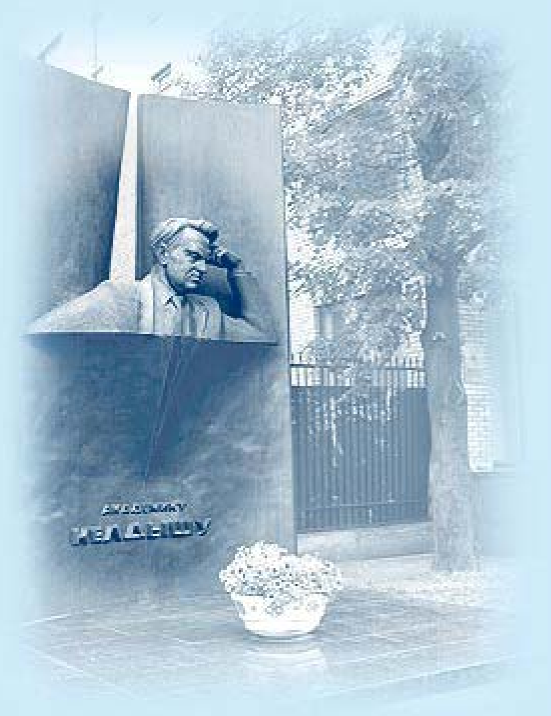
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 68 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колмычков В.В., Мажорова О.С.

Исследование конвективных структур вблизи порога устойчивости в жидкостях с переменной теплопроводностью

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колмычков В.В., Мажорова О.С. Исследование конвективных структур вблизи порога устойчивости в жидкостях с переменной теплопроводностью // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 68. 16 с. doi:10.20948/prepr-2019-68
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-68

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

В.В. Колмычков, О.С. Мажорова

Исследование конвективных структур вблизи порога устойчивости в жидкостях с переменной теплопроводностью

Москва — 2019

Колмычков В.В., Мажорова О.С.

Исследование конвективных структур вблизи порога устойчивости в жидкостях с переменной теплопроводностью

Работа посвящена численному исследованию устойчивых конвективных структур, возникающих вблизи порога устойчивости в жидкости, коэффициент температуропроводности которой зависит от температуры или от вертикальной координаты. Основное внимание уделяется изучению влияния значения числа Прандтля на форму конвективного движения при различном характере изменения температуропроводности.

Ключевые слова: Конвекция Рэлея–Бенара, небуссинесковская жидкость, конвективная неустойчивость, численное моделирование, устойчивые планформы, валы, шестиугольные ячейки, число Прандтля, переменная теплопроводность.

Viatcheslav Victorovich Kolmychkov, Olga Semenovna Mazhorova

Investigation of convective structures near the stability threshold in liquids with non-uniform thermal conductivity

The paper numerically investigates stable convective structures in a fluid with thermal conductivity variyng with height or temperature. The main focus of the paper is an analysis of Prandtl number effect on the planform selection with different conductivity types.

Key words: Rayleigh–Bénard convection, convective stability, non-Boussinesq fluid, numerical simulation, stable planforms, rolls, hexagons, Prandtl number, non-uniform thermal conductivity

1. Введение

Теоретические исследования Ф.Буссэ [1] и И.Палма [2] показали, что в области высоких значений числа Прандтля жидкость с температуропроводностью, зависящей от температуры, вблизи порога устойчивости допускает движение в форме шестиугольных ячеек. Тип этих ячеек определяется направлением выпуклости профиля температуры в отсутствие движения. Жидкость с температуропроводностью, зависящей от вертикальной координаты, ведет себя аналогичным образом. При малых значениях числа Прандтля поведение жидкости полностью меняется [3], [4]. Температуропроводность, зависящая от температуры, приводит к движению в форме валов, а температуропроводность, зависящая от вертикальной координаты, — к движению в форме валов или шестиугольных ячеек. Направление циркуляции в ячейках при больших и малых значениях числа Прандтля противоположно. Целью данной работы является исследование различий в поведении двух типов жидкостей в зависимости от значения числа Прандтля.

В работе методом математического моделирования исследуется форма установившегося конвективного движения вблизи порога устойчивости при больших, средних и малых значениях числа Прандтля в жидкости с переменной температуропроводностью. Основновное внимание уделяется сравнению механизмов отбора устойчивых конвективных течений в различных типах жидкостей.

2. Постановка задачи

Расширим приближение Обербека–Буссинеска [5] на случай зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и вертикальной координаты. Уравнения термогравитационной конвекции ньютоновской жидкости в безразмерной форме запишем следующим образом:

$$\partial_t \mathbf{V} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p + \Delta\mathbf{V} + \frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}} T\mathbf{e}_z, \tag{1}$$

$$div\mathbf{V} = (\nabla\cdot\mathbf{V}) = 0,$$

$$\mathrm{Pr}\,[\partial_t T + (\mathbf{V}\cdot\nabla)T] = div(\chi grad\, T) + \mathrm{q}. \tag{2}$$

Здесь $\partial_\xi \equiv \partial/\partial\xi$, t – время, x, y, z – декартовы координаты, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, $\mathbf{V}(t,x,y,z){=}(V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости, $p(t,x,y,z)$ – давление, $T(t,x,y,z)$ – температура, $\mathbf{e}_z{=}(0,0,1)$. Безразмерная температура вводится по формуле $T{=}(T^d{-}T^d{}_{top})/\delta T^d$, где T^d – размерная температура, $\delta T^d{=}T^d_{bot}{-}T^d_{top}$ – разность температур на верхней и нижней границах в отсутствие движения. Коэффициент температуропроводности χ^d нормируем на его значение на верхней границе: $\chi^d_0{=}\chi^d(1, T^d_{top})$, тогда безразмерное значение определяется $\chi{=}\chi^d(z, T^d)/\chi^d_0$. В качестве масштаба измерения длины выбран вертикальный размер области H, масштаб времени – $t_\nu{=}H^2/\nu$, давления – $\rho_0\nu\chi^d_0/H^2$, ν – коэффициент кинематической вязкости.

В уравнения (1)-(2) входят следующие безразмерные параметры: число Рэлея Ra$=\beta g\delta T^d H^3/(\nu\chi^d_0)$, где β – коэффициент теплового расширения, g – модуль ускорения свободного падения; число Прандтля Pr $= \nu/\chi^d_0$ и мощность внутренних источников тепла q $= Qt_\nu/\delta T^d$, Q – размерная мощность источников тепла.

Задача решается в прямоугольной области $\Omega{=}[0, L_x]{\times}[0, L_y]{\times}[0, 1]$. Температура нижней границы $T|_{z=0}{=}1$, верхней — $T|_{z=1}{=}0$, боковые стенки теплоизолированы. Для скорости на всей границе выполняются условия прилипания: $V = 0$.

В начальный момент времени $t = 0$ жидкость находится в состоянии покоя и имеет соответствующее равновесное распределение температуры. В начальное распределение температуры в каждой точке плоскости $z = 0.5$ (кроме границ) вносится случайное возмущение. Все расчеты выполнены для значений числа Рэлея, близких к критическому.

3. Численный метод

Численное моделирование осуществлялось методом конечных разностей [6], [7]. Использовался полунеявный алгоритм типа ”предиктор-корректор” [6]. По времени исходные уравнения аппроксимируются с первым порядком точности, по пространству, на равномерной сетке, — со вторым. Аппроксимация конвективных членов не вносит вклад в баланс кинетической энергии и квадрата темпаратуры [7], [8]. Метод ранее успешно использовался для исследования конвекции Рэлея–Бенара [9–12].

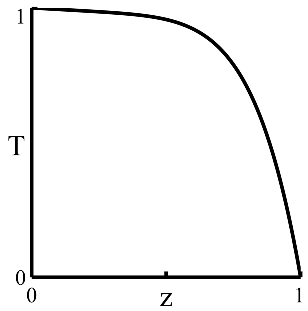
Расчеты проводились в области $[0, 15]{\times}[0, 15]{\times}[0, 1]$ на сетке $128{\times}128{\times}16$, что обеспечивает разумный компромисс между достаточно точным воспроизведением критических параметров процесса и затратами машинного времени на расчет одного варианта. Шаг по времени (τ) варьировался в зависимости от значения числа Прандтля: $\tau = 0.5$ — для больших значений Pr и $\tau = 0.01$ при малых.

4. Результаты расчетов

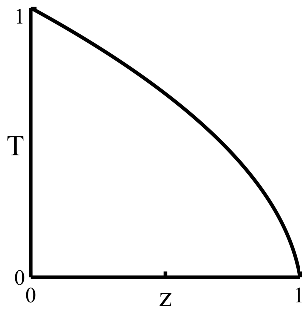
4.1. Температуропроводность, зависящая от вертикальной координаты

В работе [2] показано, что устойчивой стационарной формой течения при высоких значениях числа Прандтля являются ячейки. При малых Прандтлях возможны шестиугольные ячейки и двумерные валы [3]. Направление циркуляции жидкости в ячейках определяется знаком $\partial\chi/\partial z$. Ячейки, в центре которых жидкость движется вверх, называются up-ячейками. Ячейки с продивоположным направлением циркуляции – down-ячейками.

Рассмотрим два типа зависимости коэффициента температуропроводности от z: $\chi{=}(0.01{+}0.99z^5)^{-1}$ и $\chi{=}\sqrt{121-120z}$, $\partial\chi/\partial z{<}0$. В отсутствие движения формируются выпуклые вверх профили температуры (рис. 1), отличающиеся величиной отклонения от линейного профиля.



(a) $\chi = (0.01{+}0.99z^5)^{-1}$

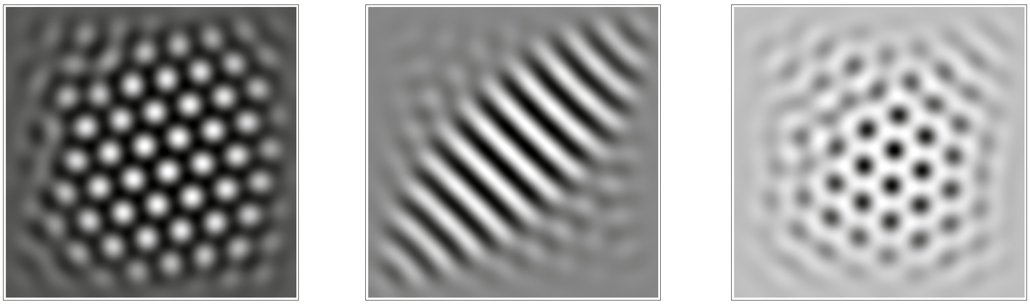


(b) $\chi = \sqrt{121-120z}$

Рис. 1. Стационарный профиль температуры для разных зависимостей теплопроводности от вертикальной координаты.

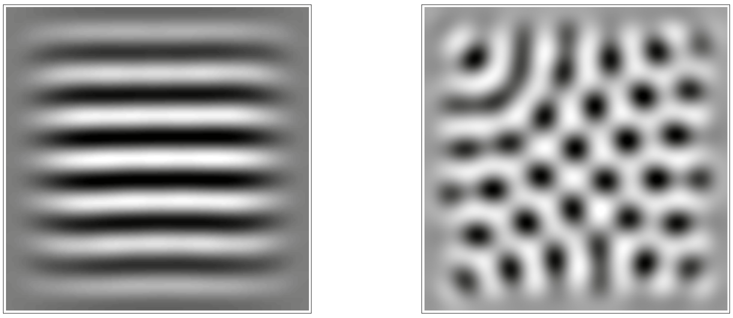
Расчеты показывают, что при больших значениях числа Прандтля для обоих типов зависимости течение имеет форму шестиугольных down-ячеек, при средних — валов (рис. 2, 3). Для малых значений числа Прандтля наблюдаются различия: при большей выпуклости профиля температуры движение имеет форму шестиугольных up-ячеек (рис. 2a), при меньшей — двумерных валов (рис. 3a).

Результаты расчетов подтверждают выводы [2], [3]: в жидкости, теплопроводность которой зависит от вертикальной координаты, при больших значениях числа Прандтля предпочтительной формой течения являются шестиугольные ячейки, при средних значениях — двумерные валы. Для малых значений числа Прандтля могут наблюдаться как валы, так и ячейки, тип которых противоположен наблю-



(a) Pr $= 0.01$, $t = 17t_\nu$ (b) Pr $= 1$, $t = 80t_\nu$ (c) Pr $= 100$, $t = 650t_\nu$

Рис. 2. Температура в плоскости z=0.5, Ra=325, Ra$_{cr}$≈320, χ=$(0.01{+}0.99z^5)^{-1}$. Светлые участки соответствуют высокой температуре, темные – низкой.



(a) Pr $= 0.0001$, $t = 76t_\nu$ (b) Pr $= 100$, $t = 2761t_\nu$

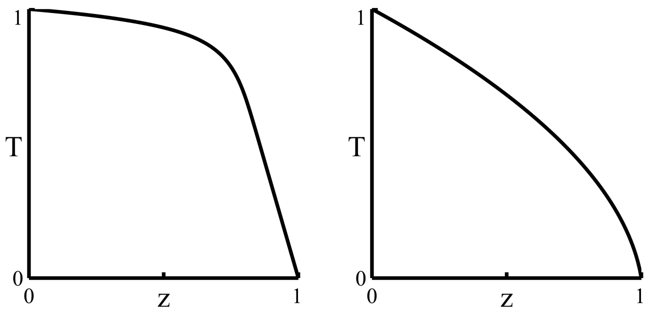
Рис. 3. Температура в плоскости z=0.5, Ra=13900 ≈ Ra$_{cr}$, $\chi = \sqrt{121 - 120z}$.

даемому при больших значениях числа Прандтля. Валы формируются в случае стационарного профиля температуры, близкого к линейному. Вопрос о том, какие именно факторы определяют преобладание валов над ячейками при различных значениях числа Прандтля, требует специального изучения.

4.2. Зависимость температуропроводности от температуры

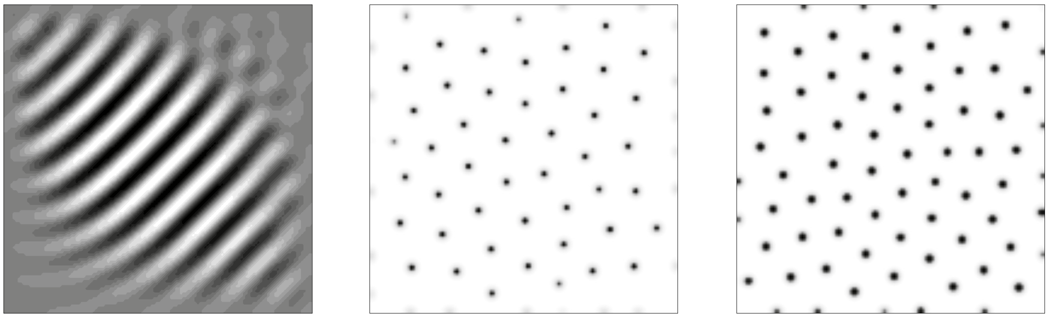
Пусть теперь χ=$1 + 40T^{15}$, Ra$_{cr}$≈12250. В этом случае профиль температуры в отсутствие движения близок к профилю температуры при χ=$(0.01{+}0.99z^5)^{-1}$ (рис. 1a, 4a). Для больших значений числа Прандтля в расчетах устанавливается течение в виде шестиугольных down-ячеек (рис. 5) , как и при χ=$(0.01{+}0.99z^5)^{-1}$ (рис. 2c). Для малых значений числа Прандтля движение имеет форму валов, в отличие от χ=$(0.01{+}0.99z^5)^{-1}$, где наблюдались ячейки.

Рассмотрим, как влияет перепад величины температуропроводности на структуру шестиугольных ячеек. На рисунке 6 изображено поле температуры, полученное с χ=$1 + 10T^{15}$. Сравнение с рисунком 5b показывает, что уменьшение пере-



(a) $\chi = 1 + 40T^{15}$ (b) $\chi(T) = 1 + 10T$

Рис. 4. Стационарный профиль температуры для разных зависимостей теплопроводности от вертикальной координаты.



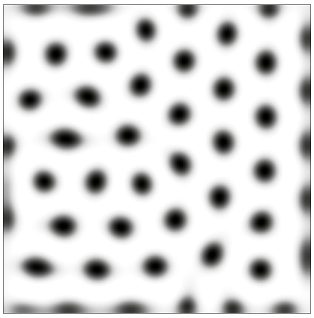
(a) $\mathrm{Pr} = 10^{-4}$, $t = 86t_\nu$ (b) $\mathrm{Pr} = 1$, $t = 42t_\nu$ (c) $\mathrm{Pr} = 100$, $t = 340t_\nu$

Рис. 5. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, Ra=12250, $\chi = 1 + 40T^{15}$.

пада температуропроводности между верхом и низом области приводит к расширению холодных нисходящих потоков.

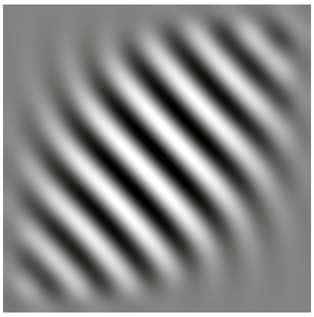
Еще одна серия расчетов была проведена для $\chi{=}1{+}10T$, $\mathrm{Ra}_{cr}{\approx}30400$. В отсутствие движения профиль температуры совпадает с профилем для $\chi{=}\sqrt{121-120z}$ (рис. 1 и 4). Результаты расчетов, представленные на рисунке 7, подтверждают полученную выше закономерность: при больших значениях числа Прандля наблюдаются ячейки такого же типа, что и для $\chi{=}\sqrt{121-120z}$. При малых значениях числа Прандтля течение имеет форму валов.

Таким образом, в случае жидкости, коэффициент температуропроводности которой зависит от температуры, при больших значениях числа Прандтля течение имеет форму шестиугольных ячеек, направление циркуляции в которых определяется направлением выпуклости профиля температуры в отсутствие движения [3], [1]. При малых значениях числа Прандтля для всех рассмотренных вариантов зависимости температуропроводности от температуры наблюдаются течения в форме валов. Результат этот, на первый взляд, кажется неожиданным: почему при одинаковых невозмущенных профилях температуры зависимость $\chi(z)$ при-

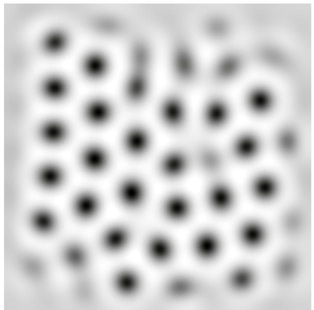


(a) Pr $= 1$, $t = 60t_\nu$

Рис. 6. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, Ra=3000, $\chi = 1 + 10T^{15}$.



(a) Pr $= 10^{-3}$, $t = 200t_\nu$



(b) Pr $= 100$, $t = 50t_\nu$

Рис. 7. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, Ra=15750, $\chi(T)$=1+10T.

водит при малых значениях числа Прандтля к формированию ячеек, а при $\chi(T)$ – к валам?

4.3. Двойственная природа температуропроводности, зависящей от температуры

Рассмотрим случай $\chi(T)$=1+40T^{15}. Температуру представим в виде T=T_0+$\tilde{T}$, где T_0 — стационарный профиль температуры, $\tilde{T}$ — отклонение от стационарного профиля. Легко проверить, что $\partial_z T_0 = -3.5/(1 + 40T_0^{15})$.

Пусть $\tilde{T}$ мало, что справедливо для малых значений числа Прандтля и является стандартным допущением при больших [1]. Выполним разложение $\chi(T)$ в ряд по малому параметру и, пренебрегая членами высокого порядка малости, запишем оператор Лапласа в уравнении теплопроводности в виде:

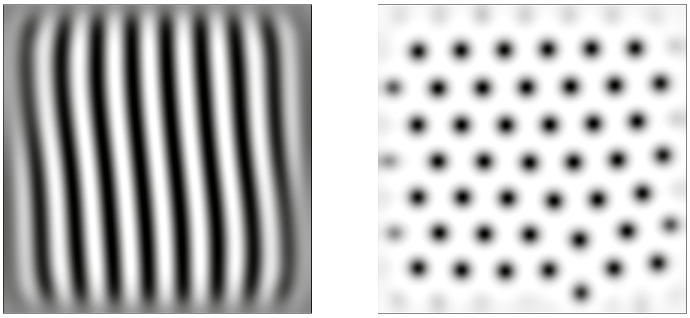
$$div(\chi(T)\nabla T) \approx div(\chi(T_0)\nabla T + \partial_T\chi(T)\tilde{T}\nabla T_0) = div(\chi_z(z)\nabla T) + q_{sp}, \text{ где}$$

$$\chi_z = 1 + 40T_0(z)^{15} \tag{3}$$

$$q_{sp} = \partial_z(\partial_T\chi(T)\tilde{T}\partial_z T_0) = \partial_z(f(z)\cdot\tilde{T}) \tag{4}$$

$$f(z) = -40 \cdot 15 \cdot 3.5T_0^{14}/(1 + 40T_0^{15}). \quad (5)$$

Сравним решения задачи (1)-(2) при χ=1+$40T^{15}$, q=0 с ее решениями при χ=χ_z, q=q_{sp} из (3), (4). В отсутствие движения обе задачи имеют одинаковый стационарный профиль температуры. Результаты численного моделирования показывают, что критическое значение числа Рэлея задачи с источником составляет Ra$_{cr}$≈12900, что отличается от критического значения при $\chi(T)$ на 5%. Типы наблюдаемых в расчетах вблизи порога устойчивости течений совпадают: в обоих случаях для больших значений числа Прандтля устанавливается течение в виде шестиугольных down-ячеек, для малых значений движение имеет форму валов (рис. 5, 8).



(a) Pr $= 10^{-2}$, $t = 30t_\nu$ (b) Pr $= 1$, $t = 200t_\nu$

Рис. 8. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, Ra=12900, χ_z и q.

Таким образом, с точки зрения формы наблюдаемых стационарных течений жидкость с температуропроводностью, зависящей от температуры, ведет себя также как жидкость с температуропроводностью, зависящей от вертикальной координаты и с внутренними источниками тепла специального вида.

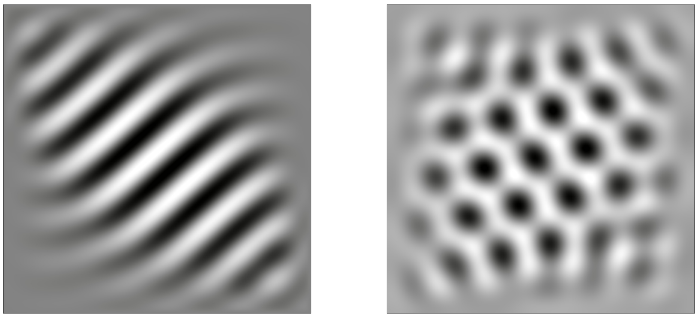
4.4. Внутренние источники тепла

Попытаемся определить влияние внутренних источников тепла (4)-(5) на формирование структуры течения. Для этого рассмотрим упрощенную задачу с постоянной температуроводностью (χ=1) и с внутренними источниками тепла вида:

$$\tilde{q} = \alpha \cdot \partial_z(f(z) \cdot \tilde{T}). \quad (6)$$

В отсутствие движения источник равен нулю и профиль температуры линейно зависит от вертикальной координаты, как в задаче Рэлея–Бенара. Источник (6) является источником (4), умноженным на α. Источник (4)-(5) соответствует температуропроводности $\chi=1+40T^{15}$, т.е. в среднем по области в отсутствие движения $\chi=3.5$. В новой задаче температуропроводность $\chi=1$, и источник должен быть уменьшен пропорционально, $\alpha\approx 0.28=3.5^{-1}$, иначе может произойти экспоненциальный рост температуры. Мы рассматриваем α в диапазоне от 0.01 до 0.5.

При $\alpha=0.1$ критическое значение числа Рэлея составляет $\mathrm{Ra}_{cr}\approx 1520$. Наблюдаемые в расчетах вблизи порога устойчивости течения имеют форму, аналогичную случаю $\chi(T)$: для больших значений числа Прандтля устанавливается течение в виде шестиугольных down-ячеек, для малых значений движение имеет форму валов (рис.9).



(a) $\mathrm{Pr}=10^{-4}$, $t=225t_\nu$ (b) $\mathrm{Pr}=1$, $t=500t_\nu$

Рис. 9. Поле температуры в плоскости $z=0.5$, Ra=15200, $\chi=1$, $\tilde{q}=0.1q$.

Формирование валов при малых значениях числа Прандля и ячеек при больших наблюдается и для бо́льших значений параметра α вплоть до $\alpha\approx 0.5$, при котором начинается бесконечный рост температуры.

Результаты расчетов с малым значением коэффициента $\alpha=0.01$ показывают, что критическое значение числа Рэлея составляет $\mathrm{Ra}_{cr}\approx 1720$ и практически не отличается от аналогичного значения в задаче Рэлея–Бенара. Стационарные течения вблизи порога устойчивости для больших и малых значений числа Прандля имеют форму валов, т.е., как и следовало ожидать, при малой мощности источника задача превращается в классическую задачу Рэлея–Бенара.

4.5. Упрощенные внутренние источники тепла

Внутренние источники тепла (4)-(5) определяются двумя факторами: функцией $f(z)$, связанной с конкретным видом зависимости температуропроводности от температуры, и величиной $\partial_z\tilde{T}$, связанной с отклонением температуры от диффузионного профиля, которая не зависит от конкретного вида $\chi(T)$. Чтобы понять, какой из факторов играет ключевую роль, рассмотрим задачу с постоянной теплопроводностью, и с упрощенными внутренними источниками тепла вида:

$$\bar{q} = \bar{\alpha} \cdot \partial_z(\bar{f}(z) \cdot \tilde{T}), \tag{7}$$

$$\bar{f}(z) = -1. \tag{8}$$

Интегральная мощность источников тепла (7)-(8) и (4)-(5) по всей области равна нулю. Сравним их мощность в нижней части области высоты z.

$$\int_0^z \int_{xy} \tilde{q} dz dx dy = \alpha f(z) \int_{xy} \tilde{T} dx dy, \tag{9}$$

$$\int_0^z \int_{xy} \bar{q} dz dx dy = -\bar{\alpha} \int_{xy} \tilde{T} dx dy. \tag{10}$$

Чтобы источники (7)-(8) и (4)-(5) имели равную мощность, необходимо обеспечить выполнение равенства $\alpha f(z) = -\bar{\alpha}$ для всех z. Потребуем выполнение этого равенства в среднем по z, и учтем, что

$$\int_0^1 f(z) dz = \int_0^1 \partial_{T_0} \chi(T_0) \partial_z T_0 dz = -\int_0^1 \partial_{T_0} \chi(T_0) dT_0 = \chi(0) - \chi(1). \tag{11}$$

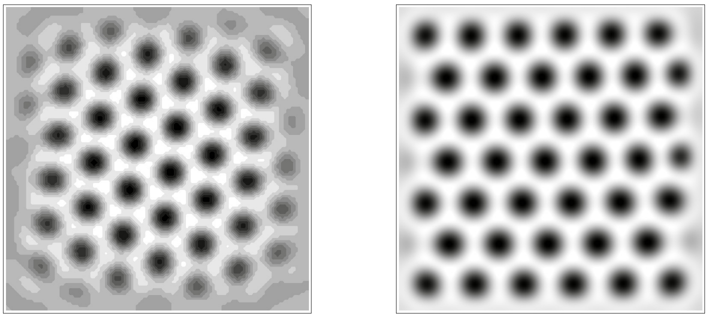
Таким образом, усредненная мощность источников тепла (4)-(5) зависит от перепада температуропроводности на границах области (11). Результаты расчетов полного источника с коэффициентом α следует сравнивать с результатами для упрощенного источника с коэффициентом $\bar{\alpha} = \alpha[\chi(1) - \chi(0)]$. Для $f(z)$ из (5), соответствующего $\chi{=}1{+}40T^{15}$, перепад температуропроводности равен 40.

Выберем $\bar{\alpha} = 5$, что соответствует $\alpha = 0.125$ в полном источнике. Результаты расчетов задачи показывают, что в диапазоне значений числа Прандля от 10^{-6} до 100 (рис. 10) формируются down-ячейки. В полном источнике down-ячейки формируются только при больших значениях числа Прандтля, при малых значениях течение принимает форму двумерных валов.

Рассмотрим теперь меньшее значение $\bar{\alpha}{=}1$ (соответствует $\alpha = 0.025$). В этом случае для больших значений числа Прандля наблюдаются down-ячейки, для малых — двумерные валы (рис. 11), как и в случае полного источника.

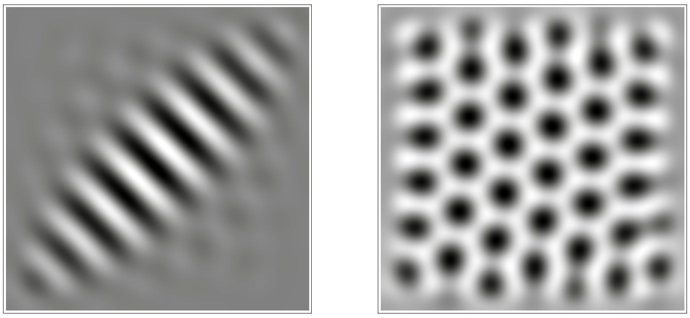
Увеличение параметра выше $\bar{\alpha} \gtrsim 10$ ($\approx \pi^2$, соответствует $\alpha = 0.25$) приводит к бесконечному росту температуры.

Таким образом, при большой величине параметра $\bar{\alpha}$ упрощенные источники тепла во всем диапазоне значений числа Прандтля действуют одинаковым образом – способствуют формированию down-ячеек. Однако существует и некоторая пороговая “небуссинесковскость”, ниже которой при малых значениях числа



(a) $\mathrm{Pr} = 10^{-6}$, $t = 30t_\nu$ (b) $\mathrm{Pr} = 100$, $t = 300t_\nu$

Рис. 10. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, Ra=2100, $\chi = 1$, $Q = 5$.



(a) $\mathrm{Pr} = 10^{-2}$, $t = 30t_\nu$ (b) $\mathrm{Pr} = 10$, $t = 30t_\nu$

Рис. 11. Поле температуры в плоскости $z = 0.5$, Ra=2100, $\chi = 1$, $Q = 1$.

Прандтля в расчетах удается получать только валы. Величина пороговой небуссинесковскости связана со значением коэффициента $\bar{\alpha}$, который зависит от перепада температуропроводности на границах области, т.е. определяется конкретным видом зависимости температуропроводности от температуры. Наличием критической небуссинесковскости упрощенный источник тепла напоминает температуропроводность, зависящую от вертикальной координаты.

5. Заключение

Полученные результаты можно свести в единую таблицу:

<table>
<tr><th rowspan="3">Тип небуссинесковскости</th><th colspan="2">Малый Pr</th><th rowspan="3">Большой Pr</th></tr>
<tr><th colspan="2">Небуссинеск</th></tr>
<tr><th>Слабый</th><th>Сильный</th></tr>
<tr><td>$\chi(z)$</td><td>валы</td><td>up-ячейки</td><td>down-ячейки</td></tr>
<tr><td>$\chi(T)$</td><td colspan="2">валы</td><td>down-ячейки</td></tr>
<tr><td>$\chi(z)$ и q_{sp}</td><td colspan="2">валы</td><td>down-ячейки</td></tr>
<tr><td>$\chi = 1$ и $\tilde{q}$</td><td colspan="2">валы</td><td>down-ячейки</td></tr>
<tr><td>$\chi = 1$ и $\bar{q}$</td><td>валы</td><td>down-ячейки</td><td>down-ячейки</td></tr>
</table>

Под слабым небуссинеском подразумеваются отклонения от приближения Буссинеска, малые по величине, но достаточные для формирования шестиугольных ячеек при высоких значениях числа Прандтля. Если с ростом отклонения от приближения буссинеска появляются новые структуры течения (в нашем случае up-ячейки при малых значениях числа Прандтля), будем называть это сильным небуссинеском.

Из таблицы видно, что при малых значениях числа Прандля и высокой небуссинесковскости $\chi(T)$ порождает течение в форме валов, а $\chi(z)$ – up-ячеек. С другой стороны, воздействие $\chi(T)$ на структуру течения аналогично суммарному воздействию $\chi(z)$ и внутренних источников q_{sp}. Т.е. если $\chi(z)$ в отдельности порождает up-ячейки, то внутренние источники тепла противодействуют up-ячейкам, и в результате получаются валы. Расчеты с внутренними источниками тепла $\tilde{q}$ и $\bar{q}$ подтверждают это – при малых значениях числа Прандля наблюдаются либо валы, либо ячейки down-типа.

Список литературы

1. Busse F.H. The stability of finite amplitude cellular convection and it’s relation to an extremum principle // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 30, no. 4. Pp. 625–649.

2. Palm E. Nonlinear Thermal Convection // Annual Review of Fluid Mechanics. 1975. Vol. 7. Pp. 39–61.

3. Колмычков В.В., Мажорова О.С. Исследование конвективных структур в небуссинесковской жидкости вблизи порога устойчивости. Часть первая — анализ упрощенных моделей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. no. 64. P. 30. doi: 10.20948/prepr-2018-64.

4. Колмычков В.В., Мажорова О.С. Исследование конвективных структур в небуссинесковской жидкости вблизи порога устойчивости. Часть вторая — вычислительный эксперимент // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. no. 210. P. 20. doi: 10.20948/prepr-2018-210.

5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 стр.

6. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: ФизМатЛит, 1994.

7. Колмычков В.В., Мажорова О.С., Попов Ю.П. Анализ алгоритмов решения трехмерных уравнений Навье-Стокса в естественных переменных. 2006. Vol. 42, no. 7. Pp. 932–942.

8. Arakawa A. Computational design for long-term numerical integration of the equation of fluid motion: Two dimensional incompressible flow // J. Comput. Phys. 1966. Vol. 1. Pp. 119–143.

9. Kolmychkov Viatcheslav V., Mazhorova Olga S., Popov Yurii P. et al. Identification of the convective instability in a multi-component solution by 3D simulations // Comptes Rendus Mécanique. 2005. Vol. 333. Pp. 739–745.

10. Колмычков В.В., Мажорова О.С., Попов Ю.П. Математическое моделрование конвективного массопереноса в пространственно трехмерном случае. Часть 1. Подкритическая конвекция // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2003. no. 92. P. 28.

11. Kolmychkov V. V., Mazhorova O. S., Shcheritsa O. V. Numerical study of convection near the stability threshold in a square box with internal heat generation // Physics Letters A. 2013. Vol. 377. Pp. 2111–2117.

12. Kolmychkov V. V., Shcheritsa O. V., Mazhorova O. S. Thermal convection in a cylinder and the problem of planform selection in an internally heated fluid layer // Physical Review E. 2016. Vol. 94.

Содержание