



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 8 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брагин М.Д., Рогов Б.В.

Консервативная
монотонизация
бикompактных схем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брагин М.Д., Рогов Б.В.
Консервативная монотонизация бикompактных схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019.
№ 8. 26 с. doi:[10.20948/prepr-2019-8](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-8)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-8>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

М. Д. Брагин, Б. В. Рогов

**Консервативная монотонизация
бикомпактных схем**

Москва — 2019

Брагин М. Д., Рогов Б. В.

Консервативная монотонизация бикомпактных схем

В работе предлагается новый метод монотонизации высокоточных бикомпактных схем, не нарушающий их консервативности. Этот метод основан на конечно-элементном представлении бикомпактной аппроксимации. Установлена аналогия между схемами Галеркина и бикомпактными схемами. Разработанный метод проверен на одномерных задачах газодинамики: задаче Седова, задаче Римана с узким пиком плотности, задаче Шу-Ошера. На их примере показано, что бикомпактные схемы с консервативной монотонизацией значительно точнее гибридных бикомпактных схем.

Ключевые слова: бикомпактные схемы, консервативные схемы, сохраняющие монотонность схемы, гиперболические уравнения, разрывные решения.

Michael Dmitrievich Bragin, Boris Vadimovich Rogov

A conservative limiting method for bicomcompact schemes

In this work, a new limiting method for bicomcompact schemes is proposed that preserves them conservative. The method is based upon a finite-element treatment of the bicomcompact approximation. An analogy between Galerkin schemes and bicomcompact schemes is established. The proposed method is tested on one-dimensional gasdynamics problems that include the Sedov problem, the Riemann “peak” problem, and the Shu-Osher problem. It is shown on these examples that bicomcompact schemes with conservative limiting are significantly more accurate than hybrid bicomcompact schemes.

Keywords: bicomcompact schemes, conservative schemes, monotonicity preserving schemes, hyperbolic equations, discontinuous solutions.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-31-00045.

Оглавление

| | |
|---|----|
| Введение. | 3 |
| 1. Конечно-элементное представление бикомпактной аппроксимации | 4 |
| 2. Консервативная монотонизация бикомпактных схем | 11 |
| 3. Аналогия между схемами Галеркина и бикомпактными схемами . | 14 |
| 4. Тестирование метода на одномерных задачах газодинамики | 16 |
| Заключение | 22 |
| Библиографический список | 23 |

Введение

Одним из наиболее важных направлений современной вычислительной математики является разработка высокоточных схем для численного решения нестационарных уравнений гиперболического типа. Этому классу схем принадлежат бикомпактные схемы, сочетающие в себе целый ряд положительных свойств: четный (четвертый, шестой и так далее) порядок аппроксимации по пространству на шаблоне, занимающем одну ячейку сетки; возможность выбора аппроксимации по времени; одновременно экономичность реализации и неявность; хорошие спектральные свойства [1].

Хорошо известно, что уравнения гиперболического типа допускают разрывные решения. Для их корректного сквозного счета схема должна быть монотонной (в смысле одного из определений этого свойства). Однако, теорема Годунова [2] запрещает схеме иметь линейную аппроксимацию производных с минимальным порядком выше первого и при этом сохранять монотонность. Для обхода этого запрета были созданы нелинейные аппроксимации: ограничители потоков и наклонов [3–5], численные фильтры [6–8], искусственная диссипация [9–12], ENO/WENO-подходы [13–16] и другие.

В работах [17–21] для обеспечения монотонности высокоточных бикомпактных схем применяется оригинальный метод гибридной схемы, продолжающий идеи классического одноименного метода Р. П. Федоренко [22]. Подход [17–21] состоит в следующем: в каждом узле сетки на верхнем слое по времени результирующее решение приравнивается нелинейной выпуклой комбинации двух решений, одно из которых посчитано по монотонной схеме A , а другое — по немонотонной высокоточной схеме B . Схемы A и B используют одно и то же начальное условие на нижнем слое по времени. Вес этой выпуклой комбинации α зависит от разности решений от схем A и B в данном узле сетки.

Метод гибридной схемы [17–21] обладает несколькими достоинствами. Во-первых, это максимально возможная локальность: для комбинирования решений достаточно данных из одного узла или одной ячейки. Во-вторых, это универсальность: схемы A и B могут быть любыми. В-третьих, это срабатывание не в областях больших градиентов решения, а лишь там, где первые переходят в области его плавного изменения: немонотонности формируются именно в этих переходных зонах. Тем не менее у гибридных схем [17–21] есть один существенный недостаток: они неконсервативны. Нет никакой гарантии, что решение, получаемое путем непосредственного взвешивания решений двух даже консервативных схем,

будет отвечать какому-либо закону сохранения.

Целью настоящей работы является устранение этого недостатка в том случае, когда схема B бикомпактная. Решение проблемы состоит из следующих ингредиентов:

1. Полный отказ от непосредственного взвешивания решений.
2. Использование весового множителя α гибридных схем [17–21] как хорошего индикатора зон, в которых генерируются немонотонности.
3. Представление численного решения в ячейке как конечного элемента вида «интегральное среднее + поправки».
4. Коррекция поправок при помощи α ; поддержание непрерывности конечно-элементной аппроксимации на границах между ячейками без нарушения законов сохранения.

Препринт организован следующим образом. Раздел 1 посвящен получению конечно-элементного представления бикомпактной аппроксимации, раздел 2 — описанию метода консервативной монотонизации, раздел 3 — аналогии между схемами Галеркина и бикомпактными схемами, раздел 4 — тестированию нового метода.

1. Конечно-элементное представление бикомпактной аппроксимации

Одномерный случай. Рассмотрим систему одномерных однородных квазилинейных уравнений гиперболического типа:

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{Q}) \equiv \partial_t \mathbf{Q} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \quad x \in (0, x_{\max}), \quad t \in (0, t_{\max}), \quad (1)$$

где $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_m) = \mathbf{Q}(x, t)$ — искомый вектор консервативных переменных, $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ — вектор физических потоков в направлении оси Ox , символ $\partial_x \equiv \partial/\partial x$. Предполагается, что матрица Якоби $\mathbf{A}(\mathbf{Q}) = \partial_{\mathbf{Q}} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) > 0$ для любых \mathbf{Q} , допускаемых системой (1). Данное предположение не является существенным для бикомпактных схем, однако оно лучше помогает понять их суть. В случае матрицы \mathbf{A} , не являющейся знакоопределенной, применяется метод глобального потокового расщепления Лакса–Фридрихса, см., например, [19]. Мы также полагаем, что система (1) дополнена начальным условием при $t = 0$ и граничным условием при $x = 0$, для которых она имеет единственное решение в $[0, x_{\max}] \times [0, t_{\max}]$.

Запишем для системы (1) полудискретную бикомпактную схему чет-

вертого порядка аппроксимации по x [23]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(A_0^x \mathbf{Q}_{j+1/2}) + \Lambda_1^x \mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{0}, \\ \frac{d}{dt}(\Lambda_1^x \mathbf{Q}_{j+1/2}) + \Lambda_2^x \mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad j = \overline{0, N_x - 1}. \quad (2)$$

Поясним обозначения, используемые в схеме (2). На отрезке $[0, x_{\max}]$ введена (в общем случае неравномерная) сетка

$$\Omega = \Omega_x = \{x_0, x_{1/2}, x_1, x_{3/2}, x_2, \dots, x_{N_x}\}, \quad x_0 = 0, \quad x_{N_x} = x_{\max},$$

$$h_{x, j+1/2} = x_{j+1} - x_j - \text{шаг по } x, \quad x_{j+1/2} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}.$$

Далее мы опускаем индекс $(j + 1/2)$ у шага по x там, где выкладки ограничены одной ячейкой. Векторы $\mathbf{Q}_j, \mathbf{Q}_{j+1/2}$ аппроксимируют точное решение в узлах $x_j, x_{j+1/2}$ соответственно, $\mathbf{F}_j \equiv \mathbf{F}(\mathbf{Q}_j), \mathbf{F}_{j+1/2} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{j+1/2})$. Разностные операторы $A_0^x, \Lambda_1^x, \Lambda_2^x$ определяются для произвольной сеточной функции U так:

$$A_0^x U_{j+1/2} = \frac{U_j + 4U_{j+1/2} + U_{j+1}}{6}, \quad \Lambda_1^x U_{j+1/2} = \frac{U_{j+1} - U_j}{h_x},$$

$$\Lambda_2^x U_{j+1/2} = \frac{4(U_j - 2U_{j+1/2} + U_{j+1})}{h_x^2}.$$

Пространственный шаблон схемы (2) суть $S = \{x_j, x_{j+1/2}, x_{j+1}\}$, и он целиком занимает одну ячейку $K_{j+1} = [x_j, x_{j+1}]$ сетки Ω . Система ОДУ (2) интегрируется по t при помощи A - и L -устойчивых DIRK-методов высокого порядка, см., например, [24]. Ниже под n мы будем понимать номер слоя по времени, под τ — (быть может, переменный) шаг по времени, под \mathbf{Q}^n — численное решение на слое t^n .

Идея бикомпактных схем заключается в следующем. Для достижения в рамках одной ячейки порядка аппроксимации по x выше второго необходимо, чтобы она содержала по крайней мере три узла. При расчете решения на следующем временном слое t^{n+1} в ячейке K_{j+1} имеются два неизвестных вектора: $\mathbf{Q}_{j+1/2}^{n+1}$ и \mathbf{Q}_{j+1}^{n+1} . Поскольку $\mathbf{A} > 0$, вектор \mathbf{Q}_j^{n+1} уже найден после расчетов ячеек с меньшими номерами. Ясно, что для отыскания двух неизвестных необходимы два уравнения. Эти уравнения выводятся путем дискретизации по x в ячейке K_{j+1} самой системы $\mathcal{L}_1(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$ и ее дифференциального следствия $\partial_x \mathcal{L}_1(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$. Для дискретизации применяются метод прямых и метод конечных объемов (см. [23]). В результате получается система из двух уравнений (2).

Любопытно, что бикомпактная пространственная аппроксимация в схеме (2) имеет некоторую связь с методом конечных элементов.

Возьмем пробную функцию $u(x)$, заданную на $[0, x_{\max}]$. Пусть в любой ячейке K_{j+1} мы имеем три значения этой функции $u_j, u_{j+1/2}, u_{j+1}$ в узлах $x_j, x_{j+1/2}, x_{j+1}$ соответственно. Построим по этим данным квадратичный интерполяционный полином $u_h(x; K_{j+1})$, определенный на K_{j+1} :

$$u_h(x; K_{j+1}) = u_{j+1/2} + \xi(\Delta_0^x u_{j+1/2}) + 2\xi^2(\Delta_2^x u_{j+1/2}), \quad x \in K_{j+1}, \quad (3)$$

где

$$\xi = \frac{x - x_{j+1/2}}{h_x} \in [-1/2, +1/2], \quad \Delta_0^x = h_x \Lambda_1^x, \quad \Delta_2^x = \frac{1}{4} h_x^2 \Lambda_2^x.$$

Полином (3) по своему определению удовлетворяет равенствам

$$u_h(x_i; K_{j+1}) = u_i, \quad i \in \{j, j + 1/2, j + 1\}.$$

Совокупность полиномов (3) образует на отрезке $[0, x_{\max}]$ непрерывную кусочно-полиномиальную функцию, или сплайн гладкости 0.

Рассмотрим систему полиномиальных функций $\{\varphi_l(x)\}_{l=0}^{\infty}$, полную в пространстве $\mathbb{L}_2(K_{j+1})$. Пусть эта система ортонормирована относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)g(x) dx \quad \forall f, g \in \mathbb{L}_2(K_{j+1}). \quad (4)$$

Приведем явные выражения для первых трех функций этой системы:

$$\begin{aligned} \varphi_l(x) &= p_l(\xi), \quad l = 0, 1, 2, \\ p_0(\xi) &= 1, \quad p_1(\xi) = 2\sqrt{3}\xi, \quad p_2(\xi) = \frac{\sqrt{5}}{2}(12\xi^2 - 1). \end{aligned}$$

В последующих разделах нам понадобится представление полинома (3) в виде разложения по функциям $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$:

$$u_h(x; K_{j+1}) = \sum_{l=0}^2 c_l \varphi_l(x), \quad (5)$$

где коэффициенты разложения

$$c_0 = A_0^x u_{j+1/2}, \quad c_1 = \frac{\Delta_0^x u_{j+1/2}}{2\sqrt{3}}, \quad c_2 = \frac{\Delta_2^x u_{j+1/2}}{3\sqrt{5}}. \quad (6)$$

Выведем схему (2) альтернативным способом. Аппроксимируем точное решение $\mathbf{Q}(x, t)$ системы (1) и функцию $\mathcal{F}(x, t) = \mathbf{F}[\mathbf{Q}(x, t)]$ на отрезке $[0, x_{\max}]$ при каждом $t = \text{const}$ сплайнами, фрагменты которых в ячейках определяются по формулам вида (3) (вместо u в них подставляются \mathbf{Q}

и \mathcal{F}). Построенные сплайны являются непрерывными конечно-элементными аппроксимациями функций $\mathbf{Q}(x, t)$ и $\mathcal{F}(x, t)$ на отрезке $[0, x_{\max}]$. Чтобы составить уравнения на приближенные сеточные значения $\mathbf{Q}(x, t)$, подставим данные сплайны в левые части уравнений $\mathcal{L}_1(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$ и $\partial_x \mathcal{L}_1(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$, осредним эти левые части по каждой ячейке K_{j+1} и приравняем полученное нулю:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\partial_t \mathbf{Q}_h + \partial_x \mathcal{F}_h) dx = \frac{d}{dt} (A_0^x \mathbf{Q}_{j+1/2}) + \Lambda_1^x \mathbf{F}_{j+1/2}, \\ \mathbf{0} &= \frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\partial_t \partial_x \mathbf{Q}_h + \partial_x^2 \mathcal{F}_h) dx = \frac{d}{dt} (\Lambda_1^x \mathbf{Q}_{j+1/2}) + \Lambda_2^x \mathbf{F}_{j+1/2}. \end{aligned} \right\}$$

Очевидно, результат совпадает со схемой (2).

Двумерный случай. Рассмотрим теперь двумерную версию системы (1) в простейшей вычислительной области D :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\mathbf{Q}) &\equiv \partial_t \mathbf{Q} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{Q}) + \partial_y \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \\ (x, y) &\in D = (0, x_{\max}) \times (0, y_{\max}), \quad t \in (0, t_{\max}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ — вектор физических потоков в направлении оси Oy . Аналогично одномерному случаю мы предполагаем, что матрицы Якоби $\mathbf{A}(\mathbf{Q}) > 0$ и $\mathbf{B}(\mathbf{Q}) = \partial_{\mathbf{Q}} \mathbf{G}(\mathbf{Q}) > 0$ для любых \mathbf{Q} , допускаемых системой (7). Система (7) дополнена начальным условием при $t = 0$ и граничными условиями при $x = 0$ и $y = 0$, для которых она, как мы полагаем, имеет единственное решение в $\bar{D} \times [0, t_{\max}]$, где $\bar{D} = D \cup \partial D$, ∂D — граница области D .

Полудискретная бикompактная схема четвертого порядка аппроксимации по x, y для системы (7) имеет вид (см. [23]):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} (A_0^y A_0^x \mathbf{Q}_C) + A_0^y \Lambda_1^x \mathbf{F}_C + \Lambda_1^y A_0^x \mathbf{G}_C &= \mathbf{0}, \\ \frac{d}{dt} (A_0^y \Lambda_1^x \mathbf{Q}_C) + A_0^y \Lambda_2^x \mathbf{F}_C + \Lambda_1^y \Lambda_1^x \mathbf{G}_C &= \mathbf{0}, \\ \frac{d}{dt} (\Lambda_1^y A_0^x \mathbf{Q}_C) + \Lambda_1^y \Lambda_1^x \mathbf{F}_C + \Lambda_2^y A_0^x \mathbf{G}_C &= \mathbf{0}, \\ \frac{d}{dt} (\Lambda_1^y \Lambda_1^x \mathbf{Q}_C) + \Lambda_1^y \Lambda_2^x \mathbf{F}_C + \Lambda_2^y \Lambda_1^x \mathbf{G}_C &= \mathbf{0}, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

где $C = (j + 1/2, k + 1/2)$ — мультииндекс, $j = \overline{0, N_x - 1}$, $k = \overline{0, N_y - 1}$. Обозначения в схемах (2) и (8) аналогичные: на отрезке $[0, y_{\max}]$ введена

(быть может, неравномерная) сетка

$$\Omega_y = \{y_0, y_{1/2}, y_1, y_{3/2}, y_2, \dots, y_{N_y}\}, \quad y_0 = 0, \quad y_{N_y} = y_{\max},$$

$$h_{y, k+1/2} = y_{k+1} - y_k - \text{шаг по } y, \quad y_{k+1/2} = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}.$$

Сетка в \bar{D} суть $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, ее ячейками являются прямоугольники

$$K_i = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}], \quad i = jN_y + k + 1.$$

Разностные операторы $A_0^y, \Lambda_1^y, \Lambda_2^y$ определяются аналогично операторам $A_0^x, \Lambda_1^x, \Lambda_2^x$. Операторы с индексом « x » действуют только на первый индекс сеточной функции, операторы с индексом « y » — только на второй. Нетрудно показать, что операторы, действующие в направлении оси Ox , коммутируют с операторами, действующими в направлении оси Oy . Пространственный шаблон S схемы (8) состоит из девяти точек:

$$S = \{(x_j, y_k), (x_j, y_{k+1/2}), (x_j, y_{k+1}), (x_{j+1/2}, y_k), (x_{j+1/2}, y_{k+1/2}),$$

$$(x_{j+1/2}, y_{k+1}), (x_{j+1}, y_k), (x_{j+1}, y_{k+1/2}), (x_{j+1}, y_{k+1})\}.$$

Он целиком помещается в одну ячейку K_i , точно так же, как и в одномерном случае.

Обобщим полином (3) на двумерный случай. Пусть $u(x, y)$ — пробная функция, заданная на \bar{D} . Ясно, что искомым интерполяционным полином $u_h(x, y; K_i)$ не может быть ни квадратичным, ни кубическим по x, y : в первом случае он будет определяться шестью коэффициентами, а во втором — десятью, притом что в ячейке K_i имеются девять значений u в девяти ее узлах. При попытке выразить коэффициенты u_h через эти значения мы столкнемся с решением либо переопределенной, либо недоопределенной СЛАУ.

Заметим, что любой двумерный разностный оператор в схеме (8) представляет собой произведение двух одномерных операторов, один из которых действует вдоль оси Oy , а другой — вдоль Ox . Кроме того, полином (3) можно записать как результат действия однопараметрического разностного оператора на $u_{j+1/2}$:

$$u_h(x; K_{j+1}) = \mathcal{P}^x(\xi)u_{j+1/2}, \quad \mathcal{P}^x(\xi) = 1 + \xi\Delta_0^x + 2\xi^2\Delta_2^x.$$

Аналогично определим однопараметрический оператор $\mathcal{P}^y(\eta)$:

$$\mathcal{P}^y(\eta) = 1 + \eta\Delta_0^y + 2\eta^2\Delta_2^y,$$

где

$$\eta = \frac{y - y_{k+1/2}}{h_y} \in [-1/2, +1/2], \quad \Delta_0^y = h_y\Lambda_1^y, \quad \Delta_2^y = \frac{1}{4}h_y^2\Lambda_2^y.$$

Попробуем $\mathcal{P}^y(\eta)\mathcal{P}^x(\xi)u_C$ в качестве искомого двумерного полинома. Раскрыв все скобки, получим:

$$u_h(x, y; K_i) = u_C + \xi(\Delta_0^x u_C) + \eta(\Delta_0^y u_C) + 2\xi^2(\Delta_2^x u_C) + \xi\eta(\Delta_0^y \Delta_0^x u_C) + \\ + 2\eta^2(\Delta_2^y u_C) + 2\xi^2\eta(\Delta_0^y \Delta_2^x u_C) + 2\xi\eta^2(\Delta_2^y \Delta_0^x u_C) + 4\xi^2\eta^2(\Delta_2^y \Delta_2^x u_C). \quad (9)$$

Отметим, что (9) является не чем иным, как хорошо известной биквадратной интерполяцией функции $u(x, y)$ в ячейке K_i . Совокупность полиномов (9) образует в \bar{D} двумерный сплайн гладкости 0.

Следуя нашим рассуждениям в одномерном случае, проверим, выводится ли схема (8) при помощи полинома (9). Аппроксимируем точное решение $\mathbf{Q}(x, y, t)$ системы (7) и функции $\mathcal{F}(x, y, t) = \mathbf{F}[\mathbf{Q}(x, y, t)]$, $\mathcal{G}(x, y, t) = \mathbf{G}[\mathbf{Q}(x, y, t)]$ в \bar{D} сплайнами, фрагменты которых определяются формулами вида (9) (вместо u в них подставляются \mathbf{Q} , \mathcal{F} и \mathcal{G}). Эти сплайны являются непрерывными конечно-элементными аппроксимациями функций $\mathbf{Q}(x, y, t)$, $\mathcal{F}(x, y, t)$ и $\mathcal{G}(x, y, t)$ в \bar{D} . Подставим данные аппроксимации в левые части уравнений

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \quad \partial_x \mathcal{L}_2(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \quad \partial_y \mathcal{L}_2(\mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \quad \partial_x \partial_y \mathcal{L}_2(\mathbf{Q}) = \mathbf{0},$$

осредним эти левые части по ячейке K_i и приравняем полученное нулю:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_i} (\partial_t \mathbf{Q}_h + \partial_x \mathcal{F}_h + \partial_y \mathcal{G}_h) dx dy = \\ &= \frac{d}{dt} (A_0^y A_0^x \mathbf{Q}_C) + A_0^y \Lambda_1^x \mathbf{F}_C + \Lambda_1^y A_0^x \mathbf{G}_C, \\ \mathbf{0} &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_i} (\partial_t \partial_x \mathbf{Q}_h + \partial_x^2 \mathcal{F}_h + \partial_x \partial_y \mathcal{G}_h) dx dy = \\ &= \frac{d}{dt} (A_0^y \Lambda_1^x \mathbf{Q}_C) + A_0^y \Lambda_2^x \mathbf{F}_C + \Lambda_1^y \Lambda_1^x \mathbf{G}_C, \\ \mathbf{0} &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_i} (\partial_t \partial_y \mathbf{Q}_h + \partial_x \partial_y \mathcal{F}_h + \partial_y^2 \mathcal{G}_h) dx dy = \\ &= \frac{d}{dt} (\Lambda_1^y A_0^x \mathbf{Q}_C) + \Lambda_1^y \Lambda_1^x \mathbf{F}_C + \Lambda_2^y A_0^x \mathbf{G}_C, \\ \mathbf{0} &= \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_i} (\partial_t \partial_x \partial_y \mathbf{Q}_h + \partial_x^2 \partial_y \mathcal{F}_h + \partial_x \partial_y^2 \mathcal{G}_h) dx dy = \\ &= \frac{d}{dt} (\Lambda_1^y \Lambda_1^x \mathbf{Q}_C) + \Lambda_1^y \Lambda_2^x \mathbf{F}_C + \Lambda_2^y \Lambda_1^x \mathbf{G}_C. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, схема (8) действительно выводится из аппроксимации (9) «в духе» метода конечных элементов (а также интегро-интерполяционного метода).

В разделе 2 нам потребуется представление полинома (9) в виде разложения по системе полиномиальных функций $\{\psi_l(x, y)\}_{l=0}^{\infty}$, полной в пространстве $\mathbb{L}_2(K_i)$ и ортонормированной относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \frac{1}{h_x h_y} \int_{K_i} f(x, y) g(x, y) dx dy \quad \forall f, g \in \mathbb{L}_2(K_i).$$

Функции ψ_l простым образом выражаются через функции φ_l и p_l :

$$\psi_l(x, y) = \varphi_r(x) \varphi_s(y) = p_r(\xi) p_s(\eta), \quad r = r(l), \quad s = s(l), \quad \forall l \geq 0. \quad (10)$$

Выпишем нужные нам первые девять функций системы:

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y) &= 1, & \psi_1(x, y) &= 2\sqrt{3}\xi, & \psi_2(x, y) &= 2\sqrt{3}\eta, \\ \psi_3(x, y) &= \frac{\sqrt{5}}{2}(12\xi^2 - 1), & \psi_4(x, y) &= 12\xi\eta, & \psi_5(x, y) &= \frac{\sqrt{5}}{2}(12\eta^2 - 1), \\ \psi_6(x, y) &= \sqrt{15}(12\xi^2 - 1)\eta, & \psi_7(x, y) &= \sqrt{15}\xi(12\eta^2 - 1), \\ \psi_8(x, y) &= \frac{5}{4}(12\xi^2 - 1)(12\eta^2 - 1). \end{aligned}$$

Разложение полинома (9) по этой системе имеет вид:

$$u_h(x, y; K_i) = \sum_{l=0}^8 c_l \psi_l(x, y), \quad (11)$$

где коэффициенты разложения

$$\begin{aligned} c_0 &= A_0^y A_0^x u_C, & c_1 &= \frac{A_0^y \Delta_0^x u_C}{2\sqrt{3}}, & c_2 &= \frac{\Delta_0^y A_0^x u_C}{2\sqrt{3}}, \\ c_3 &= \frac{A_0^y \Delta_2^x u_C}{3\sqrt{5}}, & c_4 &= \frac{\Delta_0^y \Delta_0^x u_C}{12}, & c_5 &= \frac{\Delta_2^y A_0^x u_C}{3\sqrt{5}}, \\ c_6 &= \frac{\Delta_0^y \Delta_2^x u_C}{6\sqrt{15}}, & c_7 &= \frac{\Delta_2^y \Delta_0^x u_C}{6\sqrt{15}}, & c_8 &= \frac{\Delta_2^y \Delta_2^x u_C}{180}. \end{aligned} \quad (12)$$

Трехмерный случай. Переход от двумерного случая к трехмерному подобен переходу от одномерного случая к двумерному, поэтому рассматривать детально трехмерный случай мы не будем. Выражения для трехмерных базисных функций $\psi_l(x, y, z)$ и коэффициентов c_l ($l = \overline{0, 26}$) могут быть без труда выписаны по аналогии с формулами (10), (12) и разностными операторами трехмерной полудискретной бикompактной схемы (см. [23]).

Вывод. Таким образом, в основе бикомпактных схем лежат непрерывные конечно-элементные аппроксимации (5), (11). Отталкиваясь от этих аппроксимаций, в разделе 2 мы построим метод консервативной монотонизации бикомпактных схем. В разделе 3 мы углубим аналогию между бикомпактными и конечно-элементными схемами и выясним, в каком смысле можно понимать аппроксимацию дифференциальных следствий исходной системы уравнений.

2. Консервативная монотонизация бикомпактных схем

Опишем метод монотонизации бикомпактных схем, не нарушающий их консервативности. Подобно гибридной схеме [21], мы рассматриваем две схемы: монотонную схему A и высокоточную бикомпактную схему B . Отметим, что разностные законы сохранения у схем A и B не обязаны быть одинаковыми.

Пусть численное решение \mathbf{Q}^n на слое t^n известно. Используя \mathbf{Q}^n , рассчитаем два решения на следующем временном слое t^{n+1} : \mathbf{Q}_A^{n+1} по схеме A и \mathbf{Q}_B^{n+1} по схеме B . Далее все операции выполняются на слое t^{n+1} , поэтому ради краткости верхний индекс $n + 1$ опускается. В каждой ячейке K_i для решения \mathbf{Q}_B согласно формулам (6) или (12) определяются коэффициенты c_l конечно-элементной аппроксимации (5) или (11) (вместо u в указанные формулы подставляется \mathbf{Q}_B). Помимо c_l в ячейке K_i вычисляются весовые множители α_s гибридной схемы [21]:

$$\alpha_s = f(\omega_s), \quad \omega_s = \frac{C_1 |Q_{As}(\mathbf{r}_i) - Q_{Bs}(\mathbf{r}_i)|}{\max_{K_i} Q_{As} - \min_{K_i} Q_{As}}, \quad f(\omega) = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2}, \quad s = \overline{1, m}, \quad (13)$$

где $\mathbf{r}_i \in \Omega$ — центр K_i . Вообще, через \mathbf{r} мы будем обозначать радиус-вектор произвольной точки пространства. Число $C_1 \geq 0$ — настраиваемый параметр метода. При программной реализации (13) в формуле для ω_s в знаменатель дроби добавляется малое слагаемое порядка машинной точности, которое предохраняет от деления на нуль при $Q_{As} = \text{const}$ на K_i .

Обратим внимание на то, что амплитуда изменения Q_{As} в знаменателе выражения для ω_s в формуле (13) вычисляется локально по ячейке K_i , а не глобально по всей вычислительной области, как это делается в [21].

В отличие от [21], множители α_s используются не для непосредственного взвешивания самих решений \mathbf{Q}_A и \mathbf{Q}_B , а для коррекции в ячейке старших коэффициентов конечно-элементной аппроксимации у схемы B : компоненты c_{ls} векторов \mathbf{c}_l при $l \geq 1$ заменяются на величины

$$\tilde{c}_{ls} = (1 - \alpha_s)c_{ls}, \quad l \geq 1. \quad (14)$$

Компонента c_{0s} остается прежней. Иными словами, поправка к интегральному среднему c_{0s} аппроксимации $Q_{Bs,h}(\mathbf{r}; K_i)$ умножается на корректирующий фактор $(1 - \alpha_s)$:

$$Q_{Bs,h}(\mathbf{r}; K_i) \rightarrow \tilde{Q}_{Bs,h}(\mathbf{r}; K_i) = c_{0s} + (1 - \alpha_s) [Q_{Bs,h}(\mathbf{r}; K_i) - c_{0s}].$$

Очевидно, такая замена \mathbf{c}_l на $\tilde{\mathbf{c}}_l$ при $l \geq 1$ оставляет неизменными интегральные средние во всех ячейках и, как следствие, суммарный интеграл от численного решения по D . Однако, поскольку коэффициенты \mathbf{c}_l в каждой ячейке корректируются независимо от коэффициентов в ее соседях, это приводит к нарушению непрерывности аппроксимации в \bar{D} . В каждом узле сетки Ω , находящемся на границе между ячейками, существует сразу несколько значений численного решения, что недопустимо с точки зрения схем A и B .

Нашей задачей теперь является построение непрерывной «сшивки» аппроксимаций в ячейках, причем эта «сшивка» должна оставлять неизменным суммарный интеграл от численного решения по области D .

Запишем обсуждаемый интеграл:

$$\mathbf{I} = \sum_i \int_{K_i} \mathbf{Q}_{B,h}(\mathbf{r}; K_i) dV = \sum_i \int_{K_i} \tilde{\mathbf{Q}}_{B,h}(\mathbf{r}; K_i) dV = \sum_i \mathbf{c}_0(K_i) \Delta V_i, \quad (15)$$

где ΔV_i — объем ячейки K_i . Выражение для \mathbf{I} (15) можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{I} = \sum_{\mathbf{r} \in \Omega} \sum_{i|\mathbf{r} \in S(K_i)} \omega_i(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{L}}_i(\mathbf{r}) \Delta V_i. \quad (16)$$

Поясним формулу (16). Внешнее суммирование ведется по всем узлам сетки Ω , внутреннее — по тем ячейкам, где пространственный шаблон схемы содержит узел $\mathbf{r} \in \Omega$; $\tilde{\mathbf{L}}_i(\mathbf{r})$ — предельное значение решения в узле \mathbf{r} со стороны ячейки K_i , посчитанное по коэффициентам $\mathbf{c}_0, \tilde{\mathbf{c}}_l, l \geq 1$; $\omega_i(\mathbf{r})$ — вес, с которым $\tilde{\mathbf{L}}_i(\mathbf{r})$ входит в квадратуру в ячейке K_i . Составим из пределов $\tilde{\mathbf{L}}_i(\mathbf{r})$ результирующее значение $\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}^{n+1}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{i|\mathbf{r} \in S(K_i)} \omega_i(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{L}}_i(\mathbf{r}) \Delta V_i}{\sum_{i|\mathbf{r} \in S(K_i)} \omega_i(\mathbf{r}) \Delta V_i}. \quad (17)$$

С учетом (17) формула (16) преобразуется к виду:

$$\mathbf{I} = \sum_{\mathbf{r} \in \Omega} \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \sum_{i|\mathbf{r} \in S(K_i)} \omega_i(\mathbf{r}) \Delta V_i. \quad (18)$$

Вид интеграла (18) в точности соответствует тому случаю, когда он вычисляется от непрерывной аппроксимации. Суммирование в (18) осуществляется по всем узлам сетки Ω , где каждое слагаемое этой суммы суть значение решения в узле, умноженное на сумму произведений квадратурных весов и объемов от тех ячеек, которым принадлежит данный узел. Заметим, что после «сшивки» интегральное среднее в каждой ячейке, вообще говоря, изменится, однако суммарный интеграл при этом останется неизменным по построению.

После завершения процедуры «сшивки» результирующее решение на слое t^{n+1} построено. Суммируя вышесказанное, сформулируем предлагаемый метод в виде последовательности шагов:

1. Вычислить решения \mathbf{Q}_A^{n+1} и \mathbf{Q}_B^{n+1} по схемам A и B соответственно, полагая \mathbf{Q}^n их общим начальным условием.
2. Найти в каждой ячейке K_i сетки Ω для решения \mathbf{Q}_B^{n+1} коэффициенты \mathbf{c}_l конечно-элементной аппроксимации; вычислить также по формуле (13) весовые множители α_s .
3. Заменить \mathbf{c}_l на $\tilde{\mathbf{c}}_l$ при $l \geq 1$ по формуле (14) во всех ячейках сетки.
4. Рассчитать результирующее решение \mathbf{Q}^{n+1} в каждом узле сетки Ω по формуле (17).

Замечания:

1. В областях гладкости решения имеем $\alpha_s = O(\tau^2)$ при $\tau \rightarrow 0$. В таких ячейках конечно-элементные аппроксимации $\mathbf{Q}_{B,h}(\mathbf{r}; K_i)$ практически не корректируются, отклонения от непрерывности на границах между ячейками малы, и «сшивка» (17) почти бессмысленна, так как все величины $\tilde{\mathbf{L}}_i(\mathbf{r})$ близки друг к другу.
2. Суммы вида $\sum_{i|\mathbf{r} \in S(K_i)}$ состоят только из одного слагаемого в а) центрах ячеек; б) центрах их граней, лежащих на гранях \bar{D} ; в) центрах ребер ячеек, лежащих на ребрах \bar{D} ; г) вершинах \bar{D} .
3. Выражение (17) является линейной комбинацией векторов $\tilde{\mathbf{L}}_i(\mathbf{r})$ с положительными коэффициентами.
4. В зонах около областей больших градиентов решения, там, где генерируются немонотонности и где отличие между решениями схем A и B значительно, имеем $\alpha_s \rightarrow 1$. В этом пределе от конечно-элементных аппроксимаций $\mathbf{Q}_{B,h}(\mathbf{r}; K_i)$ остаются константы (главные члены), по которым по формуле (17) монотонно и линейно реконструируется решение на границах ячеек.

Пример. Проанализируем формулу (17) в одномерном случае. В полуцелых узлах, а также в целых узлах на границах отрезка $[0, x_{\max}]$ имеем:

$$\mathbf{Q}_{j+1/2} = \tilde{\mathbf{L}}_{j+1}(x_{j+1/2}), \quad \mathbf{Q}_0 = \tilde{\mathbf{L}}_1(0), \quad \mathbf{Q}_{N_x} = \tilde{\mathbf{L}}_{N_x}(x_{\max}).$$

Во внутренних целых узлах имеем:

$$\mathbf{Q}_j = \frac{\frac{1}{6}\tilde{\mathbf{L}}_j(x_j)h_{x,j-1/2} + \frac{1}{6}\tilde{\mathbf{L}}_{j+1}(x_j)h_{x,j+1/2}}{\frac{1}{6}h_{x,j-1/2} + \frac{1}{6}h_{x,j+1/2}} = \frac{\tilde{\mathbf{L}}_j(x_j)h_{x,j-1/2} + \tilde{\mathbf{L}}_{j+1}(x_j)h_{x,j+1/2}}{h_{x,j-1/2} + h_{x,j+1/2}},$$

$$j = \overline{1, N_x - 1}. \quad (19)$$

В частном случае равномерной сетки формула (19) приобретает особенно простой вид:

$$\mathbf{Q}_j = \frac{\tilde{\mathbf{L}}_j(x_j) + \tilde{\mathbf{L}}_{j+1}(x_j)}{2}, \quad j = \overline{1, N_x - 1},$$

то есть результирующее решение в каждом внутреннем целом узле равно полусумме пределов в этом узле от скорректированных конечно-элементных аппроксимаций в ячейках, на общей границе которых расположен рассматриваемый узел.

3. Аналогия между схемами Галеркина и бикомпактными схемами

Интересно, что между схемами Галеркина и бикомпактными схемами существует определенная аналогия, которую мы продемонстрируем на примере системы (1). Приближим ее точное решение в ячейке K_{j+1} линейной комбинацией базисных полиномов $\varphi_l(x)$ (см. раздел 1) максимальной степени l_{\max} :

$$\mathbf{Q}(x, t) \approx \mathbf{Q}_h(x, t; K_{j+1}) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} \mathbf{c}_l(t) \varphi_l(x). \quad (20)$$

Уравнения полудискретной схемы Галеркина для системы (1) получаются из условия ортогональности невязки первым $(l_{\max} + 1)$ базисным функциям системы $\{\varphi_l(x)\}_{l=0}^{\infty}$:

$$(\mathcal{L}_1(\mathbf{Q}_h), \varphi_l) = \mathbf{0}, \quad l = \overline{0, l_{\max}}, \quad (21)$$

где скалярное произведение определяется формулой (4). Напишем уравнения (21) в их окончательной форме:

$$\frac{d\mathbf{c}_l}{dt} + \frac{\varphi_l(x_{j+1})\widehat{\mathbf{F}}_{j+1} - \varphi_l(x_j)\widehat{\mathbf{F}}_j}{h_x} - \frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{F}[\mathbf{Q}_h(x, t; K_{j+1})] \frac{d\varphi_l(x)}{dx} dx = \mathbf{0},$$

$$l = \overline{0, l_{\max}}. \quad (22)$$

Существует два варианта схемы (22). Если аппроксимация (20) может претерпевать сильные разрывы на границах ячеек, то мы имеем разрывную схему Галеркина: уравнения (22) решаются для всех \mathbf{c}_l , $l = \overline{0, l_{\max}}$, а численные потоки $\widehat{\mathbf{F}}_j$ на границах ячеек находятся из точного или приближенного решения задач Римана в малых окрестностях точек (x_j, t) . Если же от аппроксимации (20) требуется непрерывность на всем отрезке $[0, x_{\max}]$, то мы имеем непрерывную схему Галеркина. Из-за дополнительного ограничения на непрерывность количество уравнений (22) уменьшается на единицу (в каждой ячейке), а численные потоки $\widehat{\mathbf{F}}_j = \mathbf{F}[\mathbf{Q}_h(x_j, t; K_{j+1})] = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_j) = \mathbf{F}_j$.

Рассмотрим непрерывную версию схемы Галеркина (22) в частном случае $l_{\max} = 2$. Оставим из уравнений (22) первые два ($l = 0, 1$), а коэффициенты \mathbf{c}_2 будем определять из условий непрерывности численного решения на границах ячеек. Напишем уравнение на \mathbf{c}_0 :

$$\frac{d\mathbf{c}_0}{dt} + \frac{\mathbf{F}_{j+1} - \mathbf{F}_j}{h_x} = \mathbf{0}. \quad (23)$$

Уравнение на \mathbf{c}_1 имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{c}_1}{dt} + \frac{\sqrt{3}}{h_x} \left[\mathbf{F}_j - \frac{2}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{F}[\mathbf{Q}_h(x, t; K_{j+1})] dx + \mathbf{F}_{j+1} \right] = \mathbf{0}. \quad (24)$$

Аппроксимируем интеграл от \mathbf{F} в уравнении (24) квадратурой Симпсона с погрешностью $\mathbf{O}(h_x^4)$:

$$\frac{1}{h_x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{F}[\mathbf{Q}_h(x, t; K_{j+1})] dx \approx \frac{\mathbf{F}_j + 4\mathbf{F}_{j+1/2} + \mathbf{F}_{j+1}}{6}. \quad (25)$$

Подстановка (25) в (24) дает

$$\frac{d\mathbf{c}_1}{dt} + \frac{\mathbf{F}_j - 2\mathbf{F}_{j+1/2} + \mathbf{F}_{j+1}}{2\sqrt{3}h_x} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

В силу непрерывности конечно-элементной аппроксимации (20) ее коэффициенты выражаются через узловые значения $\mathbf{Q}_h(x, t; K_{j+1})$ по формулам (6), где вместо u фигурирует \mathbf{Q} . Подставляя в уравнение (23) выражение для c_0 через значения решения в узлах сетки Ω , используя для сокращения записи разностные операторы A_0^x и Λ_1^x , мы получим

$$\frac{d}{dt}(A_0^x \mathbf{Q}_{j+1/2}) + \Lambda_1^x \mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{0},$$

то есть первое уравнение полудискретной бикompактной схемы (2). Выполнив те же преобразования с уравнением (26), мы приходим к

$$\frac{d}{dt}(\Lambda_1^x \mathbf{Q}_{j+1/2}) + \Lambda_2^x \mathbf{F}_{j+1/2} = \mathbf{0},$$

то есть второму уравнению схемы (2).

Из рассуждений выше следует, что при малых шагах сетки уравнения полудискретной бикompактной схемы близки к уравнениям полудискретной непрерывной схемы Галеркина, в этом и состоит суть аналогии между этими классами схем. Из данной аналогии мы можем сделать два вывода. Во-первых, на дискретизации дифференциальных следствий системы дифференциальных уравнений можно смотреть как на уравнения для определения старших коэффициентов конечно-элементной аппроксимации. Во-вторых, бикompактные схемы обладают не только классической (сильной) аппроксимацией, но и слабой, что позволяет ожидать от них сходимости к разрывным решениям при сгущении сетки.

4. Тестирование метода на одномерных задачах газодинамики

Проверим на одномерных задачах газодинамики метод консервативной монотонизации бикompактных схем, разработанный в разделе 2.

Система уравнений. Система одномерных газодинамических уравнений Эйлера имеет вид (1), где

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix}, \quad E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho v^2}{2}.$$

Через ρ , v , p , E обозначены соответственно плотность, скорость, давление и полная энергия единицы объема газа, $\gamma = \text{const}$ — показатель адиабаты. Ниже во всех задачах газ двухатомный, $\gamma = 1.4$.

Схема и ее параметры. В качестве схем A и B возьмем бикompактные схемы четвертого порядка аппроксимации по x , получаемые из полудискретной схемы (2). Интегрирование по t в схеме A выполняется неявным

методом Эйлера (базовая схема), в схеме B — жестко-точным L -устойчивым трехстадийным SDIRK-методом [24, формула (17)] третьего порядка. Погрешности аппроксимации схем A и B на гладких решениях составляют $\mathcal{O}(h_x^4, \tau)$ и $\mathcal{O}(h_x^4, \tau^3)$ соответственно. Схема A монотонна при числах Куранта, не меньших 0.25.

Параметр $C_1 \geq 0$ выбирается в зависимости от задачи. Параметр потокового расщепления C_2^x (см. [19]) автоматически пересчитывается перед каждым переходом со слоя t^n на слой t^{n+1} , для его вычисления мы используем формулу

$$C_2^x = \frac{1 + 2\delta}{2} V_{\max}^x, \quad V_{\max}^x = \max_{\substack{s=1,m \\ x \in \Omega}} |\lambda_s(\mathbf{Q}^n(x); \mathbf{A})|,$$

где $\lambda_s(\mathbf{Q}; \mathbf{X})$ — s -е собственное значение матрицы $\mathbf{X}(\mathbf{Q})$, $\delta > 0$ — «запас положительной/отрицательной определенности» матриц Якоби расщепленных потоков. Далее всюду $\delta = 0.2$. Шаг по времени переменный и также вычисляется автоматически:

$$\tau = \tau^{n+1} = t^{n+1} - t^n = \frac{2\kappa h_x}{V_{\max}^x + 2C_2^x},$$

где $\kappa = \text{const}$ — максимальное число Куранта, являющееся задаваемым параметром. Во всех задачах мы будем использовать равномерные сетки по x .

Поскольку отрицательные значения ρ и E недопустимы, весовые множители α_s должны быстро выходить на 1 при приближении к нулевым плотностям или удельным энергиям. В связи с этим выражение для ω_s в формуле (13) меняется на

$$\omega_s = \frac{C_1 |Q_{As}(\mathbf{r}_i) - Q_{Bs}(\mathbf{r}_i)|}{\min\{\sigma \max_{K_i} |Q_{As}|, \max_{K_i} Q_{As} - \min_{K_i} Q_{As}\}}, \quad s = \overline{1, m},$$

где $\sigma > 0$ — малый множитель. Далее всюду $\sigma = 0.1$.

Нелинейные уравнения схем A и B решаются методом Ньютона с относительной погрешностью $\text{rtol} = 10^{-9}$.

Задача Седова о сильном взрыве. Начнем с известной задачи Седова о сильном взрыве в идеальном газе [25]. Мы будем рассматривать взрыв с плоской симметрией. Эта задача примечательна тем, что именно в ней весьма заметно проявляется неконсервативность гибридных схем [18, 20, 21].

Опишем начальные и граничные условия. Координата $x_{\max} = 1$, взрыв происходит в момент времени $t = 0$ в точке $x = x_0 = 0.5$. Энергия взрыва \mathcal{E}_0 задается так, чтобы к моменту времени $t = t_{\max} = 0.01$ ударные

волны распространились на расстояние 0.4 от точки взрыва: $\mathcal{E}_0 = 689.593$. Начальные условия таковы, $x \in \Omega$:

$$\rho(x, 0) = 1, v(x, 0) = 0, E(x, 0) = \begin{cases} \mathcal{E}_0/h_x & \text{при } x = x_0, \\ 0.5\mathcal{E}_0/h_x & \text{при } x = x_0 \pm 0.5h_x, \\ 10^{-2}/(\gamma - 1) & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Граничные условия постоянные.

Расчеты проведем на сетках с $N_x = 100, 200, 400$ ячеек при числе Куранта $\kappa = 0.8$ и $C_1 = 0.5$.

Посчитанные профили плотности, давления и скорости в конечный момент времени приведены на рис. 1–3 соответственно. Цветными маркерами показаны значения численных решений в целых узлах, сплошной черной кривой — точное решение. Видно, что бикомпактная схема с новым методом монотонизации обеспечивает очень хорошее разрешение ударных волн (на 3–4 ячейках), кроме того, эта схема неплохо передает острые пики плотности и давления. Важно, что координаты ударных волн у точного и численного решения практически неотличимы друг от друга. Отметим, что интеграл от численного \mathbf{Q} сохраняет свое значение с относительной погрешностью порядка rtol в каждой компоненте.

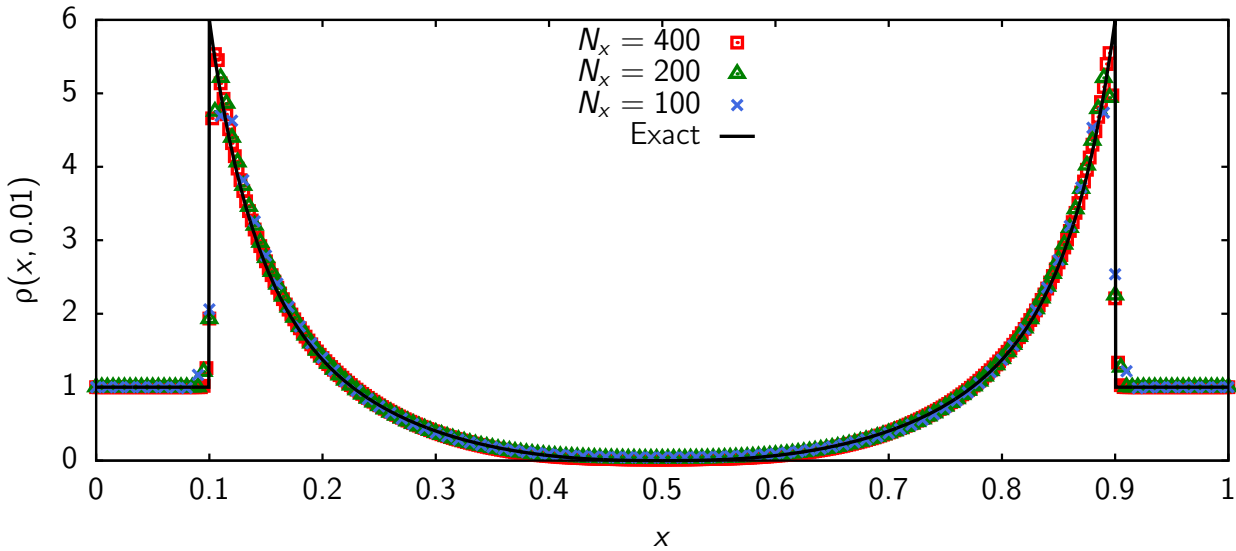


Рис. 1. Профили плотности в задаче Седова при $t = t_{\max} = 0.01$

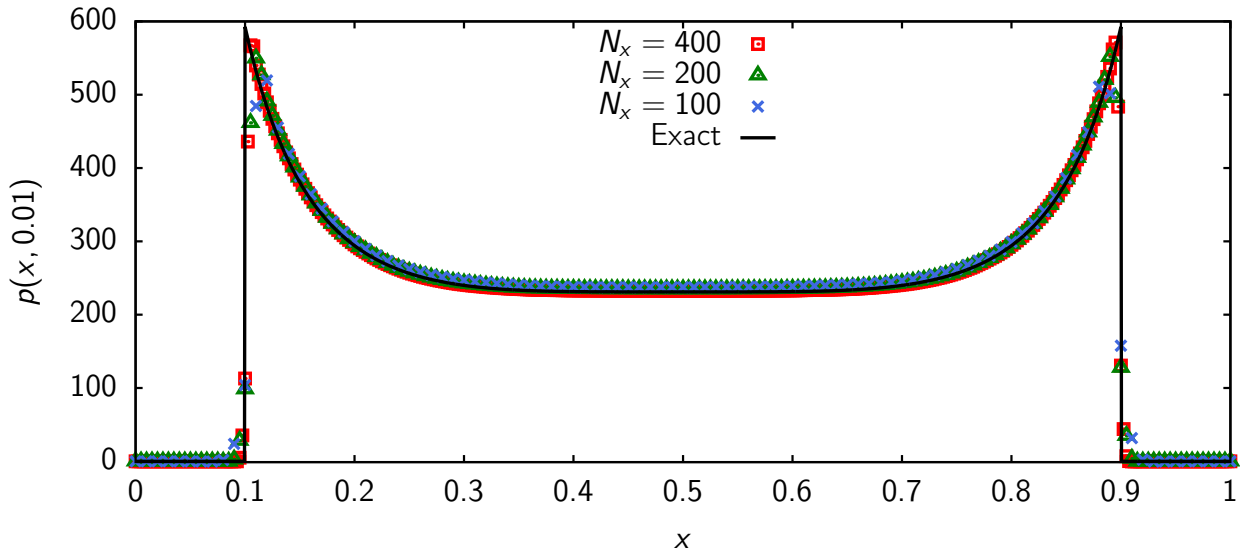


Рис. 2. Профили давления в задаче Седова при $t = t_{\max} = 0.01$

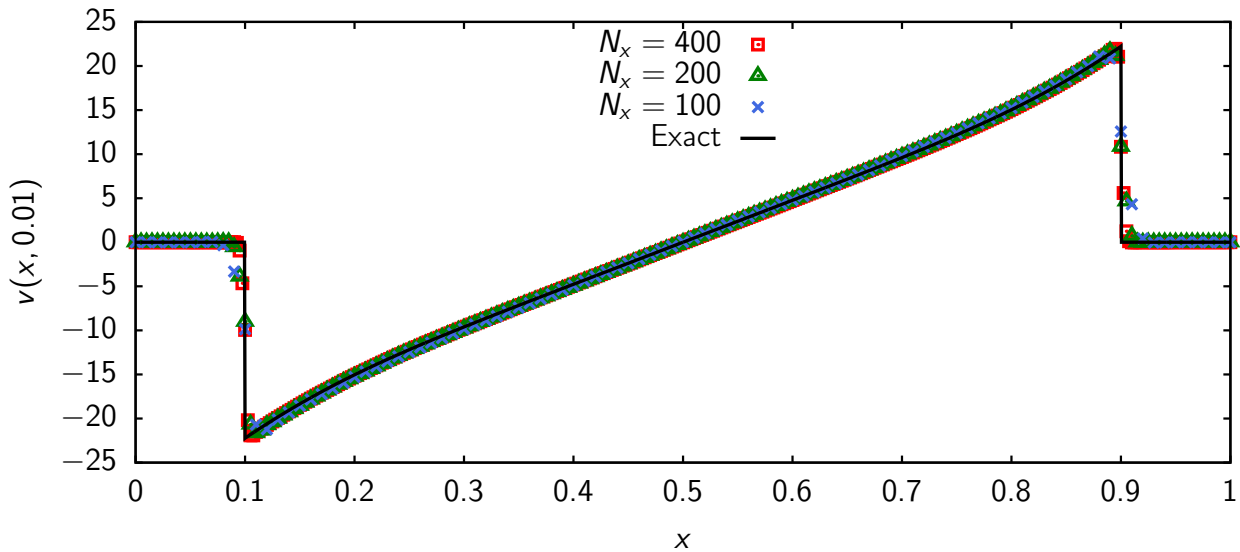


Рис. 3. Профили скорости в задаче Седова при $t = t_{\max} = 0.01$

Гибридные схемы [18, 20, 21] не являются консервативными: вообще говоря, выпуклое взвешивание решений двух консервативных схем не обязательно давать решение с каким-либо законом сохранения. Во всех посчитанных ранее задачах гибридные схемы [18, 20, 21] не проявляли своей неконсервативности в заметной степени. Однако в задаче Седова гибридная схема [21] заметно занижает скорости ударных волн (на десятки процентов), причем сгущение сетки не показывает сходимости к точному решению. Гибридные схемы [18, 20], в отличие от [21], используют C_1/τ вместо C_1 в формуле для весового множителя. Это помогает схемам [18, 20] выдавать почти правильные скорости ударных волн при сгущении сетки, однако это

требует немалых C_1 , которые приводят к неудовлетворительно большой численной диссипации (например, пик плотности будет на уровне $\rho = 3$ даже на сетке с $N_x = 800$). По-видимому, вышеописанные эффекты и особенность задачи Седова объясняются тем, что начальное условие в ней существенно зависит от шага h_x , значение $E(x_0, 0) \sim h_x^{-1}$.

Задача Римана с узким пиком плотности. Посчитаем теперь одномерную задачу Римана «test peak» [26]. Мы выбрали именно эту задачу по нескольким причинам. Во-первых, она содержит одновременно сильную ударную волну и мощный контактный разрыв с перепадом плотности в ≈ 300 раз, причем значение плотности по одну из сторон от этого контактного разрыва близко к нулю. Даже малая немонотонность на этом малом значении ρ может привести к «развалу» схемы. Во-вторых, профиль плотности при $t = t_{\max}$ содержит очень узкий пик, разрешить который могут не все схемы. В-третьих, этот узкий пик составлен из уже упомянутых контактного разрыва и ударной волны: хорошее разрешение такой структуры требует малой диссипации, которая может привести к опасной немонотонности вблизи «трудного» контактного разрыва; большая диссипация предохраняет от немонотонностей, но ухудшает разрешение пика.

В отличие от [26], мы считаем не на отрезке $[0.1, 0.6]$, а на отрезке $[0, 1]$ ($x_{\max} = 1$) с вдвое большими N_x . Вычисления выполним на сетках с $N_x = 1600, 3200$. Числу ячеек $N_x = 1600$ соответствует $h_x = h_x^* = 6.25 \cdot 10^{-4}$, то есть стандартный (общепринятый для сравнения) шаг по x в этой задаче. Число Куранта $\kappa = 1$, параметр $C_1 = 1$. Необходимо уточнить, что бикомпактные схемы не дают точного решения при $\kappa = 1$, в отличие от некоторых явных схем в некоторых задачах. Более того, бикомпактные схемы не дают точного решения ни при каких числах Куранта, причем чем больше κ , тем «хуже» для этих схем, так как численная диссипация в бикомпактных схемах растет с ростом κ .

Посчитанные профили плотности в конечный момент времени приведены на рис. 4. Видно, что бикомпактная схема с консервативной монотонизацией без ошибок предсказывает положение ударной волны. Разность интегралов от численного Q в моменты времени $t = 0$ и $t = t_{\max}$ отклоняется от величины $[t_{\max}(\mathcal{F}(0, 0) - \mathcal{F}(x_{\max}, 0))]$ с относительной погрешностью порядка rtol во всех компонентах.

Если сравнивать с классической схемой WENO5 [15], то бикомпактная схема обеспечивает несколько лучшее разрешение ударной волны (на 4 ячейки). Отметим, что WENO5 переносит пик с чуть-чуть завышенной скоростью, хотя и без ошибок в интегралах Q . Обе схемы дают по три точки на «полочке» пика. Обратим особое внимание на то, что консервативная

монотонизация здесь значительно лучше гибридной схемы [18]: даже на четырехкратно более густой сетке с шагом $0.25h_x^*$ решение схемы [18] не проходит вдоль «полочки» пика.

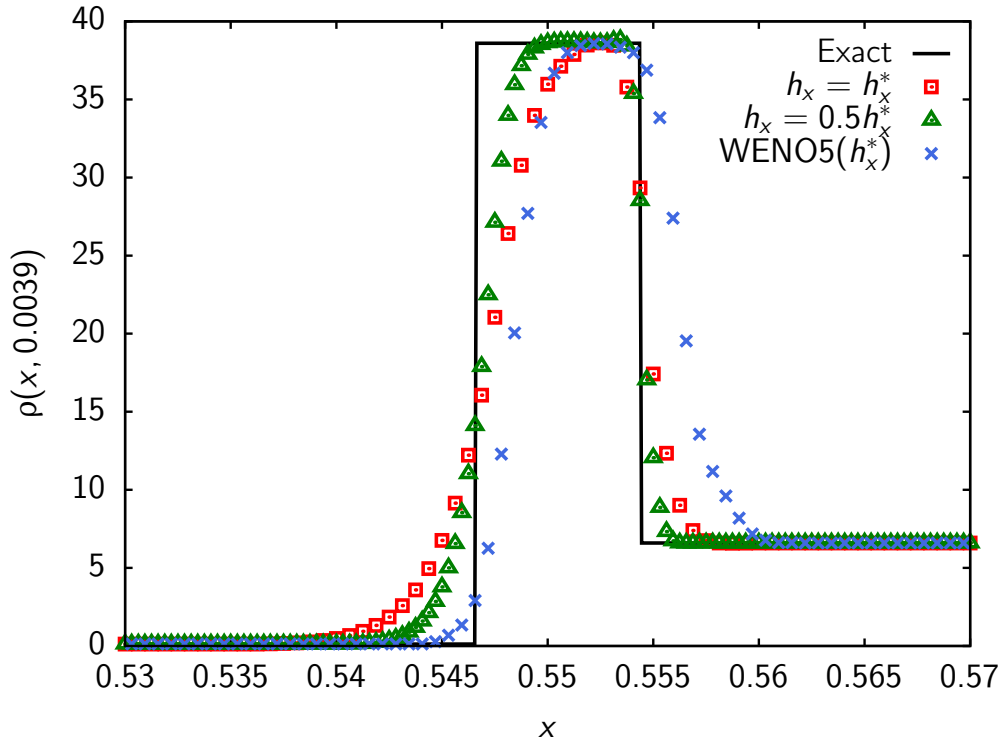


Рис. 4. Профили плотности в задаче Римана «test peak» при $t = t_{\max} = 0.0039$ в окрестности узкого пика

Задача Шу-Ошера. Хорошо известная тестовая задача Шу-Ошера [14] о взаимодействии ударной волны и синусоидального фона плотности еще ни разу не была посчитана по бикомпактным схемам. Интересно выяснить, с какой точностью разработанный метод монотонизации передает гладкие возмущения через поверхность ударной волны.

В отличие от [14], мы решаем эту задачу на отрезке $[0, 10]$ ($x_{\max} = 10$), а не на $[-5, 5]$. Вычисления выполним на сетках с $N_x = 200, 400, 800$. В качестве «точного решения» возьмем сошедшееся численное решение испытываемой бикомпактной схемы на сетке с $N_x = 2000$. Число Куранта $\kappa = 0.5$, параметр $C_1 = 0.5$.

Посчитанные профили плотности в конечный момент времени приведены на рис. 5. Отличия между численными решениями заметны только около точек $x = 5.75$ и $x = 7.35$ (у маленького острого пика, примыкающего к ударной волне слева), также решение на сетке $N_x = 200$ имеет меньшие амплитуды колебаний ρ за ударной волной, движущейся слева направо. На всех сетках бикомпактная схема разрешает ударную волну на

двух ячейках. Ударная волна находится в правильной точке (если судить по другим известным решениям), глобальные законы сохранения выполняются с относительной точностью порядка rtol , как и в предыдущих задачах.

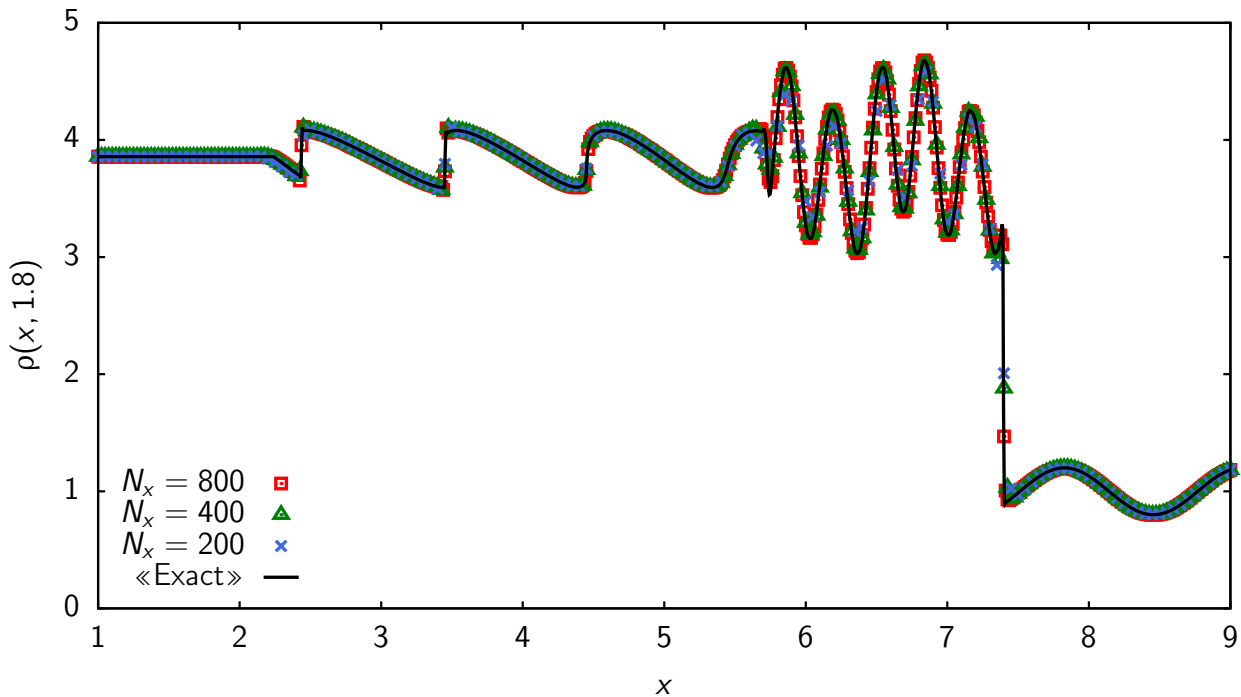


Рис. 5. Профили плотности в задаче Шу-Ошера при $t = t_{\max} = 1.8$

На рис. 6 показан увеличенный фрагмент рис. 5 при $x \in [5.5, 7.5]$, $\rho \in [2.75, 4.75]$. Этот график позволяет с большей ясностью оценить порядок точности схемы на «синусоиде», локализованной на отрезке $[5.8, 7.3]$. Решение на сетке $N_x = 200$ идет достаточно близко к «точному», но отличия между ними заметны. При сгущении сетки всего лишь в два раза мы получаем решение, графически почти совпадающее с «точным» при $x \in [5.8, 7.3]$. Это говорит о высоком порядке точности схемы в этой области. Количественное сравнение численных решений на экстремумах «синусоиды» по методу Рунге дает порядок точности ≈ 3.15 . Это число хорошо согласуется с теоретическим порядком точности схемы.

Заключение

Получено конечно-элементное представление бикompактной аппроксимации. На его основе впервые построен метод консервативной монотонизации бикompактных схем. Главной идеей метода является коррекция старших коэффициентов непрерывной конечно-элементной аппроксимации при помощи весовых множителей гибридной схемы. Коррекция в каждой ячейке выполняется локально и независимо от других, соседних ячеек.

Поскольку в процессе этой коррекции нарушается непрерывность конечно-элементной аппроксимации, применение метода завершается консервативной «сшивкой» аппроксимации на границах ячеек.

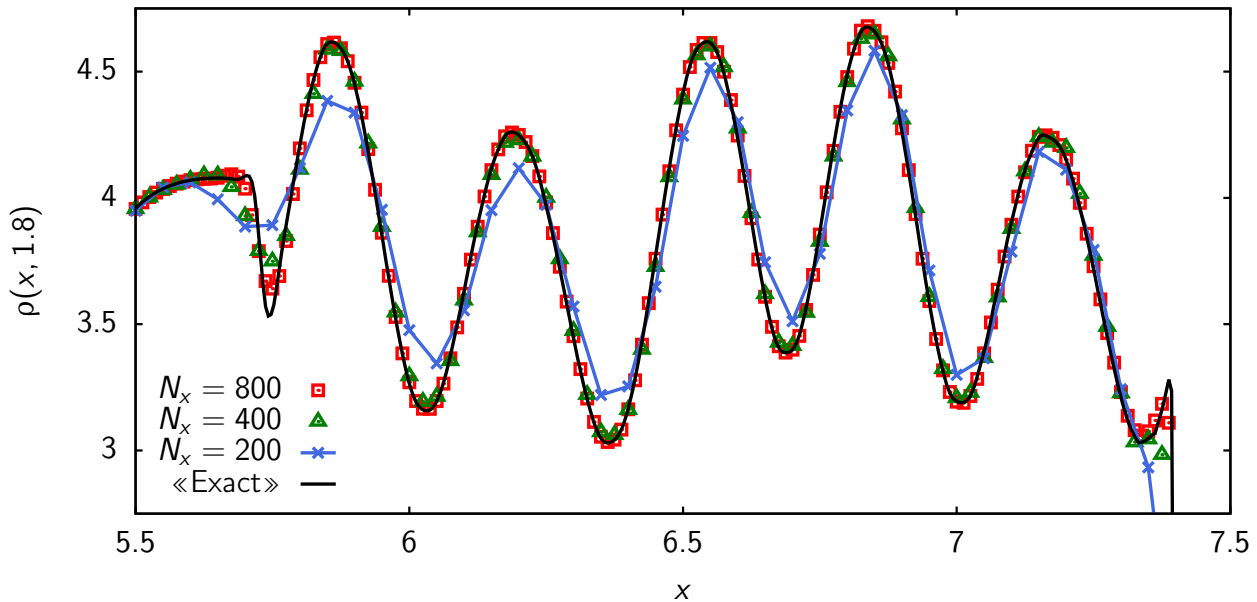


Рис. 6. Увеличенный фрагмент рис. 5 при $x \in [5.5, 7.5]$, $\rho \in [2.75, 4.75]$

Установлена аналогия между схемами Галеркина и бикомпактными схемами. У нее есть два следствия: во-первых, дискретизации дифференциальных следствий систем дифференциальных уравнений можно рассматривать как уравнения на старшие коэффициенты конечно-элементной аппроксимации; во-вторых, бикомпактные схемы обладают свойством слабой аппроксимации.

Разработанный метод монотонизации бикомпактных схем проверен на одномерных задачах газодинамики: задаче Седова о сильном взрыве, задаче Римана с узким пиком плотности и задаче Шу-Ошера. Результаты расчетов показывают, что бикомпактные схемы с консервативной монотонизацией гарантируют выполнение разностного аналога закона сохранения (это принципиально, например, в задаче Седова). Более того, такие бикомпактные схемы существенно превосходят в точности применявшиеся ранее гибридные бикомпактные схемы.

Библиографический список

1. Рогов Б. В. Дисперсионные и диссипативные свойства полностью дискретных бикомпактных схем четвертого порядка пространственной аппроксимации для уравнений гиперболического типа // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2018. — № 153. — 30 с.

2. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. — 1959. — Т. 47 (89), № 3. — С. 271–306.
3. Cockburn B., Shu C.-W. Nonlinearly stable compact schemes for shock calculations // SIAM J. Numer. Anal. — 1994. — Vol. 31, no. 3. — P. 607–627.
4. Yee H. C. Explicit and implicit multidimensional compact high-resolution shock-capturing methods: Formulation // J. Comput. Phys. — 1997. — Vol. 131, no. 1. — P. 216–232.
5. Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws / L. Krivodonova, J. Xin, J.-F. Remacle et al. // Appl. Numer. Math. — 2004. — Vol. 48. — P. 323–338.
6. Yee H. C., Sandham N. D., Djomehri M. J. Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters // J. Comput. Phys. — 1999. — Vol. 150, no. 1. — P. 199–238.
7. Ekaterinaris J. A. High-order accurate, low numerical diffusion methods for aerodynamics // Prog. Aerosp. Sci. — 2005. — Vol. 41. — P. 192–300.
8. Yee H. C., Sjögreen B. Adaptive filtering and limiting in compact high order methods for multiscale gas dynamics and MHD systems // Comput. Fluids. — 2008. — Vol. 37, no. 5. — P. 593–619.
9. Von Neumann J., Richtmyer R. D. A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. — 1950. — Vol. 21, no. 3. — P. 232–237.
10. Остапенко В. В. Симметричные компактные схемы с искусственными вязкостями повышенного порядка дивергентности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2002. — Т. 42, № 7. — С. 1019–1038.
11. Guermond J.-L., Pasquetti R., Popov B. Entropy viscosity method for nonlinear conservation laws // J. Comput. Phys. — 2011. — Vol. 230. — P. 4248–4267.
12. Kurganov A., Liu Y. New adaptive artificial viscosity method for hyperbolic systems of conservation laws // J. Comput. Phys. — 2012. — Vol. 231, no. 24. — P. 8114–8132.

13. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III / A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. R. Chakravarthy // J. Comput. Phys. — 1987. — Vol. 71, no. 2. — P. 231–303.
14. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II // J. Comput. Phys. — 1989. — Vol. 83. — P. 32–78.
15. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. — 1996. — Vol. 126. — P. 202–228.
16. Qiu J., Shu C.-W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters // SIAM J. Sci. Comput. — 2005. — Vol. 26, no. 3. — P. 907–929.
17. Рогов Б. В., Михайловская М. Н. Монотонные бикompактные схемы для линейного уравнения переноса // Докл. АН. — 2011. — Т. 436, № 5. — С. 600–605.
18. Михайловская М. Н., Рогов Б. В. Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2012. — Т. 52, № 4. — С. 672–695.
19. Chikitkin A. V., Rogov B. V., Utyuzhnikov S. V. High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. — 2015. — Vol. 93. — P. 150–163.
20. Брагин М. Д., Рогов Б. В. Гибридные бикompактные схемы с минимальной диссипацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2016. — Т. 56, № 6. — С. 958–972.
21. Брагин М. Д., Рогов Б. В. Новая гибридная схема для расчета разрывных решений гиперболических уравнений // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2016. — № 22. — 22 с.
22. Федоренко Р. П. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1962. — Т. 2, № 6. — С. 1122–1128.
23. Рогов Б. В. Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2013. — Т. 53, № 2. — С. 264–274.

24. Скворцов Л. М. Диагонально неявные FSAL-методы Рунге-Кутты для жестких и дифференциально-алгебраических систем // Матем. моделирование. — 2002. — Т. 14, № 2. — С. 3–17.
25. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — Москва : Наука, 1977.
26. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // SIAM J. Sci. Comput. — 2003. — Vol. 25, no. 3. — P. 995–1017.