



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**[Алексеев М.В.](#), [Савенков Е.Б.](#)**

Применение разрывного метода Галеркина для решения одномерных гиперболических задач гиперупругости в неоднородной среде

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Алексеев М.В., Савенков Е.Б. Применение разрывного метода Галеркина для решения одномерных гиперболических задач гиперупругости в неоднородной среде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 88. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2019-88](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-88)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-88>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША

М.В. Алексеев, Е.Б. Савенков

Применение разрывного метода Галеркина для  
решения одномерных гиперболических задач  
гиперупругости в неоднородной среде

Москва, 2019

*М.В. Алексеев, Е.Б. Савенков*, Применение разрывного метода Галеркина для решения одномерных гиперболических задач гиперупругости в неоднородной среде

### **Аннотация**

Работа посвящена численному исследованию разрывного метода Галеркина высокого порядка для решения гиперболической системы уравнений гиперупругости в неоднородной среде. Рассматриваются постановки задачи и особенности реализации вычислительных алгоритмов для системы гиперболических уравнений, записанных в консервативной и неконсервативной формах. Зоны однородности свойств среды описываются с помощью сглаженных характеристических функций. Приводятся результаты численных расчетов в однородных и неоднородных средах (газообразных и твердых) в рамках единой постановки.

**Ключевые слова:** разрывный метод Галеркина, уравнения гиперупругости

*M. V. Alekseev, E. B. Savenkov* The use of the discontinuous Galerkin method for solving one-dimensional hyperbolic problems of hyperelasticity in an inhomogeneous medium.

### **Abstract**

The work is devoted to the numerical study of the high-order discontinuous Galerkin method for solving a hyperbolic system of equations of hyperelasticity in an inhomogeneous medium. The physical problems and implementation features of computational algorithms for a system of hyperbolic equations written in conservative and non-conservative forms are considered. Zones of uniformity of medium properties are described using smoothed characteristic functions. The results of numerical calculations in homogeneous and inhomogeneous media (gaseous and solid) in the framework of a single model are presented.

**Key words and phrases:** Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods, hyperelasticity

# 1 Введение

Настоящая работа посвящена численному исследованию разрывного метода Галеркина (Discontinuous Galerkin Method, DGM) высокого порядка для решения гиперболической системы уравнений гиперупругости 1-го порядка. Указанная модель описывает динамику изменения состояния сплошной среды (поля деформаций и напряжений, скорости, температуры и энтропии) в *эйлеровых* координатах. Впервые она была предложена в работе [2], и, в отличие от ряда гипоупругих [1] моделей, является термодинамически согласованной по построению.

В последнее время интерес к моделям такого типа существенно возрос в связи с тем, что они [12, 21], используя эйлеров подход для описания движения среды, более пригодны для расчета течений с «экстремально большими» деформациями, чем традиционные модели, основанные на смешанном эйлерово-лагранжевом описании динамики сплошной среды.

В настоящее время известно относительно много работ, посвященных численному решению уравнений гиперупругости [6, 17]. Однако, как правило, они используют методы класса WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory; библиография, посвященная этому методу, обширна [15, 13]). Причина этого, по всей видимости, заключается в том, что методы WENO являются хорошо отработанной технологией построения аппроксимаций высокого порядка — сравнительно простой и универсальной.

В настоящей работе для решения гиперболической системы уравнений гиперупругости применен разрывный метод Галеркина с использованием метода Рунге-Кутты (RK/DG, Runge-Kutta/Discontinuous Galerkin method [9]). Мотивация такого выбора связана с тем, что разрывный метод Галеркина допускает более или менее формальные обобщения на случай уравнений высокого порядка. Последние, в свою очередь, могут возникать при обобщении уравнений гиперупругости на случай многофазных сред. Вместе с тем число работ, в которых для решения уравнений гиперупругости применяется разрывный метод Галеркина, существенно меньше числа работ, в которых применяется метод WENO.

Особенностями данной работы являются следующие:

- гиперупругая гиперболическая модель 1-го порядка рассматривается как единый способ для описания как конденсированных (твердое деформируемое тело), так и газообразных и жидких сред (в этом случае система уравнений гиперупругости эквивалентна классическим уравнениям Эйлера идеальной газовой динамики);
- рассматривается случай *неоднородных* упругих сред: в области расчета присутствуют границы, разделяющие материалы с различными свой-

ствами.

Целью работы является отработка технологии расчета динамики существенно неоднородных («газ»/«жидкость»/«твердое тело») сред с границами раздела фаз с помощью рассматриваемого класса вычислительных алгоритмов.

Структура работы имеет следующий вид. В начале раздела 2 рассмотрена базовая гиперупругая модель Годунова-Роменского, в подразделе 2.1 рассматривается ее вариант для описания неоднородных сред. Раздел 3 посвящен обсуждению численного алгоритма. В разделах 4 и 5 кратко рассматриваются детали реализации и результаты расчетов. В разделе 6 представлены основные выводы по результатам работы.

## 2 Математическая модель

Для описания деформаций сплошной среды в эйлеровых координатах используется модель Годунова-Роменского [3]. Полная трехмерная система уравнений законов сохранения импульса (1a), динамических условий совместности деформаций (1b), энергии (1c) имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{T}) = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{F})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{F} \otimes \mathbf{u} - \rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{F}^T) = -\mathbf{u} \otimes \nabla \cdot (\rho\mathbf{F}), \quad (1b)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}E - \mathbf{u} \otimes \mathbf{T}) = 0. \quad (1c)$$

Здесь  $\mathbf{T}$  — тензор напряжений Коши,  $E = \mathcal{U} + |\mathbf{u}|^2/2$  — полная энергия системы,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{F}, \mathcal{S})$  — внутренняя энергия. Первичные неизвестные задачи — компоненты тензора дисторсии,  $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{X}$  — эйлеровы и лагранжевы координаты точек среды соответственно), вектор скорости  $\mathbf{u}$  и энтропия  $\mathcal{S}$ . Символ  $\otimes$  обозначает тензорное произведение. Плотность среды  $\rho$  определяется по формуле

$$\rho = \rho_0 / \det(\mathbf{F}), \quad (2)$$

где  $\rho_0$  — начальная плотность невозмущенной среды.

Отметим, что следствием уравнений (1b) и (2) является закон сохранения массы:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0.$$

Это уравнение может быть использовано вместо одного из уравнений (1b) относительно компонентов тензора градиента деформации. Как правило, это

необходимо при разработке устойчивых численных алгоритмов упругопластических деформаций [6].

Для замыкания системы уравнений (1a)-(1c) используется каноническое уравнение состояния для внутренней энергии, которая зависит от компонент тензора дисторсии  $[\mathbf{F}]_{ij} = F_{ij}$  и энтропии  $\mathcal{S}$ . Можно показать [3, 17], что для обеспечения независимости внутренней энергии от системы отсчета, она должна быть выражена через компоненты симметричного тензора, который является мерой деформации и выражается через тензор дисторсии, то есть

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{F}, \mathcal{S}) = \hat{\mathcal{U}}(\mathbf{G}, \mathcal{S}). \quad (3)$$

Здесь и далее  $\mathcal{U}, \hat{\mathcal{U}}, \mathcal{U}^+$  обозначают одну и ту же величину, выраженную как функциональная зависимость того или иного набора аргументов.

Существует множество видов мер деформации, и любой из них может быть использован в каноническом уравнении состояния [3, 4]. В данной работе используется тензор Фингера (метрический тензор деформации), который определяется как  $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}$  [6]. При использовании тензора Фингера  $\mathbf{G}$  в качестве меры деформации тензор напряжений Коши записывается согласно формуле Мурнагана [3]:

$$\mathbf{T} = -2\rho \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \hat{\mathcal{U}}}{\partial \mathbf{G}}. \quad (4)$$

Далее, поскольку  $\hat{\mathcal{U}}$  является функцией тензора Фингера  $\mathbf{G}$ , то  $\hat{\mathcal{U}}$  однозначно выражается через его инварианты  $I_{1,2,3}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{U}} &= \mathcal{U}^+(I_1, I_2, I_3, \mathcal{S}), \\ I_1 &= \text{tr}(\mathbf{G}), \quad I_2 = \left[ \text{tr}(\mathbf{G})^2 - \text{tr}(\mathbf{G}^2) \right] / 2, \quad I_3 = \det(\mathbf{G}). \end{aligned} \quad (5)$$

Внутренняя энергия может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: «гидродинамического»  $\mathcal{U}^h$ , зависящего только от объемной деформации среды, и  $\mathcal{U}^{\text{sh}}$ , описывающего энергию сдвиговой деформации:

$$\mathcal{U}^+ = \mathcal{U}^h(I_3, \mathcal{S}) + \mathcal{U}^{\text{sh}}(I_1, I_2, I_3, \mathcal{S}). \quad (6)$$

В данной работе используется изотропное гиперупругое уравнение состояния из работы [6], для которого:

$$\mathcal{U}^h(I_3, \mathcal{S}) = \frac{K_0}{2\alpha^2} \left( I_3^{\alpha/2} - 1 \right)^2 + c_V T_0 I_3^{\gamma/2} (\exp[\mathcal{S}/c_V] - 1), \quad (7)$$

$$\mathcal{U}^{\text{sh}}(I_1, I_2, I_3) = B_0 I_3^{\beta/2} (I_1^2/3 - I_2) / 2. \quad (8)$$

Здесь  $K_0 = c_0^2 - (4/3) b_0^2$ ,  $B_0 = b_0^2$  — квадрат объемной скорости звука и сдвиговой упругой волны в среде соответственно,  $c_V$  — теплоемкость при постоянном объеме,  $\alpha, \beta, \gamma$  — коэффициенты, описывающие нелинейное поведение среды.

Рассмотренная выше модель является гиперболической системой 1-го порядка. С ее помощью можно описать как твердые тела (при этом  $\partial \mathcal{U}^+ / \partial I_{1,2,3} \neq 0$ ), так и жидкость/газ ( $\partial \mathcal{U}^+ / \partial I_{1,2} \equiv 0, \partial \mathcal{U}^+ / \partial I_3 \neq 0$ ). С этой точки зрения система уравнений (1a)-(1c) описывает динамику газа, для которого специфичен содержательный учет только объемных деформаций. Система классических уравнений газовой динамики получается заменой уравнений для компонентов тензора градиента деформации (1b) на одно уравнение неразрывности. При этом нет необходимости описывать изменение инвариантов  $I_{1,2}$  — в силу того, что внутренняя энергия от них не зависит. Модель также допускает обобщения: пластичность — в рамках модели максвелловской релаксации напряжений [3], разрушение — как источник в динамических уравнениях совместности деформаций. В последнем случае интерпретация  $\mathbf{F}$  как тензора градиента деформаций теряет смысл, поскольку он уже не может быть выражен как градиент движения  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  по лагранжевым переменным (по крайней мере в каждой точке среды). В этом случае он формально определяется как первичная переменная решением уравнения (1b).

## 2.1 Кусочно-однородная модель

Под неоднородным материалом (средой) далее будем понимать материал, свойства которого зависят от лагранжевой координаты его частиц. Рассмотрим кусочно-однородную среду, занимающую объем  $\Omega$ .

Пусть  $\phi_k = \phi_k(\mathbf{X})$  — характеристические функции областей однородности  $\Omega_k$  (далее — фаз) с параметрами среды  $\mathbf{a}^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, N_f}$ ,  $N_f$  — число фаз,  $\Omega = \bigcup_{k=1}^{N_f} \Omega_k$ ,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{G}, \mathcal{S}; \mathbf{a}^{(k)})$  в области  $\Omega_k$ . Тогда распределение свойств среды в лагранжевых координатах задается выражением:

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{N_f} \mathbf{a}^{(k)} \phi_k(\mathbf{X}),$$

$$\phi_k(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{X} \in \Omega_k, \\ 0 & \mathbf{X} \notin \Omega_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, N_f}, \quad \sum_{k=1}^{N_f} \phi_k(\mathbf{X}) = 1.$$

При движении среды функция  $\phi_k$  задается в эйлеровых координатах зависимостью  $\phi_k = \phi_k(\mathbf{x}, t)$ . Для среды, движущейся со скоростью  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , эволюция значения  $\phi_k$  в эйлеровых координатах описывается неконсервативным уравнением переноса:

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \phi_k}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad (9)$$

дополненным соответствующим начальным условием.

В данной работе используются «сглаженные» функции  $\phi_k$ . При этом ширина зоны «сглаживания» («диффузной границы») является параметром, не зависящим от шага сетки, в численных расчетах зона перехода разрешается сеткой. Уравнение (9) является неконсервативным и решается совместно с уравнениями модели Годунова-Роменского (1a)-(1c).

Рассмотренная «неоднородная» модель *не* допускает различные уравнения состояния в фазах — то есть не является многофазной. Однако она имеет ряд характерных свойств многофазных моделей: состоит из 2 групп уравнений (консервативная и неконсервативная) и допускает большие скачки свойств на малых пространственных масштабах. В настоящей работе эта модель рассматривается как простейшая задача для отработки алгоритмических вопросов для численного решения уравнений более сложных многофазных моделей.

### 3 Вычислительные алгоритмы

Рассматриваемый класс задач описывается гиперболическими уравнениями первого порядка. Размерность соответствующей системы уравнений сравнительно велика (гиперболическая система уравнений гиперупругости включает в себя 14 уравнений), а ее решения имеют богатую структуру разрывов (помимо «стандартных», газодинамических, — еще и сдвиговые волны). Система уравнений для неоднородной среды включает в себя как консервативные, так и неконсервативные уравнения. Ее возможные обобщения в ряде случаев могут включать в себя пространственные операторы высокого порядка, например, для действующих в среде сил поверхностного натяжения. По этой причине к комплексу вычислительных алгоритмов выдвигаются следующие требования:

- возможность проведения расчетов с «высоким» порядком (с минимально приемлемой численной диссипацией на разрывах, обеспечивающей монотонность решения);
- возможность построения аппроксимаций как (гиперболических) операторов первого порядка, так и диффузионных, в том числе нелинейных и высокого порядка;
- возможность аппроксимировать как дивергентные, так и недивергентные операторы;
- эти возможности должны быть обеспечены в рамках единого теоретического и программного подхода.



### 3.1 Способы построения разностных схем высокого порядка

Распространенными в настоящее время способами построения схем высокого порядка являются классы методов WENO (использование данного класса методов для решения задач гиперупругости в гиперболических постановках рассмотрено в работе [6]) и разрывный метод Галеркина с применением метода Рунге-Кутты [9, 7, 8]. В настоящей работе используются схемы второго типа. Такой выбор обусловлен тем, что в контексте разрывного метода Галеркина возможно построение эффективных схем как для гиперболических законов сохранения, так и для уравнений высокого порядка. В силу того, что математические модели для целого ряда многофазных задач включают в себя уравнения в частных производных высокого (выше второго) порядка, использование теоретической базы разрывного метода Галеркина является перспективным для построения вычислительных алгоритмов для рассматриваемого класса задач.

### 3.2 Особенности реализации схем разрывного метода Галеркина

В данном разделе будет кратко представлена схема разрывного метода Галеркина [9].

**Разрывный метод Галеркина для гиперболических уравнений в консервативной форме.** Рассмотрим одномерный гиперболический закон сохранения в области  $\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}$ :

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(g)}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Разобьем область  $\Omega$  на отрезки (ячейки сетки, конечные элементы)  $\omega_i$ :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \omega_i, \quad \omega_i = \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right], \quad 1 \leq i \leq N.$$

В области  $\Omega$  введем пространство кусочно-заданных многочленов:

$$V_h^k = \left[ v : v|_{\omega_i} \in P^k(\omega_i); \quad 1 \leq i \leq N \right],$$

где  $P^k(\omega_i)$  — пространство алгебраических многочленов степени  $k$  на отрезке  $\omega_i$ .

Умножив уравнение (10) на произвольную (пробную) функцию  $v_h \in V_h^k$ ,  $\text{supp } v_h = \omega_i$  и проинтегрировав результат по области  $\Omega$  с последующим применением формулы Грина, можно прийти к следующей полудискретной задаче для определения функции  $g_h(x, t)$ ,  $g_h(\cdot, t) \in V_h^k$ :

$$\int_{\omega_i} \frac{\partial g_h}{\partial t} v_h dx + \int_{\omega_i} \mathcal{F}(g_h) \frac{\partial v_h}{\partial x} dx + \hat{\mathcal{F}}_{i+1/2} v_h(x_{i+1/2}^+) - \hat{\mathcal{F}}_{i-1/2} v_h(x_{i-1/2}^-) = 0. \quad (11)$$

В приведенном выше соотношении  $\hat{\mathcal{F}}_{i\pm 1/2}$  — численный поток на границах ячеек  $\omega_i$ :

$$\hat{\mathcal{F}}_{i\pm 1/2} = \hat{\mathcal{F}}(g_{i\pm 1/2}^+, g_{i\pm 1/2}^-),$$

где  $g_{h\pm 1/2}^+$  и  $g_{h\pm 1/2}^-$  — предельные значения  $g_h$  соответственно справа и слева от границ  $x_{i\pm 1/2}$  отрезков  $\omega_i$ .

Численный поток может быть выбран разными способами [23]. В настоящей работе используются два варианта вычисления потоков:

1. поток Лакса-Фридрихса:

$$\hat{\mathcal{F}}_{i\pm 1/2}^{\text{LF}} = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{F}(g_{i\pm 1/2}^+) + \mathcal{F}(g_{i\pm 1/2}^-) \right] - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} (g_{i\pm 1/2}^+ - g_{i\pm 1/2}^-);$$

2. поток Русанова:

$$\hat{\mathcal{F}}_{i\pm 1/2}^{\text{RS}} = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{F}(g_{i\pm 1/2}^+) + \mathcal{F}(g_{i\pm 1/2}^-) \right] - \frac{1}{2} \Lambda (g_{i\pm 1/2}^+ - g_{i\pm 1/2}^-).$$

В приведенных выше выражениях

$$\Lambda = \Lambda(g_{i\pm 1/2}^+, g_{i\pm 1/2}^-) = \max(|\lambda_{i\pm 1/2}^+|, |\lambda_{i\pm 1/2}^-|),$$

где  $|\lambda_{i\pm 1/2}^+|$ ,  $|\lambda_{i\pm 1/2}^-|$  — максимальные по модулю собственные значения матриц Якоби  $J(g_{i\pm 1/2}^+)$  и  $J(g_{i\pm 1/2}^-)$ ,  $J(g) = \partial \mathcal{F}(g) / \partial g$ .

В настоящее время известны и более общие виды потоков для гиперболических уравнений гиперупругости, в частности потоки типа HLLC [6, 11]. В настоящей работе они не используются.

Конечномерная по пространству аппроксимация решения имеет вид:

$$g_h|_{\omega_i} = \sum_{l=0}^k \psi_i^{(k)}(x) g_i^{(k)}(t), \quad (12)$$

где  $\{\psi_i^{(k)}\}$  — система ортогональных многочленов на  $\omega_i$ , образующих базис в  $P^k(\omega_i)$ . В качестве базисных функций  $\psi_i^{(k)}$  используется система ортогональных многочленов Лежандра.

После подстановки (12) в полудискретную задачу (11) получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов  $\{g_i^{(k)}\}$ :

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \mathbf{M}(\mathbf{g}). \quad (13)$$

Для решения (13) применяется численное интегрирование с помощью подходящего варианта метода Рунге-Кутты (в настоящей работе используется метод TVD/RK3, см. [9]) с лимитированием конечномерного решения на каждом этапе метода Рунге-Кутты.

**Особенности применения разрывного метода Галеркина для решения квазилинейных уравнений.** Опишем теперь особенности применения разрывного метода Галеркина для решения неконсервативного уравнения (9), которое запишем для области  $\Omega = [0, L]$  в виде:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + a(x, g) \frac{\partial g}{\partial x} = 0. \quad (14)$$

Для данного уравнения традиционный способ построения аппроксимаций методом DGM, описанный в предыдущем параграфе, не может быть применен. Основная проблема заключается в вопросах, возникающих при попытке определить обобщенное решение данной задачи. Из-за отсутствия конкретного вида потока невозможно также корректно определить условия Гюгонио для слабой постановки задачи и поставить задачу Римана о распаде разрыва. Для решения этой проблемы существуют разные подходы. В настоящей работе используется распространенный подход, основанный на применении теории DLM (Dal Maso–Le Floch–Murat, [10]). Опишем его кратко.

Рассмотрим разрывную функцию

$$g(x) = g_l + H(x - x_d)g_r,$$

где  $H = H(x)$  — функция Хевисайда,  $x_d$  — точка разрыва,  $g_{l,r}$  — решения соответственно слева и справа от разрыва. Для такой функции величина

$$a(x, g) \frac{\partial g}{\partial x} \quad (15)$$

не определена корректно как обобщенная функция [5]. Заменим  $g$  ее гладкой регуляризацией  $g_\varepsilon$ :

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} g_l, & x < x_d - \varepsilon, \\ \Phi\left(\frac{x - x_d + \varepsilon}{2\varepsilon}\right), & x_d - \varepsilon \leq x \leq x_d + \varepsilon, \\ g_r, & x > x_d + \varepsilon, \end{cases}$$

где  $\varepsilon > 0$ , отображение  $\Phi : [0, 1] \mapsto [g_l, g_r]$  называется *путем*. Определим

$$a(x, g) \frac{\partial g}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow x_d} a(x, g_\varepsilon) \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x}.$$

В работе [10] показано, что  $\Phi$  должно быть липшицевым непрерывным отображением. В результате при  $\varepsilon \rightarrow 0$  произведение (15) может быть определено как ограниченная мера Бореля, сходящаяся в \*-слабой топологии:

$$a(g_\varepsilon) \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial x} \rightarrow C \delta(x - x_d), \quad C = \int_0^1 a(\Phi(\tau)) \frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (16)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Рассмотрим, как и в разделе 3.2, область  $\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}$  с заданным разбиением  $\omega_i$ . Пусть  $\Gamma$  — множество точек  $\Omega$ , образующих границы отрезков разбиения  $\omega_i$ . Далее, аналогично разделу 3.2, рассмотрим пространство кусочно-заданных многочленов  $V_h^k$ . Умножим уравнение (14) на произвольную пробную функцию  $v_h \in V_h^k$  и проинтегрируем его по области  $\Omega$  с учетом регуляризации. В итоге можно прийти к полудискретной задаче для определения  $g_h = g_h(t) \in V_h^k$ :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial g_h}{\partial t} v_h dx + \sum_{\omega_i \in \Omega} \int_{\omega_i} a(x, g_h) \frac{\partial g_h}{\partial x} v_h dx + \sum_{x \in \Gamma} \langle v_h \rangle_x \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\tau) a(\Phi(\tau)) d\tau = 0,$$

где  $\langle v_h \rangle = (v_h^r + v_h^l) / 2$ . Вид меры Бореля (16), очевидно, зависит от способа выбора пути  $\Phi$ . В настоящей работе для описания эволюции границ используется линейное по  $g$  уравнение, поэтому достаточно использовать линейный путь от левого значения к правому,  $\Phi(\tau) = (g_r - g_l)\tau + g_l$  [10]. Для построения дискретной задачи далее используется стандартная техника RK/DG с применением подходящего варианта метода Рунге-Кутты.

**Способы введения искусственной диссипации.** Для указанного метода Рунге-Кутты (TVD/RK3) численное решение не будет монотонным для случая разрывных решений. Традиционный способ обеспечить монотонность решения заключается в добавлении в схему численной диссипации. Искусственная диссипация может быть введена в аппроксимации разрывного метода Галеркина различными способами, среди которых известны методы на основе геометрических лимитеров, явного введения дополнительных диссипативных слагаемых и алгоритмов на основе фильтрации высокочастотных компонент решения [16]. В работах [19, 18] описан способ монотонизации метода RK/DG путем явного введения в схему искусственной вязкости типа Неймана-Рихтмайера.

В настоящей работе используются два типа лимитеров: для «концентраций»  $\phi_k$ , о которых известно, что их значения лежат на отрезке от 0 до 1, используется лимитер из [20], сохраняющий минимальные и максимальные значения решения, для консервативных переменных — лимитер Криводоновой [14]. Основная идея лимитера Криводоновой — последовательное ограничение коэффициентов восполнения начиная с коэффициента при многочлене самого высокого порядка.

## 4 Описание программной реализации

Программная реализация разработана с использованием языка программирования C++. Особенностью программной реализации является использование термодинамического потенциала (внутренней энергии) в своих естественных переменных при расчете термодинамических свойств среды. Для этого применяются программные библиотеки для автоматического дифференцирования (библиотека STAN, [26]). Термодинамические параметры (тензор напряжения и акустический тензор, температура, ...) вычисляются *непосредственно* как производные термодинамического потенциала. Это дает возможность использовать различные виды тензора градиента деформации (Фингера, Грина и других), а также любой термодинамический потенциал в естественных переменных в качестве канонического уравнения состояния без существенного изменения программного кода.

В качестве вспомогательных библиотек используются библиотеки BOOST [24] и EIGEN [25].

## 5 Результаты численных экспериментов

В данном разделе приведены результаты численных расчетов для модели Годунова-Роменского в случаях однородной и неоднородной среды. Рассматриваются известные модельные задачи для упругих твердых сред, а также газодинамические задачи.

### 5.1 Расчеты в рамках однородной модели

**Газовая динамика.** Как уже отмечалось, модель Годунова-Роменского позволяет описывать течения газа и при соответствующем задании уравнения состояния сводится к уравнениями Эйлера идеальной газовой динамики. Поэтому в качестве первого примера рассмотрим известную газодинамическую задачу Сода об ударной трубе [22], которая будет решена с использованием полной системы уравнений Годунова-Роменского. В такой постановке

решается 13 уравнений для неизвестных  $(u_k, F_{ij}, S)$  вместо 5 уравнений для трех компонент скорости и двух термодинамических переменных (например, плотности и давления или внутренней энергии).

Подробно задача описана в множестве источников, см., например, [23]. В расчете используется сетка с шагом по пространству 0.001 см на области  $[0, 1]$  см. Шаг по времени равен 0.01 с. Применяется алгебраическое восполнение решения до 3-го порядка. При этом уравнение состояния состоит только из термодинамической части (7)

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}^h(I_3, \mathcal{S}) = c_v T_0 I_3^{\gamma/2} (\exp[\mathcal{S}/c_v] - 1).$$

Параметры уравнения состояния:  $\rho_0 = 1.0 \text{ г/см}^3$  — невозмущенная плотность среды,  $c_v = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ кДж/(г К)}$  — теплоемкость,  $T_0 = 100 \text{ К}$  — опорное значение температуры,  $b_0 = 0.0 \text{ км/с}$  — скорость сдвиговой волны,  $\gamma = 0.4$  — коэффициент.

В рассматриваемой постановке тензор градиента деформации имеет диагональный вид. Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_l &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}, & \mathbf{F}_l &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{S}_l &= 4.0 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кДж}}{\text{г К}}, \\ \mathbf{u}_r &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}, & \mathbf{F}_r &= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{S}_r &= 1.7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{кДж}}{\text{г К}}, \end{aligned}$$

где индексы «l» и «r» соответствуют левому и правому состоянию. Эти значения были вычислены на основе заданных начальных условий для задачи Сода для уравнений Эйлера идеальной газовой динамики.

Возникающее течение содержит пять подобластей с различными значениями скорости, энергии (давления) и плотности, которые показаны на рисунке 1 соответственно красным, черным и зеленым цветом в момент времени  $t = 0.6 \text{ с}$ . Анализ результатов показывает, что полученное решение совпадает с решением газодинамической задачи [23].

**Нелинейная гиперупругость.** Во втором тесте рассматривается упругая среда с полным уравнением состояния, т.е. зависящим от всех 3 инвариантов метрического тензора деформации. Начальные условия задаются в виде [6]:

$$\mathbf{u}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}, \quad \mathbf{F}_l = \begin{pmatrix} 0.98 & 0 & 0 \\ 0.02 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_l = 10^{-3} \frac{\text{кДж}}{\text{г К}},$$

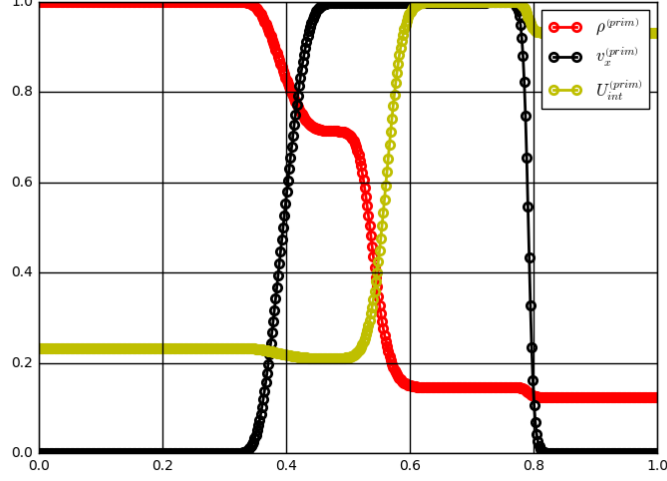


Рис. 1. Профили плотности, скорости и энергии, восполнение 1-го порядка.

$$\mathbf{u}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}, \quad \mathbf{F}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_r = 0 \frac{\text{кДж}}{\text{г К}}.$$

Параметры уравнения состояния соответствуют меди [6]:  $\rho_0 = 8.93 \text{ г/см}^3$  — невозмущенная плотность среды,  $c_0 = 4.6 \text{ км/с}$  — скорость звука,  $c_v = 3.9 \cdot 10^{-4} \text{ кДж/(г К)}$  — теплоемкость,  $T_0 = 300 \text{ К}$  — опорное значение температуры,  $b_0 = 2.1 \text{ км/с}$  — скорость сдвиговой волны,  $\alpha = 1.0$ ,  $\beta = 3.0$ ,  $\gamma = 2.0$  — коэффициент.

Решение состоит из семи волн: три движущиеся влево волны разрежения, движущийся вправо контактный разрыв, две движущиеся вправо волны разрежения перед ударной волной и движущаяся вправо ударная волна. Рассматривается сетка из 500 узлов на отрезке  $[0, 1]$  см и алгебраическое восполнение решения 3-го порядка.

Результаты численных экспериментов представлены на рисунке 2 на момент времени 0.5 мкс в сравнении с решением с использованием метода конечных объемов первого порядка. Видно, что разрывный метод Галеркина дает гораздо лучшее разрешение фронтов волн по сравнению с методом конечных объемов. По полученным профилям решений можно идентифицировать все 7 представленных волн. Полученные результаты полностью совпадают с результатами известных работ [6].

## 5.2 Расчеты в рамках неоднородной модели

Рассмотрим пример решения задачи гиперупругости в рамках неоднородной модели, описанной в разделе 2.1. Зоны однородности соответствуют областям  $\Omega_l = (0, 1/2)$  и  $\Omega_r = (1/2, 1)$ . Соответственно, сглаженные характери-

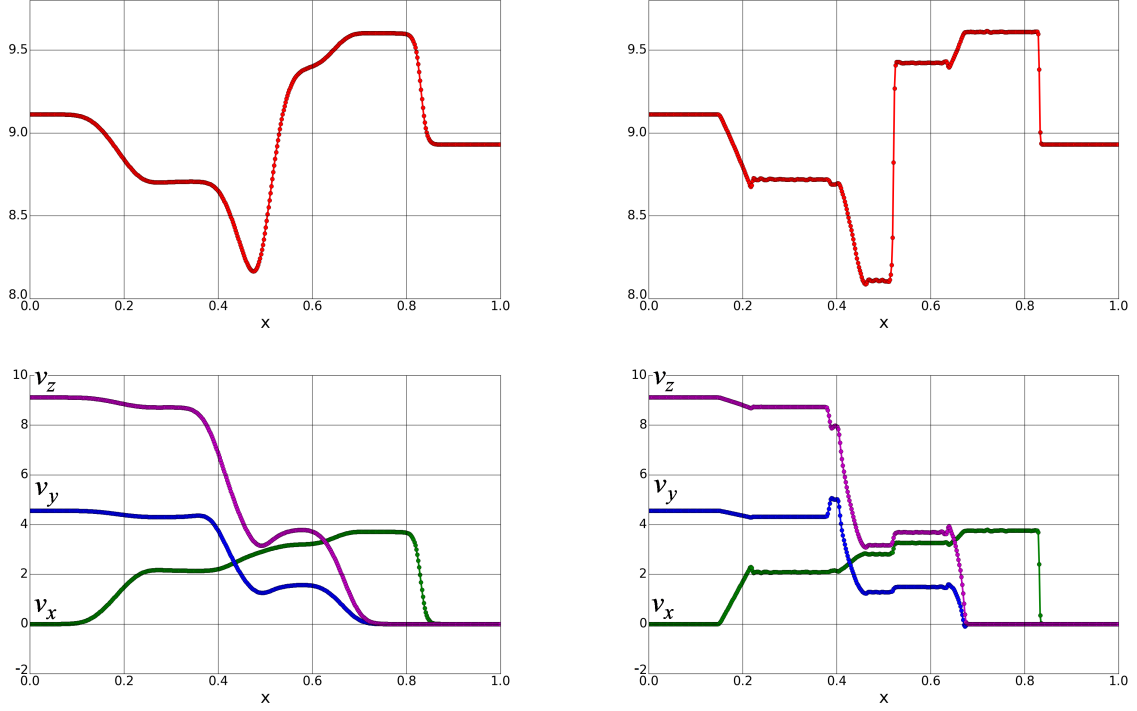


Рис. 2. Распределение плотности (сверху) и скорости (снизу) для метода конечных объемов (слева) и RK/DG (справа)

стические функции множеств  $\Omega_{l,r}$  выбраны как  $\phi_l = 1 - \phi_r$ ,

$$\phi_l = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1/2 - \varepsilon), \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varepsilon} \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\varepsilon} \left(x - \frac{1}{2}\right)\right), & x \in [1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon], \\ 1, & x \in (1/2 + \varepsilon, 1). \end{cases}$$

Сетка состоит из 2000 узлов на отрезке  $[0, 1]$  см,  $\varepsilon = 10h$ ,  $h = 5 \cdot 10^{-4}$  — шаг сетки. Используется алгебраическое восполнение решения 3-го порядка. Начальные условия имеют вид [6]:

$$\mathbf{u}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}, \quad \mathbf{F}_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.01 & 0.95 & 0.02 \\ -0.015 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_l = 0 \frac{\text{кДж}}{\text{гК}},$$

$$\mathbf{u}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.03 \\ -0.01 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}, \quad \mathbf{F}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.015 & 0.95 & 0 \\ -0.01 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_r = 0 \frac{\text{кДж}}{\text{гК}}.$$

Параметры уравнения состояния для левого материала:  $\rho_0 = 8.93 \text{ г/см}^3$  — невозмущенная плотность среды,  $c_0 = 4.6 \text{ км/с}$  — скорость звука,  $c_v =$



$3.9 \cdot 10^{-4}$  кДж/(г К) — теплоемкость,  $T_0 = 300$  К — опорное значение температуры,  $b_0 = 2.1$  км/с — скорость сдвиговой волны,  $\alpha = 1.0$ ,  $\beta = 3.0$ ,  $\gamma = 2.0$  — коэффициенты.

Параметры уравнения состояния для правого материала:  $\rho_0 = 8.93$  г/см<sup>3</sup> — невозмущенная плотность среды,  $c_0 = 6.22$  км/с — скорость звука,  $c_v = 9.0 \cdot 10^{-4}$  кДж/(г К) — теплоемкость,  $T_0 = 300$  К — опорное значение температуры,  $b_0 = 3.16$  км/с — скорость сдвиговой волны,  $\alpha = 1.0$ ,  $\beta = 3.577$ ,  $\gamma = 2.088$  — коэффициенты.

Решение задачи в момент времени  $t = 0.5$  мкс представлено на рисунках 3-5. Граница раздела материалов движется слева направо. Левые изображения соответствуют профилям величин в заданный момент времени, на правых приведены соответствующие  $x-t$  диаграммы, где вертикальная ось соответствует времени, а горизонтальная — пространственной координате.

На рисунке 3 представлено распределение плотности на момент  $t = 0.5$  мкс и соответствующая  $x-t$  диаграмма.

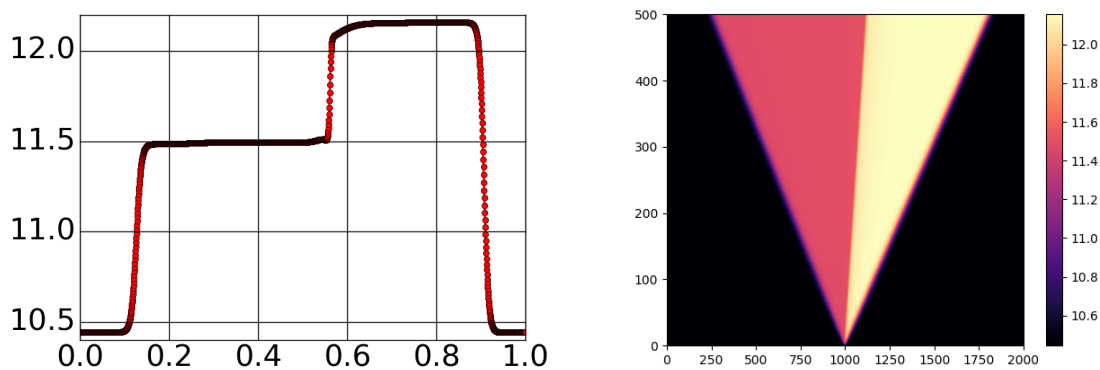


Рис. 3. Распределение плотности на момент  $t = 0.5$  мкс (слева) и  $x-t$  диаграмма (справа)

На рисунках 4 и 5 показаны распределение скорости и компоненты  $\sigma_{11}$  тензора напряжений соответственно на тот же момент времени и их  $x-t$  диаграмма. На границе раздела материалов на профиле видно небольшое возмущение.

## 6 Заключение

В работе рассмотрено применение метода RK/DG для решения задач гиперупругости в неоднородной среде. Исследованы однородная и неоднородная, допускающая кусочно-постоянное распределение свойств среды, модели. В результате серии расчетов показано, что гиперупругая модель Годунова-Роменского может быть практически применена для решения задач газо-

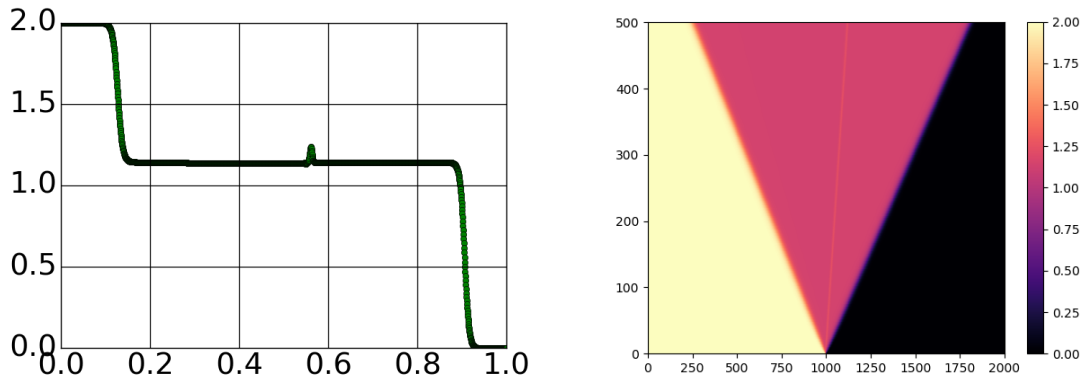


Рис. 4. Распределение скорости на момент  $t = 0.5$  мкс (слева) и  $x-t$  диаграмма (справа)

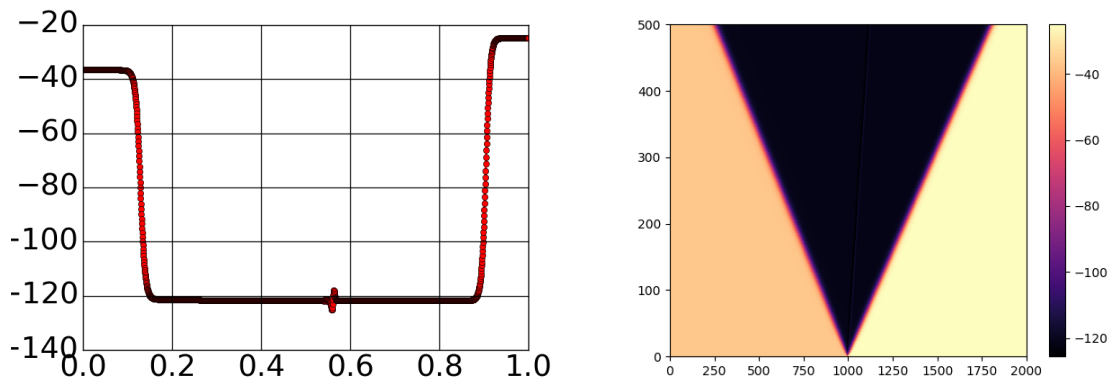


Рис. 5. Распределение компоненты  $\sigma_{11}$  тензора напряжений на момент  $t = 0.5$  мкс (слева) и  $x-t$  диаграмма (справа)

вой динамики, когда внутренняя энергия среды зависит только от ее объемных деформаций и энтропии, а также для решения задач с использованием сглаженных характеристических функций, соответствующих зонам однородности. Применение метода RK/DG показало хорошее разрешение фронтов, сравнимое с применением методов типа WENO.

## Список литературы

- [1] Бровко Г.Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды: Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.:Наука. – 2017.
- [2] Годунов С.К., Роменский Е.И. Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 1972. – Т. 13. – №. 6. – С. 868-884.
- [3] Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения // Университетская серия. – 1998.
- [4] Димитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит. – 2009.
- [5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит. – 2004.
- [6] Barton P.T. et al. Exact and approximate solutions of Riemann problems in non-linear elasticity // Journal of Computational Physics. – 2009. – Т. 228. – №. 18. – С. 7046-7068.
- [7] Cockburn B., Shu C.W. TVB Runge–Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework // Mathematics of computation. – 1989. – Т. 52. – №. 186. – С. 411-435.
- [8] Cockburn B., Lin S.Y., Shu C.W. TVB Runge–Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one-dimensional systems // Journal of Computational Physics. – 1989. – Т. 84. – №. 1. – С. 90-113.
- [9] Cockburn B., Shu C.W. The Runge–Kutta local projection–discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. – 1991. – Т. 25. – №. 3. – С. 337-361.
- [10] Dal Maso G., Le Floch P., Murat F. Definition and weak stability of nonconservative products. – 1995.
- [11] De Brauer A., Iollo A., Milcent T. A cartesian scheme for compressible multimaterial hyperelastic models with plasticity // Communications in Computational Physics. – 2017. – Т. 22. – №. 5. – С. 1362-1384.

- [12] Favrie N., Gavriluk S.L., Saurel R. Solid–fluid diffuse interface model in cases of extreme deformations // Journal of computational physics. – 2009. – T. 228. – №. 16. – C. 6037-6077.
- [13] Jiang G.S., Shu C.W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // Journal of computational physics. – 1996. – T. 126. – №. 1. – C. 202-228.
- [14] Krivodonova L. Limiters for high–order discontinuous Galerkin methods // Journal of Computational Physics. – 2007. – T. 226. – №. 1. – C. 879-896.
- [15] Liu X.D., Osher S., Chan T. Weighted essentially non–oscillatory schemes // Journal of computational physics. – 1994. – T. 115. – №. 1. – C. 200-212.
- [16] Michoski C. et al. A comparison of artificial viscosity, limiters, and filters, for high order discontinuous Galerkin solutions in nonlinear settings // Journal of Scientific Computing. – 2016. – T. 66. – №. 1. – C. 406-434.
- [17] Miller G.H. Minimal rotationally invariant bases for hyperelasticity // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2004. – T. 64. – №. 6. – C. 2050-2075.
- [18] Moura R.C. et al. Diffusion–based limiters for discontinuous Galerkin methods–part I: one–dimensional equations // 22nd International Congress of Mechanical Engineering. – 2013. – C. 3-7.
- [19] Persson P.O., Peraire J. Sub–cell shock capturing for discontinuous Galerkin methods // 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. – 2006. – C. 112.
- [20] Rhebergen S., Bokhove O., van der Vegt J.J.W. Discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic nonconservative partial differential equations // Journal of Computational Physics. – 2008. – T. 227. – №. 3. – C. 1887-1922.
- [21] Saurel R., Petitpas F., Berry R.A. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures // Journal of Computational Physics. – 2009. – T. 228. – №. 5. – C. 1678-1712.
- [22] Sod G.A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // Journal of computational physics. – 1978. – T. 27. – №. 1. – C. 1-31.
- [23] Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. – Springer Science and Business Media, 2013.

[24] <https://www.boost.org/>

[25] [http://eigen.tuxfamily.org/index.php?title=Main\\_Page](http://eigen.tuxfamily.org/index.php?title=Main_Page)

[26] <https://github.com/stan-dev/math>

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Математическая модель</b>	<b>4</b>
2.1	Кусочно-однородная модель . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Вычислительные алгоритмы</b>	<b>7</b>
3.1	Способы построения разностных схем высокого порядка . . . . .	8
3.2	Особенности реализации схем разрывного метода Галеркина . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Описание программной реализации</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Результаты численных экспериментов</b>	<b>12</b>
5.1	Расчеты в рамках однородной модели . . . . .	12
5.2	Расчеты в рамках неоднородной модели . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>16</b>