ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 107 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

С.В. Ершов, Е.Д. Бирюков,
А.Г. Волобой

# Эффективное вычисление оптимальных весов множественной выборки по значимости в двунаправленной трассировке лучей с фотонными картами

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Ершов С.В., Бирюков Е.Д., Волобой А.Г. Эффективное вычисление оптимальных весов множественной выборки по значимости в двунаправленной трассировке лучей с фотонными картами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 107. 22 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-107
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-107

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

С.В. Ершов, Е.Д. Бирюков, А.Г. Волобой

# Эффективное вычисление оптимальных весов множественной выборки по значимости в двунаправленной трассировке лучей с фотонными картами

Москва — 2020

*С.В. Ершов, Е.Д. Бирюков, А.Г. Волобой*

**Эффективное вычисление оптимальных весов множественной выборки по значимости в двунаправленной трассировке лучей с фотонными картами**

Двунаправленная стохастическая трассировка лучей (и, в частности, с использованием фотонных карт) является широко известным методом в реалистичной компьютерной графике. Однако его результаты зашумлены, как и у всех стохастических методов, что явно видно на изображении. Подход, называемый множественной выборки по значимости, позволяет значительно снизить шум при правильной выборке используемых весов. В работе решена ограниченная задача оптимизации весов для смешивания двух стратегий, определяемых количеством диффузных рассеяний луча из камеры. Оптимальные веса, минимизирующие шум, подчиняются интегральному уравнению, допускающему решение в замкнутой форме, и мы приводим численный метод вычисления его членов. Он основан на интегрировании по методу Монте-Карло и стохастической трассировке лучей. Получаемые таким образом веса продемонстрировали реальное снижение шума. Приведены результаты и их анализ для тестовой сцены.

***Ключевые слова:*** стохастическая трассировка лучей, подавление шума, множественная выборка по значимости, оптимальные веса

***Sergey Valentinovich Ershov, Elisey Dmitrievich Birukov, Alexey Gennadievich Voloboy***

**Efficient Calculation of the Optimal MIS Weights in Bi-Directional Ray Tracing with Photon Maps**

Bidirectional stochastic ray tracing (in particular, with photon maps) is well known technique for realistic computer graphics. However, its results are noisy, like all stochastic methods, which is clearly visible in the image. An approach called Multiple Importance Sampling can significantly reduce noise with the optimal weights used in it. In the paper we solved the partial optimization problem for mixing two strategies determined by the number of diffuse scattering events of the camera ray. Optimal weights that minimize noise obey an integral equation which can be solved in a closed form, and we present a numerical method to calculate its terms. It is based on Monte Carlo integration and stochastic ray tracing. The weights obtained in this way lead to noise reduction. The analysis of results for the test scene is presented.

***Keywords:*** stochastic ray tracing, denoising, multiple importance sampling, optimal weights

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 20-01-00547 и 18-01-00569.

# 1 Введение

В настоящее время моделирование распространения света широко используется в оптической технике и при проектировании новых материалов, а также как часть архитектурных, автомобильных и авиационных конструкторских задач. Если волновыми эффектами можно пренебречь, то хорошим выбором метода моделирования являются различные виды стохастической трассировки лучей. Эта область в основном включает в себя метод Метрополиса и трассировку лучей методом Монте-Карло (MCRT — Monte Carlo Ray Tracing).

Когда необходимо получить «виртуальную фотографию» сцены, классическая прямая трассировка лучей от источника света неэффективна и применяются различные двунаправленные модификации [1]. Однако слабой стороной всех стохастических методов является то, что их результаты зашумлены. Разумеется, амплитуда шума зависит от способа генерации и рассеяния лучей.

Поэтому проблема оптимального распределения вероятностей рассеяния лучей решается уже давно. Многие современные подходы восходят к работе Эрика Вича [2]. Его теоремы о множественной выборке по значимости (MIS — Multiple Importance Sampling) в методах, основанных на Монте-Карло, все еще являются основой для текущих исследований. Идея состоит в том, чтобы сгенерировать несколько случайных чисел, по одному для каждой “стратегии” (т. е. плотность вероятности, допускающая эффективную генерацию выборок), а затем суммировать их вклады в накопленное среднее с весом, который обычно зависит от точки фазового пространства. При оптимальном выборе весов для каждой стратегии шум может быть существенно снижен, и в [2] предложены “сбалансированные эвристические” и “степенные эвристические” методы расчета весов. Приводится доказательство того, что, хотя эти веса являются субоптимальными, результирующий шум ненамного превышает абсолютный минимум. Впрочем, недавно эта субоптимальность и дальнейшее снижение шума были рассмотрены в [3]. Результаты, полученные в [2], основаны на теореме с условием *независимости* используемых случайных величин (например, трасс лучей). Эта независимость выполнена в стандартном Монте-Карло и даже в некоторых вариантах двунаправленной трассировки.

Однако затем формулы из [2] были некритически применены к двунаправленной стохастической трассировке траекторий (BDPT — Bidirectional Path Tracing), двунаправленной стохастической трассировке лучей с фотонными картами (BDPM — Bidirectional Path Tracing with Photon Maps) [4] или их комбинации [5]. Между тем теперь «случайные величины», то есть световые пути, соединяющие источник и камеру, оказываются не независимыми, потому что, например, в BDPM один и тот же световой путь объединяется со многими путями камеры, и наоборот. Таким образом, результирующие полные траектории имеют общую часть и, следовательно, не являются независимыми.

В [6] мы нашли частичное решение оптимизационной задачи для весов в методе BDPM и показали, что уравнения для них качественно отличаются от известных эвристик из [2]. Это происходит потому, что для BDPM шум не следует правилу, как в классическом MCRT [7]. Поэтому оптимальные веса, которые минимизируют функционал шума в классическом MCRT и в BDPM, различны. Поскольку шум BDPM является квадратичным функционалом по вкладу луча, как показано в [7], он также квадратичен по весам. Таким образом, хотя вычисление весов, минимизирующих этот функционал шума, выглядит математически тривиальным, на практике это не так.

В данной работе мы описываем численный метод для нахождения оптимальных весов (точнее, приближения к ним) в BDPM. Метод этот основан на стохастической трассировке лучей и позволяет сравнительно легко вычислять веса. Для сцен с ламбертовским рассеянием и малого диаметра интегрирующей сферы возможно дальнейшее упрощение, и тогда формулы весов становятся чисто алгебраическими. Хотя так вычисленные веса и не будут истинно оптимальны для случая неламбертовской сцены, однако крайнее удобство их вычисления подчас окупает их небольшое отклонение от оптимальных весов.

# 2 Современное состояние исследований

Выбор весов заметно влияет на качество получаемого реалистичного изображения или, что то же самое, на скорость сходимости алгоритма. Именно поэтому этому вопросу посвящено много исследований.

Формулы MIS и эвристические методы расчета оптимальных весов были предложены в работах [2], [8]. Полученные там формулы зависят только от характеристик рассеяния поверхности (BDF — Bidirectional Distribution Function) и распределения излучения источника света. В дальнейшем этот подход был применен во многих работах, обзор которых дан в [9].

Некоторое расширение было предложено в [10], оно оперирует плотностью вероятности полных трасс (от источника к камере, полученных путем “слияния вершин” прямого и обратного MCRT). Число вершин в пути соединения и двух половин, составляющих его, различно, потому что две близкие вершины сливаются в одну. Таким образом, фазовые пространства различны, но авторы объединяют их и вычисляют плотность распределения в пространстве полных трасс. Естественно, она пропорциональна значимости трассы, а также содержит множитель, пропорциональный квадрату радиуса интегрирующей сферы. Здесь важно то, что этот радиус может быть разным в разных частях сцены. В результате после подстановки плотности в формулы [2] авторы могут исследовать зависимость от радиуса.

Однако это все еще плотность для выборки по одной трассе, и потому недостаточна для обработки “корреляционных членов” в BDPM [7], так что учет радиуса интегрирования не очень помогает. Заметим, что наш подход использует не плотность в пространстве полных трасс, а только плотность путей от источника и от камеры, потому что шум является интегралом с узкими ядрами из-за “слияния вершин”, которые слабо сходятся к дельта-функции, так что не вызывают особых проблем.

Общая идея работ [11] и [12] заключается в том, что прямой луч MCRT попадает в интегрирующую сферу вокруг точки луча камеры. Этот метод называется отображением фотонов или “*слиянием* вершин”. В то же время можно соединить точку сегмента луча камеры с прямой точкой MCRT (“*соединение* вершин”). Конечно, здесь надо проверить затенение. В общем, это два разных метода двунаправленной трассировки лучей. И авторы объединили их, сложив их результаты с весами, предложив многообещающий метод “слияния и соединения вершин”. Но веса они оставили все те же дробно-рациональные, как и в [2]. Нелокальность и нелинейность (вне “степенной эвристики”) здесь отсутствуют.

В работе [13] предложили оригинальный алгоритм порождения полных траекторий, соединяющих камеру и источник света. Они случайным образом генерировали несколько путей с разными весами, а после этого выбрали веса так, чтобы минимизировать стохастический шум в результирующем изображении. Их алгоритм отличается от нашего тем, что они пренебрегают статистической зависимостью между “лучами камеры разной длины”. Это звучит разумно, однако даже если они действительно независимы, то ведь они соединяются с *одним и тем же* лучом из источника. Авторы утверждают, что у них есть полный вывод, который действительно учитывает корреляции и приводит к интегральным уравнениям, но он отсутствует в статье. Исходные уравнения, из которых они исходят, правильны, но слишком сложны для обработки, и авторы упростили задачу, заменив фактический шум его верхней границей. Естественно, это не гарантирует, что найденные веса действительно приведут к меньшему шуму: хотя верхняя граница уменьшается, сам шум может даже увеличиться.

Несколько работ [14], [15] и [16] посвящены вопросу эффективного вычисления весов MIS.

В [6] мы рассмотрели частичную задачу оптимизации весов для случая смешения двух стратегий, BDD=$n$ и BDD=$n$+1, при $n > 0$. BDD (Backward Diffuse Depth) означает число случаев *диффузного* рассеяния, после которого луч из камеры принудительно обрывается. Аналогичным же способом можно рассмотреть и смешение стратегий BDD=0 с BDD=1. В этой задаче мы опять имеем два веса, $w_0$ и $w_1$, для первой и второй точек *объединенной* траектории (соединяющей камеру с источником). Для получения правильного, несмещенного предельного значения яркости пикселя сумма весов должна быть 1, так что у нас остается лишь одна независимая функция, например, $w_1$.

В этой работе мы опишем практический способ вычисления этих весов на основе стохастической трассировки лучей (причем потребуется только базовая прямая MCRT, гибридной или обратной трассировки не нужно). Вычисления достаточно просты и требуют сравнительно немного памяти. Применение найденных весов к знаменитой сцене Cornell Box (с различными параметрами) позволяет заметно снизить уровень шума. Здесь мы приведем общий ход рассуждений и отличия данного случая от [6].

# 3 Двунаправленная стохастическая трассировка лучей с фотонными картами (BDPM)

Луч камеры для данного пикселя первый раз попадает в точку $\boldsymbol{x}_0^{(c)}$ на поверхности сцены, случайным образом рассеивается и распространяется дальше, попадая в итоге в точку $\boldsymbol{x}_1^{(c)}$, после чего его распространение прекращается. Стохастическое рассеяние в $\boldsymbol{x}_0^{(c)}$ происходит без поглощения (т.е. каждый луч распространяется дальше), зато энергия луча понижается. При попадании в $\boldsymbol{x}_0^{(c)}$ энергия луча равна единице $E(\boldsymbol{x}_0^{(c)})$, а после рассеяния и при попадании в $\boldsymbol{x}_1^{(c)}$ она составляет $E(\boldsymbol{x}_0^{(c)}, \boldsymbol{x}_1^{(c)}) \leq 1$. Непосредственное освещение точки поверхности вычисляется детерминированной трассировкой, а вторичное (диффузно рассеянное) — с помощью фотонных карт.

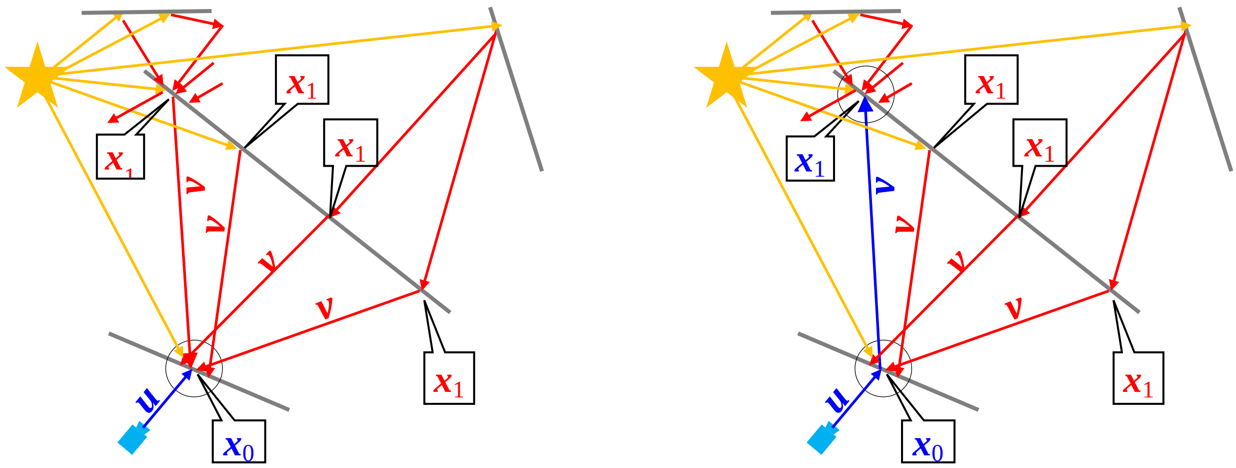


**Рис. 1**. Метод BDPM для BDD=0 (слева) и BDD=1 (справа). Лучи из камеры показаны синими стрелками, из источника света — красными (после первого диффузного рассеяния), а их первый сегмент (прямое освещение) — желтыми стрелками. Узлы траекторий — это точки встречи с диффузными поверхностями сцены; окружности вокруг них показывают интегрирующие сферы сбора фотонов. $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{x}_1$ обозначают первый и второй узлы *полной* трассы (от камеры до источника); $\boldsymbol{x}_1$ получается либо из узла подтрассы от камеры (тогда $\boldsymbol{x}_1$), либо из узла подтрассы от источника (тогда $\boldsymbol{x}_1$)

Если *вторичный* луч из источника $\{\boldsymbol{x}_0^{(l)}, \boldsymbol{x}_1^{(l)}, \dots\}$ попадает в *интегрирующую сферу*, т.е. окрестность точки $\boldsymbol{x}_0^{(c)}$ или $\boldsymbol{x}_1^{(c)}$, то мы пренебрегаем малой дистанцией до центра сферы и объединяем половинки трасс в полную трассу, соединяющую камеру и источник (рис. 1). После этого накопленное в пикселе значение яркости увеличивается на т.н. *вклад* полученной полной трассы

$C(\boldsymbol{x}_0^{(c)}, \boldsymbol{x}_1^{(c)}, \boldsymbol{x}_n^{(l)}, \boldsymbol{x}_{n-1}^{(l)}, \dots, \boldsymbol{x}_0^{(l)})$. Для чистой стратегии BDD=$M$ он равен сумме прямых яркостей во всех точках трассы луча от камеры с соответствующим ослаблением:

$$C = \sum_{m=0}^{M} E(\boldsymbol{x}_0^{(c)}, \dots, \boldsymbol{x}_m^{(c)}) L_0(\boldsymbol{x}_{m-1}^{(c)}, \boldsymbol{x}_m^{(c)})$$

плюс

$$S^{-1} E f(\boldsymbol{x}_n^{(l)} \to \boldsymbol{x}_M^{(c)}, \boldsymbol{x}_M^{(c)} \to \boldsymbol{x}_{M-1}^{(c)}; \boldsymbol{x}_M^{(c)})$$

в случае попадания луча из источника в окрестность точки $\boldsymbol{x}_M^{(c)}$ площади $S$. Здесь $L_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — яркость точки $\boldsymbol{y}$ в направлении точки $\boldsymbol{x}$ *под непосредственным освещением*,

$S$ — площадь сечения интегрирующей сферы радиуса $r$ (= $\pi r^2$),

$E$ — энергия луча перед попаданием в эту точку,

$f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x})$ — функция рассеяния (BDF) в точке для направления падения $\boldsymbol{v}$ и излучения $\boldsymbol{u}$,

$\boldsymbol{x}_n^{(l)}$ — узел траектории из источника, попавший в интегрирующую сферу. Точка $\boldsymbol{x}_{-1}^{(c)}$ — это точка испускания луча из камеры. Здесь и везде BDF задается в единицах яркости (так что BDF ламбертовой поверхности с альбедо $k_d$ равен $\pi^{-1} k_d$).

Условие «в случае попадания…» можно формализовать так: для *любой* пары подтрасс (из камеры и из источника)

$$\begin{aligned} C\left(\boldsymbol{x}_0^{(c)}, \boldsymbol{x}_1^{(c)}, \dots, \boldsymbol{x}_2^{(l)}, \boldsymbol{x}_1^{(l)}, \dots, \boldsymbol{x}_0^{(l)}\right) & \\ = \sum_{m=0}^{M} E\left(\boldsymbol{x}_0^{(c)}, \dots, \boldsymbol{x}_m^{(c)}\right) L_0\left(\boldsymbol{x}_{m-1}^{(c)}, \boldsymbol{x}_m^{(c)}\right) & \\ + E(\boldsymbol{x}_0^{(c)}, \boldsymbol{x}_M^{(c)}) \sum_{n>0} K(\left|\boldsymbol{x}_M^{(c)} - \boldsymbol{x}_n^{(l)}\right|) f(\boldsymbol{x}_n^{(l)} \to \boldsymbol{x}_M^{(c)}, \boldsymbol{x}_M^{(c)} & \\ \to \boldsymbol{x}_{M-1}^{(c)}; \boldsymbol{x}_M^{(c)}), & \end{aligned} \tag{1}$$

где $K(r)$ — ядро оператора «слияния», равное $(\pi R^2)^{-1}$ при $r \le R$ и 0 в противном случае. Заметим, что в случае чистой стратегии слияние проверяется лишь в $\boldsymbol{x}_0^{(c)}$ при BDD=0 или в $\boldsymbol{x}_1^{(c)}$ при BDD=1.

Смешение же стратегий означает, что позволяется слияние *и* в $\boldsymbol{x}_0^{(c)}$, *и* в $\boldsymbol{x}_1^{(c)}$. Чтобы в итоге накопленная яркость не оказалась удвоена (как сумма значений, которые дала бы BDD=0 и BDD=1), при пересечении в $\boldsymbol{x}_m^{(c)}$ вклад снижается в $w_m$ раз. Прямая яркость также масштабируется в $w_m$ раз, как это показано на рис. 2.

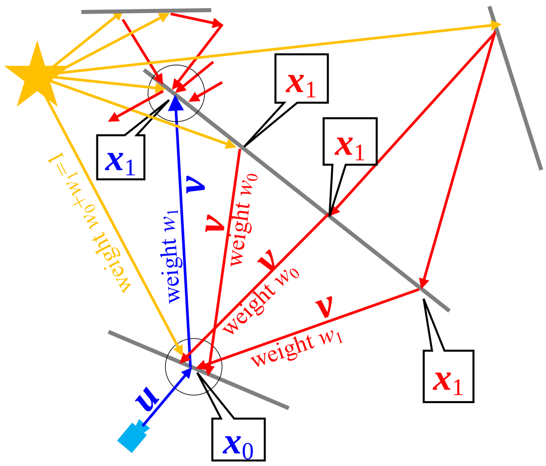


**Рис. 2**. Метод BDPM с весами, смешивающими стратегии BDD=0 и BDD=1. Лучи из камеры показаны синими стрелками, из источника света — красными (после первого диффузного рассеяния), а их первый сегмент (прямое освещение) — желтыми стрелками. Узлы траекторий — это точки встречи с диффузными поверхностями сцены; окружности вокруг них показывают интегрирующие сферы сбора фотонов. $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{x}_1$ обозначают первый и второй узлы *полной* трассы (от камеры до источника); $\boldsymbol{x}_1$ получается либо из узла подтрассы от камеры (тогда $\boldsymbol{x}_1$), либо из узла подтрассы от источника (тогда $\boldsymbol{x}_1$)

Алгебраически же это означает, что вклад луча вычисляется так:

$$
\begin{aligned}
C&\left(\boldsymbol{x}_0^{(c)},\boldsymbol{x}_1^{(c)},\ldots,\boldsymbol{x}_2^{(l)},\boldsymbol{x}_1^{(l)},\ldots,\boldsymbol{x}_0^{(l)}\right)\\
&= w_0\Bigg(L_0\left(\boldsymbol{x}_{-1}^{(c)},\boldsymbol{x}_0^{(c)}\right)\\
&+\sum_{n>0}K\left(\left|\boldsymbol{x}_0^{(c)}-\boldsymbol{x}_n^{(l)}\right|\right)f\left(\boldsymbol{x}_n^{(l)}\to\boldsymbol{x}_0^{(c)},\boldsymbol{x}_0^{(c)}\to\boldsymbol{x}_{-1}^{(c)};\boldsymbol{x}_0^{(c)}\right)\Bigg)\\
&+w_1\Bigg(L_0\left(\boldsymbol{x}_{-1}^{(c)},\boldsymbol{x}_0^{(c)}\right)\\
&+E\left(\boldsymbol{x}_0^{(c)},\boldsymbol{x}_1^{(c)}\right)\Bigg(L_0\left(\boldsymbol{x}_0^{(c)},\boldsymbol{x}_1^{(c)}\right)\\
&+\sum_{n>0}K\left(\left|\boldsymbol{x}_1^{(c)}-\boldsymbol{x}_n^{(l)}\right|\right)f\left(\boldsymbol{x}_n^{(l)}\to\boldsymbol{x}_1^{(c)},\boldsymbol{x}_1^{(c)}\to\boldsymbol{x}_0^{(c)};\boldsymbol{x}_0^{(c)}\right)\Bigg)\Bigg).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Для получения корректного предельного значения яркости необходимо и достаточно, чтобы сумма весов была единицей ($w_0 + w_1 = 1$) и, кроме того, они были бы детерминистическими функциями полной трассы. При этом они могут не зависеть от части ее узлов, например, от половинки трассы от источника, так что $w_k = w_k(\boldsymbol{x}_0^{(c)}, \boldsymbol{x}_1^{(c)})$ вполне подходят. Такими мы их и возьмем.

Для $w_0 + w_1 = 1$ выражение (2) упрощается до:

$$\begin{aligned} C\left(\boldsymbol{x}_0^{(c)}, \boldsymbol{x}_1^{(c)}, \dots, \boldsymbol{x}_2^{(l)}, \boldsymbol{x}_1^{(l)}, \dots, \boldsymbol{x}_0^{(l)}\right) \\ = L_0\left(\boldsymbol{x}_{-1}^{(c)}, \boldsymbol{x}_0^{(c)}\right) + w_1 E\left(\boldsymbol{x}_0^{(c)}, \boldsymbol{x}_1^{(c)}\right) L_0\left(\boldsymbol{x}_{-1}^{(c)}, \boldsymbol{x}_0^{(c)}\right) \\ + w_0 \sum_{n>0} K(\left|\boldsymbol{x}_0^{(c)} - \boldsymbol{x}_n^{(l)}\right|) f(\boldsymbol{x}_n^{(l)} \to \boldsymbol{x}_0^{(c)}, \boldsymbol{x}_0^{(c)} \to \boldsymbol{x}_{-1}^{(c)}; \boldsymbol{x}_0^{(c)}) \\ + w_1 \sum_{n>0} K(\left|\boldsymbol{x}_1^{(c)} - \boldsymbol{x}_n^{(l)}\right|) f(\boldsymbol{x}_n^{(l)} \to \boldsymbol{x}_1^{(c)}, \boldsymbol{x}_1^{(c)} \to \boldsymbol{x}_0^{(c)}; \boldsymbol{x}_0^{(c)}), \end{aligned} \tag{3}$$

являющейся аналогом формулы (3) из [6] для нашего случая.

# 4 Оценка шума

В методе BDPM дисперсия накопленного в результате трассировки $N_B$ лучей из камеры (через данный пиксель!) и $N_F$ лучей из источника яркости пикселя выражается формулой [7]

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{N_F N_B}(\langle\langle C^2\rangle_F\rangle_B - \langle\langle C\rangle\rangle^2) + \frac{1 - N_F^{-1}}{N_B}(\langle\langle C\rangle_F^2\rangle_B - \langle\langle C\rangle\rangle^2) \\ + \frac{1 - N_B^{-1}}{N_F}(\langle\langle C\rangle_B^2\rangle_F - \langle\langle C\rangle\rangle^2), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\langle\cdot\rangle_B$ — среднее по ансамблю лучей от камеры (для данного фиксированного луча из источника!), а $\langle\cdot\rangle_F$ — среднее по ансамблю лучей от источников света для фиксированной трассы из камеры. При этом $\langle\langle C\rangle\rangle$ равно просто теоретическому значению яркости пикселя и потому от весов не зависит. Итоговая дисперсия, то есть шум BDPM, зависит от весов через члены $\langle\langle C^2\rangle_F\rangle_B, \langle\langle C\rangle_F^2\rangle_B, \langle\langle C\rangle_B^2\rangle_F$, и *оптимальными* весами будут те, для которых этот шум достигает минимума. Иными словами, вариация функционала $V$ при варьировании $w_1$ (и $w_0 = 1 - w_1$) обращается в ноль.

Члены $\langle\langle C^2\rangle_F\rangle_B, \langle\langle C\rangle_F^2\rangle_B, \langle\langle C\rangle_B^2\rangle_F$ вычисляются так же, как и в [6]. В результате этого получаем для $S \to 0$

$$\begin{aligned} \langle\langle C^2\rangle_F\rangle_B \approx S^{-1}\int f^2(v,u,x_0) J(v,x_0) d^2v \\ + S^{-1}\int w_1^2(x_0,x_1)\Bigg( f(v,u,x_0) \\ + \mu(u,x_0)\frac{b(x_0,x_1)}{I(v,x_0)}\Bigg) I(v,x_0) Q(x_0,x_1) d^2x_1 \\ - 2S^{-1}\int w_1(x_0,x_1) f(v,u,x_0) I(v,x_0) Q(x_0,x_1) d^2x_1 \end{aligned}$$

$$\langle\langle C\rangle_F^2\rangle_B \approx L^2(u,x_0) + \mu\,(u,x_0)\int w_1^2(x_0,x_1) I^2(v,x_0) Q(x_0,x_1) d^2x_1 - G_1^2(x_0)$$

$$
\begin{aligned}
\langle\langle C\rangle_B^2\rangle_F \approx S^{-1} \int & f^2(v,u,x_0)J(v,x_0)d^2v \\
& + S^{-1}\int w_1^2(x_0,x_1)f(v,u,x_0)I(v,x_0)Q(x_0,x_1)d^2x_1 \\
& - 2S^{-1}\int w_1(x_0,x_1)f(v,u,x_0)I(v,x_0)Q(x_0,x_1)d^2x_1,
\end{aligned}
$$

где все обозначения те же, что в [6]:
$I(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})$ — угловое распределение интенсивности *вторичного* освещения точки $\boldsymbol{x}$ в направлении $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ — нормаль в точке $\boldsymbol{x}$,

$$
\begin{aligned}
& J(v,x) \equiv \big(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\big)I(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}), \\
& \mu(u,x) \equiv \int f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\big(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\big)d^2\boldsymbol{v}, \\
& b(x_0,x_1) \equiv \int f^2(v',x_1 \to x_0,x_1)J(v',x_1)d^2v', \\
& G_m(x_0) \equiv \int w_m(x_0,x_1)f(v,u,x_0)J(v,x_0)d^2\boldsymbol{v}, \\
& Q(x_0,x_1) \equiv f(v,u,x_0)\big(v\cdot n(x_0)\big)s(x_0,x_1), \\
& s(x_0,x_1) \equiv \frac{|(x_0-x_1)\cdot n(x_1)|}{|x_0-x_1|^2}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Подставляя полученные выражения в (4) и обозначая $n_F \equiv SN_F$, получаем

$$
\begin{aligned}
V \approx & \frac{1}{N_F}\left(S^{-1}\int f^2(v,u,x_0)J(v,x_0)d^2v - L^2(u,x_0)\right) \\
& + \frac{1}{N_B}\int w_1^2(x_0,x_1)a(x_{-1},x_0,x_1)\mu(u,x_0)I(v,x_0)Q(x_0,x_1)d^2x_1 \\
& \qquad - \frac{2}{n_F}\int w_1(x_0,x_1)f(v,u,x_0)I(v,x_0)Q(x_0,x_1)d^2x_1 \\
& \qquad - \frac{1-N_F^{-1}}{N_B}G_1^2(x_0),
\end{aligned} \tag{6}
$$

где

$$
\begin{aligned}
& a(x_{-1},x_0,x_1) \equiv N_B n_F^{-1}\tilde{f}(v,u,x_0) + n_F^{-1}\frac{b(x_0,x_1)}{L(x_0,x_1)} + L(x_0,x_1), \\
& \tilde{f}(v,u,x_0) \equiv \mu^{-1}(u,x_0)f(v,u,x_0).
\end{aligned}
$$

$L(x_0,x_1)$ — полная яркость (от первичного и вторичного освещения) в точке $\boldsymbol{x}_1$ по направлению к $\boldsymbol{x}_0$

$$
\begin{aligned}
& L(x_0,x_1) \equiv L_0(x_0,x_1) + L_d(x_0,x_1), \\
& L_d(x_0,x_1) \equiv \int f(v',x_1 \to x_0,x_1)J(v',x_1)d^2v'.
\end{aligned} \tag{7}
$$

# 5 Оптимальные веса

*Оптимальными* весами будут те, для которых этот шум $V$ достигает минимума. Иными словами, вариация функционала $V$ при варьировании $w_1$ (и $w_0 = 1 - w_1$) обращается в ноль для любого $\delta w_1$. Для (6) это приводит к

$$w_1(x_0, x_1)a(x_{-1}, x_0, x_1) - N_B n_F^{-1} f(v, u, x_0) - \tilde{G}_1(x_0) = 0,$$

где

$$\tilde{G}_m(x_0) \equiv \int w_m(x_0, x_1)\tilde{f}(v, u, x_0)J(v, x_0)d^2\boldsymbol{v}.$$

Как и в [6], это интегральное уравнение допускает замкнутое решение относительно $w_1(x_0, x_1)$ того же вида:

$$w_1(x_0, x_1) = W_1(x_0, x_1)\left(1 + \frac{1}{\tilde{f}(v, u, x_0)} \frac{\frac{(1 - N_F^{-1})n_F}{N_B} A(u, x_0)}{1 - \frac{(1 - N_F^{-1})n_F}{N_B} B(u, x_0)}\right), \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} W_1(x_0, x_1) &\equiv \frac{1}{1 + \frac{1}{N_B \tilde{f}(v, u, x_0)}\left(\frac{b(x_0, x_1)}{L(x_0, x_1)} + n_F L(x_0, x_1)\right)}, \\ A(u, x_0) &\equiv \int W_1(x_0, x_1)\tilde{f}(v, u, x_0)J(x_0, x_1)d^2 v, \\ B(u, x_0) &\equiv \int W_1(x_0, x_1)J(x_0, x_1)d^2 v. \end{aligned} \tag{9}$$

Напомним, что $L(x_0, x_1) = L_0(x_0, x_1) + L_d(x_0, x_1)$ — это *полная* яркость, содержащая как первичную, так и вторичную компоненты.

# 6 Вычисление оптимальных весов с помощью стохастической трассировки лучей

Входящие в формулы (7), (5) и (9) интегралы $L_d$, $b$, $A$ и $B$ можно вычислить с помощью метода Монте-Карло.

## 6.1 Вычисление и хранение $L_d$, $b$

В принципе $L_d$ и отличающийся от него лишь возведением функции рассеяния поверхности (BDF) в квадрат $b$ можно находить так:

$$L_d(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1) = \frac{1}{sN_F}\sum_p E_p f(\boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1),$$

$$b(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1) = \frac{1}{sN_F}\sum_p E_p f^2(\boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1),$$

где $p$ — индекс фотона (луча из источника), попавшего в некоторую малую окрестность точки $\boldsymbol{x}_1$ площади $\boldsymbol{s}$, а $E_p$ — его энергия (обычно 1 в прямой MCRT). Окрестность эта не обязана совпадать с интегрирующей сферой BDPM.

Напротив, для экономии памяти и времени вычислений мы возьмем ее заметно больше, поскольку в окрестности экстремума шум малочувствителен к ошибкам вычисления веса.

Однако подобное вычисление неудобно на практике потому, что выполнять его придется не для одной определенной пары $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$, а для *всех* пар $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1$, которые могут встретиться в обратной MCRT для всех пикселей. Поэтому $\boldsymbol{x}_0$ покрывает участок сцены, непосредственно видимый из камеры, а $\boldsymbol{x}_1$, т.е. узел траектории луча от камеры, следующий за $\boldsymbol{x}_0$ после *стохастического* рассеяния там, может принадлежать едва ли не полной поверхности сцены. Можно вычислить этот участок более точно, но это требует затрат времени и памяти, которые обычно не окупаются. Поэтому мы будем вычислять $L_d$ и $b$ *на всей поверхности сцены*.

Что же касается аргумента $\boldsymbol{x}_0$, то вместо пространственной точки удобнее использовать *направление* из $\boldsymbol{x}_1$, которое входит в определения $L_d$ и $b$. В каждой точке $\boldsymbol{x}_1$ они нужны нам для направлений во все возможные $\boldsymbol{x}_0$, то есть точки сцены, видимые камерой непосредственно. Для каждого $\boldsymbol{x}_1$ это будет, вообще говоря, свой набор направлений. Опять же, можно его вычислить, но это не окупится, и мы будем вычислять $L_d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_1)$ и $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_1)$ для *всех* точек поверхностей сцены $\boldsymbol{x}_1$ и *всех* направлений из них $\boldsymbol{v}$. Разумеется, в численной реализации потребуется дискретизация пространства параметров. Для $\boldsymbol{x}_1$ мы разбиваем всю поверхность сцены на небольшие ячейки, чьи центры и будут давать множество точек $\boldsymbol{x}_1$. В каждой ячейке хранится пара $\{L,b\}$ для «всех» направлений (из дискретного набора, покрывающего всю полусферу).

Пространственное разбиение достаточно рутинно и аналогично используемому при работе с картами освещенности. Что же касается углового распределения, то надо заметить, что в подавляющем большинстве случаев угловое распределение вторичного освещения является низкоконтрастным (то есть оно не слишком сильно изменяется от направления к направлению). После его свертки с функцией рассеяния BDF, даже если она вообще дельта-функция (а уж тем более, если она почти ламбертовая), угловая зависимость $L_d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_1)$ и $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_1)$ будет не менее гладкой. Поэтому ее можно удовлетворительно передать с помощью совсем небольшой сетки из, скажем, 100 удачно распределенных по полусфере направлений $\boldsymbol{v}$.

Теперь вычисление $L_d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_1) = \frac{1}{sN_F} \sum_p E_p f(\boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_1)$ означает, что мы трассируем лучи из источника, при каждом попадании по поверхности сцены определяем ячейку, содержащую эту точку, в качестве $\boldsymbol{x}_1$ берем ее центр и теперь *для каждого направления угловой сетки* $\boldsymbol{v}$ прибавляем $E_p f(\boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_1)$ к уже накопленной сумме. Это не очень хорошо, так как, во-первых, для каждого попадания придется сосчитать BDF для примерно 100 (разрешения угловой сетки) направления наблюдения. А во-вторых, если наш BDF достаточно узкий, а сетка направлений редкая, то практически всегда ни одно из них не окажется рядом с направлением падения $\boldsymbol{v}_p$, так что BDF $f(\boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}_1)$ будет почти нулем.

Даже если в итоге после длительной трассировки и удастся что-то сосчитать, это будет очень зашумленная величина.

Поэтому гораздо удобнее использовать слегка измененную схему. А именно, трассируем луч из источника, определяем ячейку, содержащую точку попадания, и в ней обрабатываем не упавший, а *рассеянный* луч. Теперь мы находим ячейку нашей угловой сетки, содержащей направление этого рассеянного луча $\boldsymbol{v}$, и в ней увеличиваем накопленное значение на $E_p/(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности в точке встречи[1]. По завершении трассировки это накопленное значение делим на $s\omega N_F$, где $N_F$ — полное число лучей, $s$ — площадь пространственной ячейки, $\omega$ — телесный угол угловой ячейки, и получаем $L_d$. Точнее, это будет среднее значение $L_d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}_1)$ по данной угловой и пространственной ячейкам.

Вычисление $b$ совершенно аналогично, только накопленное значение увеличивается на $E_p f\left(\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}_1\right)/(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})$.

При такой схеме не нужно вычислять сотню значений BDF при каждом попадании луча, и все нормально работает даже при очень узком BDF, так как проверяется попадание направления рассеяния в конечную угловую ячейку.

Все это в целом можно рассматривать как развитие карт освещенности, когда регистрируется не интегральная освещенность или яркость, но ее (огрубленное) распределение по направлениям.

## 6.2 Вычисление и хранение $A$ и $B$

Как и в случае с $L_d$ и $b$, это два весьма сходных интеграла, отличающихся лишь множителем $\tilde{f}(v,u,x_0)$.

$$A(u,x_0)\equiv\int\frac{1}{1+\frac{1}{N_B\tilde{f}(v,u,x_0)}\left(\frac{b(x_0,x_1)}{L(x_0,x_1)}+n_F L(x_0,x_1)\right)}\tilde{f}(v,u,x_0)J(v,x_0)d^2v\,,$$

$$B(u,x_0)\equiv\int\frac{1}{1+\frac{1}{N_B\tilde{f}(v,u,x_0)}\left(\frac{b(x_0,x_1)}{L(x_0,x_1)}+n_F L(x_0,x_1)\right)}J(v,x_0)d^2v.$$

Поскольку $\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}_0$ однозначно определяются пикселем, то и $A$ и $B$ хранятся в обычной матрице такого же разрешения, как и для итогового изображения. Каждый ее элемент хранит пару $A$ и $B$ для данного пикселя. Расчет всех элементов делается последовательно и независимо. Ниже мы опишем вычисление только $A$ (для $B$ все аналогично) для одного пикселя, т.е. $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}_0)$.

Обыкновенно, если необходимо вычислить интеграл в точно заданной точке и для точно заданного направления, то выгодно использовать обратную MCRT. Это возможно и в нашем случае. Перепишем выражение для $A$ в виде:

---

[1] Без деления на $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})$ мы накопили бы не *яркость*, а *интенсивность*.

$$A(u,x_0)=\int \frac{L(x_0,x_1)}{1+\frac{1}{N_B\tilde f(v,u,x_0)}\left(\frac{b(x_0,x_1)}{L(x_0,x_1)}+n_F L(x_0,x_1)\right)}\tilde f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},x_0)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})d^2\boldsymbol{v},$$

$\boldsymbol{n}$ — нормаль в точке $\boldsymbol{x}_0$. Член $\tilde f(\boldsymbol{v},u,x_0)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})d^2\boldsymbol{v}$ — это доля (обратных) лучей, рассеянных в направлении $\boldsymbol{v}$. Таким образом, интеграл вычисляется с помощью обратной стохастической трассировки так: берем $N$ одинаковых исходных лучей направления $\boldsymbol{u}$, стохастически рассеиваем по BDF в точке $\boldsymbol{x}_0$ (без поглощения!) и накапливаем суммы

$$A(u,x_0)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{L(x_0,x_{1,j})}{1+\frac{1}{N_B\tilde f(v_j,u,x_0)}\left(\frac{b(x_0,x_{1,j})}{L(x_0,x_{1,j})}+n_F L(x_0,x_{1,j})\right)},$$

$$B(u,x_0)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{L(x_0,x_{1,j})/\tilde f(v_j,u,x_0)}{1+\frac{1}{N_B\tilde f(v_j,u,x_0)}\left(\frac{b(x_0,x_{1,j})}{L(x_0,x_{1,j})}+n_F L(x_0,x_{1,j})\right)},$$

где $j$ — индекс луча, $\boldsymbol{v}_j$ — его направление после рассеяния, $\boldsymbol{x}_{1,j}$ — точка его попадания по поверхности сцены, $L(x_0,x_{1,j})=L_0(x_0,x_{1,j})+L_d(x_0,x_{1,j})$ — *полная* яркость точки $\boldsymbol{x}_{1,j}$ в направлении $\boldsymbol{v}_j$ (т.е. в сторону $\boldsymbol{x}_0$). Диффузные яркости $L_d(x_0,x_{1,j})$ и $b(x_0,x_{1,j})$ берутся из вычисленного выше аналога карт светимости, см. Раздел 6.1.

# 7 Ламбертовская сцена

В этом важном частном случае интегралы в выражении для весов можно вычислить явно, и формула в итоге сводится к алгебраической. В случае функции рассеивания BDF более общего вида тоже можно использовать веса, вычисленные в предположении ламбертовости; разумеется, оптимальными они уже не будут. Однако для BDF «невысокой контрастности» они окажутся достаточно близки к оптимальным, а меньшее подавление шума может окупиться большей простотой вычислений весов. Поэтому выведем формулы весов в предположении, что в точках $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{x}_1$ поверхность ламбертова, а интегрирующая сфера достаточно мала.

Ламбертовская функция рассеяния не зависит от направления:

$$f(v,u,\boldsymbol{x})=\frac{k_d(\boldsymbol{x})}{\pi},$$

где $k_d$ — альбедо (доля энергии, которая рассеивается, а не поглощается). Для такой фунуции

$$\mu=k_d,$$
$$\tilde f(v,u,\boldsymbol{x})=\pi^{-1},$$
$$b=\pi^{-1}k_d(x_1)L_d(x_1),$$

$$a = n_F^{-1}\pi^{-1}\big(N_B + k_d(x_1)\big) + L(x_1),$$

так что $A(u, x_0) = \pi^{-1}B(u, x_0)$ и

$$w_1(x_0, x_1) = \frac{1}{1 + N_B^{-1}\left(\frac{k_d(x_1)L_d(x_1)}{L(x_1)} + \pi n_F L(x_1)\right)} \frac{1}{1 - \frac{(1 - N_F^{-1})n_F}{N_B}B(u, x_0)},$$

$$B(u, x_0) = \int \frac{1}{1 + N_B^{-1}\left(\frac{k_d(x_1)L_d(x_1)}{L(x_1)} + \pi n_F L(x_1)\right)} J(x_0, x_1)d^2v.$$

Обыкновенно $N_F \gg 1$. Кроме того, очевидно,

$$\frac{k_d(x_1)L_d(x_1)}{L(x_1)} = \frac{k_d(x_1)L_d(x_1)}{L_0(x_1) + L_d(x_1)} \leq 1,$$

так что при больших $N_B$

$$w_1(x_0, x_1) \approx \frac{1}{1 + N_B^{-1}\pi n_F L(x_1)} \frac{1}{1 - N_B^{-1}n_F B(u, x_0)},$$

$$B(u, x_0) \approx \int \frac{1}{1 + \pi N_B^{-1}n_F L(x_1)} J(x_0, x_1)d^2v \leq \int J(x_0, x_1)d^2v = I(x_1),$$

где $I(x_1)$ — вторичная (диффузная) освещенность точки $x_1$. В MCRT вторичная освещенность совпадает с $\frac{\langle n\rangle}{SN_F}F$, где $n$ — число диффузных фотонов, попавших в окрестность площади $S$, а $F$ — полный поток источника света, в нашем выводе он 1. То есть $I(x_1) = n_F^{-1}\langle n\rangle$. Если интегрирующая сфера мала, так что в среднем количество попавших в нее диффузных лучей $\ll N_B$, *как оно обычно и бывает*, то $B(u, x_0) \leq I(x_1) \ll n_F^{-1}N_B$ и

$$w_1(x_0, x_1) \approx \frac{1}{1 + N_B^{-1}\pi n_F L(x_1)}. \tag{10}$$

Для ламбертовской поверхности $L_d(x_1) = \pi^{-1}k_d(x_1)I(x_1) = \pi^{-1}n_F^{-1}\langle n\rangle k_d$, так что $\pi N_B^{-1}n_F L_d(x_1) \leq N_B^{-1}\langle n\rangle$ и в нашем предположении малости интегрирующей сферы диффузной частью яркости можно пренебречь, оставив лишь прямую:

$$w_1(x_0, x_1) \approx \frac{1}{1 + N_B^{-1}\pi n_F L_0(x_1)}.$$

Это простое алгебраическое выражение, так как яркость под прямым освещением вычисляется детерминировано. Оно не требует ни предварительного вычисления, ни хранения дополнительных данных.

# 8 Результаты

Вычисления проводились для широко известной тестовой сцены Cornell Box. Источник света — изотропный точечный и расположен чуть ниже центра потолка. Поток его единица. Для удобства восприятия вычисленная яркость и ее дисперсия умножены на $10^7$ (т.е. такие, какие были бы для потока $10^7$ лм). Радиус интегрирующей сферы = 1/1600 размера ящика (Box).

### 8.1 Ламбертовская функция рассеяния

Изображения, приведенные на Рис. 3, были посчитаны за 10 шагов метода. На каждом шаге трассировались 1,000,000 лучей из источника и по 30 лучей на пиксель из камеры.

Источник света расположен на 6.8 см ниже центра потолка. Все поверхности сцены имеют функцию рассеяния

$$f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=\frac{k_d}{\pi}$$

с альбедо $k_d=0.5$.

На Рис. 3 показаны изображения, полученные для виртуальной камеры (т.е. распределение видимой яркости) с использованием разных стратегий. Видно, что смешанная стратегия дает заметно менее шумное распределение. На Рис. 4 показана дисперсия яркости пикселя за одну итерацию (т.е. $\sqrt{V}$, см. (4)) в виде цветовой карты, где красный цвет соответствует большему значению.

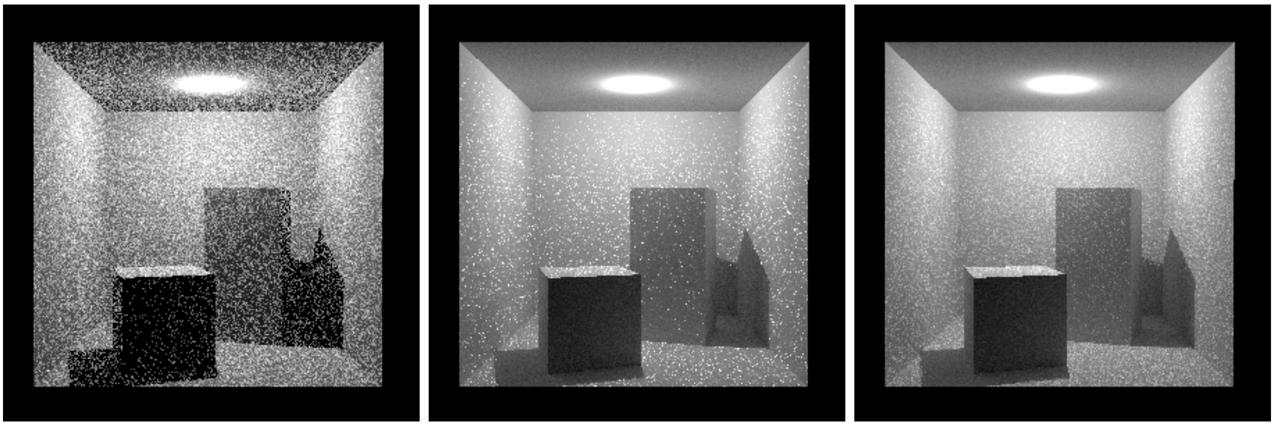

**Рис. 3**. Виртуальная фотография для случая «чистой стратегии» BDD=0 (т.е. случая $w_1=0$), «чистой стратегии» BDD=1 (т.е. случая $w_1=1$) и их смешения с оптимальными весами.

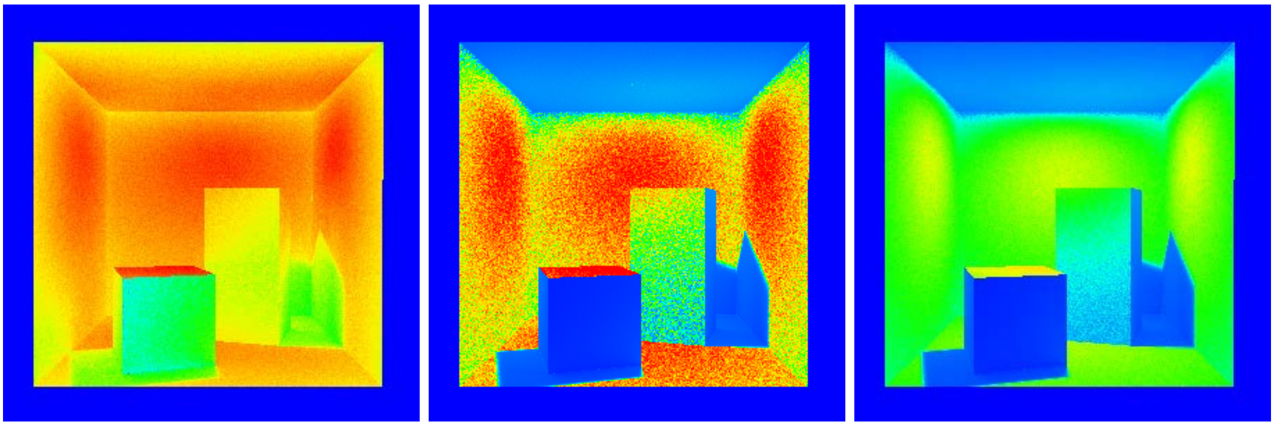

**Рис. 4**. Дисперсия яркости пикселя (величина шума) для случая «чистой стратегии» BDD=0 (т.е. случая $w_1=0$), «чистой стратегии» BDD=1 (т.е. случая $w_1=1$) и их смешения с оптимальными весами.

Веса для смешения стратегий вычислялись по полной формуле (8). Поскольку полные веса зависят от двух точек $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{x}_1$, то показать их на двумерном изображении сложно. Однако зависимость от $\boldsymbol{x}_0$ достаточно слабая и в приближении (10) вовсе отсутствует. Поэтому представление о весах можно получить, зафиксировав какое-то $\boldsymbol{x}_0$; мы взяли центр левой грани низкого кубика. Поскольку $w_1 \approx 1$, то удобнее использовать «более контрастный» $w_0 = 1 - w_1$. На рис. 5 он показан как функция от $\boldsymbol{x}_1$.

Из рис. 5 видно, что оптимальный вес можно приблизительно описать так: $w_1 \approx 1$, кроме небольшой окрестности середины потолка (т.е. проекции источника света на потолок). Там $w_1$ спадает до примерно 0.25. Такое поведение вполне естественно. Если «ничего не мешает», то BDD=1 (т.е. $w_1 = 1$) дает меньший шум, чем BDD=0 (т.е. $w_1 = 0$). Однако для нашей сцены BDD=1 тоже неидеально, т.к. при этом мы берем яркость во *втором* узле луча от камеры $\boldsymbol{x}_1$. В стохастической трассировке эта точка «прыгает» по всей сцене и иногда, хотя и редко, попадает в середину потолка. Там из-за близости к источнику света яркость $L(\boldsymbol{x}_1)$ огромна, и в результате вклад такого луча в накопленное в пикселе значение тоже огромен. Иными словами, яркость пикселя есть сумма случайных величин, изредка принимающих огромные значения. Подобное неизбежно приводит к огромному шуму.

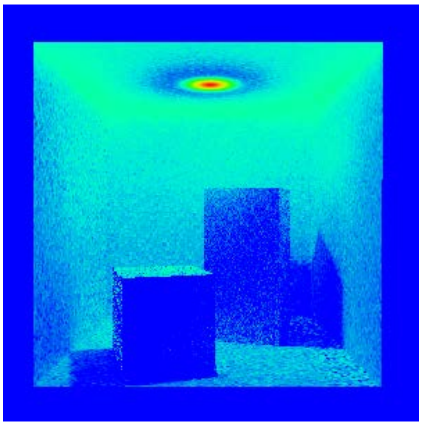

**Рис. 5**. Оптимальный вес $w_0 = 1 - w_1$ как функция от $\boldsymbol{x}_1$ при фиксированном $\boldsymbol{x}_0$ (в центре левой грани малого кубика). Шкала логарифмическая; синий соответствует 0.008, красный 1. Почти все точки, кроме красного пятна на потолке, в центре которого $w_0 \approx 0.75$, соответствуют $w_0 \leq 0.015$.

Очевидный способ улучшить эту ситуацию — никогда не позволять лучу от камеры брать яркость в точке, расположенной рядом с источником. Иными словами, положить

$$w_1(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1) = \begin{cases} 1, & |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_{LS}| \geq R \\ 0, & |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_{LS}| < R \end{cases} \tag{11}$$

где $\boldsymbol{x}_{LS}$ — координата источника света, а $R$ — пороговое расстояние, взятое 20 см.

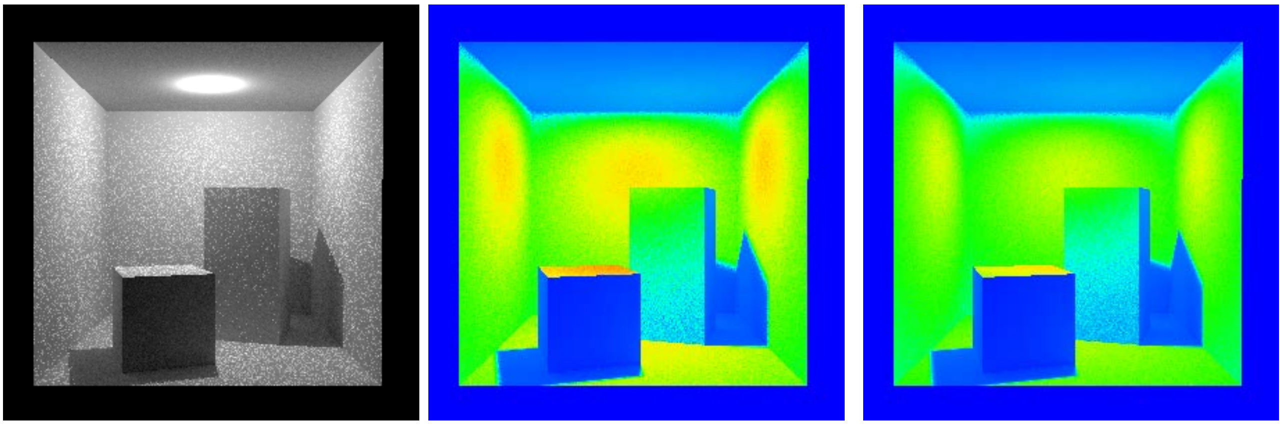

**Рис. 6**. Виртуальная фотография (слева) и дисперсия яркости пикселя, т.е. величина шума, для веса (11) (в центре). Для сравнения справа — дисперсия яркости при оптимальном весе (8).

С таким простейшим весом шум оказывается не сильно выше, чем с вычисленным по формуле (8), как показано на рис. 6. Это логично, т.к. в окрестности минимума шум малочувствителен к изменению веса.

## 8.2 Функция рассеяния поверхности общего вида

Изображения, приведенные на рис. 7, были посчитаны за 100 шагов метода. На каждом шаге трассировалось 250,000 лучей из источника и по 10 лучей на пиксель из камеры.

Источник света расположен на 11.8 см ниже центра потолка.

Все поверхности сцены имеют функцию рассеяния (BDF), состоящую из гауссовой и ламбертовой частей:

$$f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = \frac{k_d}{\pi} + g_r G(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}),$$

$$G(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) \equiv const \times \frac{e^{-\frac{1-\cos\vartheta}{\Delta^2}}}{\left(\epsilon+\sqrt{\cos\sigma}\right)\left(\epsilon+\sqrt{\cos\gamma}\right)},$$

где $k_d$ — интеграл ламбертовской части, $g_r$ — интеграл гауссовой части, $\sigma$ — угол падения, $\gamma$ — угол наблюдения, $\vartheta$ — угол между направлением наблюдения и зеркально отраженным падающим лучом, $\Delta$ — параметр ширины гауссового пика, $\epsilon = 0.1$ — эмпирически выбранный параметр, $const$ — максимальное число, обеспечивающее, чтобы $\int G(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})d^2\boldsymbol{u}$ при всех $\boldsymbol{v}$ не превосходил 1. Заметим, что такая BDF идеально удовлетворяет условию Гельмгольцевской обратимости, что упрощает обратную трассировку.

Параметры BDF на поверхностях сцены таковы: везде, кроме как на полу, потолке и левой стенке «комнаты» $k_d = 0.3,\ g_r = 0.6,\ \Delta = 1.5°$, на левой стенке $k_d = 0.2$, $g_r = 0.8$, $\Delta = 5°$, а на полу и потолке BDF чисто ламбертова с $k_d = 0.9$.

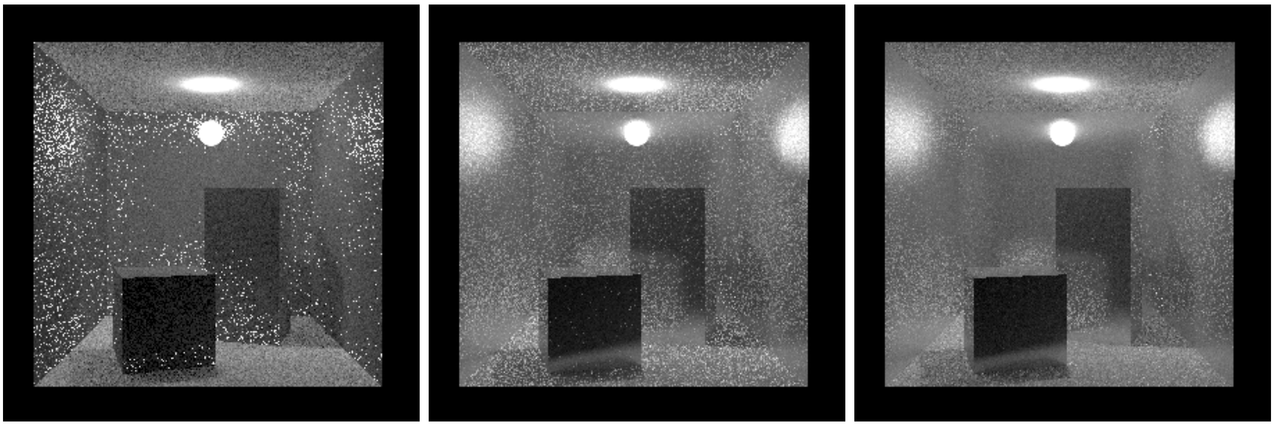

**Рис. 7**. Виртуальная фотография для случая «чистой стратегии» BDD=0 (т.е. случая $w_1 = 0$), «чистой стратегии» BDD=1 (т.е. случая $w_1 = 1$) и их смешения с оптимальными весами.

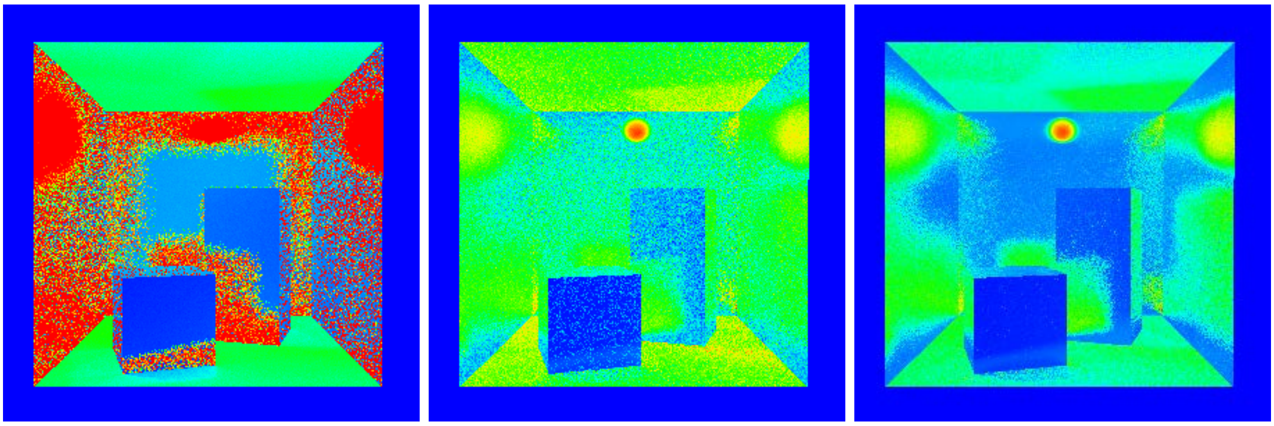

**Рис. 8**. Дисперсия яркости пикселя (величина шума) для случая «чистой стратегии» BDD=0 (т.е. случая $w_1 = 0$), «чистой стратегии» BDD=1 (т.е. случая $w_1 = 1$) и их смешения с оптимальными весами

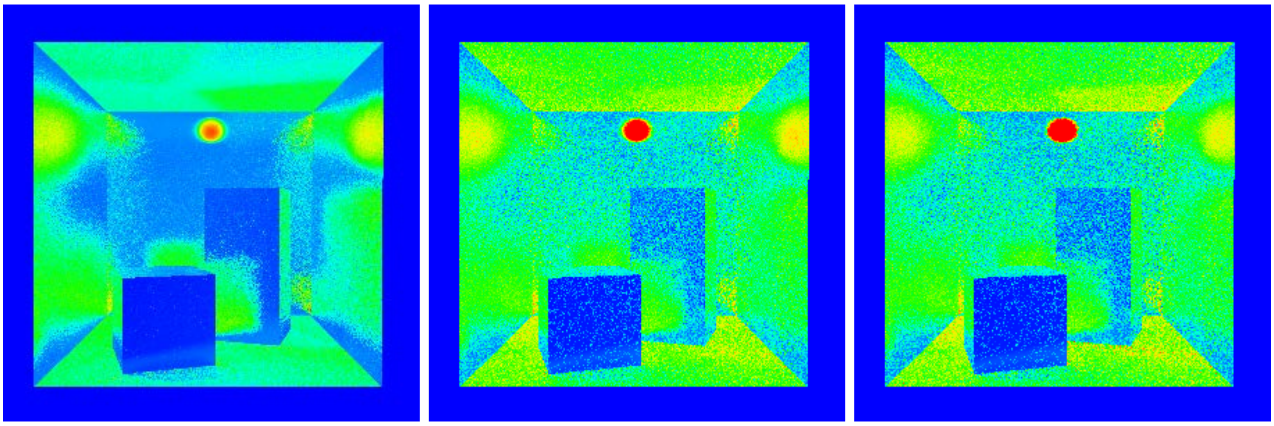

**Рис. 9**. Дисперсия яркости пикселя, т.е. величина шума, слева направо: для оптимального веса (8), алгебраической аппроксимации веса (10) и для простейшей формулы (11).

На рис. 7 показано изображение виртуальной камеры (т.е. распределение видимой яркости). Видно, что смешанная стратегия дает менее шумное распределение. На рис. 8 показана дисперсия яркости пикселя за одну итерацию (т.е. $\sqrt{V}$ из (4)).

Как видно из рис. 6, в случае ламбертовских поверхностей оптимальный вес (8) и его простейшая аппроксимация (11) обеспечивают сравнимый уровень шума. Однако теперь (при наличии гауссовой компоненты функции рассеяния) это уже не так (рис. 9), то есть аппроксимация (11), хотя и улучшает дело по сравнению с чистыми стратегиями BDD=0 и BDD=1, не может конкурировать с оптимальным весом. Это справедливо и для алгебраической аппроксимации веса (10).

# 9 Заключение

Решение полной задачи оптимизации весов множественной выборки по значимости в двунаправленной стохастической трассировке лучей с фотонными картами (BDPM) невероятно громоздко и приводит к системе интегральных уравнений, хоть и допускающих решение в замкнутой форме (т.е. выражение искомой функции через алгебраические комбинации от интегралов известных функций), но трудных в практическом применении. Поэтому имеет смысл решение ограниченной задачи оптимизации, когда смешиваются лишь две стратегии, а веса зависят лишь от первых узлов полной трассы, соединяющей камеру с источником света. В [6] нами было получено ее решение для смешения стратегий BDD=$n$ и BDD=$n$+1 при $n$>0, данная работа применяет развитый метод к случаю $n$=0. Полученное решение имеет почти ту же самую функциональную форму, что и в [6], и алгебраически выражает оптимальные веса через ряд определенных интегралов.

В данной работе было также показано, как на практике вычислять эти интегралы с помощью метода Монте-Карло, и описан используемый способ хранения этих данных в сцене. В результате применения данного численного метода удалось получить заметное снижение шума, что и было проиллюстрировано для тестовых сцен.

## 10 Библиографический список


[1] Pharr M., Humphreys G. Physically Based Rendering, Second Edition: From Theory To Implementation, 2nd ed. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 2010.

[2] Veach E., PhD dissertation: Robust Monte-Carlo methods for light transport simulation, 1997. [Online]. Available: http://graphics.stanford.edu/papers/veach_thesis/thesis.pdf

[3] Sbert M., Havran V., Szirmay-Kalos L. Multiple importance sampling revisited: breaking the bounds // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2018, article 15, pp. 1–15.

[4] Jensen H.W. Global illumination using photon maps // In Proceedings of the Eurographics Workshop on Rendering Techniques ’96. London, UK, 1996, pp. 21–30. [Online]. Available: http://dl.acm.org/citation.cfm?id=275458.275461

[5] Dodik N., Bachelor Thesis: Implementing probabilistic connections for bidirectional path tracing in the Mitsuba Renderer, 2019, TU Wien, Institute of Visual Computing & Human-Centered Technology [Online]. Available: https://www.cg.tuwien.ac.at/research/publications/2017/dodik-2017-pcbpt/

[6] Ershov S.V., Voloboy A.G. Calculation of MIS weights for bidirectional path tracing with photon maps in presence of direct illumination // Mathematica Montisnigri, 2020, vol. 48, pp. 86–102.

[7] Ershov S.V., Zhdanov D.D., Voloboy A.G. Estimation of noise in calculation of scattering medium luminance by MCRT // Mathematica Montisnigri, 2019, vol. 45, pp. 60–73.

[8] Veach E., Guibas L.J. Metropolis light transport // In Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, ser. SIGGRAPH’97. 1997, pp. 65–76. [Online]. Available: https://doi.org/10.1145/258734.258775

[9] Vorba J. Bidirectional photon mapping // In Proceedings of CESCG 2011: The 15th Central European Seminar on Computer Graphics, 2011, pp. 25-32.

[10] Hachisuka T., Pantaleoni J., Jensen H.W. A path space extension for robust light transport simulation // ACM Trans. Graph., 2012, vol. 31, 6, pp. 191:1–191:10.

[11] Georgiev I. Implementing vertex connection and merging // Tech. rep., Saarland University, 2012.

[12] Georgiev I., Krivánek J., Davidovic T., Slusallek P. Light transport simulation with vertex connection and merging // ACM Trans. Graph., 2012, vol. 31, no. 6, pp. 192:1–192:10. [Online]. Available: http://doi.acm.org/10.1145/2366145.2366211

[13] Popov S., Ramamoorthi R., Durand F., Drettakis G. Probabilistic Connections for Bidirectional Path Tracing // Computer Graphics Forum, 2015, vol. 34, no. 4, pp. 75-86.

[14] van Antwerpen D. Recursive MIS computation for streaming BDPT on the GPU // Tech. rep., Delft Univ. of Technology, 2012.

[15] Liu Q., Zhang Y. Light transport simulation via generalized multiple importance sampling // ArXiv, 2018, vol. abs/1803.04305.

[16] Frolov V., Kharlamov A. , Galaktionov V., Vostryakov K. Multiple reference octrees for a GPU photon mapping and irradiance caching // Programming and Computer Software, 2014, vol. 40, no. 4, pp. 208–214.

# Оглавление