



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 103 за 2020 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[В.Д. Лахно](#)

Трансляционно-инвариантные
биполярны и псевдощелевая
фаза

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лахно В.Д.
Трансляционно-инвариантные биполярны и псевдощелевая фаза // Препринты ИПМ
им. М.В.Келдыша. 2020. № 103. 13 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-103>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-103>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

В.Д. Лахно

**Трансляционно-инвариантные биполярны
и псевдощелевая фаза**

Москва — 2020

В.Д. Лахно

Трансляционно-инвариантные биполярны и псевдощелевая фаза

Построена теория псевдощелевой фазы высокотемпературных сверхпроводников, в которой носителями тока являются трансляционно-инвариантные биполярны. Рассчитана температура перехода T^* из псевдощелевой в нормальную фазу. Для температуры перехода в псевдощелевую фазу рассчитан изотопический коэффициент. Показано, что полученные результаты, в частности возможность отрицательных значений изотопического коэффициента, находятся в соответствии с экспериментом.

Ключевые слова: некогерентные электронные пары, гамильтониан Пекара-Фрелиха, заряженный Бозе-газ, оптический фонон

V.D. Lakhno

Translation invariant bipolarons and a pseudogap phase

A theory of a pseudogap phase of high-temperature superconductors where current carriers are translation invariant bipolarons is developed. A temperature T^* of a transition from a pseudogap phase to a normal one is calculated. For the temperature of a transition to the pseudogap phase, the isotope coefficient is found. It is shown that the results obtained, in particular, the possibility of negative values of the isotope coefficient are consistent with the experiment.

Key words: incoherent electron pairs, Pekar-Froehlich Hamiltonian, charged Bose gas, optical phonon

Оглавление

| | | |
|---|--|---|
| 1 | Введение | 3 |
| 2 | Температура псевдощелевой фазы | 4 |
| 3 | Изотопический коэффициент для псевдощелевой фазы | 7 |
| 4 | Обсуждение | 8 |
| 5 | Литература | 9 |

1. Введение

Одним из наиболее удивительных и загадочных явлений высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) считается существование псевдощелевой фазы при температуре выше критической температуры сверхпроводящего (СП) перехода [1]-[5]. В псевдощелевой фазе спектральная плотность состояний вблизи поверхности Ферми обнаруживает щель при $T > T_c$, где T_c – температура СП перехода, которая существует вплоть до значений температур T^* ($T^* > T_c$), выше которых псевдощель исчезает. В настоящее время объяснение этого явления сводится к двум возможностям. Согласно первой, считается, что при $T > T_c$ в образце сохраняются некогерентные электронные пары, а при $T < T_c$ их движение становится когерентным и они переходят в СП состояние. При $T > T^*$ пары разрушаются и псевдощелевое состояние исчезает [6]-[9]. Согласно второй, переход в псевдощелевую фазу не связан со сверхпроводимостью, а обусловлен образованием некоторой фазы со скрытым параметром порядка или фазы со спиновыми флуктуациями [10]-[12].

В настоящее время все более доминирующей точкой зрения на природу псевдощели а ВТСП становится первая, которая связана с представлением о существовании спаренных электронных состояний при $T > T_c$. Вопрос же о природе самих спаренных состояний при этом остается открытым. В данной статье в качестве спаренных электронных состояний мы рассмотрим трансляционно-инвариантные (ТИ) биполярны.

ТИ-биполяронная теория СП, основанная на гамильтониане электрон-фононного взаимодействия (ЭФВ) Пекара-Фрелиха, когда ЭФВ, в отличие от теории Бардина-Купера-Шриффера (БКШ) [12], нельзя считать слабым, была построена в работах [13]-[15] (см. также обзор [16]). Роль куперовских пар в этой теории играют ТИ-биполярны, корреляционный размер которых (≈ 1 нм) много меньше, чем у куперовских пар ($\approx 10^3$ нм). Согласно [13]-[16], в ВТСП материалах ТИ-биполярны образуются вблизи поверхности Ферми и представляют собой заряженный бозе-газ, способный испытывать конденсацию Бозе-Эйнштейна (БЭК) при высокой критической температуре, которая определяет температуру СП перехода.

В отличие от куперовских пар, ТИ-биполярны имеют собственный спектр возбуждений [13]-[16]:

$$\begin{aligned} E_k^{bp} &= E_{bp} \Delta_{k,0} + (\omega_0 + E_{bp} + k^2/2M_e)(1 - \Delta_{k,0}), \\ M_e &= 2m, \Delta_{k,0} = 1 \text{ для } k=0 \text{ и } \Delta_{k,0} = 0 \text{ для } k \neq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где E_{bp} – энергия основного состояния ТИ-биполярона (отсчитываемого от уровня Ферми), ω_0 – частота оптического фонона, m – масса зонного электрона (или дырки), k – волновой вектор, нумерующий возбужденные состояния ТИ-биполярона.

Этот спектр имеет щель, которая в изотропном случае равна частоте оптического фонона ω_0 . При этом случаю слабого ЭФВ соответствует неравенство $\omega_0 \gg |E_{bp}|$, случаю сильной связи – $\omega_0 \ll |E_{bp}|$ и $\omega_0 \sim |E_{bp}|$ в случае промежуточной силы связи. Согласно [13]-[16], число ТИ-биполяронов N_{bp} при температуре $T=0$ равно: $N_{bp} \cong N\omega_0/2E_F$, где N – полное число электронов (дырок), E_F – энергия Ферми, то есть $N_{bp} \ll N$.

Картина СП, в основе которой лежит представление о ТИ-биполяроне как о фундаментальном бозоне, ответственном за сверхпроводящие свойства, объясняет многие термодинамические и спектроскопические свойства ВТСП [13]-[16]. По этой причине представляет интерес рассмотреть вопрос о температуре перехода T^* в псевдощелевое состояние.

2. Температура псевдощелевой фазы

Очевидно, что температура перехода из псевдощелевой фазы в нормальную T^* в рассматриваемой модели определяется распадом ТИ-биполяронов на отдельные ТИ-поляроны. С термодинамической точки зрения, величина T^* должна определяться из условия, при котором свободная энергия ТИ-биполяронного газа превосходит свободную энергию ТИ-поляронного газа, определяемую спектром ТИ-поляронов:

$$E_k^P = E_p \Delta_{k,0} + (\omega_0 + E_p + k^2/2m)(1 - \Delta_{k,0}), \quad (2)$$

где E_p – энергия основного состояния полярона.

Для дальнейшего существенно, что число ТИ-биполяронов в ВТСП соединениях $N_{bp} \ll N$. При $n = N/V = 10^{21} \text{ см}^{-3}$, где V – объем системы, типичные значения n_{bp} составляют порядок $n_{bp} \sim 10^{18} \div 10^{19} \text{ см}^{-3}$ [13]-[16]. Учитывая, что $T^* > T_c$, для расчета статистической суммы биполяронного газа Z_{bp} вблизи T^* можно использовать классическое приближение, условием которого в области стабильности биполяронного газа является выполнение неравенства:

$$T^* > T > T_c. \quad (3)$$

В этом случае выражение для статистической суммы ТИ-биполярного газа имеет вид:

$$Z_{bp} = \frac{1}{h^{3N_{bp}} N_{bp}!} \prod_{i=1}^{N_{bp}} \int d^3 k_i e^{-E_{k_i}^{bp}/T} = \left[e^{-(\omega_0 + E_{bp})/T} \left(\frac{2\pi M_e T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{eV}{N_{bp}} \right]^{N_{bp}}, \quad (4)$$

где $e \approx 2,718$ – основание натуральных логарифмов, $h = 2\pi\hbar$ – постоянная Планка.

Соответственно, для статистической суммы ТИ-поляронного газа, образовавшегося в результате распада ТИ-биполяронов, аналогично (4), получим:

$$Z_p = \left[e^{-(\omega_0 + E_p)/T} \frac{(2\pi m T)^{3/2}}{h^3} \frac{eV}{2N_{bp}} \right]^{2N_{bp}}. \quad (5)$$

Условие устойчивости ТИ-биполярного газа относительно его распада на ТИ-поляронный газ имеет вид:

$$Z_{bp} \geq Z_p. \quad (6)$$

где равенство отвечает случаю равновесия между обоими газами, которое соответствует уравнению для определения температуры T^* перехода из нормальной в псевдощелевую фазу.

Подстановка (4), (5) в (6) приводит к условию:

$$\Delta = |E_{bp}| + \omega_0 - 2|E_p| \geq \frac{3}{2} T \ln \alpha T, \quad \alpha = \left(\frac{e}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\pi m}{n_{bp}^{\frac{2}{3}} h^2}. \quad (7)$$

В случае равенства из (7) следует уравнение для определения T^* :

$$z = W e^W, \quad T^* = \alpha^{-1} e^W, \quad z = 2\alpha\Delta/3. \quad (8)$$

На рис. 1 показано решение $W=W(z)$ (функция Ламберта) (8) при условии выполнения ограничения (3).

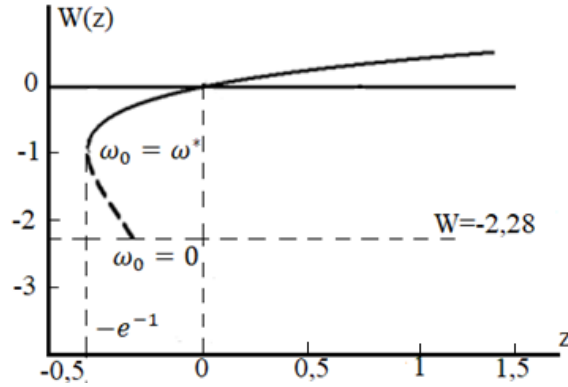


Рис. 1. Решение $W(z)$ уравнения (8)

Оно существует на интервале $-e^{-1} < z < \infty$. На интервале $-e^{-1} < z < 0$ функция Ламберта отрицательна. Требование (3) приводит к условию: $-2,28 < W < \infty$. С учетом выражения для температуры СП перехода, полученного в [13]-[16]:

$$T_c = T_c(\omega_0) = \left(F_{3/2}(0)/F_{3/2}(\omega_0/T_c) \right)^{3/2} T_c(0), \quad (9)$$

$$T_c(0) = 3,31 \hbar^2 n_{bp}^{2/3} / M_e, \quad F_{3/2}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{1/2} dt}{e^{t+x} - 1},$$

для T^* из (8) получим следующее выражение:

$$T^* \approx 9,8 \left(F_{3/2}(\omega_0/T_c)/F_{3/2}(0) \right)^{2/3} T_c \exp W. \quad (10)$$

Так, например, при $\omega_0 \approx T_c$ из (10) получим $T^* \approx 3T_c(1) \exp W$, где $T_c(1)$ определяется (9): $T_c(1) \approx 3,3T_c(0)$, то есть при $W=0$ псевдощелевая температура T^* более чем втрое превосходит температуру СП перехода T_c .

При $\omega_0 \gg T_c$ температура псевдощелевой фазы $T^* \gg T(1)$. В этом случае для оценки T^* можно использовать вытекающую из (8) приближенную формулу:

$$T^* \approx \frac{2}{3} \Delta / \ln \frac{2}{3} \approx \Delta, \quad \text{при } |\Delta| > 3/2. \quad (11)$$

Рассматриваемый предел, однако, редко наблюдается в эксперименте. Отсюда можно сделать вывод, что в ВТСП материалах основной вклад в ЭФВ, приводящий к СП, дают фоновые частоты с $\omega_0 < T_c$ ($\omega_0 < 10$ мэВ). Эта оценка на порядок меньше оценок фоновых частот, которым обычно

приписывают главный вклад в СП. Из (11) также следует, что T^* растет с увеличением концентрации n_{bp} лишь логарифмически, в то время как $T_c \sim n_{bp}^{2/3}$. Отсюда следует, что при некотором значении n_{bp} может выполняться условие $T^* < T_c$, что соответствует исчезновению псевдощелевой фазы, как это следует из вида точного решения уравнения (8). В ВТСП материалах это наблюдается при увеличении допирования до оптимальной величины, при которой псевдощелевая фаза перестает существовать.

3. Изотопический коэффициент для псевдощелевой фазы

Построенная в предыдущем разделе ТИ-биполярная теория псевдощелевой фазы позволяет исследовать ее изотопические свойства.

Из (8) следует, что, как и СП фаза, псевдощелевая фаза обладает изотопическим эффектом. Согласно (8), изотопический коэффициент:

$$\alpha^* = -d \ln T^* / d \ln M, \quad (12)$$

где M – масса атома, заменяемого на его изотоп, с учетом того, что $\omega_0 \sim M^{-1/2}$, принимает вид:

$$\alpha^* = \frac{\omega_0}{3T^*} \frac{1}{1+W(z)}. \quad (13)$$

Из (13) и рис. 1 следует, что для нижней ветви: $W(z) < -1$ и $\alpha^* < 0$. Соответственно, для верхней ветви: $W(z) > -1$ и $\alpha^* > 0$. Отметим, что верхняя ветвь соответствует $\omega_0 > \omega^*$, а нижняя ветвь $\omega_0 < \omega^*$, где $\omega^* \approx T_c$. Из (10), (13) следует, что:

$$W = \ln \left[c \left(F_{3/2}(0) / F_{3/2}(\omega_0 / T_c) \right)^{2/3} T^* / T_c \right], \quad (14)$$

где $c \approx 0,1$. На рис. 2 показан график зависимости $\alpha^*(\omega_0)$.

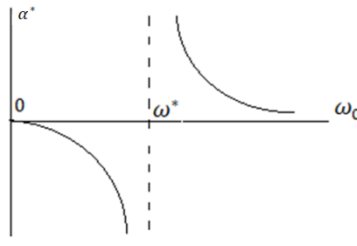


Рис. 2. Зависимость изотопического коэффициента для псевдощелевой температуры T^* от фононной частоты ω_0 ($\omega^* \approx T_c$)

Таким образом, в зависимости от величины фононной частоты ω_0 коэффициент α^* может иметь любой знак и величину: $\alpha^* < 0$ при $\omega_0 < \omega^*$ и $\alpha^* > 0$ при $\omega_0 > \omega^*$. При $\omega_0 = \omega^*$ изотопический коэффициент обращается в бесконечность: $\alpha^*(\omega^* \pm 0) = \pm\infty$. Полученные результаты свидетельствуют о том, что изотопная экспонента расходится при $\omega_0 \rightarrow \omega^*$, т.е. при $T^* \approx T_c$ (рис. 2). Большие отрицательные значения изотопического коэффициента в псевдощелевом состоянии экспериментально наблюдались в работах [17]-[19]. Отметим, что отрицательные значения изотопического коэффициента в ряде случаев наблюдались и в обычных СП [20], превосходя по абсолютной величине значение изотопического коэффициента моноатомных систем $\alpha=0,5$, даваемого теорией БКШ. Согласно изложенной теории это возможно при $T^* \approx T_c$.

4. Обсуждение

В данной работе показано, что наличие псевдощелевого состояния и нестандартное поведение изотопического коэффициента в ВТСП материалах может быть объяснено на основе электрон-фононного взаимодействия без привлечения других сценариев [21]-[25].

В настоящее время продолжается дискуссия о природе псевдощелевой фазы в ВТСП материалах. Из приведенного рассмотрения следует, что псевдощель является универсальным эффектом и должна возникать при появлении в системе ТИ-биполяронов. Тот факт, что в течение длительного времени наличие псевдощелевой фазы связывалось с побочными явлениями, обусловлен наблюдением этой фазы даже в обычных СП [26]-[31], в которых наличие псевдофазы объяснялось кристаллографическим беспорядком или понижением размерности, обычно наблюдаемой в разупорядоченных металлах.

В связи с этим важными представляются недавние эксперименты с таким ВТСП, как MgB_2 [32]. В отличие от оксидных керамик MgB_2 не обладает магнитным порядком и, по предположению сторонников внешней природы псевдощелевого состояния, не должен обладать псевдощелью. Чтобы исключить другие возможности, связанные с разупорядочением, эффектами низкой размерности и др. в эксперименте [32] использовались высокосовершенные кристаллы. Проведенные в [32] эксперименты убедительно показали наличие псевдощелевого состояния в MgB_2 и ответственность за это состояние ЭФВ. Полученные результаты дают веские доказательства в пользу ТИ-биполярного механизма образования псевдощелевого состояния.

На простую картину, изложенную в работе, могут накладываться эффекты, связанные со спиновыми флуктуациями, образованием волн зарядовой (CDW) и спиновой (SDW) плотности, волн плотности сконденсированных пар (PDW) и плотности связей (BDW), образование страйпов (так, например, гигантский изотопический эффект, вызванный ЭФВ, наблюдался в $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ вблизи температуры упорядочения заряженных страйпов при замене ^{16}O на ^{18}O [33]), кластеров, другие типы взаимодействий и т.д. Рассмотренный в работе ТИ-биполярный механизм образования псевдощелевой фазы и объяснение на его основе изотопических эффектов в ВТСП материалах представляются также важными ввиду универсальности этого механизма.

В недавней работе автора [34] было высказано предположение о биполярной природе волны зарядовой плотности, соответственно, волны парной плотности в ВТСП. Если это предположение принять, то фигурирующую в статье величину E_{bp} следует относить к величине $E_{bp}(P_{CDW})$, где P_{CDW} – волновой вектор волны зарядовой плотности: $P_{CDW} = P_{PDW}$. Часть ТИ-биполяронов, которая может существовать при температуре, превышающей температуру образования CDW, имеет отличный от P_{CDW} импульс и тем самым конечное время жизни, определяя “размазанный” переход между псевдощелевой и нормальной фазами.

5. Литература

[1]. Norman M.R., Pines D., Kallin C., The pseudogap: friend or foe of high T_c ?, Adv. Phys., 54,715, (2005).

DOI: [10.1080/00018730500459906](https://doi.org/10.1080/00018730500459906)

[2]. Vishik I.M., Lee W. S., R-H He R-H, Hashimoto M., Hussain Z., Devereaux T. P. and Z-X Shen Z-X., ARPES studies of cuprate Fermiology: superconductivity, pseudogap and quasiparticle dynamics, New J. Phys., 12, 105008, (2010).

DOI:10.1088/1367-2630/12/10/105008

[3]. Timusk T., [Statt](#) B.W., The pseudogap in high-temperature superconductors: an experimental survey, Progr. Phys., 62, 61, (1999).

DOI : 10.1088/0034-4885/62/1/002

[4]. [Huefner](#) S., [Hossain](#) M.A., [Damascelli](#) A., [Sawatzky](#) G.A., Two Gaps Make a High Temperature Superconductor? Rep. Progr. Phys., 71, 062501, (2008).

DOI: 10.1088/0034-4885/71/6/062501

[5]. Lee P.A., Nagaosa N., Wen X-G., Doping a Mott insulator: Physics of high-temperature superconductivity, *Rev. Mod. Phys.*, 78, 17, (2006)

DOI:<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.78.17>

[6]. Randeria M., Trivedi N., Pairing correlations above T_c and pseudogaps in underdoped cuprates, *J. Phys. Chem. Sol.*, 59, 1754, (1998).

[https://doi.org/10.1016/S0022-3697\(98\)00099-7](https://doi.org/10.1016/S0022-3697(98)00099-7)

[7]. Franz M., Importance of fluctuations, *Nat. Phys.*, 3, 686-687, (2007).

DOI: <https://doi.org/10.1038/nphys739>

[8]. Emery V.J., Kivelson S.A., Importance of phase fluctuations in superconductors with small superfluid density, *Nature*, 374, 434-437, (1995)

DOI: <https://doi.org/10.1038/374434a0>

[9]. Curty P., Beck H., Thermodynamics and Phase Diagram of High Temperature Superconductors, *Phys. Rev. Lett*, 91, 257002, (2003).

DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.257002>

[10]. Moon E., Sachdev S., Competition between spin density wave order and superconductivity in the underdoped cuprates, *Phys. Rev. B*, 80, 035117, (2009).

DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.80.035117>

[11]. Садовский М.В., Псевдощель в высокотемпературных сверхпроводниках, *УФН*, т.171, с. 539, (2001).

DOI: [10.3367/UFNr.0171.200105c.0539](https://doi.org/10.3367/UFNr.0171.200105c.0539)

[12]. Bardeen J., Cooper L.N., Schrieffer J.R., Theory of Superconductivity, *Phys. Rev.*, 108, 1175, (1957).

DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1175>

[13]. Lakhno V.D., Superconducting properties of 3D low-density translation-invariant bipolaron gas, *Adv. Condens. Matt. Phys.*, 2018, 1380986.

DOI:<https://doi.org/10.1155/2018/1380986>

[14]. Lakhno V.D., *Physica C: Superconductivity and its application*, Superconducting properties of a nonideal bipolaron gas 561, 1-8, (2019).

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physc.2018.10.009>

[15]. Lakhno V.D., Superconducting properties of 3D low-density TI-bipolaron gas in magnetic field, *Cond. Mat.*, 4, 43, (2019).

DOI: 10.3390/condmat4020043

[16]. Lakhno V.D., Translational – invariant Bipolarons and Superconductivity, *Condensed Matter*, 5, 30, (2020).

DOI: 10.3390/condmat5020030

[17]. Rubio Temprano D., Mesot J., Janssen S., Conder K., Furrer A., Mutka H., Müller K.A., Large Isotope Effect on the Pseudogap in the High-Temperature Superconductor $\text{HoBa}_2\text{Cu}_4\text{O}_8$, *Phys. Rev. Lett.*, 84, 1990, (2020).

DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.1990>

[18]. Bendele M., von Rohr F., Guguchia Z., Pomjakushina E., Conder K., Bianconi A., Simon A., Bussmann-Holder A., Keller H., Evidence for strong lattice effect as revealed from huge unconventional oxygen isotope effects on the pseudogap temperature in $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$, *Phys. Rev.*, B95, 014514, (2017).

DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.95.014514>

[19]. Furrer A., Neutron Scattering Investigations of Charge Inhomogeneities and the Pseudogap State in High-Temperature Superconductors, in *Superconductivity in Complex Systems, Structure and Bonding*, Series ed. M.P.Mingos, Vol. 114, K.A. Müller and A. Bussmann-Holder (Eds.) (Springer, Berlin Heidelberg, 2005).

DOI: 10.1007/b12231

[20]. Bill A., Kresin V.Z., Wolf S.A., *The isotope Effect in Superconductors “Pair Correlation in Many Fermions Systems”*, Plenum Press, 1998.

DOI: 10.1016/j.physc.2011.02.001

[21]. Labbe J., Bok J., Superconductivity in Alkaline-Earth-Substituted La_2CuO_4 : A Theoretical Model, *Europhys. Lett.*, 3, 1225, (1987).

DOI: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/3/11/012>

[22]. Radtke R.J., Norman M.R., Relation of extended Van Hove singularities to high-temperature superconductivity within strong-coupling theory, *Phys. Rev.*, B50, 9554, (1994).

DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.50.9554>

[23]. Schüttler H.-B., Pao G.-H., Isotope Effect in d-Wave Superconductors, *Phys. Rev. Lett.*, 75, 4504, (1995).

DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.4504>

[24]. Nazarenko F., Dagotto E., Possible phononic mechanism for $d_{x^2-y^2}$ superconductivity in the presence of short-range antiferromagnetic correlations, *Phys. Rev.*, B53, R. 2987, (1996).

DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.53.R2987>

[25]. Greco A., Zeyner R., Electronic correlations, electron-phonon interaction, and isotope effect in high- T_c cuprates, *Phys. Rev.*, B60, 1296, (1999)

DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.60.1296>

[26]. Medicherla V. R. R., Patil S., Singh R.S., Maiti K., Origin of ground state anomaly in LaB_6 at low temperatures, *Appl. Phys. Lett.*, 90, 062507, (2007).

DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2459779>

[27]. Chainani A., Yokoya T., Kiss T., Shin S., Nishio T., Uwe H., Electron-phonon coupling induced pseudogap and the superconducting transition in $\text{Ba}_{0.67}\text{K}_{0.33}\text{BiO}_3$, *Phys. Rev. B*64, 180509, (2001).

DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.64.180509>

[28]. Yokoya T., Chainani A., Kiss T., Shin S., Hirata K., Kameda N., Tamegai T., Nishio T., Uwe H., High-resolution photoemission study of low- T_c superconductors: Phonon-induced electronic structures in low- T_c superconductors and comparison with the results of high- T_c cuprates, *Physica C*, v. 378-381, 97-101, (2002).

DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-4534\(02\)01389-8](https://doi.org/10.1016/S0921-4534(02)01389-8)

[29]. Sacépé B., Chapelier C., Baturina T.I., Vinokur V.M., Baklanov M.R., Sanque M., Pseudogap in a thin film of a conventional superconductor, *Nat. Commun.*, 1, 140, (2010).

DOI: <https://doi.org/10.1038/ncomms1140>

[30]. Mondal M., Kamlapure A., Chand M., Saraswat G., Kumar S., Jesudasan J., Benfatto L., Tripathi V., Raychaudhuri P., Phase Fluctuations in a Strongly Disordered s-Wave NbN Superconductor Close to the Metal-Insulator Transition, *Phys. Rev. Lett.*, 106, 047001, (2011).

DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.047001>

[31]. Thakur S., Biswas D., Sahadev N., Biswas P. K., Balakrishnan G., Maiti K., Complex spectral evolution in a BCS superconductor, ZrB_{12} , *Sci. Rep.* 3, 3342, (2013).

DOI: <https://doi.org/10.1038/srep03342>

[32]. Patil S., Medicherla V R R., Ali K., Singh R.S., Manfrinetti P., Wrubl F., Dhar S.K., Maiti K., Observation of pseudogap in MgB_2 , *Journ. of Phys.: Cond. Matter*, v.29, 465504, (2017).

DOI:<https://doi.org/10.1088/1361-648X/aa8aa2>

[33]. Lanzara A., Zhao G-m., Saini N L., Bianconi A., Conder K., Keller H., Müller K A., Oxygen-isotope shift on the charge-stripe ordering temperature in $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ from x-ray absorption spectroscopy, *Journ of Phys.: Condensed Matter*, v.11(48), L 541-L546, (1999).
DOI:[10.1088/0953-8984/11/48/103](https://doi.org/10.1088/0953-8984/11/48/103)

[34]. Лахно В.Д., Трансляционно-инвариантные биполярны и волны зарядовой плотности в высокотемпературных сверхпроводниках // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020.N57.13с.
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-57>
DOI:<https://doi.org/10.20948/prepr-2020-57>