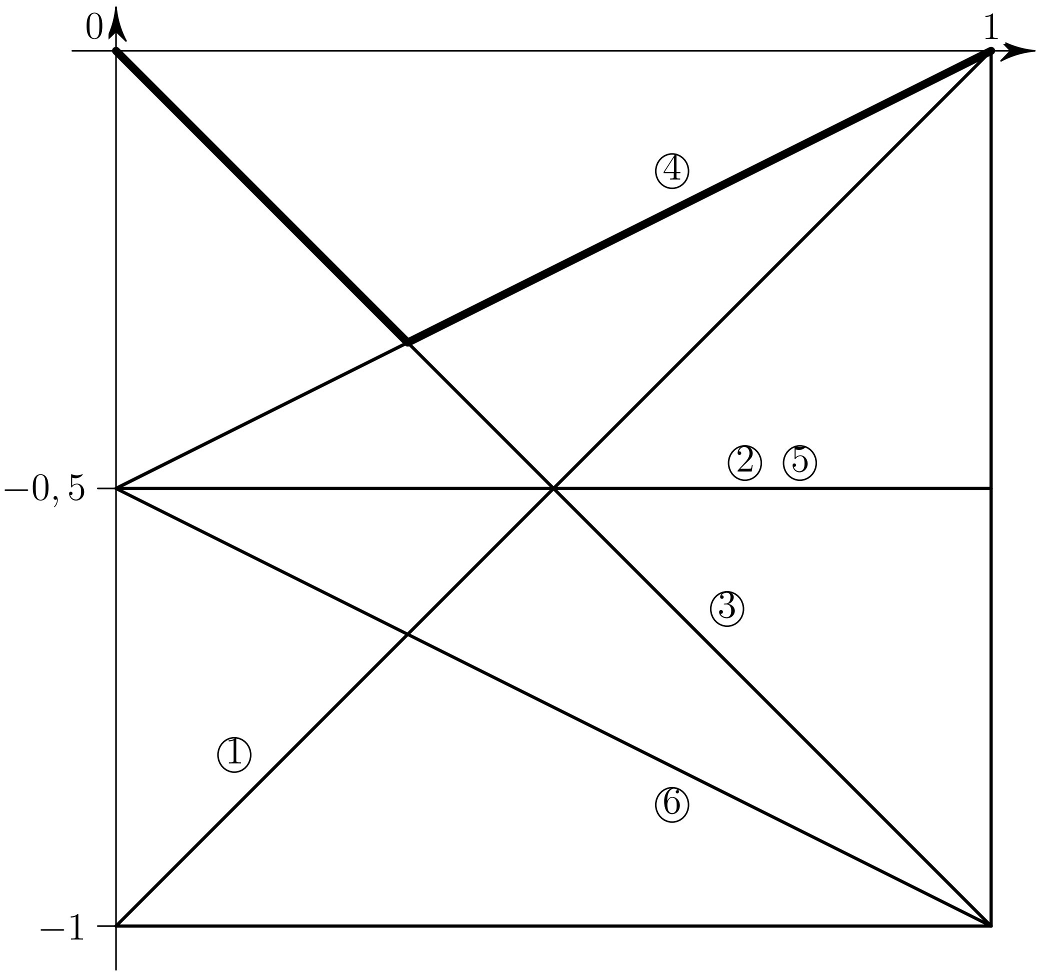

Рис. 4. Графики функций (5.13). Их наибольшие значения отмечены жирной линией.

Теперь укороченные гамильтонианы (5.11), (5.14), (5.15) суть

$$\begin{aligned}
&\widehat{h}_1 = \widehat{h}_{01}^{(1)} + A^* u_1^2 + B^* u_1 v_1 + C^* v_1^2 + a^* u_2^2 + b^* u_2 v_2 + c^* v_2^2,\\
&\widehat{h}_2 = \widehat{h}_{01}^{(2)} + C^* v_1^2 + a^* u_2^2, \qquad (5.17)\\
&\widehat{h}_3 = \widehat{h}_{04}^{(2)} + A^* u_1^2 + c^* v_2^2.
\end{aligned}$$

5.4. Неподвижные точки, соответствующие первому укорочению $\hat{h}_1$. Для него система уравнений (4.2) при $\hat{h} = \hat{h}_1$ есть

$$\begin{aligned} \hat{h}_{u_1} &= 2\alpha u_1 v_1^2 + \beta v_1 u_2 v_2 + 2A^* u_1 + B^* v_1 = 0\,, \\ \hat{h}_{v_1} &= 2\alpha u_1^2 v_1 + \beta u_1 u_2 v_2 + B^* u_1 + 2C^* v_1 = 0\,, \\ \hat{h}_{u_2} &= \beta u_1 v_1 v_2 + 2\gamma u_2 v_2^2 + 2a^* u_2 + b^* v_2 = 0\,, \\ \hat{h}_{v_2} &= \beta u_1 v_1 u_2 + 2\gamma u_2^2 v_2 + b^* u_2 + 2c^* v_2 = 0\,. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Умножая эти уравнения на u_1 (первое), v_1 (второе), u_2 (третье), v_2 (четвёртое) и сравнивая полученные уравнения: первое со вторым и третье с четвёртым, получаем равенства

$$2A^* u_1^2 = 2C^* v_1^2, \quad 2a^* u_2^2 = 2c^* v_2^2.$$

Из них следует, что

$$\sqrt{A^*} u_1 = \varkappa \sqrt{C^*} v_1, \quad \varkappa = \pm 1,$$

$$\sqrt{a^*} u_2 = \omega \sqrt{c^*} v_2, \quad \omega = \pm 1.$$

Теперь система (5.18) сводится к двум уравнениям

$$v_1(2\alpha u_1 v_1 + \beta u_2 v_2 + 2\varkappa\sqrt{A^* C^*} + B^*) = 0,$$

$$v_2(\beta u_1 v_1 + 2\gamma u_2 v_2 + 2\omega\sqrt{a^* c^*} + b^*) = 0.$$

Решения системы (5.18) суть

1) $u_1 v_1 = u_2 v_2 = 0$,
2) $u_1 v_1 = 0,\, u_2 v_2 = -\dfrac{1}{2\gamma}\left(b^* + 2\omega\sqrt{a^* c^*}\right) \quad \omega = \pm 1$,
3) $u_1 v_1 = -\dfrac{1}{2\alpha}\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{A^* C^*}\right),\, u_2 v_2 = 0, \quad \varkappa = \pm 1$,
4) $u_1 v_1 = \left[\beta\left(b^* + 2\omega\sqrt{a^* c^*}\right) - 2\gamma\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{A^* C^*}\right)\right]/\Delta$,
   $u_2 v_2 = \left[\beta\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{A^* C^*}\right) - 2\alpha\left(b^* + 2\omega\sqrt{a^* c^*}\right)\right]/\Delta$,
   где $\Delta = 4\alpha\gamma - \beta^2$, $\varkappa = \pm 1, \omega = \pm 1$. Всего 9 семейств решений.

По нашему предположению $\alpha, \gamma \neq 0$, поэтому решения 2) и 3) существуют. При $\Delta = 0$ решений 4) нет, и только при дополнительном условии

$$2\alpha\left(b^* + 2\omega\sqrt{a^* c^*}\right) = \beta\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{A^* C^*}\right)$$

имеются два семейства решений,

5) $2\alpha u_1 v_1 + \beta u_2 v_2 + B^* + 2\varkappa\sqrt{A^* C^*} = 0, \quad \varkappa = \pm 1.$

Решения 2) сохраняются в укороченной системе (5.18), если в ней положить $u_1 = v_1 = 0$. Поэтому согласно свойству 3 раздела 4.4 они являются первыми приближениями семейств решений полной системы (3.7). Аналогично для решений 3).

Найдём особые точки на семействах решений 2). Согласно (4.13) для особых точек решения 2) выполнено либо уравнение на $\boldsymbol{\mu}$:

$$16\gamma^2 A^* C^* = \left[\beta\left(b^* + 2\omega\sqrt{a^* c^*}\right) + 2\gamma B^*\right]^2,$$

либо уравнение на $u_2^2, v_2^2, \boldsymbol{\mu}$:

$$4(\gamma v_2^2 + a^*)\,(\gamma u_2^2 + c^*) = (4\gamma u_2 v_2 + b^*),$$

либо оба эти уравнения одновременно.

Переход от комплексных координат **u**,**v** к вещественным **U**,**V** даётся преобразованием

$$\begin{pmatrix} u_l \\ v_l \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2i}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_l \\ V_l \end{pmatrix}, \quad l = 1{,}2.$$

Для исходного вещественного гамильтониана константы таковы:

$$\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R},$$
$$\mu_j \in \mathbb{R},\ \operatorname{Re} B_j = \operatorname{Re} b_j = 0,\ C_j = -\overline{A}_j,\ c_j = -\bar{a}_j,\ j = 1,\dots,s,$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. При этом

$$\begin{gathered} u_l v_l = i\rho_l = -\frac{1}{2i}\left(U_l^2 + V_l^2\right),\ l = 1{,}2, \\ \operatorname{Re} B^* = \operatorname{Re} b^* = 0,\ C^* = -\bar{A}^*,\ c^* = -\bar{a}^*, \end{gathered} \tag{5.19}$$

и решения 1) — 5) вещественны и имеют вид

$$
\begin{aligned}
&1.\ \rho_1 = \rho_2 = 0,\\
&2.\ \rho_1 = 0, \rho_2 = -\frac{1}{2\gamma i}\left(b^* + 2\omega\sqrt{-a^*\bar{a}^*}\right),\\
&3.\ \rho_2 = 0, \rho_1 = -\frac{1}{2\alpha i}\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{-A^*\bar{A}^*}\right),\\
&4.\ \rho_1 = \left[\beta\left(b^* + 2\omega\sqrt{-a^*\bar{a}^*}\right) - 2\gamma\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{-A^*C^*}\right)\right]/(i\Delta),\\
&\rho_2 = \left[\beta\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{-A^*\bar{A}^*}\right) - 2\alpha\left(b^* + 2\omega\sqrt{-a^*\bar{a}^*}\right)\right]/(i\Delta),\\
&\Delta = 4\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0,\\
&5.\ \Delta = 0,\ 2\alpha\left(b^* + 2\omega\sqrt{-a^*\bar{a}^*}\right) = \beta\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{-A^*\bar{A}^*}\right),\\
&2\alpha\rho_1 + \beta\rho_2 = i\left(B^* + 2\varkappa\sqrt{-A^*\bar{A}^*}\right), \quad \text{где} \quad \varkappa \pm 1, \omega \pm 1,\\
&\rho_2 \text{ — произвольное малое вещественное число.}
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

5.5. Второе укорочение $\hat{h}_2$. Согласно (5.8), (5.14), (5.16), (5.17)

$$\widehat{h}_2 = \alpha u_1^2 v_1^2 + \beta u_1 v_1 u_2 v_2 + \gamma u_2^2 v_2^2 + \delta v_1^2 u_2^4 + C^* v_1^2 + a^* u_2^2.$$

Поэтому система (4.2) для $\hat{h} = \hat{h}_2$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
\hat{h}_{u_1} &= 2\alpha u_1 v_1^2 + \beta v_1 u_2 v_2 = v_1(2\alpha u_1 v_1 + \beta u_2 v_2) = 0\,,\\
\hat{h}_{v_1} &= 2\alpha u_1^2 v_1 + \beta u_1 u_2 v_2 + 2\delta v_1 u_2^4 + 2C^* v_1 = 0\,,\\
\hat{h}_{u_2} &= \beta u_1 v_1 v_2 + 2\gamma u_2 v_2^2 + 4\delta v_1^2 u_2^3 + 2a^* u_2 = 0\,,\\
\hat{h}_{v_2} &= \beta u_1 v_1 u_2 + 2\gamma u_2^2 v_2 = u_2(\beta u_1 v_1 + 2\gamma u_2 v_2) = 0\,.
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

Если v_1 и $u_2 \neq 0$, то подсистема из первого и четвёртого уравнений (5.21) имеет решение только при $\Delta = 4\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, и это решение есть

$$2\alpha u_1 v_1 + \beta u_2 v_2 = \beta u_1 v_1 + 2\gamma u_2 v_2 = 0. \tag{5.22}$$

В этом случае система (5.21) сводится к системе

$$\delta u_2^4 + C^* = 0,$$

$$2\delta v_1^2 u_2^2 + a^* = 0.$$

Решения последних трёх уравнений суть

$$u_2 = \omega\sqrt[4]{-\frac{C^*}{\delta}},\, \omega = \pm 1,\, \pm i;$$

$$v_1 = \varkappa\omega\sqrt{\frac{a^*}{2\sqrt{-\delta C^*}}},\, \varkappa = \pm 1, \tag{5.23}$$

$$v_2 - \text{произвольно} \neq 0,$$

$$u_1 = -\frac{2\gamma}{\beta}\frac{u_2 v_2}{v_1} = -\frac{2\gamma\varkappa}{\beta}\sqrt{\frac{2C^*}{a^*}}\, v_2$$

при $C^* \neq 0$ и $a^* \neq 0$. Они образуют 8 семейств. При $s = 1, \tau = \mu^{-1}$ и $\tau \to \infty$ имеем на этом решении

$$u_1 = \text{const}\cdot\tau^{p_1}, \quad v_1 = \text{const}\cdot\tau^{-1/4}, \quad u_2 = \text{const}\cdot\tau^{-1/4}, \quad v_2 = \text{const}\cdot\tau^{p_1},$$

т. е. векторный порядок $P = \left(p_1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, p_1\right)$. Он должен лежать в конусе укорочения $\mathbf{U}_1^{(2)} \bigcap \overline{K}$, описанном в (5.7), т.е.

$$\left(p_1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, p_1\right) = a\left(0, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right).$$

Это возможно только при $a = \frac{1}{2}, b = 1$. Тогда $p_1 = -\frac{1}{2}$. Следовательно, произвольное v_2 должно иметь порядок $\sqrt{\mu}$.

При этом согласно (5.19) вещественные части решения (5.23) выделяются условиями

$$\text{Re}(u_1 v_1) = 0, \quad \text{Re}(u_2 v_2) = 0,.$$

5.6. Третье укорочение $\hat{h}_3$. Согласно (5.8), (5.15), (5.16), (5.17)

$$\hat{h}_3 = \alpha u_1^2 v_1^2 + \beta u_1 v_1 u_2 v_2 + \gamma u_2^2 v_2^2 + \varepsilon u_1^2 v_2^4 + A^* u_1^2 + c^* v_2^2\,.$$

Аналогично разделу 5.5 получаем решение системы (4.2) при u_1 и $v_2 \neq 0$ и $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} & v_2 = \omega \sqrt[4]{-\frac{A^*}{\varepsilon}}, \quad \omega = \pm 1, \ \pm i, \\ & u_1 = \varkappa\, \omega \sqrt{\frac{c^*}{2\sqrt{-\varepsilon A^*}}}, \quad \varkappa = \pm 1, \\ & u_2 \text{ — произвольно}, \\ & v_1 = -\frac{2\gamma}{\beta} \varkappa \sqrt{\frac{2A^*}{c^*}} u_2 \,. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Они образуют 8 семейств.

5.7. Общая ситуация. Итак, получены следующие 26 семейств неподвижных точек:

- семейства 2 и 3 из (5.20) при любых параметрах;
- семейства 4 из (5.20) при $\Delta \neq 0$;
- семейства 5 из (5.20), семейства (5.23) и (5.24) при $\Delta = 0$.

Но нет уверенности, что здесь найдены первые приближения всех локальных семейств неподвижных точек приведённой нормальной формы системы Гамильтона. Это требует ещё поиска укороченных систем, которые не являются гамильтоновыми, в конусах $\mathbf{U}_2^{(1)}, \ldots, \mathbf{U}_9^{(1)}, \mathbf{U}_1^{(0)}, \ldots, \mathbf{U}_4^{(0)}$ и их дальнейшего анализа.

Рассмотренная здесь задача возникает при изучении движений спутника на слабо эллиптической орбите вблизи параметрического резонанса [7], там число s малых параметров равно 3.

6. Заключение

Для применения описанных методов нужны алгоритмы вычисления:

(i) коэффициентов нормальной формы гамильтониана;

(ii) разложений семейств неподвижных точек приведённой нормальной формы.

Вычисления (i) описаны в [4], вычисления (ii), основанные на [3,5,6], ещё нуждаются в программах, использующих компьютерную алгебру.

Список литературы

[1] Брюно А.Д. Нормальная форма периодической системы Гамильтона с n степенями свободы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 223. 15 с. doi:10.20948/prepr-2018-223 URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-223

[2] Брюно А.Д. Ограниченная задача трёх тел. М.: Наука, 1990.

[3] Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.

[4] Журавлев В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М. Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015. 304 с.

[5] Fukuda K. Exact algorithms and software in optimization and polyhedral computation // Proceed. ISSAC'08 of XXI International Symposium on Symbolic and Algebraic Computations, ACM NY, USA, 2008, 333–334.

[6] Barber C. B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H. T. The Quickhull algorithm for convex hulls // ACM Trans. on Mathematical Software, 22(4):469–483, Dec. 1996., http://www.qhull.org.

[7] Маркеев А.П. О вращательном движении динамически симметричного спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. 1967. Т. 5, № 4, с. 530–539.

Список иллюстраций

Оглавление