



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 110 за 2020 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

[П.С. Аронов](#), [М.П. Галанин](#),  
[А.С. Родин](#)

Математическое  
моделирование контактного  
взаимодействия элементов  
твэла с учетом ползучести  
на основе mortar-метода

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Аронов П.С., Галанин М.П., Родин А.С. Математическое моделирование контактного взаимодействия элементов твэла с учетом ползучести на основе mortar-метода // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 110. 24 с.  
<https://doi.org/10.20948/prepr-2020-110>  
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-110>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша  
Российской академии наук

П. С. Аронов, М. П. Галанин, А. С. Родин

Математическое моделирование контактного  
взаимодействия элементов твэла с учетом ползучести  
на основе mortar-метода

Москва — 2020

**Аронов П. С., Галанин М. П., Родин А. С.**

Математическое моделирование контактного взаимодействия элементов ТВЭЛ с учетом ползучести на основе mortar-метода

В работе рассмотрен алгоритм решения осесимметричных контактных задач теории термоупругости с учетом процессов ползучести. Для учета контактного взаимодействия тел использован mortar-метод, для решения полученной системы линейных уравнений применен модифицированный метод верхней релаксации. Для тестовой задачи выполнено сравнение полученного численного решения с аналитическим. Представлены результаты применения предложенного алгоритма к демонстрационной задаче, моделирующей термомеханические процессы в участке тепловыделяющего элемента, включающем в себя от 2 до 10 топливных таблеток.

**Ключевые слова:** контактная задача теории упругости, метод конечных элементов, mortar-метод, модифицированный метод верхней релаксации, ползучесть, тепловыделяющий элемент.

**Aronov P. S., Galanin M. P., Rodin A. S.**

Mathematical modeling of the contact interaction of the fuel element with creep using the mortar-method

An algorithm for solving axisymmetric contact problems of the theory of thermoelasticity with creep processes is considered. To take into account the contact interaction of bodies, the mortar method was used, a modified method of over relaxation was used to solve the obtained system of linear equations. For the test task, the resulting numerical solution is compared to the analytical solution. The results of application of the proposed algorithm for the demonstration problem simulating thermomechanical processes in the fuel element section including from 2 to 10 fuel pellets are presented..

**Key words:** contact problem of the elasticity theory, finite element method, mortar-method, modified method of over relaxation, creep, fuel element.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00252).

## 1. Введение

Учет контактного взаимодействия различных функциональных узлов оборудования позволяет получить более точную оценку напряженно-деформированного состояния конструкции. Для большинства практически важных контактных задач невозможно получить аналитическое решение, а также зачастую отсутствует возможность использовать согласованные сетки. Поэтому актуальной является проблема создания новых эффективных алгоритмов и на их основе современного прикладного программного обеспечения для решения контактных задач вычислительной термомеханики. Численное решение подобных задач осуществляется с помощью различных алгоритмов, среди которых можно выделить метод декомпозиции областей [1, 2], метод штрафа [3], различные варианты метода множителей Лагранжа [4, 5], в частности mortar-метод [6, 7], основанный на построении достаточно подробной вспомогательной сетки для определения множителей Лагранжа в случае, когда сетки являются несогласованными.

В работе приведена достаточно общая постановка квазистационарной мультиконтактной задачи и представлен алгоритм численного решения подобных задач с учетом изменения во времени деформаций и напряжений за счет эффекта ползучести. Для выполнения граничных условий на контактных поверхностях тел использован mortar-метод. Рассмотрено применение предложенного алгоритма к задаче, моделирующей некоторые процессы в тепловыделяющем элементе (ТВЭЛ), который работает в режиме постоянной мощности тепловыделения. За счет существенного сдвига оболочки ТВЭЛ относительно топливных таблеток в данной задаче всегда реализуется случай несогласованных сеток в контактирующих телах. Моделируемый интервал работы ТВЭЛ составляет несколько лет, в течение которых происходит рост деформации ползучести и снижение уровня напряжений в конструкции.

## 2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  группу осесимметричных термоупругих контактирующих тел (рис. 1), занимающих область  $G = \bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$  ( $\alpha$  — индекс, обозначающий номер тела), ограниченную кусочно-гладкой границей  $\partial G$  ( $\partial G_{\alpha}$  — граница тела  $\alpha$ ).

Рассмотрим следующую задачу: внутри цилиндрической оболочки  $G_N$  расположен столб из нескольких поставленных друг на друга одинаковых цилиндрических таблеток  $G_1, \dots, G_{N-1}$ , имеющих внутреннее отверстие и фаски на обоих торцах. Данная задача моделирует термомеханические процессы, проходящие в ТВЭЛ. Введем следующие обозначения для поверхностей тел:  $S_1$  — участок поверхности, на котором поставлено условие 1-го рода для нормального перемещения,  $S_2$  — внутренняя поверхность таблеток,  $S_3$  — верхний торец верхней таблетки,  $S_4$  — внешняя поверхность таблеток,  $S_5$  — внутренняя



где  $c(T)$  — удельная массовая теплоемкость среды,  $\rho$  — плотность среды,  $t$  — время,  $k_{ij}$  — компоненты тензора теплопроводности,  $T_{,j} = \frac{\partial T}{\partial x_j}$ ,  $q(\mathbf{x}, t)$  — мощность внутренних источников тела,  $T_0(\mathbf{x})$  — начальная температура,  $T(\mathbf{x}, t)$  — температура в момент времени  $t$ ,  $n_i$  — компоненты единичного вектора внешней нормали к границе  $\partial G_p$ ,  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи на поверхности  $S_4$ ,  $T_f(\mathbf{x})$  — температура в сходственной точке, лежащей на внутренней поверхности оболочки.

В проведенных расчетах полагалось, что  $T_0 = 300$  К, температура всей оболочки является постоянной ( $T_f = 623$  К), объемная мощность тепловыделения отлична от нуля только в таблетках и является постоянной по пространству  $q(\mathbf{x}, t) = q_0(t)$ . Функция  $q_0(t)$  меняется по времени следующим образом: за 1 час линейно возрастает от 0 до номинального значения  $q_{nom}$  и далее остается неизменной.

Математическая формулировка квазистационарной контактной задачи теории упругости для случая, когда объемные силы отсутствуют, включает в себя следующие соотношения [8] для каждого тела  $\alpha$ , участвующего в контакте,  $i, j = 1, 3$ :

- уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \quad (5)$$

- кинематические граничные условия

$$u_z(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_1; \quad (6)$$

- силовые граничные условия

$$\sigma_{ji}(\mathbf{x}, t)n_j = g_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial G \setminus S_1; \quad (7)$$

- соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \quad (8)$$

- определяющие уравнения (закон Гука)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) - \varepsilon_{kl}^0(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \quad (9)$$

где  $x_i$  — координаты вектора  $\mathbf{x} \in G_\alpha$ ;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{kl}$  — компоненты тензора деформации;  $\varepsilon_{kl}^0$  — компоненты тензора неупругой деформации;  $u_i$  — компоненты вектора перемещения;  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих постоянных;  $g_i$  — компоненты вектора поверхностных сил;  $n_j$  — компоненты вектора внешней нормали к соответствующей поверхности  $S_j$ . В

проведенных расчетах полагалось, что нижние торцы оболочки и нижней таблетки закреплены по вертикали,  $g_i$  отличны от нуля только на верхнем торце верхней таблетки  $S_3$  (постоянное давление 50 МПа) и на внешней поверхности оболочки  $S_6$  (постоянное давление 10 МПа). В модели учитывалось, что каждая таблетка (кроме  $G_1$  и  $G_{N-1}$ ) вступает в контакт с двумя соседними (сверху и снизу) таблетками и оболочкой (считается, что начального зазора между ними нет).

Для моделирования процесса ползучести будем использовать теорию течения, основные положения которой включают в себя [9]:

- аддитивное разложение производной тензора полной деформации по времени

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^c + \dot{\varepsilon}_{ij}^T; \quad (10)$$

- несжимаемость деформации ползучести

$$\dot{\varepsilon}_{ii}^c = 0; \quad (11)$$

- соотношение для производной тензора деформации ползучести по времени

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \mu \sigma'_{ij}; \quad (12)$$

где  $\mu = \frac{3\varepsilon_i^c}{2\sigma_i}$ ,  $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}$ ,  $\varepsilon_i^c = f(T, \sigma_i)$ ,  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ .

Рассмотрим пару потенциально контактных поверхностей, относящихся к телам с номерами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Для упрощения записи будем использовать индекс «1» вместо « $\alpha_1$ » и «2» вместо « $\alpha_2$ ». Тогда дополнительные условия на поверхности  $S_k^1$  для случая контакта без трения выглядят следующим образом (для поверхности  $S_k^2$  условия записываются аналогично):

$$\sigma_\tau^1(\mathbf{x}_1) = 0, \quad \mathbf{x}_1 \in S_k^1; \quad (13)$$

$$\sigma_n^1(\mathbf{x}_1) = \sigma_\tau^2(\mathbf{x}_2) \leq 0, \quad \mathbf{x}_1 \in S_k^1, \quad \mathbf{x}_2 \in S_k^2; \quad (14)$$

$$u_n^1(\mathbf{x}_1) + u_n^2(\mathbf{x}_2) \leq \delta_{0n}(\mathbf{x}_1), \quad \mathbf{x}_1 \in S_k^1, \quad \mathbf{x}_2 \in S_k^2; \quad (15)$$

$$\sigma_n^1(\mathbf{x}_1) (u_n^1(\mathbf{x}_1) + u_n^2(\mathbf{x}_2) - \delta_{0n}(\mathbf{x}_1)) = 0, \quad \mathbf{x}_1 \in S_k^1, \quad \mathbf{x}_2 \in S_k^2. \quad (16)$$

Здесь  $\mathbf{x}_1$  — некоторая точка, лежащая на поверхности  $S_k^1$ , а  $\mathbf{x}_2$  — сходственная точка, находящаяся напротив нее на поверхности  $S_k^2$ ;  $\delta_{0n}(\mathbf{x}_1) \geq 0$  — функция, задающая начальный зазор (участки поверхности в начальный момент могли не соприкасаться друг с другом),  $u_n^i = \mathbf{u}^i \cdot \mathbf{n}^i$ ,  $\sigma_\tau^i = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^i) \cdot \mathbf{n}^i \cdot \boldsymbol{\tau}^i$ ,  $\sigma_n^i = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^i) \cdot \mathbf{n}^i \cdot \mathbf{n}^i$ .

В качестве ( $S_{1k}, S_{2k}$ ) выступают  $N-2$  контактные пары таблетка/таблетка и  $2N-3$  контактные пары таблетка/оболочка.

Условия (13)–(16) гарантируют, что на некотором участке  $S_k^{12}$  поверхности  $S_k^1$  и  $S_k^2$  будут совпадать (заранее конфигурация и положение этого участка неизвестны), при этом на контактирующие тела будут действовать сжимающие контактные силы. Условия (13)–(16) учитывают ситуации, когда в начальной конфигурации какие-то участки не соприкасались друг с другом, но в итоге они вступают в контакт, или наоборот: в начальной конфигурации участки соприкасались друг с другом, но в итоге расходятся.

Решение задачи (5)–(16) эквивалентно [10] минимизации функционала

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_G \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dG - \int_{S'} \mathbf{u}^T \mathbf{g} dS + \int_{S_k} \lambda_n (u_{2n}(\mathbf{x}) - u_{1n}(\mathbf{x}) + \delta_{0n}) dS \quad (17)$$

при выполнении кинематических граничных условий (6), где  $\lambda_n$  — множители Лагранжа, являющиеся проекциями векторов напряжений на направления внешних нормалей,  $u_n = u_r n_r + u_z n_z$ .

### 3. Применение mortar-метода для решения контактных задач

Для пространственной дискретизации функционала (17) использован метод конечных элементов, в расчетах применены элементы 2 порядка на четырехугольной сетке. Дискретизация интеграла по контактным поверхностям выполнена с помощью mortar-метода.

Mortar-метод решения контактных задач теории упругости основан на независимой конечно-элементной дискретизации непересекающихся подобластей. Сетки на этих подобластях являются, вообще говоря, несогласованными на линии контакта, а непрерывность решения достигается за счет использования множителей Лагранжа [12].

Для упрощения записи ограничимся случаем двух тел с одной парой контактных поверхностей. Пусть тело  $G_1$  является активным (master), а тело  $G_2$  — пассивным (slave). Линию контакта со стороны тела  $G_1$  обозначим через  $\Gamma_m$ , а со стороны тела  $G_2$  —  $\Gamma_s$ . Рассмотрим одномерные конечные элементы второго порядка на линиях контакта  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_s$ . Из узлов этих элементов на линии контакта  $\Gamma_m$  проведем нормали на линию контакта  $\Gamma_s$ . По образованным при пересечении нормалей и  $\Gamma_s$  конечным элементам будем вести дальнейшее интегрирование, считая их также одномерными квадратичными элементами с аналогичными функциями формы. Деление тел на master/slave во многом является условным и неочевидным, но в конечном счете этот выбор определяет дискретизацию множителей Лагранжа.

Рассмотрим следующий интеграл:



$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_s) d\gamma = \sum_{i=1}^{k_m} \int_{\Gamma_{m_i}} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{u}_m d\gamma - \sum_{i=1}^{k_s} \int_{\Gamma_{s_i}} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{u}_s d\gamma, \quad (18)$$

где  $\Gamma = \Gamma_m \cup \Gamma_s$ ,  $k_m$  и  $k_s$  — общее число конечных элементов, на которые разбиты линии контакта  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_s$  соответственно, векторы  $\mathbf{u}_m$  и  $\mathbf{u}_s$  состоят из нормальных компонент векторов перемещений узлов конечного элемента на линиях контакта  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_s$ , а вектор  $\boldsymbol{\lambda}$  состоит из множителей Лагранжа, соответствующих проекциям векторов напряжений на направления внешних нормалей на линии контакта  $\Gamma_s$ . Внутри конечного элемента с номером  $(e)$  значения  $\lambda_n$ ,  $u_s$  и  $u_m$  выражаются следующим образом:

$$\lambda_n = [L_\lambda]^{(e)} \{\lambda\}^{(e)}, \quad (19)$$

$$u_s = [N_s]^{(e)} \{u_s\}^{(e)}, \quad (20)$$

$$u_m = [N_m]^{(e)} \{u_m\}^{(e)}, \quad (21)$$

где  $[L_\lambda]^{(e)}$ ,  $[N_s]^{(e)}$ ,  $[N_m]^{(e)}$  — матрицы функций формы одномерного квадратичного элемента с номером  $(e)$ .

Для численного решения задачи, моделирующей процесс ползучести, будем рассматривать следующий алгоритм, основанный на применении явного метода Эйлера.

- 1) Для момента времени  $t_{k+1}$  в каждом элементе с номером  $(e)$  задается вектор нагрузок  $\mathbf{R}^{(e)} = \mathbf{R}_S^{(e)} + \mathbf{R}_\varepsilon^{(e)}$ , где  $\mathbf{R}_S^{(e)}$  — вектор поверхностной нагрузки,  $\mathbf{R}_\varepsilon^{(e)} = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \boldsymbol{\varepsilon}^{0(e)}(t_{k+1}) dV$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{0(e)}(t_{k+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}^{T(e)}(t_{k+1}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{c(e)}(t_k)$ . В начальный момент времени считается, что  $\boldsymbol{\varepsilon}^{c(e)}(t_0) = 0$ .
- 2) После суммирования локальных векторов и матриц в глобальные осуществляется решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} A & M \\ M^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

- 3) Для каждого конечного элемента с индексом  $(e)$  по значениям перемещения в узлах вычисляется вектор деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(t_{k+1})$  и вектор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}(t_{k+1}) = D (\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(t_{k+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{0(e)}(t_{k+1}))$ .

- 4) Из принятых определяющих соотношений находятся новые значения деформации ползучести  $\boldsymbol{\varepsilon}^{c(e)}(t_{k+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}^{c(e)}(t_k) + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{c(e)}$ , где  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{c(e)} = \Delta t \mu \boldsymbol{\sigma}'^{(e)}$ ,

$$\mu = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i^c(t_{k+1})}{\sigma_i^{(e)}(t_{k+1})}.$$

5) Если заданный интервал времени пройден ( $t_{k+1} > t_{end}$ ), то вычисления заканчиваются, в противном случае осуществляется переход к пункту 1.

Рассмотрим более подробно систему уравнений, указанную в пункте 2). Она возникает при минимизации функционала (17) совместно с интегралом (18) [13]. Ее решение будем осуществлять относительно неизвестных приращений векторов  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(t_{k+1}) - \mathbf{u}(t_k)$  и  $\Delta \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(t_{k+1}) - \boldsymbol{\lambda}(t_k)$ .

$$\begin{pmatrix} A & M \\ M^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} - A\mathbf{u}(t_k) - M\boldsymbol{\lambda}(t_k) \\ -M^T\mathbf{u}(t_k) \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

где

$$A = \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{NN}), \quad (24)$$

$$[A_{ii}] = \sum_{e=1}^{k_i} [a_G]^{(e)T} \left( \int_{G_i} [B]^{(e)T} [D_i]^{(e)} [B]^{(e)} dG \right) [a_G]^{(e)}, \quad (25)$$

$$M = (M_1 \ \dots \ M_N)^T, \quad (26)$$

$$M_i = (M_{i1} \ \dots \ M_{iq})^T, \quad (27)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1 \ \dots \ \mathbf{R}_N), \quad (28)$$

$$\{R_{S_i}\} = \sum_{e=1}^{k_i} [a_S]^{(e)T} \left( \int_{S_i} [N]^{(e)T} [g_i]^{(e)} dS \right), \quad (29)$$

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_N)^T, \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1 \ \boldsymbol{\lambda}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\lambda}_{q-1} \ \boldsymbol{\lambda}_q)^T, \quad (31)$$

где  $N$  — количество тел,  $q$  — количество контактных пар,  $[a_G]^{(e)}$ ,  $[a_S]^{(e)}$  — матрицы геометрических связей конечного элемента с номером  $(e)$ ,  $[D_i]^{(e)}$  — локальные матрицы упругости конечного элемента,  $\{g_i\}$  — локальные векторы поверхностных сил,  $k_i$  — количества конечных элементов, на которые разбито тело  $G_i$ , матрица  $M_i$  имеет размерность  $n_i \times m$ .

Рассмотрим матрицу  $M_i$ , соответствующую телу с номером  $i$ . Тогда матрица  $M_{ij}$ , являющаяся блоком матрицы  $M_i$  и отвечающая за  $j$ -ю контактную пару поверхностей, является нулевой ( $M_{ij} = 0$ ), если  $i$ -е тело не входит в  $j$ -ю контактную поверхность, а если входит, то  $M_{ij} \neq 0$ .

Рассмотрим более подробно структуру матрицы  $M_{ij}$ : если  $k$ -й узел (в локальной нумерации) в  $i$ -м теле не входит в соответствующую контактную поверхность, то  $k$ -я строка в  $M_{ij}$  состоит из нулей; если  $l$ -й узел (в локальной нумерации) не принадлежит телу с номером  $i$ , а принадлежит телу с номером  $j$ , то  $l$ -й столбец  $M_{ij}$  состоит из нулей. В остальных случаях на позиции с индексом  $kl$  находятся следующие элементы:

$$[M_{ij}]_{kl} = \left( \int_{\Gamma_{se}} N_k L_l d\gamma \right). \quad (32)$$

Система линейных алгебраических уравнений (23) решается с помощью модифицированного метода симметричной последовательной верхней релаксации [14]. Алгоритм и основные особенности использования метода описаны в [15, 16].

#### 4. Результаты численного моделирования

В качестве тестовой рассмотрим задачу о контакте двух толстостенных труб, нагруженных внутренним давлением. При этом принимается следующий степенной закон для скорости ползучести материала:

$$\dot{\varepsilon}_i = \Omega \sigma_i^n, \quad (33)$$

где  $\Omega$  — постоянный коэффициент,  $n$  — показатель степени.

Аналитическое решение задачи для случая одной толстостенной трубы в состоянии установившейся ползучести имеет вид [9] (считается, что упругие деформации равны нулю и материал конструкции можно рассматривать как несжимаемый):

$$\sigma_r = \frac{pr_1^{\frac{2}{n}}}{b^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{2}{n}}} \left( 1 - \frac{b^{\frac{2}{n}}}{r^{\frac{2}{n}}} \right), \quad (34)$$

$$\sigma_z = \frac{pa^{\frac{2}{n}}}{b^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{2}{n}}} \left( 1 - \frac{n-1}{n} \frac{b^{\frac{2}{n}}}{r^{\frac{2}{n}}} \right), \quad (35)$$

$$\sigma_\theta = \frac{pa^{\frac{2}{n}}}{b^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{2}{n}}} \left( 1 + \frac{2-n}{n} \frac{b^{\frac{2}{n}}}{r^{\frac{2}{n}}} \right), \quad (36)$$

$$(37)$$

где  $p$  — внутреннее давление,  $a$  — внутренний радиус трубы,  $b$  — внешний радиус трубы.

Проведем тестовый расчет, в котором сравним известные аналитические решения с численными (рис. 2). В расчете моделируется переход состояния тела от упругого случая к случаю установившейся ползучести: упругие деформации не равны нулю, но они остаются на одном уровне, а деформации ползучести растут, поэтому решение будет асимптотически стремиться к аналитическому. Примем  $p = 10$  МПа,  $a = 0,001$  м,  $b = 0,005$  м,  $\Omega = 3 \cdot 10^{-14}$ ,

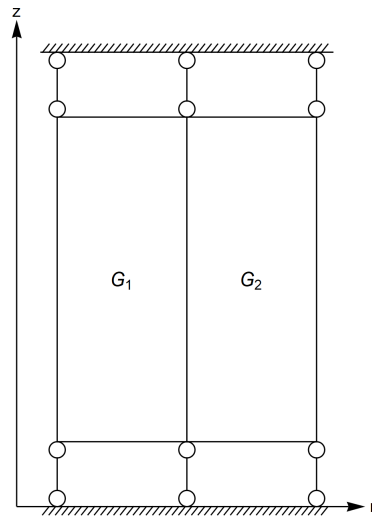


Рис. 2. Схема контактного взаимодействия двух толстостенных труб

$n = 3$ ,  $t = 3,6 \cdot 10^8$  с ( $t \approx 100000$  ч), шаг по времени  $\tau = 400000$  с. При приложенных граничных условиях решения задач для одной и двух толстостенных труб идентичны. Будем использовать несогласованные сетки: тело  $G_1$  разбито на 40 элементов в направлении  $z$ , а тело  $G_2$  — на 50 элементов. На рис. 3–4 показаны графики численных и аналитических радиальных, осевых и окружных напряжений для финального момента времени  $t = 3,6 \cdot 10^8$  с, а также для случая только упругой деформации. Графики численных и аналитических решений визуально неотличимы, более подробный анализ ошибок приведен ниже.

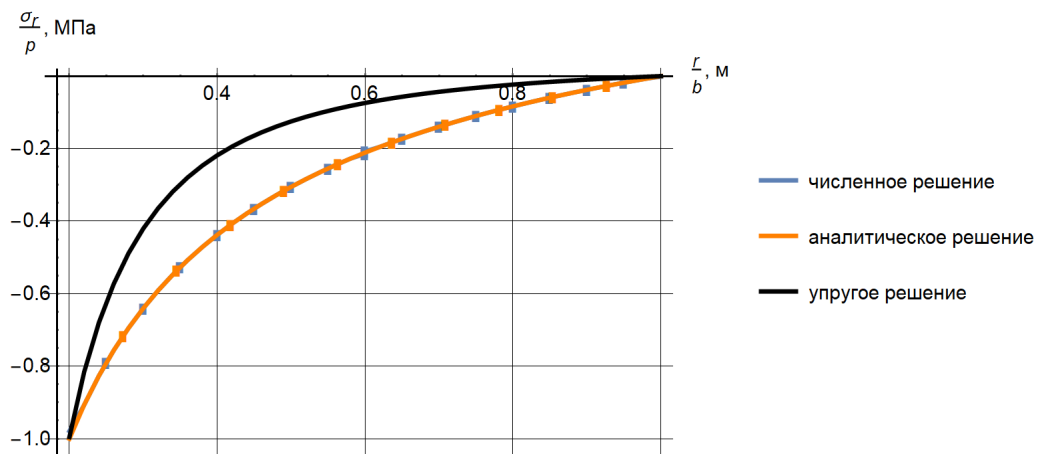
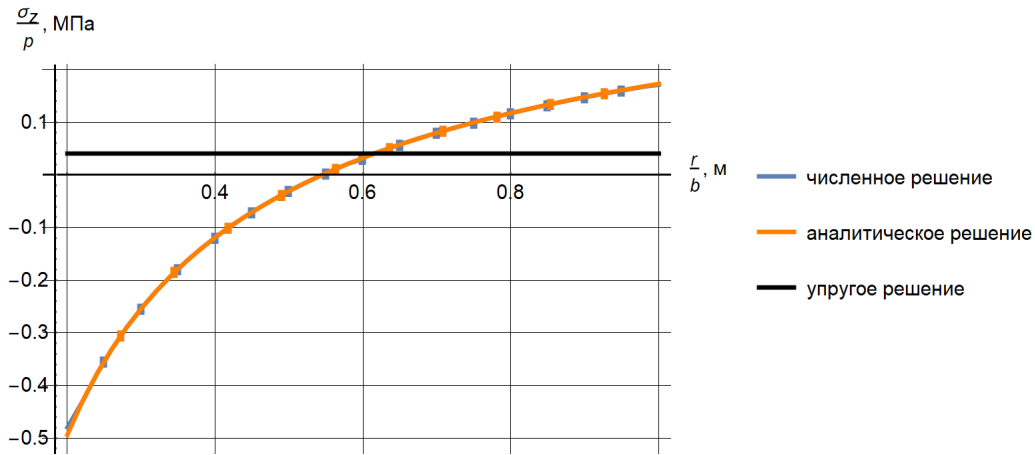
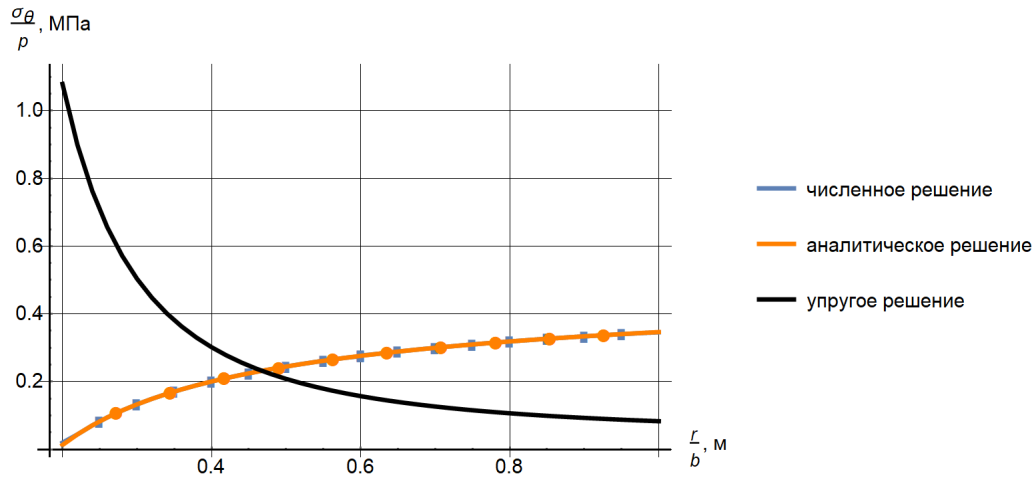


Рис. 3. Распределения радиального напряжения  $\sigma_r(r)$

На рис. 6 приведены два графика радиальных напряжений на контактных границах ( $r = 0,003$  м). Из рисунка видно, что несмотря на несогласованные сетки осцилляции отсутствуют. Графики практически совпадают, что говорит о корректности решенной контактной задачи.

Рис. 4. Распределения осевого напряжения  $\sigma_z(r)$ Рис. 5. Распределения окружного напряжения  $\sigma_\theta(r)$ 

На рис. 7 показаны графики изменения относительной точности напряжений  $\sigma_r(r)$ ,  $\sigma_z(r)$ ,  $\sigma_\theta(r)$  во времени при решении тестовой задачи. Относительная точность при этом вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon = \max_i \left\| \frac{\sigma(r_i) - \sigma^0(r_i)}{\sigma^0(r_i)} \right\|_2, \quad (38)$$

где  $\sigma^0(r_i)$  — значения аналитического решения в точке  $r_i$ .

Далее рассмотрим зависимости скорости ползучести материалов топливных таблеток и оболочек, являющихся элементами тепловыделяющего элемента. Таблетки выполнены из диоксида урана, оболочка из сплава циркония. Модули упругости, коэффициенты теплового расширения, удельные теплоемкости и коэффициенты теплопроводности обоих материалов зависят от температуры, а коэффициенты Пуассона и плотности являются постоянными. Скорость деформации ползучести этих материалов зависит не только от

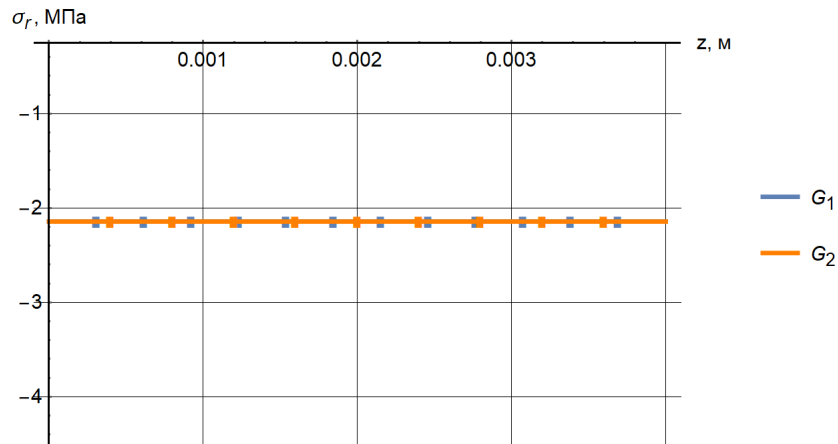


Рис. 6. Распределения радиального напряжения  $\sigma_r(z)$  при  $r = 0,003$  м

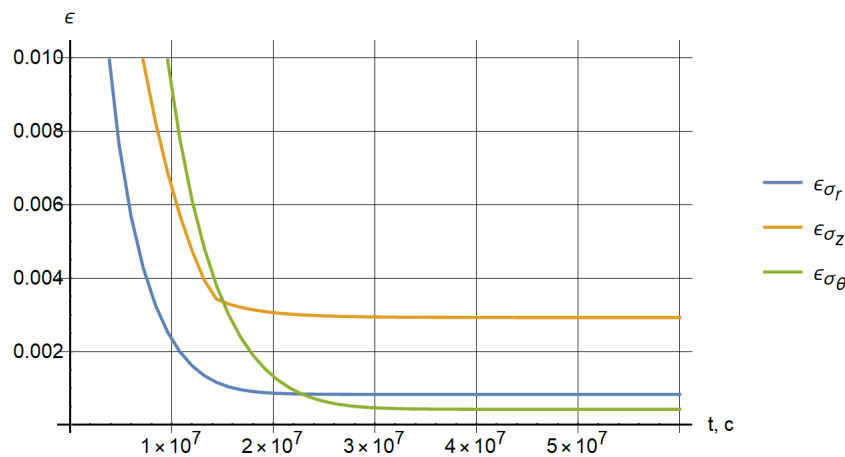


Рис. 7. Зависимости относительной точности от времени

напряжений и температуры, но и большого количества других параметров, таких как: размер гранулы топлива, энергия активации, кислородный коэффициент и прочих. Приведем подробнее эти модели, изложенные в [17].

При переходном напряжении  $\sigma_t$  вид деформации ползучести меняется от линейной зависимости к степенной зависимости от напряжения. Величина переходного напряжения определяется соотношением [17]:

$$\sigma_t = \frac{1,6547 \cdot 10^7}{G^{0,5714}}, \quad (39)$$

где  $G$  — размер гранулы топлива.

Деформация ползучести зависит от энергии активации типа Аррениуса. Было определено, что эта энергия зависит от кислородного коэффициента. Рост кислородного коэффициента вызывает увеличение деформации ползучести. Для режима ниже переходного напряжения (39) энергия активации топлива определяется соотношением:

$$Q_1 = 17884,8 \left( e^{-\frac{20}{\ln(x-2)}-8} + 1 \right) + 72124,23, \quad (40)$$

где  $Q_1$  — энергия активации (кал/моль),  $x$  — кислородный коэффициент.

Для режима выше переходного напряжения ( $\sigma \geq \sigma_t$ ) энергия активации запишется в виде:

$$Q_2 = 19872 \left( e^{-\frac{20}{\ln(x-2)}-8} + 1 \right) + 111543,5, \quad (41)$$

где  $Q_2$  — энергия активации (кал/моль).

Скорость стационарной деформации ползучести для топливных таблеток определяется выражением:

$$\dot{\epsilon}_i^c = \frac{(A_1 + A_2F)\sigma e^{-\frac{Q_1}{RT}}}{(A_3 + D)G^2} + \frac{(A_4 + A_7F)\sigma^{4,5} e^{-\frac{Q_2}{RT}}}{A_5 + D} + A_6\sigma F e^{-\frac{Q_3}{RT}}, \quad (42)$$

где  $\dot{\epsilon}_i^c$  — скорость стационарной деформации ползучести (1/с),  $F$  — плотность делений ((делений/м<sup>3</sup>)/с),  $\sigma$  — напряжение (Па),  $R$  — универсальная газовая постоянная (Кал/(моль К)),  $T$  — температура (К),  $D$  — плотность (процент от теоретической плотности),  $Q_3$  — энергия активации (Кал/моль),  $A_1, \dots, A_8$  — постоянные коэффициенты.

Когда топливо подвергается воздействию напряжения в первый раз (обычно в течение начального облучения) или в случае, когда развивается более высокое напряжение, чем на любом другом временном шаге, скорость деформации ползучести зависит от времени и рассчитывается с помощью уравнения:

$$\dot{\epsilon}_{it}^c = \dot{\epsilon}_i^c (2,5 e^{-1,46 \cdot 10^{-6}t+1}) \quad (43)$$

где  $\dot{\epsilon}_{it}^c$  — общая скорость деформации ползучести (1/с),  $\dot{\epsilon}_i^c$  — скорость стационарной деформации ползучести, определяемая уравнением (42),  $t$  — время с момента, когда было приложено наивысшее напряжение.

Для оболочки скорость стационарной деформации ползучести имеет вид:

$$\dot{\epsilon}_i^c = \frac{(B_1 + B_2F)\sigma}{(A_3 + D)G^2} e^{-\frac{Q_4}{RT}+B_3(1-D)+B_4C} + \frac{(B_5 + B_6F)\sigma}{(A_3 + D)G^2} e^{-\frac{Q_4}{RT}+B_3(1-D)+B_4C}, \quad (44)$$

где  $B_1, \dots, B_7$  — постоянные коэффициенты,  $Q_4, Q_5$  — энергия активации (Кал/моль),  $C$  — концентрация смеси оксидов (весовой процент).

Когда приложенное напряжение  $\sigma$  меньше переходного  $\sigma_t$ , в качестве приложенного напряжения в первом слагаемом уравнения (42) или (44) используется значение приложенного напряжения. Для напряжения, большего чем  $\sigma_t$ , в первом слагаемом уравнений используется значение переходного напряжения, а во втором — значение внешнего напряжения.

Проведем серию расчетов для случаев 2, 5 и 10 топливных таблеток. На наружной поверхности оболочки  $S_6$  задано постоянное давление  $p_1=10$  МПа, а на верхней поверхности верхней оболочки  $S_3$  — постоянное давление  $p_2=50$  МПа. Внутренний радиус таблеток равен 0,8 мм, внешний радиус — 3,88 мм, высота — 10 мм, внешний радиус оболочки равен 4,55 мм. Будем рассматривать несогласованные сетки: таблетки разбиты на 20 элементов в направлении  $r$  и на 40 элементов в направлении  $z$ , а оболочка — на 5 элементов в направлении  $r$ , в направлении  $z$  каждый участок оболочки, соответствующий высоте одной таблетки, разбит на 20 элементов. Среднее время использования твэла в реакторе составляет несколько лет, поэтому выберем время расчета  $t_{end} = 3,2 \cdot 10^8$  с (10 лет), шаг по времени  $\tau = 10000$  с (для 2 таблеток),  $\tau = 8000$  с (для 5 таблеток) и  $\tau = 4000$  с (для 10 таблеток). Это максимальный шаг, при котором присутствует сходимость численного решения задачи. Стоит отметить, что при использовании закона для скорости ползучести (33) из тестовой задачи возможно увеличение шага до  $\tau = 400000$  с (2 таблетки) и  $\tau = 200000$  с (5 и 10 таблеток). Все дальнейшие графики соответствуют случаю 10 таблеток. На рис. 8–10 приведены графики радиальных напряжений на контактных границах таблеток и оболочки в различные моменты времени. Из рисунка видно, что радиальные напряжения на контактной границе достаточно близки (кроме областей вокруг фасок) на протяжении всего времени расчета. На рис. 11–13 показаны графики зависимостей радиального, на рис. 14–16 — осевого, а на рис. 17–19 — окружного напряжения для разных моментов времени в сечении  $z = 0,055$  м, что соответствует середине 6-й таблетки. Из приведенных графиков видно, что все напряжения в таблетках уменьшаются с течением времени, при этом граничные условия для радиального напряжения на внешней поверхности оболочки выполняются (давление  $p_1=10$  МПа).



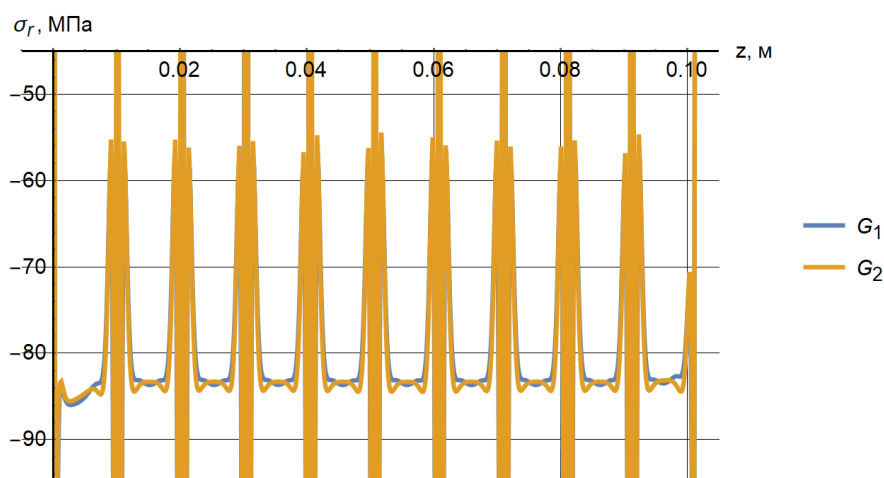


Рис. 8. Зависимости радиального напряжения  $\sigma_r(z)$  при  $r = 0,00388$  м,  $t = 3600$  с

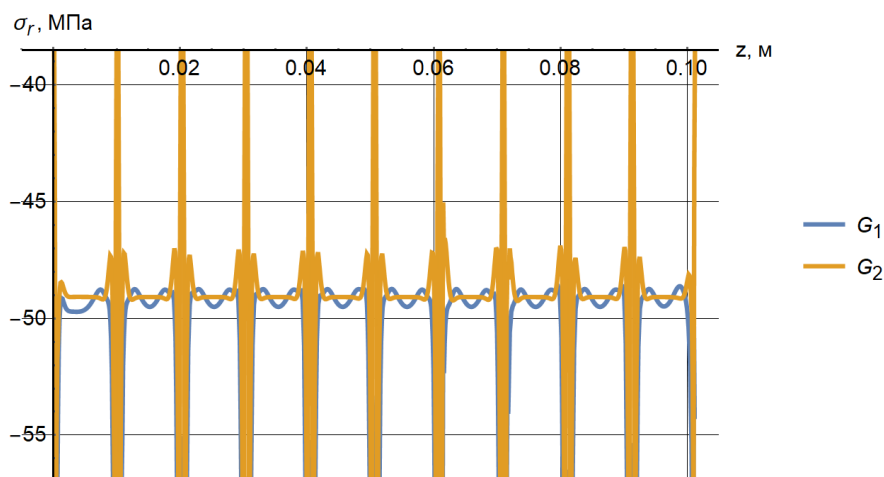


Рис. 9. Зависимости радиального напряжения  $\sigma_r(z)$  при  $r = 0,00388$  м,  $t = 8 \cdot 10^7$  с

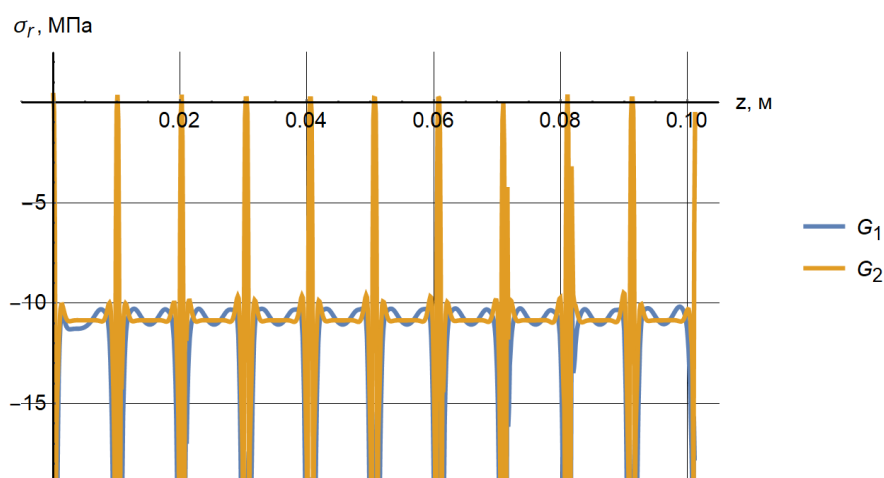


Рис. 10. Зависимости радиального напряжения  $\sigma_r(z)$  при  $r = 0,00388$  м,  $t = 3,2 \cdot 10^8$  с

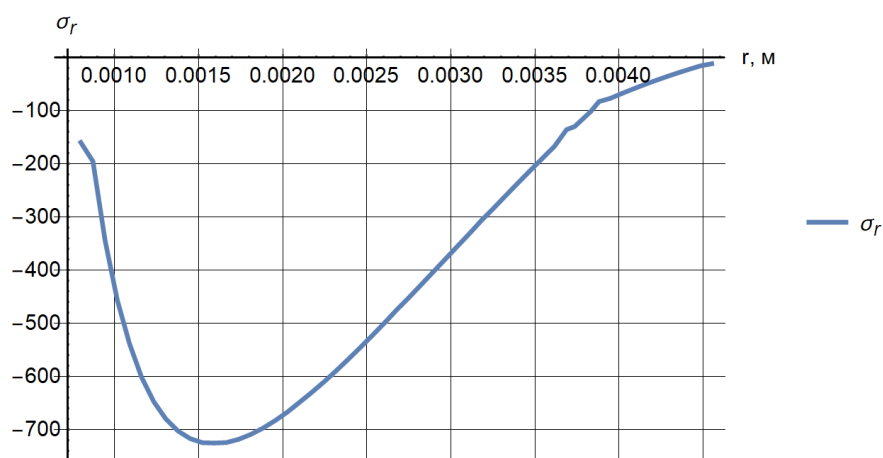


Рис. 11. Зависимости радиального напряжения  $\sigma_r(r)$  при  $z = 0,055$  м,  $t = 3600$  с

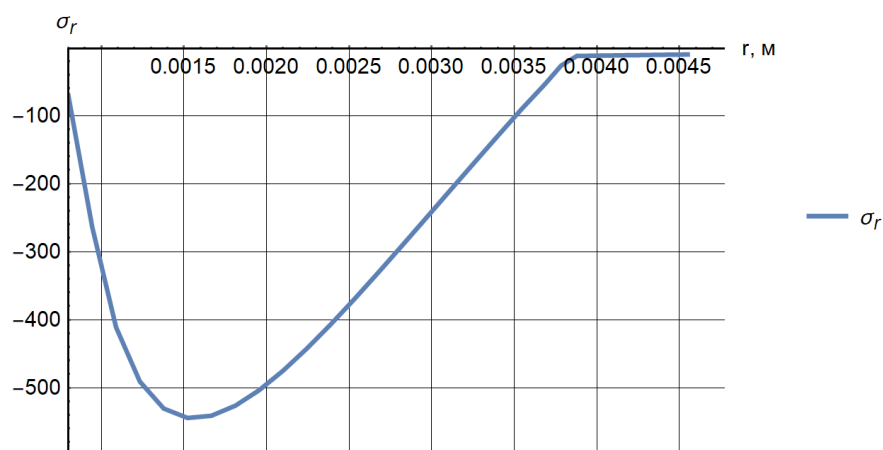


Рис. 12. Зависимости радиального напряжения  $\sigma_r(r)$  при  $z = 0,055$  м,  $t = 8 \cdot 10^7$  с

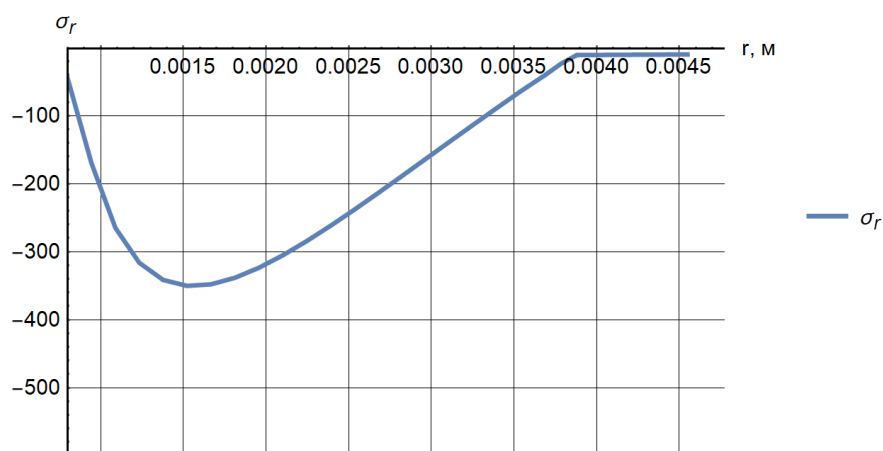


Рис. 13. Зависимости радиального напряжения  $\sigma_r(r)$  при  $z = 0,055$  м,  $t = 3,2 \cdot 10^8$  с

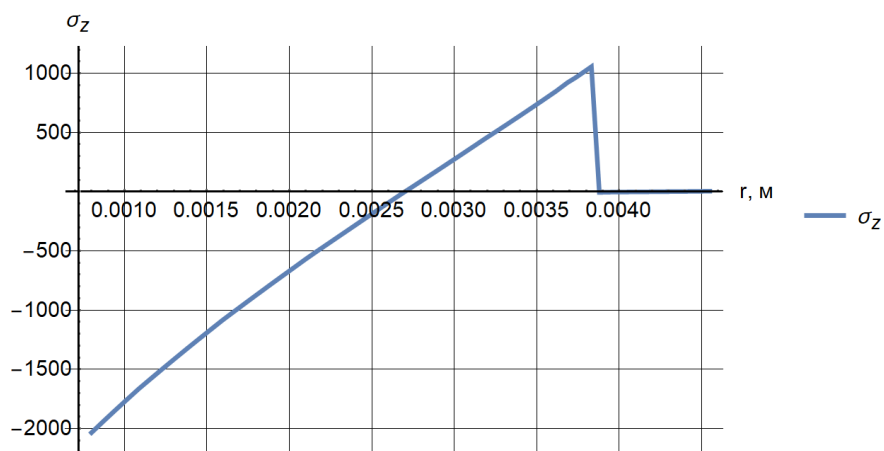


Рис. 14. Зависимости осевого напряжения  $\sigma_z(r)$  при  $z = 0,055$  м,  $t = 3600$  с

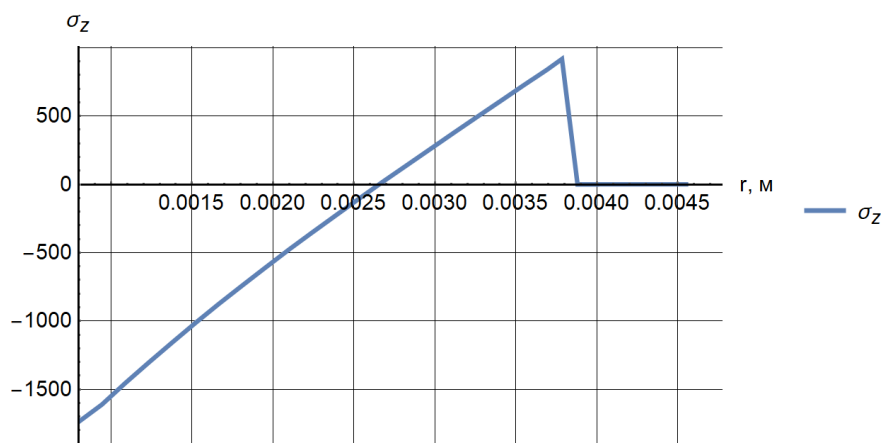


Рис. 15. Зависимости осевого напряжения  $\sigma_z(r)$  при  $z = 0,055$  м,  $t = 8 \cdot 10^7$  с

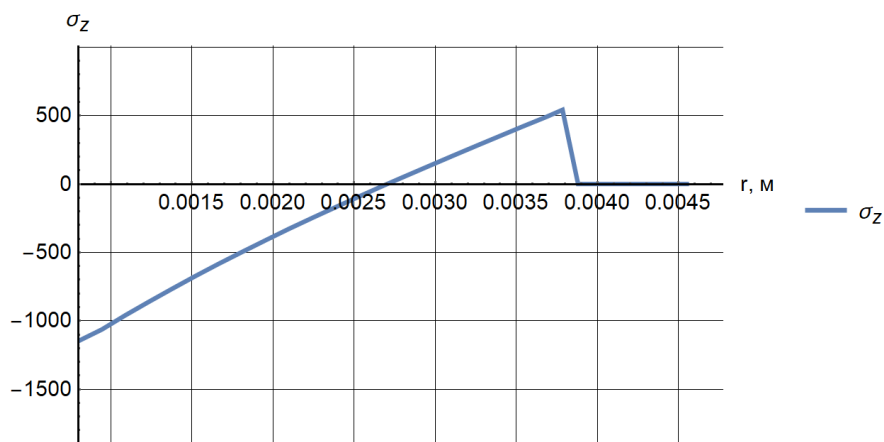


Рис. 16. Зависимости осевого напряжения  $\sigma_z(r)$  при  $z = 0,055$  м,  $t = 3,2 \cdot 10^8$  с

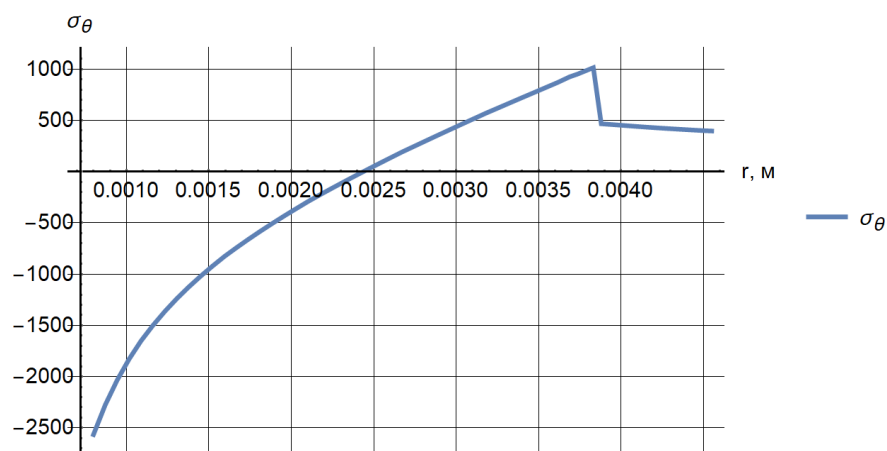


Рис. 17. Зависимости окружного напряжения  $\sigma_\theta(r)$  при  $z = 0,055$  м,  $t = 3600$  с

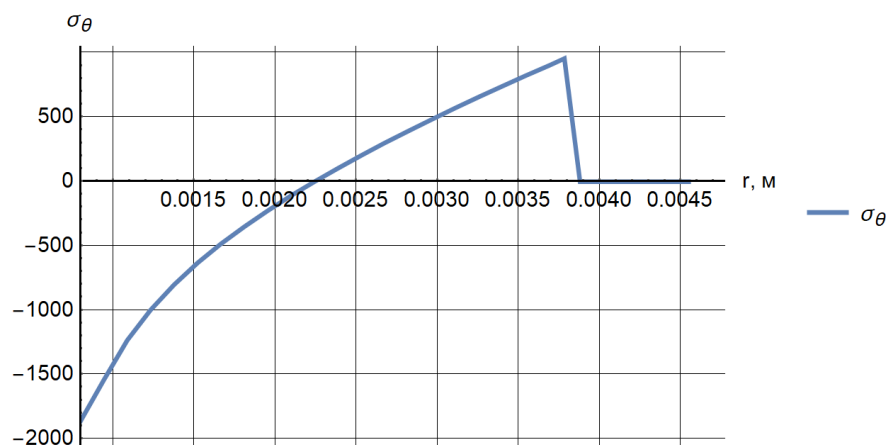


Рис. 18. Зависимости окружного напряжения  $\sigma_\theta(r)$  при  $z = 0,055$  м,  $t = 8 \cdot 10^7$  с

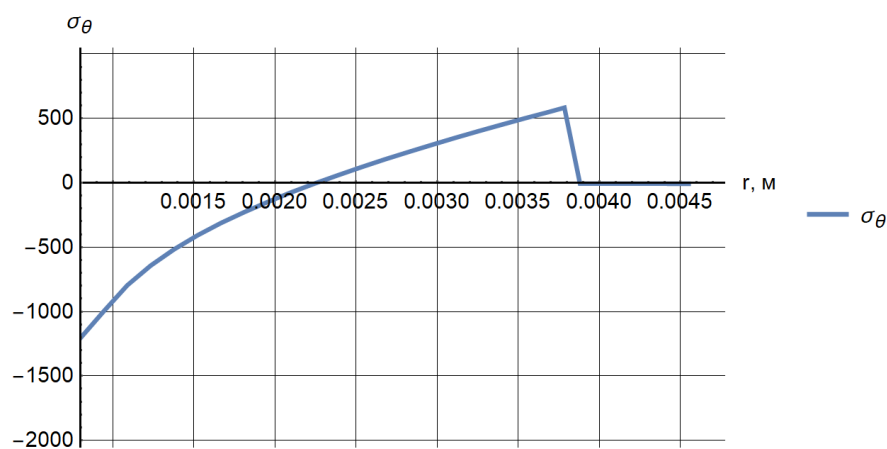


Рис. 19. Зависимости окружного напряжения  $\sigma_\theta(r)$  при  $z = 0,055$  м,  $t = 3,2 \cdot 10^8$  с

Для случая 10 таблеток приведем фрагменты двумерных распределений напряжений и деформаций ползучести в середине столба таблеток. На рис. 20–21 показаны двумерные распределения радиальных, осевых и окружных напряжений, а на рис. 22–23 — двумерные распределения радиальных, осевых и окружных деформаций ползучести. Показаны фрагменты распределений, соответствующие 6-й и 7-й таблеткам, причем при построении деформированных тел приложенные перемещения для большей наглядности увеличены в 10 раз для таблеток и в 50 раз для оболочки.

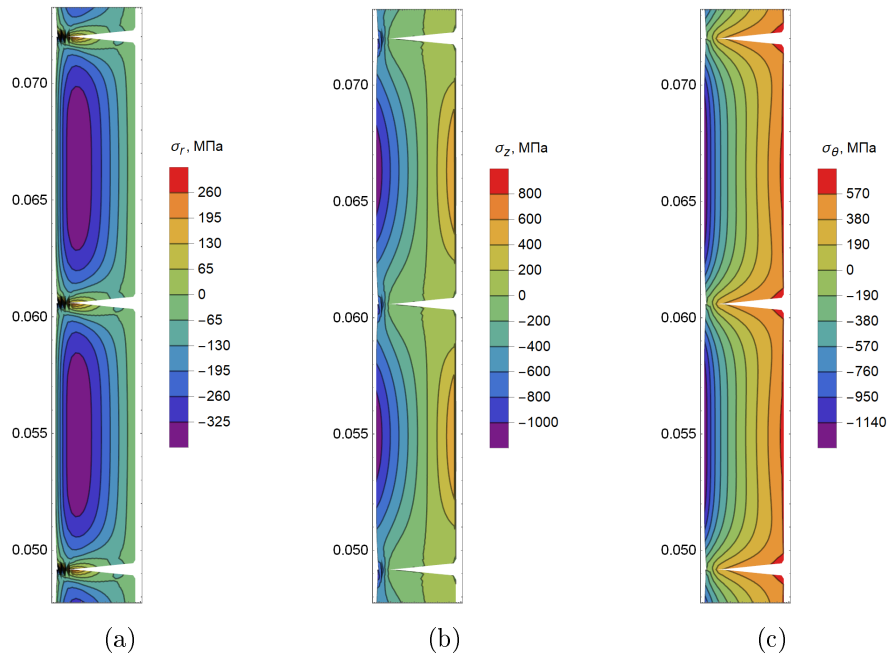


Рис. 20. Двумерные распределения в узлах элементов 6-й и 7-й таблеток: (а) — радиальные напряжения; (б) — осевые напряжения; (с) — окружные напряжения

Сравним количество итераций, необходимых для достижения заданной точности решения системы линейных уравнений (31) на каждом шаге по времени, при разном количестве таблеток. В табл. 1 приведены средние значения количества итераций для различных точности и числа таблеток. Из таблицы видно, что при увеличении точности и количества тел число итераций возрастает. При этом стоит отметить, что количество итераций на протяжении конкретного расчета остается практически неизменным.

Таблица 1. Среднее количество итераций за один шаг по времени

$\varepsilon$	2 таблетки	5 таблеток	10 таблеток
$10^{-2}$	6	18	37
$10^{-3}$	7	23	54
$10^{-4}$	13	34	75
$10^{-5}$	25	49	108

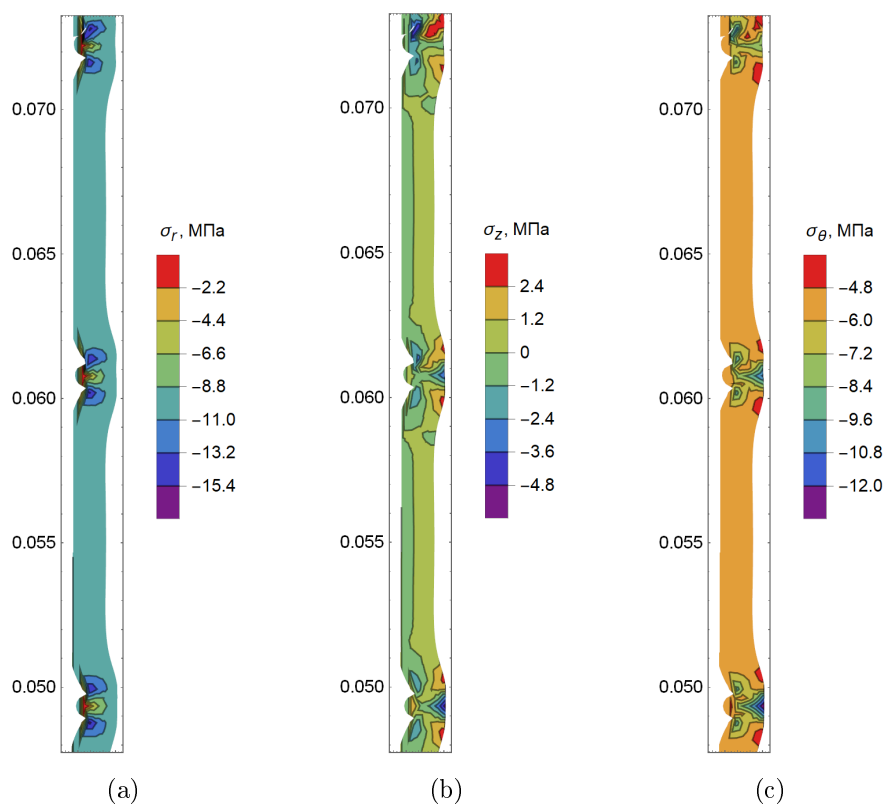


Рис. 21. Двумерные распределения в узлах элементов оболочки: (а) — радиальные напряжения; (б) — осевые напряжения; (с) — окружные напряжения

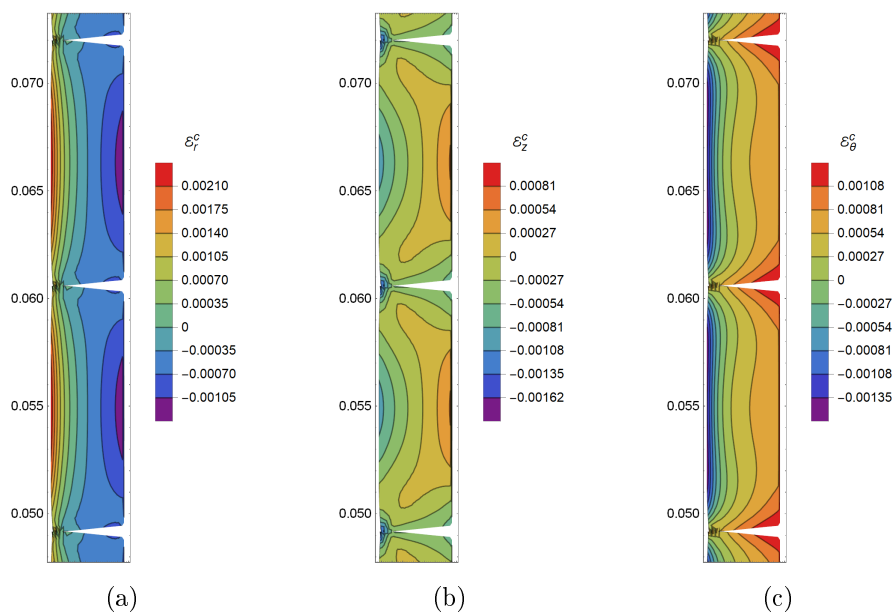


Рис. 22. Двумерные распределения в узлах элементов 6-й и 7-й таблеток: (а) — радиальные деформации ползучести; (б) — осевые деформации; (с) — окружные деформации ползучести

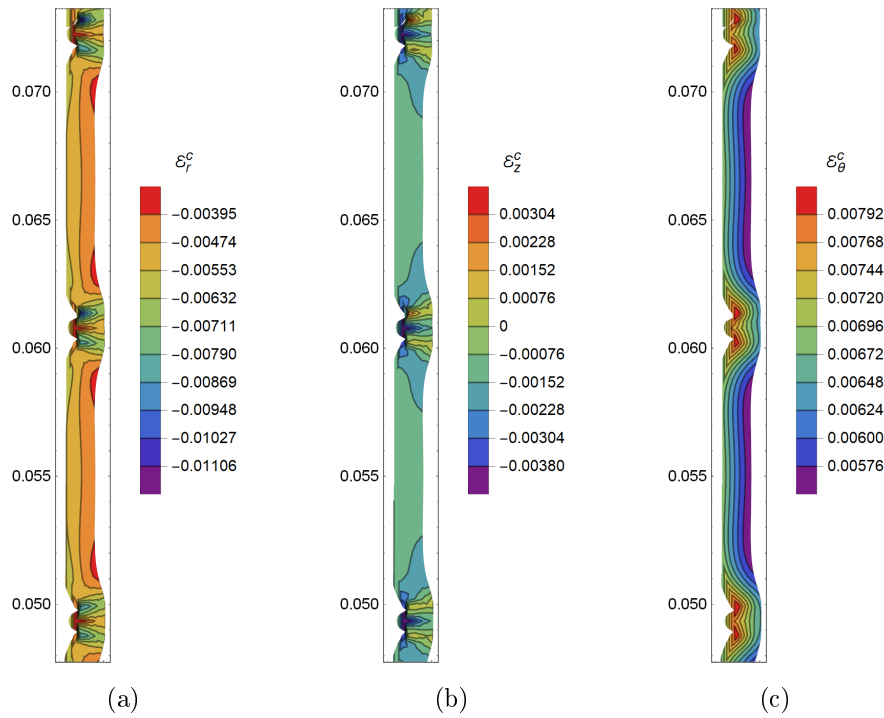


Рис. 23. Двумерные распределения в узлах элементов оболочки: (а) — радиальные деформации ползучести; (б) — осевые деформации ползучести; (с) — окружные деформации ползучести

## 5. Заключение

Представлена постановка квазистационарной задачи мультиконтактного взаимодействия системы осесимметричных термоупругих тел в условиях термомеханического нагружения с учетом процесса ползучести. Изложен численный алгоритм решения подобных задач, основанный на методе конечных элементов. Для учета граничных условий на контактных поверхностях использован mortar-метод, для решения полученной системы линейных уравнений (задача с седловой точкой) применен модифицированный метод симметричной верхней релаксации. На примере тестовой задачи показано, что численное и аналитическое решение совпадают с достаточной степенью точности. Представлены результаты применения описанного алгоритма для решения демонстрационной задачи, моделирующей некоторые процессы в ТВЭЛ для режима с постоянной мощностью тепловыделения. В расчетах использованы близкие к реальным модели ползучести материалов на интервале времени до 10 лет. Продемонстрировано, что в разные моменты времени граничные условия на контактных поверхностях выполнены достаточно корректно. Показано, что с течением времени за счет роста деформаций ползучести происходит снижение уровня напряжений в конструкции. Проведено сравнение числа итераций, требуемых для достижения заданной точности решения системы уравнений, в зависимости от количества таблеток.

## Список литературы

- [1] Галанин М. П., Крупкин А. В., Кузнецов В. И., Лукин В. В., Новиков В. В., Родин А. С., Станкевич И. В. Моделирование контактного взаимодействия системы термоупругих тел методом Шварца для многомерного случая // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2016. № 12. С. 9–20.
- [2] Станкевич И. В., Яковлев М. Е., Си Ту Хтет. Разработка алгоритма контактного взаимодействия на основе альтернирующего метода Шварца // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. Спец. вып. Прикладная математика. С. 134–141.
- [3] Babuska I. The finite element method with penalty // Mathematics of Computation. 1973. Vol. 27. P. 221–228.
- [4] Le Tallec P., Sassi T. Domain decomposition with nonmatching grids: augmented Lagrangian approach // Mathematics of Computation. 1995. Vol. 64. P. 1367–1396.
- [5] Галанин М. П., Глизнуцина П. В., Лукин В. В., Родин А. С. Варианты реализации метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. № 89. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-89>
- [6] Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin-Heidelberg: Speinger-Verlag. 2006. 520 p.
- [7] Lamichhane B. P. Higher Order Mortar Finite Elements with Dual Lagrange Multiplier Spaces and Applications. Stuttgart: Universitat Stuttgart. 2006. 190 p.
- [8] Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. 512 с.
- [9] Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
- [10] Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1978. 222 с.
- [11] Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
- [12] Wohlmuth B. I. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier // SIAM Journal on Numerical analysis. 2000. Vol. 38. (No. 3). P.989–1012.



- [13] Станкевич И. В., Аронов П. С. Математическое моделирование контактного взаимодействия двух упругих тел с помощью mortar-метода // Математика и математическое моделирование. 2018. № 3. С. 26–44.
- [14] Быченков Ю. В., Чижонков Е. В. Итерационные методы решения седловых задач. М.: БИНОМ, 2010. 349 с.
- [15] Аронов П. С., Галанин М. П., Родин А. С., Станкевич И. В. Решение задачи контакта двух упругих тел mortar-методом и методом Шварца на несогласованных сетках // Таврический вестник информатики и математики. 2019. №1(42). С. 24–42.
- [16] Aronov P. S., Galanin M. P., Rodin A. S., Mathematical modeling of the contact interaction of fuel elements using the mortar method // Mathematica Montisnigri. 2020, Vol. 48, PP. 43–57.
- [17] Hagrman D. L. MATPRO — A Library of Materials Properties for Use in the anysis of Light Water Reactor Fuel Rod Behavior. NUREG/CR-6150 TREE-1280, 1993.

## Содержание

1. Введение	3
2. Математическая постановка задачи	3
3. Применение mortar-метода для решения контактных задач	7
4. Результаты численного моделирования	10
5. Заключение	22