



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 69 за 2019 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Батхин А.Б.](#)

О структуре фазового потока
в окрестности
симметричного
периодического решения
системы Гамильтона

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Батхин А.Б. О структуре фазового потока в окрестности симметричного периодического решения системы Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 69. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2019-69](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-69)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-69>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук**

А. Б. Батхин

**О структуре фазового потока в окрестности
симметричного периодического решения
системы Гамильтона**

Москва — 2019

УДК 521.1+531.314

Александр Борисович Батхин

О структуре фазового потока в окрестности симметричного периодического решения системы Гамильтона. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, Москва, 2019.

Рассматривается автономная система Гамильтона с двумя степенями свободы, инвариантная относительно четверной группы Клейна линейных канонических автоморфизмов расширенного фазового пространства системы. Строится последовательность симплектических преобразований матрицы монодромии симметричного периодического решения системы. С помощью этих преобразований исследуется структура и перестройка фазового потока в окрестности такого симметричного периодического решения. Показано, что перестройки, соответствующие кратному увеличению периода, происходят по несколько иному сценарию для решений, обладающих двойной симметрией.

Ключевые слова: периодическое решение, симметрия, матрица монодромии, задача Хилла, бифуркация периодического решения.

Alexander Borisovich Batkhin

On the structure of the Hamiltonian phase flow near symmetric periodic solution

We consider an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom, which is invariant under Klein four-group K_4 of linear canonical automorphisms of the extended phase space of the system. The sequence of symplectic transformations of monodromy matrix of a symmetric periodic solution is proposed. Three types of bifurcations of a family of symmetric periodic solutions – saddle-node bifurcation, pitch-fork bifurcation and period multiplying bifurcation – are investigated by means of these transformations. For last two types of bifurcations different scenarios are shown for the case of doubly symmetric periodic solutions of the Hill problem.

Key words: periodic solution, symmetry, monodromy matrix, Hill problem, bifurcation of periodic solution.

Работа поддержана РФФИ, грант № 18-01-00422а.

© А. Б. Батхин, 2019

© Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2019

1. Введение

Восходящий к Пуанкаре подход к исследованию фазового потока неинтегрируемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений состоит в поиске некоторого «скелета», состоящего из иерархической структуры инвариантных многообразий различных размерностей. Наиболее простыми компонентами этой структуры являются положения равновесия и семейства периодических решений. Один из способов вычисления периодических решений использует технику *порождающих решений*. Она состоит в том, что в исходной системе неким образом выделяется интегрируемая подсистема, а полная система рассматривается как её некоторое малое возмущение. Для интегрируемой подсистемы находится общее решение, а с его помощью вычисляются порождающие решения, т.е. такие решения полной задачи, которые при стремлении малого параметра к нулю стремятся к порождающим.

Хорошо известно, что интегрируемость системы ОДУ связана с наличием достаточного числа первых интегралов этой системы, что, в силу теоремы Эмми Нётер, означает наличие некоторого количества непрерывных групп симметрий исходных уравнений. В общем случае возмущение интегрируемой системы разрушает часть этих групп инвариантов, превращая полную систему в неинтегрируемую. Однако зачастую в силу специфики возмущения от непрерывной группы симметрий может остаться та или иная дискретная группа. Как следствие, должны существовать решения возмущённой системы уравнений, инвариантные относительно такой группы. Например, возмущение меньшего из двух активных тел в ограниченной задаче трёх тел приводит к разрушению интеграла площадей, связанного с группой $SO(1)$ преобразований конфигурационного пространства задачи, но приводит к появлению дискретной группы порядка 2 линейных канонических преобразований расширенного фазового пространства и, как следствие, к наличию периодических решений, чьи орбиты симметричны относительно оси OX . Другие примеры систем Гамильтона с различными дискретными группами симметрий см., например, в [1].

Наличие даже дискретной симметрии уравнений ОДУ часто позволяет существенно упростить процедуру поиска периодических решений. В данной работе рассматривается ситуация, когда некоторая автономная система Гамильтона с двумя степенями свободы, обладающая единственным первым интегралом, — интегралом энергии — имеет дополнительно дискретную группу линейных канонических автоморфизмов расширенного фазового пространства системы. Эта группа изоморфна четверной группе Клейна K_4 , две образующие которой суть обратимые преобразования. Исследуется структура матрицы монодромии невырожденного двояко симметричного периодического решения, с помощью которой вычисляется продолжение семейства периодических решений. В критических решениях семейства рассматриваются различные сценарии ветвления семейства.

Работа состоит из введения, пяти разделов и двух списков: литературы и иллюстраций. В разделе 2 приведено описание представлений четверной группы Клейна и классификация решений системы Гамильтона с учётом симметрии уравнений. В разделе 3 рассматриваются особенности структуры матрицы монодромии симметричного периодического решения, а в разделе 4 — методика продолжения семейства таких решений в некритическом случае. Раздел 5 посвящён анализу возможных сценариев ветвления семейства двояко симметричных решений. Наконец, в разделе 6 рассматривается пример семейства \mathbf{f}_3 двояко симметричных периодических решений плоской круговой задачи Хилла и его поведения в критических решениях. Высказана гипотеза, что «скелет» фазового пространства гамильтоновой системы формируют семейства периодических решений, обладающих наиболее «богатой» группой симметрий.

В работе для проведения некоторых аналитических выкладок использовалась система компьютерной алгебры Maple [2], хотя аналогичные вычисления можно проделать в любой системе, позволяющей вычислять базис Грёбнера, например в открытой системе SymPy [3].

Предварительные результаты работы докладывались на международных конференциях: Polynomial Computer Algebra '2019, 15–20 апреля в Санкт-Петербурге [4] и Computer Algebra, 17–21 июня в Москве [5].

Пользуясь возможностью, автор благодарит профессора А.Д. Брюно за плодотворное обсуждение работы и её поддержку.

2. Дискретная группа автоморфизмов системы Гамильтона

Рассмотрим автономную систему Гамильтона с двумя степенями свободы с гамильтонианом $H(\mathbf{z})$ в случае общего положения, где $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — вектор фазового пространства $\mathbb{M} \equiv \mathbb{R}^4$, т. е. система канонических уравнений

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \operatorname{grad} H(\mathbf{z}), \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}^2 \\ -\mathbf{E}^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

имеет единственный первый интеграл

$$H(\mathbf{z}) = h. \quad (2)$$

Положим, что система (1) инвариантна относительно конечной группы линейных канонических автоморфизмов расширенного фазового пространства $\tilde{\mathbb{M}} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{M}$, изоморфной четверной группе Клейна V_4 .

Четверная группа Клейна V_4 (или диэдральная группа $D_2 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$) — это группа порядка 4, являющаяся наименьшей нециклической абелевой группой, а также 2-примарной абелевой группой. Она задаётся либо соотношениями

$$\langle g_1^2 = g_2^2 = (g_1 \circ g_2)^2 = id \rangle, \quad (3)$$

где $g_{1,2}$ — два генератора группы, либо соотношениями

$$\langle r^2 = s^2 = id, s^{-1}rs = r^{-1} \rangle,$$

где r — поворот, а s — симметрия. Известно, что любую группу диэдра D_n можно представить как группу линейных преобразований плоскости, состоящей из n операторов поворота r_k , $k = 0, \dots, n-1$, на угол $2\pi k/n$, и n операторов симметрии s_k , $k = 0, \dots, n-1$, относительно прямой, составляющей угол $\pi k/n$ с осью абсцисс. Для D_2 выберем два генератора $g_1 \cong s_0$ и $g_2 \cong s_1$, тогда $g_3 = g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1 = r_1$. Для конфигурационного пространства \mathbb{R}^2 автоморфизмы g_1 и g_2 задаются соответственно матрицами $\mathbf{S}_0 = \text{diag}\{1, -1\}$ и $\mathbf{S}_1 = \text{diag}\{-1, 1\}$. Следовательно, с учётом того, что автоморфизмы $g_{1,2}$ обращают время, в расширенном фазовом пространстве \mathbb{M} они имеют вид

$$\begin{aligned} g_1 : (t, \mathbf{z}) &\rightarrow (-t, \mathbf{G}_1 \mathbf{z}), \quad \mathbf{G}_1 = \text{diag}\{+1, -1, -1, +1\}, \\ g_2 : (t, \mathbf{z}) &\rightarrow (-t, \mathbf{G}_2 \mathbf{z}), \quad \mathbf{G}_2 = \text{diag}\{-1, +1, +1, -1\}. \end{aligned}$$

Автоморфизм g_3 в этом случае является центральной симметрией фазового пространства \mathbb{M} :

$$g_3 : (t, \mathbf{z}) \rightarrow (t, \mathbf{G}_3 \mathbf{z}), \quad \mathbf{G}_3 = \text{diag}\{-1, -1, -1, -1\}.$$

Итак, каждый из автоморфизмов g_i , $i = 1, 2, 3$ в силу соотношений (3) является *инволюцией*, но при этом преобразования g_1 и g_2 , в свою очередь, будут *обратимыми* или *реверсивными*, поскольку

$$\frac{d}{dt} g_i(\mathbf{z}) = -\mathbf{J} \text{grad} H(g_i(\mathbf{z})), \quad i = 1, 2.$$

Инвариантные множества $\Sigma_{1,2} \equiv \{\mathbf{z} \mid g_{1,2}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}\}$ преобразований $g_{1,2}$ являются двумерными координатными плоскостями

$$\Sigma_1 : \{x_2 = y_1 = 0\}, \quad \Sigma_2 : \{x_1 = y_2 = 0\}.$$

Инвариантное множество преобразования g_3 состоит из одной точки — начала координат.

Определение 1 ([6]). Пусть $\mathbf{o}(\mathbf{z}_0)$ — орбита системы (1):

$$\mathbf{o}(\mathbf{z}_0) = \{\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда орбита $\mathbf{o}(\mathbf{z}_0)$ называется g -симметричной, если она является инвариантным множеством преобразования g : $g(\mathbf{o}(\mathbf{z}_0)) = \mathbf{o}(\mathbf{z}_0)$.

Теорема 1 ([6]). Пусть $\mathbf{o}(\mathbf{z}_0)$ — орбита системы (1) с обратимой симметрией g . Тогда

(1) орбита $\mathbf{o}(\mathbf{z}_0)$ является g -симметричной тогда и только тогда, когда она пересекает соответствующее инвариантное множество

$$\Sigma(g) = \{\mathbf{z} \mid g(\mathbf{z}) = \mathbf{z}\}.$$

При этом орбита пересекает $\Sigma(g)$ не более чем в двух точках и целиком содержится в $\Sigma(g^2)$.

(2) орбита $\mathbf{o}(\mathbf{z}_0)$ пересекает $\Sigma(g)$ в точности в двух точках тогда и только тогда, когда она — орбита периодического решения (но не положения равновесия) и симметрична относительно автоморфизма g .

Каждое решение $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ системы (1) с начальным условием $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ принадлежит к одному из следующих классов в зависимости от типа симметрии.

- **Несимметричные** решения, которые меняются при любом преобразовании $g_i, i = 1, 2, 3$.
- **Однократно симметричные** решения, которые инвариантны лишь относительно какого-либо одного преобразования $g_i, i = 1, 2, 3$.
- **Двойко симметричные** решения, которые инвариантны относительно любого из преобразований $g_i, i = 1, 2, 3$.

Заметим, что если решение $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ симметрично относительно двух реверсивных автоморфизмов g_1 и g_2 , то оно симметрично относительно преобразования центральной симметрии g_3 . Обратное, вообще говоря, неверно, т.е. среди однократно симметричных решений следует выделять реверсивно симметричные и центрально симметричные.

Пусть $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ — периодическое решение с периодом T :

$$\mathbf{z}(t + T, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0).$$

Периодические решения автономной системы Гамильтона не являются изолированными, а образуют семейства (см. [7, Ch. 6]). Размерности этих семейств равны числу независимых первых интегралов системы Гамильтона. Для автономной неинтегрируемой системы Гамильтона семейства периодических решений являются обычно однопараметрическими, где параметром может служить значение h интеграла (2). Таким образом, каждое периодическое решение семейства однозначно определяется парой функций $\mathbf{z}_0(\lambda)$ и $T(\lambda)$, где λ — параметр семейства.

Как известно (см., например, [8]), семейства периодических решений могут быть либо замкнутыми, либо натурально ограниченными, когда одна или более количественных характеристик решения — наибольшее расстояние от орбиты до начала координат, значение интеграла h или периода T — неограниченно возрастают. При продолжении семейства по параметру λ эти и другие характеристики (например, индекс устойчивости S) периодического решения меняются

гладко вдоль семейства, в то время как симметрия решения является глобальным инвариантом семейства. Семейство решений может пересекаться с другим семейством, разделяя общее решение, но оно всегда может быть единственным образом продолжено через точку пересечения.

3. Фазовый поток системы Гамильтона вблизи периодического решения

3.1. Свойства фазового потока. Динамика фазового потока Φ^t в окрестности решения $\mathbf{z}(t)$ описывается матрицей $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z})$, которая есть решение задачи Коши уравнения в вариациях Пуанкаре

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{J} \text{Hess } H(\mathbf{z}) \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0, \quad \text{rang } Z_0 = 4, \quad (4)$$

где $\text{Hess } H(\mathbf{z})$ — гессиан функции $H(\mathbf{z})$, вычисляемый вдоль решения $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$.

Определение 2. Матрицей монодромии периодического решения (\mathbf{z}_0, T) называется матрица $\mathbf{M} = \mathbf{Z}_0^{-1} \cdot \mathbf{Z}(T, \mathbf{Z}_0)$, а её собственные числа ρ_i , $i = 1, \dots, 4$, называются мультипликаторами.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что $\mathbf{Z}_0 \equiv \mathbf{E}^4$, т. е. матрица $\mathbf{Z}(t, \mathbf{Z}_0)$ есть нормированная фундаментальная матрица системы в вариациях (4).

Приведём здесь основные свойства матрицы монодромии \mathbf{M} , которые будут использоваться в дальнейшем.

1) Пусть $\mathbf{Z}(t)$ — фундаментальная матрица системы (4), тогда

$$\mathbf{Z}(t + T) = \mathbf{Z}(t)\mathbf{M}. \quad (5)$$

2) Матрица \mathbf{M} симплектическая:

$$\mathbf{M}^* \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J}, \quad (6)$$

а её характеристический многочлен $P_\lambda(\mathbf{M})$ возвратный [9]. Для симплектической матрицы \mathbf{M} обратная к ней вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{J}^* \mathbf{M}^* \mathbf{J} = -\mathbf{J} \mathbf{M}^* \mathbf{J}. \quad (7)$$

3) В силу вещественности системы (4) и симплектичности \mathbf{M} её мультипликаторы попарно взаимно комплексно-сопряжённые и взаимно обратные.

4) Вектор фазовой скорости $\mathbf{v}_0 \equiv \mathbf{J} \text{grad } H(\mathbf{z}_0)$ является левым собственным вектором матрицы \mathbf{M} с соответствующим мультипликатором $\rho_1 = +1$. Это следует непосредственно из дифференцирования по \mathbf{z}_0 тождества, задающего групповую структуру $\mathbf{z}(\tau, \mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)) = \mathbf{z}(\tau + t, \mathbf{z}_0)$, при подстановке в него значений $\tau = T$ и $t = 0$:

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{z}}(T) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0.$$

5) Мультипликатор $\rho_1 = \rho_2 = +1$ имеет алгебраическую кратность 2.

6) Поскольку система (1) автономна и обладает первым интегралом (2), то, дифференцируя по \mathbf{z}_0 тождество $H(\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)) = H(\mathbf{z}_0)$, получим, что вектор $\tilde{\mathbf{v}}_1 \equiv \text{grad } H(\mathbf{z}_0)$ является правым собственным вектором матрицы монодромии \mathbf{M} :

$$\text{grad } H(\mathbf{z}_0)\mathbf{M} = \text{grad } H(\mathbf{z}_0).$$

7) Характеристический многочлен $P_\lambda(\mathbf{M})$ матрицы монодромии \mathbf{M} раскладывается на множители

$$P_\lambda(\mathbf{M}) = (\lambda - 1)^2 (\lambda^2 - 2S\lambda + 1),$$

где

$$S = \text{Tr } \mathbf{M}/2 - 1 \quad (8)$$

— индекс устойчивости периодического решения (\mathbf{z}_0, T) .

Величина S позволяет определить характер устойчивости периодического решения в линейном приближении. А именно,

- если $|S| > 1$, то $\rho_{3,4} \in \mathbb{R}$, $\rho_3 = 1/\rho_4$ и решение $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ неустойчиво;
- если $|S| < 1$, то $\rho_3 = \bar{\rho}_4$, $|\rho_3| = |\rho_4| = 1$ и решение $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ орбитально устойчиво;
- критический случай $|S| = 1$ требует дополнительного исследования.

Особо интересен случай, когда индекс устойчивости $S = \cos(2\pi p/q)$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Его впервые рассмотрел А. Пуанкаре в своём знаменитом трактате *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* [10, Гл. XXX]. Этот случай соответствует появлению в окрестности исходного периодического решения так называемых *периодических решений второго рода* по Пуанкаре с периодом $T' = qT$.

3.2. Вычисление матрицы монодромии. В общем случае вычисление матрицы монодромии \mathbf{M} требует одновременного интегрирования двух систем уравнений: исходной системы (1), дающей интегральную кривую $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$, и системы уравнений в вариациях (4) для четырёх начальных условий. Как отмечено в [11], подставляя в (5) значение $t = -T/2$, получим $\mathbf{Z}(T/2) = \mathbf{Z}(-T/2) \mathbf{M}$, откуда

$$\mathbf{M} = \mathbf{Z}^{-1}(-T/2) \mathbf{Z}(T/2) = -\mathbf{J} \mathbf{Z}^*(-T/2) \mathbf{J} \mathbf{Z}(T/2).$$

При этом матрицы $\mathbf{Z}(-T/2)$ и $\mathbf{Z}(T/2)$ можно вычислять параллельно. Численное интегрирование систем (1) и (4) на половине периода даёт более точные результаты, чем интегрирование на всём периоде, особенно для сильно неустойчивых решений.

Рассмотрим вычисление матрицы монодромии симметричного периодического решения. Если периодическое решение симметрично относительно реверсивного преобразования g_i , $i = 1, 2$, то, согласно теореме 1, начальное условие

\mathbf{z}_0 можно выбрать на инвариантном множестве $\Sigma(g_i)$, и тогда через полпериода $\mathbf{z}(T/2, \mathbf{z}_0) \in \Sigma(g_i)$. Инвариантность системы (1) относительно g_i означает инвариантность гамильтониана $H(\mathbf{z})$ и равносильна матричному тождеству

$$\text{Hess } H(\mathbf{z}(-t)) = \mathbf{J}\mathbf{G}_i\mathbf{J}\text{Hess } H(\mathbf{z}(t))\mathbf{G}_i^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

Это означает, что для системы (1) выполнено условие t -инвариантности [12], а матрицы $\mathbf{Z}(-t)$ и $\mathbf{Z}(t)$ для таких систем связаны соотношением

$$\mathbf{Z}(-t) = \mathbf{G}_i^{-1}\mathbf{Z}(t)\mathbf{G}_i, \text{ в частности, } \mathbf{Z}(-T/2) = \mathbf{G}_i^{-1}\mathbf{Z}(T/2)\mathbf{G}_i.$$

Так как матрица $\mathbf{Z}(-T/2)$ симплектическая, то с учетом формулы (7) получаем матрицу монодромии \mathbf{M}_1 , вычисленную от точки \mathbf{z}_0 ,

$$\mathbf{M}_1 = \tilde{\mathbf{G}}_i\mathbf{Z}^*(T/2)\tilde{\mathbf{G}}_i\mathbf{Z}(T/2), \text{ где } \tilde{\mathbf{G}}_i = \mathbf{G}_i\mathbf{J}, \quad \tilde{\mathbf{G}}_i^{-1} = \tilde{\mathbf{G}}_i^* = \tilde{\mathbf{G}}_i. \quad (9)$$

Нетрудно получить матрицу монодромии \mathbf{M}_2 , вычисленную от точки $\mathbf{z}(T/2)$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{Z}(T/2)\tilde{\mathbf{G}}_i\mathbf{Z}^*(T/2)\tilde{\mathbf{G}}_i. \quad (10)$$

Вычисление матриц монодромии $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ по формулам (9) и (10) соответственно предпочтительнее по следующим соображениям. Во-первых, интегрирование системы (4) на половине периода требует меньших вычислительных затрат и дает более точные результаты. Во-вторых, для продолжения некоторых симметричных периодических решений требуется информация о структуре матрицы монодромии как в точке $\mathbf{z}(0)$, так и в точке $\mathbf{z}(T/2)$.

Воспользуемся этими соображениями для выявления свойств матрицы монодромии двойко симметричного периодического решения. Тогда для её вычисления достаточно знать решение системы (4) на четверти периода $\mathbf{Z}(T/4)$. Действительно, пусть начальная точка \mathbf{z}_0 дважды симметричной орбиты расположена на множестве Σ_1 , тогда через четверть периода $\mathbf{Z}(T/4) \in \Sigma_2$. Обозначим через $\mathbf{Z}_1(T/4)$ решение системы (4), соответствующее начальной точке $\mathbf{z}(0)$, а через $\mathbf{Z}_2(T/4)$ — решение, соответствующее начальной точке $\mathbf{z}(T/4)$. Согласно групповому свойству решений имеем $\mathbf{Z}_1(T/2) = \mathbf{Z}_2(T/4)\mathbf{Z}_1(T/4)$. С другой стороны, в силу свойства t -инвариантности уравнения в вариациях относительно преобразования g_2 , имеем

$$\mathbf{Z}_2(-T/4) = \mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{Z}_2(T/4)\mathbf{G}_2 \Rightarrow \mathbf{Z}_2(T/4) = \mathbf{G}_2\mathbf{Z}_2(-T/4)\mathbf{G}_2^{-1}.$$

Используя тот факт, что $\mathbf{Z}_2(-T/4) = \mathbf{Z}_1^{-1}(T/4) = -\mathbf{J}\mathbf{Z}_1^*(T/4)\mathbf{J}$, получаем для $\mathbf{Z}_1(T/2)$ выражение

$$\mathbf{Z}_1(T/2) = \tilde{\mathbf{G}}_1\mathbf{Z}_1^*(T/4)\tilde{\mathbf{G}}_2\mathbf{Z}_1(T/4).$$

Применяя t -инвариантность системы (4) относительно преобразования g_1 , в итоге получим формулы для матриц монодромии \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2

$$\mathbf{M}_1 = \left[\tilde{\mathbf{G}}_1 \mathbf{Z}_1^*(T/4) \tilde{\mathbf{G}}_2 \mathbf{Z}_1(T/4) \right]^2, \quad \mathbf{M}_2 = \left[\mathbf{Z}_1(T/4) \tilde{\mathbf{G}}_1 \mathbf{Z}_1^*(T/4) \tilde{\mathbf{G}}_2 \right]^2. \quad (11)$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что для двойко симметричного периодического решения матрицы монодромии, вычисленные в точках $\mathbf{z}(0)$ и $\mathbf{z}(T/2)$, а также в точках $\mathbf{z}(T/4)$ и $\mathbf{z}(3T/4)$, попарно равны.

Наконец, рассмотрим случай g_3 -инвариантных периодических решений. Пусть \mathbf{z}_0 — начальная точка такого решения, тогда нетрудно видеть, что $\mathbf{z}_1 \equiv \mathbf{z}(T/2, \mathbf{z}_0) = -\mathbf{z}_0$. В силу симметрии векторы фазовой скорости, вычисленные в точках \mathbf{z}_0 и \mathbf{z}_1 , будут равны по абсолютной величине и противоположны по направлению. Следовательно, вектор v_0 является собственным вектором матрицы $\mathbf{Z}(T/2, \mathbf{z}_0)$ и ему соответствует собственное число -1 . Матрица монодромии в этом случае есть

$$\mathbf{M} = \mathbf{Z}^2(T/2, \mathbf{z}_0). \quad (12)$$

Этот факт будет использован в дальнейшем при исследовании удвоения периода двойко симметричных периодических решений.

Особая структура матрицы монодромии реверсивно-симметричного периодического решения приводит к наличию некоторой внутренней симметрии матрицы M :

$$\begin{aligned} m_{33} &= m_{11}, & m_{44} &= m_{22}, & m_{43} &= -m_{12}, \\ m_{23} &= -m_{14}, & m_{34} &= -m_{21}, & m_{41} &= -m_{32}. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что наличие двух симметрий у периодического решения не добавляет дополнительных связей к равенствам (13).

Величина индекса устойчивости S центрально симметричного периодического решения ограничена снизу значением -1 . Это следует непосредственно из того, что след матрицы \mathbf{M} , которая в силу формул (11) или (12) является квадратом, равен сумме квадратов собственных чисел вещественной матрицы $\mathbf{Z}(T/2, \mathbf{z}_0)$, т. е., является неотрицательной величиной, а значение S вычисляется по формуле (8).

4. Продолжение семейств периодических решений

Процедура вычисления семейства периодического решения обычно строится по предикторно-корректорной схеме. Вначале предиктор находит малые поправки $\delta \mathbf{z}$ и δT к начальным условиям и периоду, а затем корректор уточняет поправки и в случае успеха получает новое периодическое решение семейства.

Пусть известно некоторое невырожденное периодическое решение $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ семейства с начальным условием и периодом (\mathbf{z}_0, T) , тогда вблизи него должно

быть периодическое решение $\mathbf{z}(t) + \delta\mathbf{z}(t)$ с периодом $T + \delta T$. Малые добавки $\delta\mathbf{z}$ и δT должны удовлетворять линейной однородной системе

$$(\mathbf{M} - \mathbf{E})\delta\mathbf{z}(T) + \mathbf{v}_0\delta T = 0, \quad (14)$$

где $\mathbf{v}_0 = \mathbf{J} \text{grad } H(\mathbf{z}_0)$. Количество решений этой системы определяется структурой матрицы монодромии \mathbf{M} .

Покажем, что матрица монодромии \mathbf{M} невырожденного периодического решения (\mathbf{z}_0, T) автономной системы системы Гамильтона содержит жорданову клетку 2×2 , соответствующую собственному числу $+1$.

Определение 3. Периодическое решение (\mathbf{z}_0, T) автономной системы Гамильтона (1) называется *невырожденным* или *простым*, если матрица монодромии имеет единственный элементарный делитель $(\lambda - 1)^2$, соответствующий мультипликатору $\rho_{1,2} = 1$, а все остальные элементарные делители простые.

Действительно, в случае общего положения, т. е. когда периодическое решение невырождено, согласно [7, Ch. 6, Theorem 6.5.1], оно (решение) лежит на гладкой двумерной цилиндрической поверхности периодических решений, образующая которой параметризуется значением интеграла $H(\mathbf{z})$. Из этой теоремы следует, что размерность пространства решений системы (14) равна двум и, следовательно, ранг матрицы $(\mathbf{M} - \mathbf{E}|\mathbf{v}_0)$ системы (14) должен быть равен трём. Очевидно, что если у некоторой матрицы \mathbf{M} размера $n \times n$ собственное число λ полупростое и имеет кратность k , то $\text{rang}(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E}) = n - k$. Следовательно, собственное число $+1$ кратности 2 не является полупростым и ему соответствует жорданова клетка размера 2×2 . Эти же рассуждения верны и для произвольной автономной системы Гамильтона с n степенями свободы.

Утверждение 1. Матрица монодромии \mathbf{M} невырожденного периодического решения автономной системы Гамильтона в случае общего положения, т. е. когда имеется единственный первый интеграл $H(\mathbf{z}) = h$, всегда имеет жорданову клетку второго порядка, соответствующую собственному числу $+1$ кратности 2.

Анализ решений системы (14) удобнее проводить в том базисе, в котором матрица \mathbf{M} имеет наиболее простую форму, т.е. нормальную форму. Классификация всех нормальных форм постоянных канонических матриц была дана ещё Вильямсоном в 1937 году (см. [13], [14, Гл. II]), однако здесь воспользуемся несколько иным подходом. Этот подход основан на идее перехода к сопутствующему базису, в котором один орт — это касательный вектор к фазовой траектории, а другой — нормаль к изоэнергетической поверхности $H(\mathbf{z}) = h$.

4.1. Преобразования матрицы монодромии \mathbf{M} . Выполним линейное преобразование матрицы \mathbf{M} , упрощающее её структуру и облегчающее её анализ. Потребуем, чтобы матрица \mathbf{A} этого преобразования принадлежала группе $Sp(4, \mathbb{R}) \cap SO(4, \mathbb{R})$, т.е. была одновременно и симплектической и ортогональной. Дополнительным условием должно быть сохранение внутренней симметрии (13) для реверсивно симметричных периодических решений.

Как указано в [15], где такого рода преобразование применялось для построения метода продолжения по параметрам периодического решения гамильтоновой системы, задача построения такой матрицы \mathbf{A} эквивалентна проблеме построения невырожденного непрерывного касательного векторного поля на сфере S^3 . Как известно, для S^3 это возможно, следовательно, такое преобразование всегда существует. Нахождение матрицы \mathbf{A} равносильно вычислению некоторого полиномиального идеала. Непосредственные вычисления показывают, что имеется однопараметрическое семейство матриц преобразования \mathbf{A} , но из них только 2 матрицы сохраняют внутренние симметрии (13) матрицы монодромии \mathbf{M} .

Один из них был предложен и эффективно использован Б.Б. Крейсманом для исследования периодических решений ограниченной задачи трёх тел (см., например, [11]).

Пусть $\mathbf{a}_3 = (H_1, H_2, H_3, H_4)$ — нормированный вектор $\text{grad } H(\mathbf{z}_0)$. Тогда матрица \mathbf{A} может быть записана в виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} H_3 & -H_4 & H_1 & H_2 \\ H_4 & H_3 & H_2 & -H_1 \\ -H_1 & -H_2 & H_3 & -H_4 \\ -H_2 & H_1 & H_4 & H_3 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Структура этой матрицы такова:

- $\mathbf{a}_i = \mathbf{J}\mathbf{a}_{i+2}$, $i = 1, 2$, что обеспечивает её симплектичность,
- $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$, что обеспечивает её ортогональность.

Здесь \mathbf{a}_i — i -столбец матрицы \mathbf{A} .

Утверждение 2 ([11]). Пусть симплектическая матрица \mathbf{M} имеет собственное значение $+1$, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_0 = \mathbf{J}\mathcal{H}$. Тогда матрица $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{pmatrix}.$$

Доказательство этого утверждения может быть получено с привлечением любой системы компьютерной алгебры, позволяющей вычислять базис Грёбнера полиномиального идеала и с его помощью вычислять нормальную форму

произвольного многочлена в этом базисе. Здесь общая схема доказательства такова.

1) Возьмём произвольную матрицу \mathbf{M} и с помощью условия симплектичности (6) составим полиномиальный идеал \mathcal{J}_1 . Вычислим для него некоторый базис Грёбнера $\mathcal{GB}\mathcal{J}_1$ для соответствующего лексикографического порядка.

2) Потребуем, чтобы матрица \mathbf{M} имела собственное число, равное $+1$. Этого можно достичь, если добавить к идеалу \mathcal{J}_1 полином, равный сумме коэффициентов характеристического многочлена матрицы \mathbf{M} . Составляем новый идеал \mathcal{J}_2 и вычисляем его базис Грёбнера $\mathcal{GB}\mathcal{J}_2$.

3) Теперь можно записать в символьной форме собственный вектор \mathbf{v}_0 матрицы \mathbf{M} как решение однородной системы линейных алгебраических уравнений с матрицей $\mathbf{M} - \mathbf{E}$ в виде

$$\frac{v_0^1}{M_1} = -\frac{v_0^2}{M_2} = \frac{v_0^3}{M_3} = -\frac{v_0^4}{M_4},$$

где M_i — миноры элементов первой строки матрицы $\mathbf{M} - \mathbf{E}$. Компоненты вектора \mathbf{v}_0 приводятся к нормальной форме в базисе $\mathcal{GB}\mathcal{J}_2$.

4) Добавляем в идеал условие, что норма вектора $\mathbf{v}_0 = 1$, и строим с помощью вектора \mathbf{v}_0 матрицу \mathbf{A} по формуле (15) и выполняем с её помощью переход к матрице \mathbf{N} . После этого для каждого элемента матрицы \mathbf{N} вычисляем его нормальную форму в соответствующем базисе Грёбнера.

4.2. Общее решение уравнения продолжения для невырожденного периодического решения. После преобразования с помощью матрицы \mathbf{A} система (14) примет вид

$$(\mathbf{N} - \mathbf{E})\delta\tilde{\mathbf{z}} + v\delta T\mathbf{e}_1 = 0, \quad (16)$$

где $v = |\mathbf{v}_0|$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)^*$. Её ранг, очевидно, равен трём и, следовательно, общее решение системы (16) представляет собой линейную комбинацию собственного \mathbf{e}_1 и корневого $\mathbf{r}_1 = (0, m_2, m_3, m_4)^*$ векторов, соответствующих жордановой клетке 2×2 :

$$\delta\tilde{z}_1 = c_1, \quad \delta\tilde{z}_j = m_j c_2, \quad j = \overline{2,4}, \quad \delta T = m_5 c_2 / v,$$

где c_i суть произвольные постоянные, m_j — ненулевые компоненты корневого вектора \mathbf{r}_1 :

$$m_2 = n_{14} - n_{23}, \quad m_3 = n_{22} + n_{44} - 2, \quad m_4 = -n_{12} - n_{43},$$

$$\text{а } m_5 = -\sum_{j=2}^4 n_{1j} m_j.$$

Первое семейство решений

$$\delta\tilde{z}_1 = c_1, \quad \delta\tilde{z}_{2,3,4} = 0, \quad \delta T = 0,$$

это просто сдвиг вдоль периодической траектории. Второе семейство решений

$$\delta\tilde{z}_1 = 0, \quad \delta\tilde{z}_j = m_j c_2, \quad j = \overline{2,4}, \quad \delta T = m_5 c_2 / v,$$

даёт естественное продолжение семейства периодических решений. В этом случае вектор $\mathbf{b} = (0, m_2, m_3, m_4, m_5 / v)^*$ является касательным вектором к однопараметрическому семейству периодических решений в пространстве их начальных условий (\mathbf{z}_0, T) .

Для реверсивно симметричного периодического решения $\mathbf{z}(t, \mathbf{z}_0)$ с начальным условием $\mathbf{z}_0 \in \Sigma_i$ матрицы \mathbf{A}_i имеют вид

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -H_4 & H_1 & 0 \\ H_4 & 0 & 0 & -H_1 \\ -H_1 & 0 & 0 & -H_4 \\ 0 & H_1 & H_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} H_3 & 0 & 0 & H_2 \\ 0 & H_3 & H_2 & 0 \\ 0 & -H_2 & H_3 & 0 \\ -H_2 & 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Внутренняя симметрия (13) матрицы \mathbf{M} приводит к соотношениям для преобразованной матрицы \mathbf{N} :

$$n_{22} = n_{44}, \quad n_{23} = -n_{14}, \quad n_{43} = -n_{12},$$

а индекс устойчивости в этом случае $S = n_{22}$. Компоненты m_j , $j = 2, 3, 4, 5$ вектора \mathbf{b} продолжения семейства принимают вид

$$m_2 = -2n_{14}, \quad m_3 = 2(1 - n_{22}), \quad m_4 \equiv 0, \quad m_5 = -(n_{12}m_2 + n_{13}m_3)/v. \quad (18)$$

Его проекция $\tilde{\mathbf{b}}$ на фазовое пространство \mathbb{M} будет следующей

$$\tilde{\mathbf{b}} = m_2 \mathbf{a}_2 + m_3 \mathbf{a}_3.$$

В силу структуры матрицы \mathbf{A} для реверсивно симметричного периодического решения (17) имеет место

Утверждение 3. *Продолжение невырожденного симметричного периодического решения вдоль семейства сохраняет его симметрию.*

5. Критические решения семейства двойко симметричного решения

В предыдущем пункте рассматривалась ситуация, когда периодическое решение невырожденное. Здесь выясним, как симметрия периодического решения

влияет на поведение его семейства в критических решениях, т.е. для тех решений, для которых либо у матрицы монодромии \mathbf{M} , либо у её q -й степени \mathbf{M}^q соответствующего вырожденного решения появляются дополнительные элементарные делители. Это решение семейства будем называть (возможно, не совсем корректно) *бифуркационным решением*.

Отметим, что соответствующий бифуркационный анализ однократно симметричных периодических решений был проведен ранее. Так, в Главе VIII книги [14] это было сделано с использованием метода нормальной формы. В статье [11] анализ симметричного решения проводился с использованием последовательных симплектических преобразований матрицы \mathbf{M} . Фактически эта работа является продолжением методики последней работы на случай двойко симметричных решений.

Мы рассмотрим три типичных критических случая, которые обычно относят к одному из видов бифуркации периодического решения [16]:

- бифуркация рождения-гибели (седло-узел);
- бифуркация потери симметрии (типа «вилки»);
- бифуркация кратного увеличения периода.

Первые два случая соответствуют значению индекса устойчивости $S = 1$, последний случай соответствует значению $S = \cos(2\pi p/q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, p и q взаимно просты. Отдельно рассмотрим важный случай бифуркации удвоения периода при $S = -1$.

5.1. Случай $S = 1$. В этом случае $n_{22} = n_{44} = 1$, матрица \mathbf{N} принимает вид

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ 0 & 1 & -n_{14} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & -n_{12} & 1 \end{pmatrix},$$

а два компонента m_3, m_4 вектора \mathbf{b} согласно (18) равны 0. Условие симплектичности матрицы \mathbf{N} приводит к условиям

$$2n_{14} = n_{24}n_{12}, \quad n_{24}n_{42} = 0, \quad n_{14}n_{42} = 0.$$

Здесь возможны два случая в зависимости от значения единственного нетривиального компонента m_2 .

Случай $m_2 \neq 0$. Тогда из (18) следует, что $n_{42} = 0$, и матрица \mathbf{N} принимает вид

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & \frac{1}{2}n_{12}n_{24} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}n_{12}n_{24} & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -n_{12} & 1 \end{pmatrix} \sim \exp(\mathbf{JC}),$$

где матрица \mathbf{C} согласно [14, Гл. II, § 1] подобна матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, имеет элементарный делитель $(\lambda - 1)^4$. В этом случае вектор продолжения $\mathbf{b} = (0, -n_{12}, 0, 0, -n_{12}m_2/v)^*$, а его проекция $\tilde{\mathbf{b}}$ ортогональна вектору $\text{grad } H(\mathbf{z}_0)$. Следовательно, семейство периодических решений достигает экстремума по $H(\mathbf{z})$, и на характеристике семейства в координатах (h, S) имеется складка, а само критическое решение называется *бифуркацией рождения-гибели*. При прохождении через это решение меняется устойчивость семейства.

Случай $m_2 = 0$. Тогда из (18) следует, что $n_{24} = 0$, $n_{42} \neq 0$, и матрица \mathbf{N} принимает вид

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & n_{12} & n_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & -n_{12} & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним дополнительное симплектическое преобразование

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & n_{12}/n_{42} \\ 0 & 1 & n_{12}/n_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n_{13} + n_{12}^2/n_{42} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица $\tilde{\mathbf{N}}$ имеет два элементарных делителя $(\lambda - 1)^2$ и $(\lambda - 1)^2$. Корневой вектор, соответствующий первому элементарному делителю, задаёт направление главного семейства $\mathbf{b}_1 = (0, 0, 1, 0, -\tilde{n}_{13}/v)^*$. Собственный вектор $\mathbf{b}_2 = (0, 0, 0, 1, 0)$, соответствующий второму элементарному делителю, задаёт направление нового семейства периодических решений с периодом, равным периоду решения главного семейства. В этом случае новое решение будет обладать только одной из двух симметрий. Поскольку для двойки симметричных периодических решений матрицы монодромии \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 , вычисленные от взаимно симметричных точек, отстоящих через полпериода, равны, то в результате получаем два дочерних семейства однократно симметричных решений. Периодические решения этих двух дочерних семейств взаимно симметричны относительно другого автоморфизма g_i . Другими словами, если дочерние семейства состоят из g_1 -симметричных орбит, то эти орбиты взаимно g_2 -симметричны.

5.2. Случай $S = -1$. Рассмотрим критический случай, соответствующий бифуркации удвоения периода. В общем случае компонента $m_3 \neq 0$ и можно

выполнить дополнительное симплектическое преобразование с матрицей

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & m_2/m_3 \\ 0 & 1 & m_3/m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тогда } \tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tilde{n}_{13} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \tilde{n}_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tilde{n}_{42} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

с дополнительным условием $\tilde{n}_{24}\tilde{n}_{42} = 0$. Здесь $\tilde{n}_{13} = n_{12}m_2/m_3 + n_{13}$. Для однократно симметричного периодического решения имеем либо $\tilde{n}_{24} = 0, \tilde{n}_{42} \neq 0$, либо $\tilde{n}_{42} = 0, \tilde{n}_{24} \neq 0$. Тогда матрица \mathbf{M} имеет два элементарных делителя $(\lambda - 1)^2$ и $(\lambda + 1)^2$. Корневой вектор \mathbf{r}_1 , соответствующий первому элементарному делителю, задаёт направление главного семейства $\mathbf{b}_1 = \mathbf{r}_1$. Для второго элементарного делителя возможны два варианта с собственным вектором $\mathbf{b}_2^1 = (0,1,0,0)$ в первом случае и $\mathbf{b}_2^2 = (0,0,0,1)$ во втором. Этот вектор задаёт направление нового семейства периодических решений с периодом, равным периоду решения главного семейства. Анализ, проведённый в [11], показывает, что дочернее семейство всегда имеет экстремум по $H(\mathbf{z})$ и сохраняет тип симметрии родительского решения.

Рассмотрим случай двойко симметричного решения. В этом случае матрица монодромии \mathbf{M} , согласно (12), является квадратом матрицы решения $\mathbf{Z}(T/2, \mathbf{z}_0)$ уравнения в вариациях (4) на половине периода. Но тогда, в силу вещественности, у неё не может быть элементарного делителя $(\lambda + 1)^2$, поскольку вещественного квадратного корня из жордановой клетки второго порядка, соответствующей этому делителю, нет [17, Ch. 3].

Утверждение 4. *Матрица монодромии \mathbf{M} двойко симметричного периодического решения при $S = -1$ всегда имеет три элементарных делителя: $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda + 1)$ и $(\lambda + 1)$. Двум последним соответствуют однократно симметричные решения с разными типами симметрии и периодом $T' = 2T$. Каждое из семейств однократно симметричных решений достигает экстремума в решении бифуркации.*

Имеется два сценария бифуркации удвоения периода:

- 1) оба новых дочерних семейства имеют один и тот же тип экстремума (максимум или минимум) в критическом решении,
- 2) новые дочерние семейства имеют разные типы экстремума (у одной пары минимум, у другой — максимум).

При первом сценарии в результате бифуркации появляется четыре пары периодических решений с удвоенным периодом — две пары с одним типом симметрии, две с другим. В этом случае одна пара семейств двойко периодических решений имеет устойчивые орбиты, а другая неустойчивые. При втором сценарии в окрестности бифуркационного решения имеется по одной паре периодических

решений с удвоенным периодом. Поскольку индекс устойчивости S родительского семейства всегда больше или равен -1 , то дочерние семейства двойко периодических решений всегда имеют только неустойчивые орбиты.

5.3. Случай кратного увеличения периода. Случай бифуркации удвоения периода является частным случаем бифуркации кратного увеличения периода когда $S = \cos(2\pi p/q)$. Количественный анализ, аналогичный тому, что был проведён в [11], показывает, что для нечётных p, q матрица \mathbf{M}^q имеет структуру элементарных делителей $(\lambda - 1)^2$, $(\lambda - 1)$ и $(\lambda - 1)$. Если только одно из чисел p, q чётно, то структура элементарных делителей матрицы $\mathbf{Z}(qT/2, \mathbf{z}_0)$ такая же, как в утверждении 4. Как и в предыдущих случаях, корневой вектор жордановой клетки второго порядка с собственным числом $+1$ даёт направление продолжения главного семейства. Собственные векторы, соответствующие простым элементарным делителям, дают направление либо одному двойко симметричному дочернему семейству для нечетных p, q , либо двум парам семейств однократно симметричных периодических решений, когда одно из p, q чётно. Качественное объяснение этого эффекта состоит в следующем.

Рассмотрим двойко симметричное периодическое решение, орбита которого последовательно ортогонально пересекает плоскости симметрии $\Sigma_{1,2}$ через четверть периода. Пусть это решение с периодом T является порождающим решением для периодического решения второго рода с периодом qT . Для того чтобы орбита дочернего решения также имела две симметрии, необходимо выполнение указанного выше условия ортогональности. Пусть начальная точка порожденной орбиты лежит на плоскости Σ_1 , тогда через четверть периода следующая ортогональная точка будет лежать на плоскости Σ_2 , при этом точка орбиты должна совершить $(2k - 1)/4$ оборота вокруг начала координат, где $k \in \mathbb{N}$. Поэтому за весь период qT точка орбиты совершит $2k - 1$ оборотов, то есть число q всегда нечетное. С другой стороны, орбита, соответствующая резонансу p/q , может быть представлена в фазовом пространстве как замкнутая винтовая линия, лежащая на некотором торе [18], которая делает за один период q оборотов по одной образующей тора и p оборотов по другой образующей. Поэтому для двойко симметричной орбиты число p тоже должно быть нечётным.

Утверждение 5. Пусть двойко симметричное периодическое решение с периодом T имеет значение индекса устойчивости S , равное $\cos(2\pi p/q)$, где $p, q \in \mathbb{N}$ и взаимно просты.

- Если оба числа p, q нечётные, то в окрестности исходного решения имеется одно семейство двойко симметричных решений с периодом $T' = qT$.
- Если одно из чисел p или q чётно, то в окрестности исходного решения имеется две пары семейств однократно симметричных решений с различными типами симметрий для каждой пары и с периодами $T' = qT$.

Для всех случаев, кроме случая $p/q = 1/3$, новые семейства достигают экстремума по H .

6. Исследование семейств двояко симметричных решений задачи Хилла

6.1. Задача Хилла и её свойства. Задача Хилла [19; 20, § 10.4] используется для исследования динамики тела «нулевой» массы (спутника) в окрестности меньшего из двух тяготеющих тел. Эта задача является некоторым предельным вариантом известной *ограниченной задачи трех тел* (ОЗТТ) [20], когда

- i) массовый параметр μ в ОЗТТ стремится к нулю и
- ii) большее из двух массивных тел стремится к $+\infty$ вдоль ось абсцисс в равномерно вращающейся (синодической) системе координат.

Хотя задача Хилла неинтегрируема, но её уравнения движения в отличие от уравнений ОЗТТ не содержат массового параметра μ , что делает их существенно проще уравнений ОЗТТ. Вторым важным отличием уравнений задачи Хилла от уравнений ОЗТТ является наличие у них двух дополнительных симметрий, т.е. уравнения задачи Хилла инвариантны относительно четверной группы Клейна линейных автоморфизмов с двумя образующими, обозначаемыми g_1 и g_2 (см. раздел 2). Каждое из этих преобразований имеет инвариантное множество в виде двумерной плоскости в расширенном фазовом пространстве задачи.

Ранее, в работах [21; 22], автором было предложено рассматривать некоторое обобщение задачи Хилла с дополнительными параметрами. Это вариант, называемый далее *обобщённой задачей Хилла*, позволяет исследовать периодические решения классической задачи методами теории возмущений. С одной стороны, уравнения задачи Хилла можно рассматривать как сингулярное возмущение уравнений интегрируемой задачи Энона [23—25]. Такой подход был предложен М. Эноном [26; 27] и продолжен автором в работах [25; 28]. С другой стороны, рассматривая задачу Кеплера в синодической системе координат и вводя некоторое квадратичное возмущение с малым параметром ε , можно, продолжая по ε , прийти к уравнениям задачи Хилла. Такой подход был предложен А.Д. Брюно [24] и реализован для двояко симметричных решений автором [22]. Наконец, оказалось возможным рассмотреть случай задачи Хилла с кулоновским потенциалом отталкивания, что позволило естественным образом объединить все известные семейства периодических решений задачи Хилла в одну общую сеть [21; 29]. К настоящему времени найдено и, с той или иной степенью подробности, изучено более полусотни семейств симметричных решений [19; 25; 27; 28; 30] и несколько семейств несимметричных решений [31]. Многие из этих семейств удалось продолжить до соответствующих семейств задачи анти-Хилла и установить связь между различными не связанными между собой семействами классической задачи Хилла. Проведённый анализ семейств симметричных периодических решений задачи Хилла, а также некоторые другие работы, по-

свящённые численному исследованию симметричных периодических решений систем Гамильтона с различными дискретными группами симметрий [1; 32; 33], позволяют сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Если система Гамильтона допускает некоторую дискретную группу симметрий, то «скелет» её фазового потока формируется в основном семействами тех периодических решений, которые обладают наибольшим набором симметрий.*

Гамильтониан обобщённой задачи Хилла представим в виде

$$H(\mathbf{z}, \varepsilon) = H_0(\mathbf{z}) + \varepsilon H_1(\mathbf{z}),$$

где

$$H_0(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 + \frac{\sigma}{|\mathbf{x}|},$$

$$H_1(\mathbf{z}) = -x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

а $\varepsilon \in [0; 1]$ и $\sigma \in \{-1, 0, +1\}$ — новые параметры обобщённой задачи.

- При значениях параметров $\varepsilon = 0$ и $\sigma = -1$ получаем гамильтониан так называемой *синодической задачи Кеплера*, т.е. классической задачи Кеплера в равномерно вращающейся системе координат. Семейства её периодических решений полностью описаны в [14, Гл. III] и используются в дальнейшем исследовании в качестве невозмущённых решений.

- При значениях параметров $\varepsilon = 1$ и $\sigma = 0$ получаем гамильтониан так называемой *задачи Энона* [23—25]. Заметим, что уравнения задачи Энона являются частным случаем уравнений Клохесси-Вилтшира [34] (Clohessy-Wiltshire equations), применяемых в работах по спутниковой навигации.

- При значениях параметров $\varepsilon = 1$ и $\sigma = -1$ получаем гамильтониан задачи Хилла, а при значениях $\varepsilon = 1$ и $\sigma = +1$ — гамильтониан задачи с кулоновым отталкиванием, названный в [21] *задачей анти-Хилла*.

Возмущение H_1 разрушает однопараметрическую группу симметрий вращения гамильтониана задачи Кеплера и делает задачу Хилла неинтегрируемой [35]. Единственным первым интегралом системы канонических уравнений задачи Хилла

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + x_2, & \dot{y}_1 = y_2 + 2\varepsilon x_1 - \sigma \frac{x_1}{|\mathbf{x}|^3}, \\ \dot{x}_2 = y_2 - x_1, & \dot{y}_2 = -y_1 - \varepsilon x_2 - \sigma \frac{x_2}{|\mathbf{x}|^3}, \end{cases}$$

остаётся интеграл энергии, традиционно записываемый в форме интеграла Якоби

$$\mathcal{J} = 3x_1^2 + \frac{2}{r} - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = C,$$

где постоянная C удовлетворяет соотношению $C = -2H(\mathbf{z})$.

6.2. Семейство \mathbf{f}_3 двойко симметричных решений. Основными двойко симметричными семействами обобщённой задачи Хилла являются семейства прямых и обратных спутниковых орбит \mathbf{g} и \mathbf{f} соответственно (см. [19; 23]). Эти семейства продолжаются в общее семейство $\tilde{\mathbf{g}}\mathbf{f}$ задачи анти-Хилла через предельные порождающие решения $\{i, e\}$ и Γ соответственно [21]. Таким образом, \mathbf{g} , \mathbf{f} и $\tilde{\mathbf{g}}\mathbf{f}$ представляют собой участки общего семейства. На этом семействе имеется несколько критических точек.

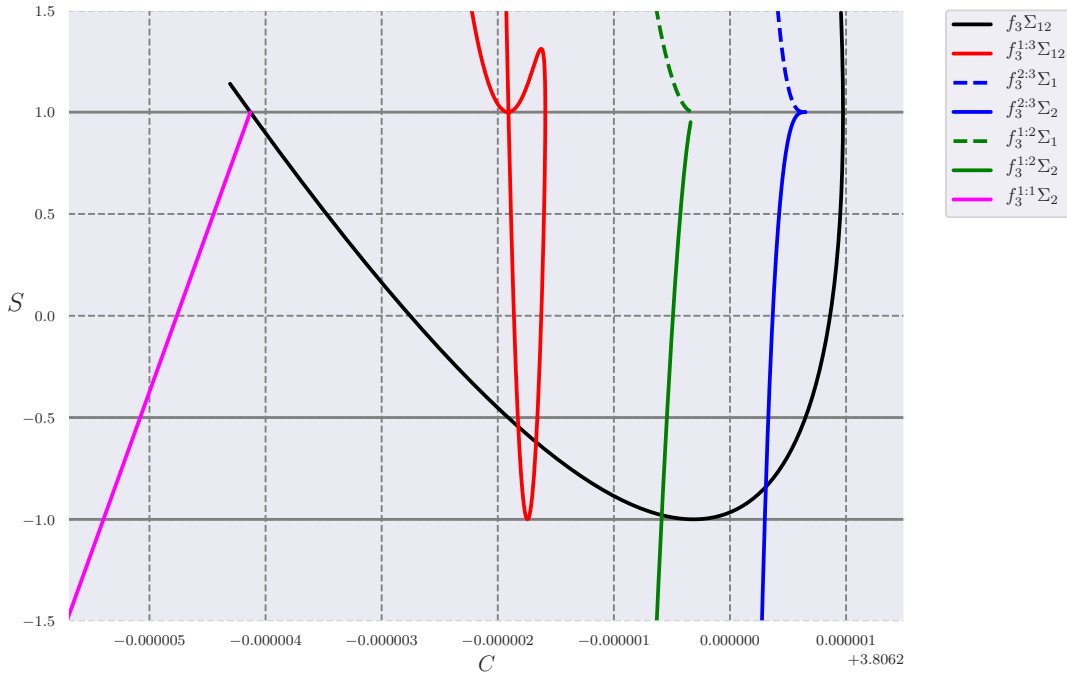


Рис. 1. Характеристики семейства \mathbf{f}_3 и связанных с ним семейств на плоскости (C, S) .

Семейства \mathbf{g} и \mathbf{f} не имеют участков, где индекс устойчивости менялся бы на всём интервале устойчивости, поэтому здесь в качестве примера рассмотрим семейство двойко симметричных трёхобортных периодических решений \mathbf{f}_3 . Это семейство найдено М. Эноном в [36] (где названо \mathbf{g}_3), подробно исследовано в [19; 27], где приведены примеры его орбит. Участок характеристики этого семейства в координатах (C, S) , а также других семейств, пересекающихся с ним в критических решениях, показан на рис. 1, а пример орбиты семейства — на рис. 2. Здесь и далее на рис. 3 и 4 показано положение точек либрации L_1 ,

L_2 , а также орбита Луны (синим пунктиром). Красными точками обозначено положение спутника на орбите с временным интервалом в один месяц.

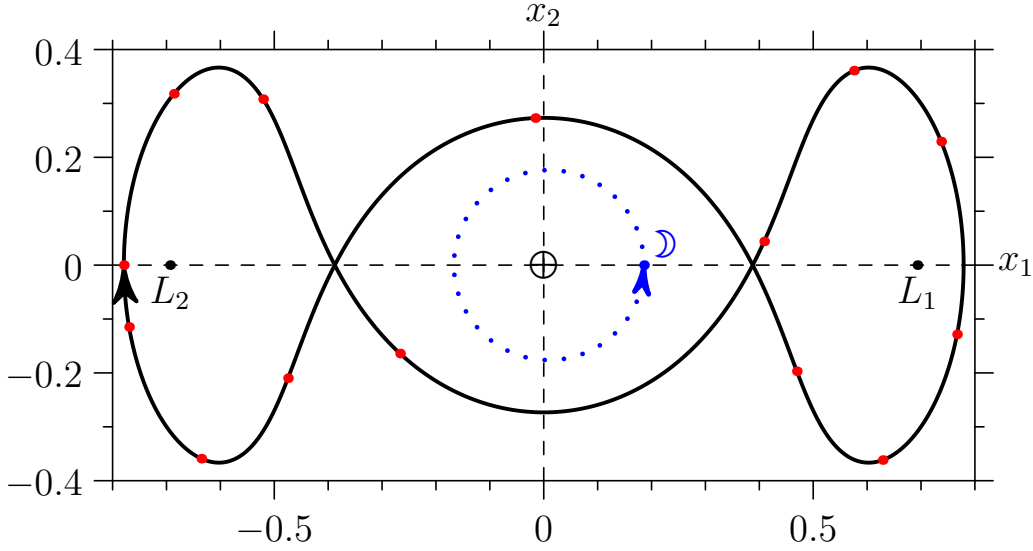


Рис. 2. Орбита семейства \mathbf{f}_3 .

Индекс устойчивости семейства \mathbf{f}_3 пересекает значение $+1$ в двух точках 1. В самой правой точке семейство достигает экстремума по C и, следовательно, имеет место бифуркация рождения-гибели. В самой левой точке семейство пересекает значение $+1$ монотонно, здесь происходит появление двух семейств g_2 -периодических решений $\mathbf{f}_3^{1:1}\Sigma_2$. Пример орбит этих семейств показан на рис. 3.

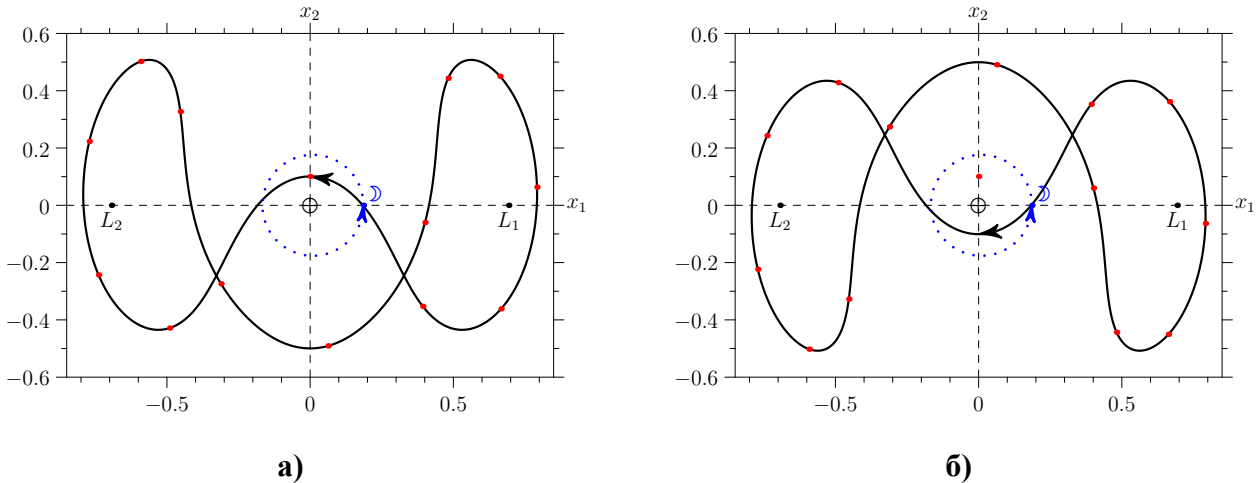
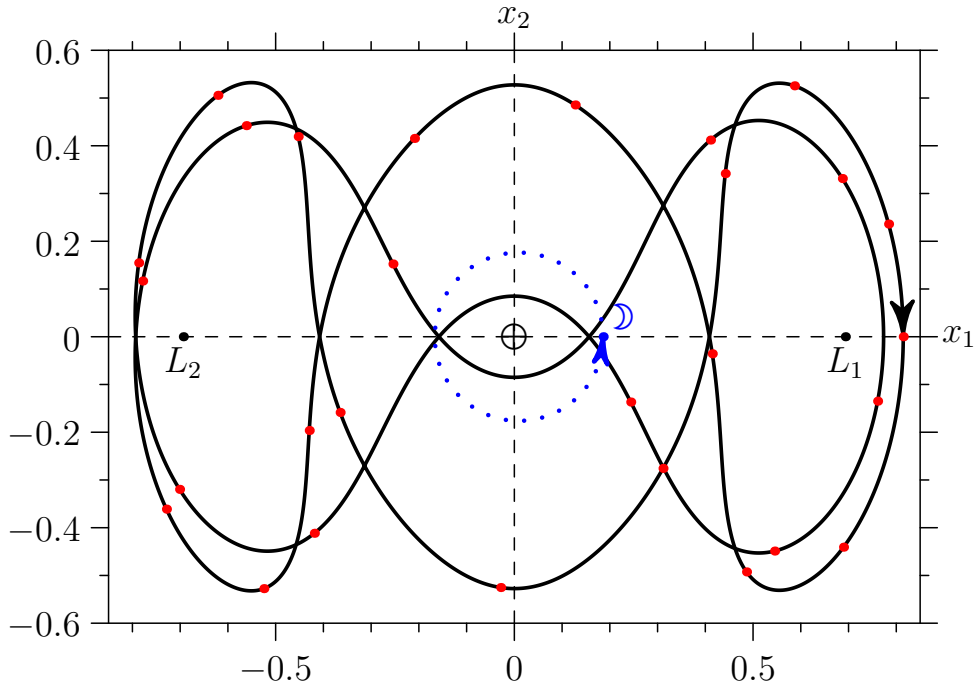


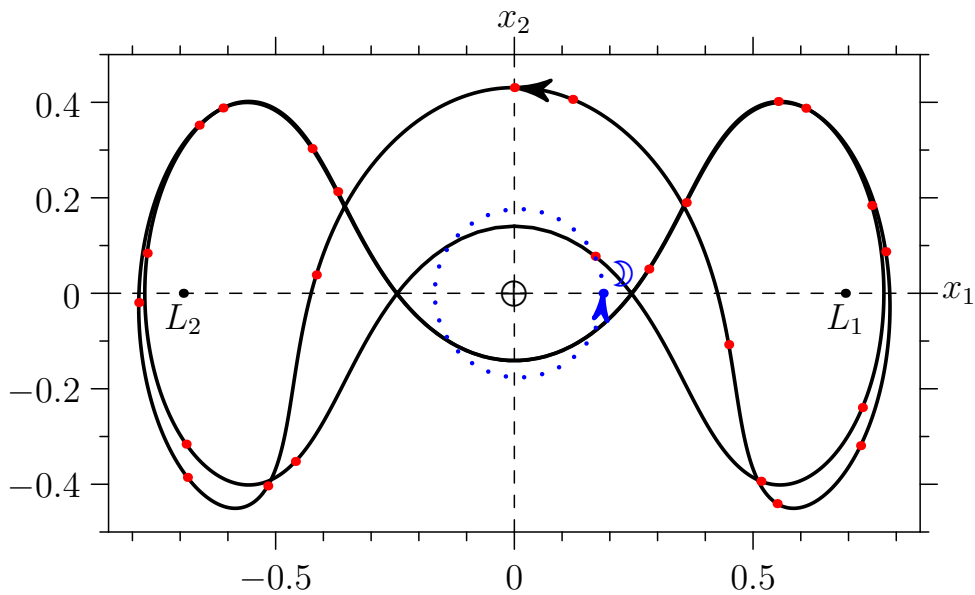
Рис. 3. Орбиты g_2 -симметричных семейств $\mathbf{f}_3^{1:1}\Sigma_2$.

Рассмотрим появление двух семейств двояко периодических однократно симметричных решений, когда индекс устойчивости S главного семейства \mathbf{f}_3 проходит значение $+1$. В соответствии с утверждением 4 в этом случае наблюдается появление двух семейств согласно сценарию 1) на стр. 17, поскольку оба

семейства имеют максимум по C . Два семейства g_1 -симметричных орбит содержат только неустойчивые решения. Пример орбиты приведен на рис. 4а). Два семейства g_2 -симметричных орбит имеют небольшой участок с устойчивыми решениями. Пример орбиты приведен на рис. 4б).



а) g_1 -симметричная орбита семейства $f_3^{1:2}\Sigma_1$



б) g_2 -симметричная орбита семейства $f_3^{1:2}\Sigma_2$

Рис. 4. Орбиты семейств двояко периодических решений.

Наконец, рассмотрим появление трёхкратно периодических дочерних реше-

ний. Оно происходит, когда $S = -0.5$, что возможно в двух ситуациях:

При $p/q = 1/3$. В этой ситуации согласно утверждению 5 появляется одно семейство двояко симметричных решений, которое вблизи родительского семейства имеет только неустойчивые решения. Однако здесь это семейство при продолжении по C достигает максимума, что видно по его характеристике на рис. 1. Следовательно, при одном и том же значении интеграла C на сечении Пуанкаре должны наблюдаться два набора неподвижных точек: один набор устойчивых, другой — неустойчивых. Это можно наблюдать на рис. 5.

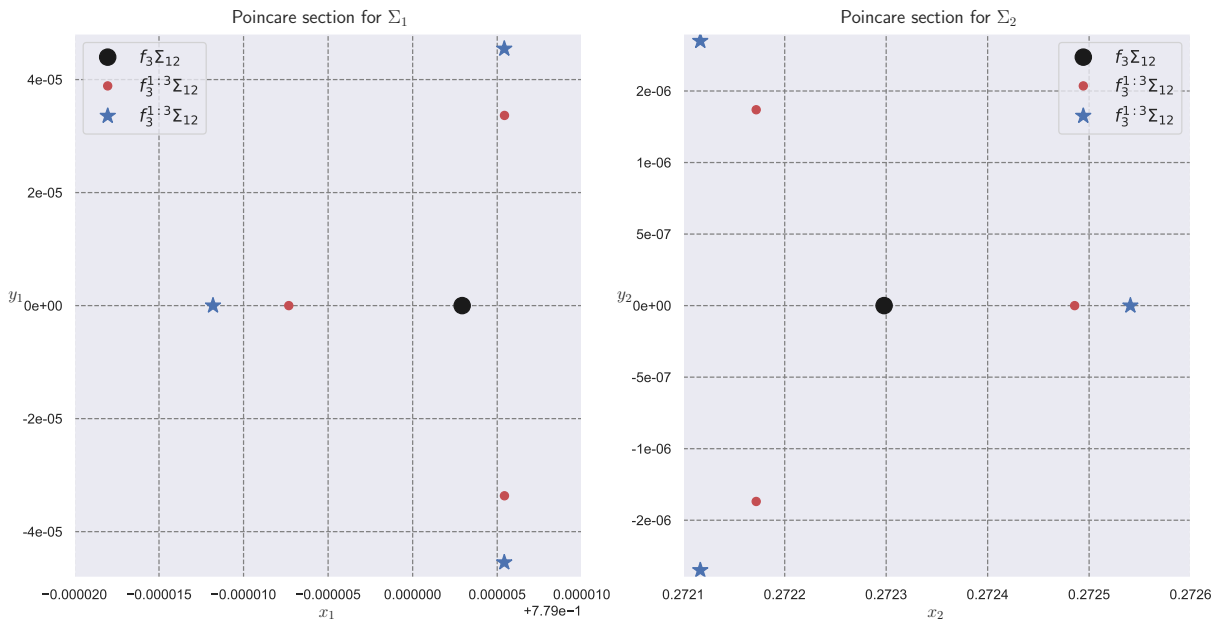


Рис. 5. Сечение Пуанкаре плоскостями Σ_1 (слева) и Σ_2 (справа) двояко симметричных периодических решений вблизи семейства \mathbf{f}_3 для случая $p/q = 1/3$.

При $p/q = 2/3$. Согласно утверждению 5 появляется четыре семейства однократно симметричных решений — одна пара семейств g_1 -симметричных неустойчивых решений, другая пара семейств g_2 -симметричных устойчивых решений. Таким образом, на сечении Пуанкаре при определённых условиях можно наблюдать 12 неподвижных точек: по три точки на периодическое решение каждого из семейств, что видно на рис 6.

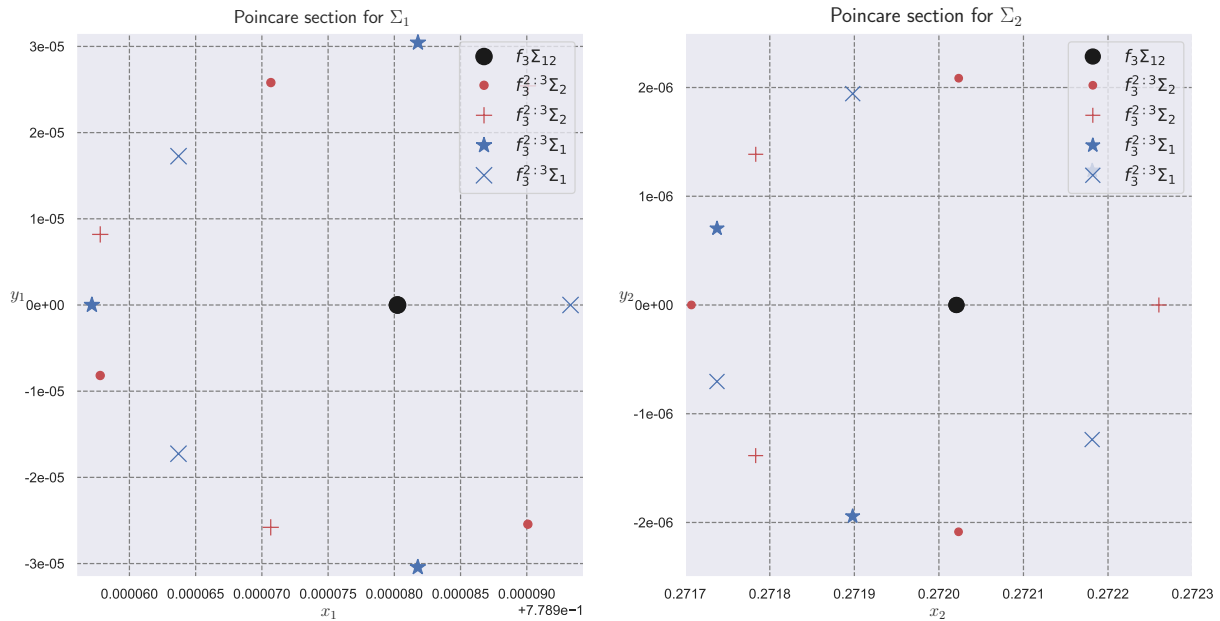


Рис. 6. Сечение Пуанкаре плоскостями Σ_1 (слева) и Σ_2 (справа) двойко симметричных периодических решений вблизи семейства \mathbf{f}_3 для случая $p/q = 2/3$.

Список литературы

1. Barrio R., Blesa F. Systematic search of symmetric periodic orbits in 2DOF Hamiltonian systems // Chaos, Solitons and Fractals. 2009. Vol. 41, no. 2. P. 560–582. DOI: 10.1016/j.chaos.2008.02.032.
2. Thompson I. Understanding Maple. Cambridge University Press, 2016. 228 с.
3. Meurer A. [et al.]. SymPy: symbolic computing in Python // PeerJ Computer Science. 2017. Vol. 3. e103. ISSN 2376–5992. DOI: 10.7717/peerj-cs.103. URL: <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103>.
4. Batkhin A. B. Some properties of doubly symmetric periodic solutions to Hamiltonian system // International Conference Polynomial Computer Algebra '2019; St. Petersburg, April 15–20, 2019 / ed. by N. N. Vassiliev. St. Petersburg, Russia : VVM Publisher, 2019. P. 25–28.
5. Батхин А. Б. Bifurcations of periodic solutions to Hamiltonian system with discrete symmetries // Компьютерная алгебра: материалы Международной конференции. Москва, 17 – 21 июня 2019 г. / под ред. С. А. Абрамова, Л. А. Севастьянова. М. : РУДН, 2019. С. 90—97.
6. Lamb J. S. W., Roberts J. A. G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // Physica D. 1998. Vol. 112. P. 1–39.
7. Meyer K. R. Periodic Solutions of the N -body Problem. Berlin, Heidelberg, New York : Springer–Verlag, 1999. (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1719).
8. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М. : Наука, 1967. 523 с.

9. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М. : Гл. ред. физ.-мат. литер. изд-ва «Наука», 1978. 352 с.
10. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Т. 2. М. : Наука, 1972. С. 9—356.
11. *Крейсман Б. Б.* Семейства периодических решений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Несимметричные периодические решения плоской ограниченной задачи трех тел // *Космические исследования*. 2005. Т. 43, № 2. С. 1—23.
12. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М. : Наука, 1972. 720 с.
13. *Williamson J.* On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics // *American Journal of Mathematics*. 1937. July. Vol. 59, no. 3. P. 599–617.
14. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М. : Наука, 1990. 296 с.
15. *Каримов С. Р., Сокольский А. Г.* Метод продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновых систем. 1990. Препринт ИТА АН СССР, №9.
16. *Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. М. : «Мир», 1991.
17. *Meyer K., Hall G., Offin D.* Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N -Body Problem. 2nd edition. New York : Springer, 2009. (Applied Mathematical Sciences, Vol. 90). DOI: 10.1007/978-0-387-09724-4.
18. *Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П.* Теория бифуркаций. Т. 5. М. : ВИНТИ АН СССР, 1985. (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления).
19. *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Задача Хилла. Волгоград : Волгоградское научное издательство, 2009. 200 с.
20. *Себехей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М. : Наука, 1982. 656 с.
21. *Батхин А. Б.* Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // *ДАН*. 2014. Т. 458, № 2. С. 131—137. ISSN 0869-5652.
22. *Batkhin A. B.* New families of doubly symmetric periodic solutions of Hill problem // 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), TRAPEZNIKOV INSTITUTE OF CONTROL SCIENCES. Vol. 1. IEEE RUSSIA, MOSCOW, V.A, 2016. P. 1–4. DOI: 10.1109/STAB.2016.7541164.

23. *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. V. Hill's case: non-periodic orbits: periodic orbits and their stability // *Astron. & Astrophys.* 1969. Vol. 1. P. 223–238.
24. *Брюно А. Д.* Нулькратные и обратные периодические решения ограниченной задачи трех тел. ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 1996. 32 с. (Препринт № 93).
25. *Батхин А. Б.* Симметричные периодические решения задачи Хилла. I // *Космические исследования.* 2013. Т. 51, № 4. С. 308—322.
26. *Hénon M.* *Generating Families in the Restricted Three-Body Problem.* Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1997. 278 с. (Lecture Note in Physics. Monographs ; 52).
27. *Hénon M.* New families of periodic orbits in Hill's problem of three bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2003. Т. 85. С. 223—246.
28. *Батхин А. Б.* Симметричные периодические решения задачи Хилла. II // *Космические исследования.* 2013. Т. 51, № 6. С. 497—510.
29. *Батхин А. Б.* Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша.* М., 2014. № 9. ISSN 2071-2898. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2014/prep2014_09.pdf.
30. *Tsirogiannis G. A., Perdios E. A., Markellos V. V.* Improved grid search method: an efficient tool for global computation of periodic orbits. Application to Hill's problem // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2009. № 103. С. 49—78.
31. *Hénon M.* Families of asymmetric periodic orbits in Hill's problem of three bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2005. Т. 93. С. 87—100.
32. *Barrio R., Rodríguez M., Blesa F.* Computer-assisted proof of skeletons of periodic orbits // *Computer Physics Communications.* 2012. Vol. 183, no. 1. P. 80–85. DOI: 10.1016/j.cpc.2011.09.001.
33. *Barrio R., Rodríguez M.* Systematic computer assisted proofs of periodic orbits of Hamiltonian systems // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2014. Vol. 19, no. 8. P. 2660–2675. DOI: 10.1016/j.cnsns.2013.12.025.
34. *Clohessy W. H., Wiltshire R. S.* Terminal guidance for satellite rendezvous // *J. Aerospace Sciences.* 1960. Sept. Vol. 27. P. 653–658, 674. DOI: 10.2514/8.8704.
35. *Morales-Ruiz J., Simó C., Simon S.* Algebraic proof of the non-integrability of Hill's Problem // *Ergodic Theory and Dynamical Systems.* 2005. Т. 25, № 4. С. 1237—1256.

36. *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. VI. Hill's case: non-periodic orbits // *Astron. & Astr.* 1970. No. 9. P. 24–36.

Список иллюстраций

1	Характеристики семейства \mathbf{f}_3 и связанных с ним семейств на плоскости (C, S)	21
2	Орбита семейства \mathbf{f}_3	22
3	Орбиты g_2 -симметричных семейств $\mathbf{f}_3^{1:1}\Sigma_2$	22
4	Орбиты семейств двойко периодических решений.	23
5	Сечение Пуанкаре плоскостями Σ_1 (слева) и Σ_2 (справа) двойко симметричных периодических решений вблизи семейства \mathbf{f}_3 для случая $p/q = 1/3$	24
6	Сечение Пуанкаре плоскостями Σ_1 (слева) и Σ_2 (справа) двойко симметричных периодических решений вблизи семейства \mathbf{f}_3 для случая $p/q = 2/3$	25

Оглавление

1	Введение	3
2	Дискретная группа автоморфизмов системы Гамильтона	4
3	Фазовый поток системы Гамильтона вблизи периодического решения	7
3.1	Свойства фазового потока	7
3.2	Вычисление матрицы монодромии	8
4	Продолжение семейств периодических решений	10
4.1	Преобразования матрицы монодромии \mathbf{M}	12
4.2	Общее решение уравнения продолжения для невырожденного периодического решения	13
5	Критические решения семейства двойко симметричного решения . .	14
5.1	Случай $S = 1$	15
5.2	Случай $S = -1$	16
5.3	Случай кратного увеличения периода	18
6	Исследование семейств двойко симметричных решений задачи Хилла	19
6.1	Задача Хилла и её свойства	19
6.2	Семейство \mathbf{f}_3 двойко симметричных решений	21
	Список литературы	25
	Список иллюстраций	28