



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 115 за 2020 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Ю.А. Повещенко](#), [С.Б. Попов](#),
[Е.Н. Головченко](#)

Разработка методики
расчета течений в
многоконтурной
гидро-газосети

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Повещенко Ю. А., Попов С.Б., Головченко Е.Н. Разработка методики расчета течений в многоконтурной гидро-газосети // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 115. 29 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-115>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-115>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Ю.А. Повещенко, С.Б. Попов, Е.Н. Головченко

**Разработка методики расчета течений
в многоконтурной гидро-газосети**

Москва — 2020

Повещенко Ю.А., Попов С.Б., Головченко Е.Н.

Разработка методики расчета течений в многоконтурной гидрогазосети

Работа посвящена разработке методики расчета нестационарного процесса течения сжимаемого флюида в трубопроводных сетях на основе системы одномерных уравнений баланса массы, энергии и импульса. Построена конечно-разностная схема, и разработан соответствующий алгоритм расчета, реализованный в программном коде на ЭВМ. Разностная схема обладает свойством консервативности с выполнением сеточных аналогов основных законов сохранения и удовлетворяет критериям устойчивости и монотонности решения. Предлагаемый метод решения состоит в применении при расчете временного шага на ньютоновских итерациях метода трехточечной прогонки на каждой трубе в многоконтурной сети труб с большим количеством разветвлений и стыков труб. Достоинством метода является возможность естественного распараллеливания процесса вычислений. В связи с этим метод является перспективным для использования на многопроцессорных системах. Приведены примеры численных расчетов по разработанной методике.

Ключевые слова: математическое моделирование, сети трубопроводов, метод прогонки, распараллеливание, многопроцессорные системы.

Yury Andreevich Poveshchenko, Sergey Borisovich Popov, Evdokia Nikolaevna Golovchenko

Development of a method for calculating flows in a multi-circuit hydro-gas network

This work is devoted to the development of a method for effective calculating the process of non-stationary flow of compressible fluid in pipeline networks based on a system of one-dimensional equations of mass, energy, and momentum balance in Euler variables. The finite-difference scheme with the corresponding calculation algorithm and the computer program code are constructed. The difference scheme has the property of conservativeness with the fulfillment of grid analogs of the basic conservation laws and meets the criteria of stability and monotonicity of the solution. The proposed solution method consists in applying the method of 3-point successive elimination method on each pipe in a multi-loop network of pipes with a large number of branches and pipe joints when calculating the time step for each Newtonian iteration. The advantage of this method is the ability to parallelize the calculation process. In this regard, the method is promising for use in multiprocessor systems, including systems with hybrid architecture. Examples of numerical calculations showing the efficiency of the developed method are given.

Key words: mathematical modeling, network simulation model, successive elimination method, parallel high-performance computing systems.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 20-51-18004 Болг_а, 18-07-00841-а.

1. Введение

Трубопроводные сети имеются во многих отраслях техники и не только техники. Например, кровеносная система представляет собой разветвленную сеть из труб разного диаметра, в которой рассматриваются уравнения гемодинамики (см., например, [1,2]).

В промышленности встречаются разнообразные системы трубопроводов, предназначенные для решения многих задач транспортировки флюидов (нефтегазопроводы, водопроводы), переноса/отвода тепла (теплопроводы), передачи усилия на рабочие узлы машин и механизмов (гидропроводы) и др. [3-5].

В связи с этим представляется актуальным вопрос разработки эффективных методов и алгоритмов расчета течений в трубопроводных сетях.

Такие сети зачастую характеризуются наличием большого количества контуров и элементов различного назначения (заслонки, стыки труб, дроссели, конденсаторы, насосы и т.д.), разветвленностью, как, например, в сложных сетях теплосъема ЯЭУ на основе реактора канального типа. Многоконтурность сети увеличивает вероятность потери плотности соединений, возникновения течей, а соответственно и аварийной ситуации. Требование оперативной диагностики состояния сложной многоконтурной сети обуславливает необходимость создания математических моделей и методик расчета, причем с повышенными требованиями к скорости расчета течений в таких сетях.

В настоящей работе разработана методика расчета нестационарных течений в сетях трубопроводов с большим количеством труб и их соединений.

Используются классические уравнения баланса массы, энергии и импульса в переменных Эйлера в квазиодномерном приближении (после усреднения уравнений по поперечному сечению трубы). Построена конечно-разностная схема, аппроксимирующая эти уравнения, и алгоритм расчета, реализованный в программном коде на ЭВМ. Сконструированная разностная схема обладает свойством консервативности, заключающимся в выполнении сеточных аналогов основных законов сохранения, и удовлетворяет критериям устойчивости и монотонности решения.

Расчет временного шага состоит в интегрировании системы нелинейных сеточных уравнений баланса массы, энергии и импульса, осуществляемом с помощью итерационного метода Ньютона. При этом в силу большого количества труб и соединений в трубопроводной сети матрица системы линеаризованных уравнений на каждой итерации получается, вообще говоря, большой размерности.

В работе предложена и показана возможность применения при расчете временного шага на ньютоновских итерациях известного метода 3-х точечной прогонки на каждой трубе в многоконтурной сети труб. Причем расчет каждой трубы осуществляется на каждой ньютоновской итерации независимым от остальных труб образом. Отсюда следует возможность естественного распараллеливания процесса вычислений. В связи с этим метод является перспективным для использования на многопроцессорных вычислительных

комплексах, включая гибридные системы. Приведен пример численных расчетов системы из трех труб по разработанной методике, демонстрирующий ее работоспособность.

2. Используемые приближения, модель трубопроводной сети

Чтобы не перегружать описание методики расчета течения в сети труб, в работе сделан ряд упрощений:

- пренебрежение гравитацией (горизонтальная система труб);
- однофазность течения, отсутствие фазовых переходов;
- отсутствие утечек массы, энергии, импульса через боковые стенки труб и стыки;
- пренебрежение трением, отсутствие гидросопротивления в трубах и стыках;
- пренебрежение диффузионным переносом тепла, по сравнению с конвективным,
- постоянство сечений труб во времени (жесткость, неэластичность стенок труб),
- пренебрежение движением в поперечном направлении в трубах (включая конвекцию в радиальном направлении) по сравнению с продольным направлением и переход к квазиодномерным уравнениям, усредненным по поперечному сечению;
- в качестве элементов сети рассматриваются только стыки нескольких труб и заглушки.

Заметим, что учет вышеупомянутых разнообразных эффектов, включая учет разнородных элементов сети, таких как дроссели, заслонки, конденсаторы, фитинги, изгибы-колена, насосы и др., возможен в рамках разработанной методики, но на этом мы не будем здесь останавливаться.

Рассмотрение проводится на примере следующей **упрощенной модели трубопроводной сети**:

- под сетью будем понимать множество труб, соединенных между собой через стыки труб;
- концы труб либо соединены с другими трубами (через стыки 2 и более труб), либо конец трубы не соединен с другими трубами. Такие концы будем называть свободными, и на них должны быть заданы граничные условия. Например, на конце трубы может находиться заглушка, отвечающая заглушке контура в атмосферу, на которой предполагаются заданными все термодинамические величины.

Все трубы должны быть занумерованы и описаны как элементы множества труб:

- должны быть заданы их спецификации (длина, площадь сечения, вообще говоря, переменная вдоль трубы, характеристики концов трубы и др.), параметры расчетной разностной сетки для каждой трубы (число расчетных ячеек и их размеры) и т.д.

Все стыки-соединения труб должны быть занумерованы и описаны как элементы множества стыков:

- каждый стык имеет свои характеристики, включающие в себя число соединенных труб с перечислением этих труб и указанием того, каким концом (началом или окончанием) труба подсоединена к стыку, и др.

Заметим, что описание множества стыков, труб и заглушек эквивалентно некому **графу, характеризующему сеть**.

В задачах с учетом потерь на трение должны быть заданы гидросопротивления труб и элементов сети или дополнительные параметры для их расчета (например, шероховатость боковых стенок, кривизна изгибов труб и др.).

При учете гравитации должен быть задан наклон труб по отношению к вертикали.

При наличии и учете разнородных элементов в сети требуется завести соответствующие множества таких элементов и указать их характеристики, например, гидросопротивления. И так далее.

Для удобства задания гидро-газосети и ввода ее элементов в компьютер был создан специальный язык, позволяющий описать элементы гидросети в текстовом формате и воспринимаемый разработанной программой расчета трубопроводной сети. Этот язык содержит множество ключевых слов, служащих для описания отдельных труб, стыков, граничных условий, свойств флюида, параметров расчета и др.

3. Математическая формулировка

В основе предлагаемой методики лежит традиционная система уравнений гидро-газодинамики **сжимаемого флюида в переменных Эйлера**, включающая в себя (см. [6]):

уравнение неразрывности (баланса массы)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{w}) = 0, \quad (1)$$

уравнение баланса количества движения (импульса) для проекций векторов скорости и действующих сил на координатное направление

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho w_x) + \operatorname{div}(\rho w_x \vec{w}) = -\nabla_x P + F_x, \quad (2)$$

уравнение баланса полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \rho \frac{w^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left(\left(\rho \varepsilon + P + \rho \frac{w^2}{2} \right) \vec{w} + \vec{W} \right) = Q + \vec{F} \vec{w}, \quad (3)$$

а также уравнения состояния

$$\rho = \rho(P, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(P, T). \quad (4)$$

Здесь t – время, ρ – плотность, ε – внутренняя энергия единицы массы; P , T – давление и температура, w – вектор скорости течения, F и W — вектора внешней силы и теплового диффузионного потока, Q – источник (или сток) тепла. Предполагается, что в каждой трубе имеется вектор положительного направления вдоль трубы, \vec{l}_x (направленный по касательной к траектории трубы), тогда w_x, F_x, ∇_x – проекции соответствующих векторов на направление \vec{l}_x .

Вектор внешней силы включает в себя, вообще говоря, гидросопротивление (связанное с трением флюида о боковые стенки), силы, связанные с вязкостью флюида, а также силу гравитации.

Заметим, что вместо внутренней энергии единицы массы в уравнениях можно всюду перейти к внутренней энергии единицы объема, $E = \varepsilon \rho$. В задачах с фазовыми переходами вместо внутренней энергии следует использовать энтальпию. Энтальпия единицы объема, как известно, равна $\Psi = E + P$.

Уравнение баланса полной энергии перепишем в эквивалентном виде для **баланса внутренней энергии:**

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E \vec{w} + \vec{W}) - P \operatorname{div} \vec{w} = Q. \quad (5)$$

Преимуществом уравнения для баланса только внутренней энергии является ее более простой вид, а недостатком - недивергентный вид.

В качестве флюида будем рассматривать **идеальный газ:**

$$\rho = \rho_g = P \mu / (RT), \quad \varepsilon = \varepsilon_g = c_g T, \quad (6)$$

$$E = \varepsilon_g \rho_g = c_g P \mu / R = \alpha P = \frac{P}{\gamma - 1}, \quad \alpha = c_g \mu / R = \text{const},$$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{R}{c_g \mu}, \quad R = 8.31 \frac{J}{\text{mole} \cdot K},$$

где R – газовая постоянная, μ – молекулярный вес газа, c_g – теплоемкость газа, предполагаемая константой, γ – показатель адиабаты идеального газа.

Имеем, что в рассматриваемом случае внутренняя энергия (а также энтальпия) единицы объема пропорциональна давлению.

В настоящей работе будем использовать максимально упрощенные уравнения. А именно, будем полагать нулем внешние силы, диффузионный перенос тепла и источники тепла, $F = 0$, $W = 0$, $Q = 0$.

На боковых стенках труб пренебрегаем утечками тепла и ставим условие непротекания флюида.

Принимая, что характерный линейный размер в сечении трубопровода (например, его эффективный диаметр) намного меньше его характерного размера в продольном направлении, можно перейти к упрощенной квазиодномерной модели путем усреднения уравнений (1), (2), (5) по поперечному сечению. При этом получаем следующую 1D систему уравнений:

$$s \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x (\rho s w_x) = 0, \quad (7)$$

$$s \frac{\partial}{\partial t} (\rho w_x) + \operatorname{div}_x (\rho s w_x w_x) = -s \cdot \operatorname{grad}_x P, \quad (8)$$

$$s \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}_x (E s w_x) = -P \cdot \operatorname{div}_x (s w_x). \quad (9)$$

Здесь x – пространственная координата, ось координат совпадает с продольным положительным направлением \vec{l}_x в каждой трубе, $s = s(x)$ – площадь поперечного сечения канала. Все величины в уравнениях (7) – (9) усреднены по сечению трубопровода и, таким образом, зависят только от продольной координаты x .

Заметим, что в случае одинакового постоянного сечения во всех трубах сети зависимость от сечения пропадает, т.к. тогда (7) – (9) преобразуются в классические одномерные уравнения, не зависящие от величины сечения.

В (7) – (9) через div_x обозначен оператор дивергенции, действующий вдоль продольного направления каждой трубы, т.е. в каждой отдельной трубе $\operatorname{div}_x = \partial / \partial x$. Однако удобно оставить такое обозначение, т.к.,

во-первых, в каждой трубе свое направление, причем не обязательно прямолинейное,

во-вторых, имеются стыки, для которых оператор дивергенции более адекватен,

в-третьих, такое обозначение представляется более удобным с точки зрения разностной аппроксимации на разностных ячейках и гранях.

В начальный момент времени заданы:

- скорости потока и термодинамические параметры в трубах (например, нулевая скорость, постоянные начальное давление, температура или плотность).

Граничные условия ставятся на концах труб, не соединенных с другими трубами (т.е. на свободных концах). Например, пусть имеется входная труба, через которую происходит впрыскивание флюида в гидросеть. На соответствующем конце такой трубы задаются значения давления, плотности и скорости входного потока. Аналогично, на конце выходной трубы задаются давление и плотность выходного потока. На заглушках ставятся граничные условия, отвечающие заглушке контура в атмосферу.

4. Формализация графа трубопроводной сети и построение расчетной сетки

Формализация графа сети

При построении вычислительного алгоритма прежде всего требуется формализовать трубопроводную сеть, определив структуры для множества труб и множества соединений труб и задав соответствующие спецификации элементов этих структур.

Спецификации труб

$L(k)$ – длина трубы k , $k = 1, \dots, N_{\text{тр}}$; $N_{\text{тр}}$ – общее число труб в сети,

k – номер трубы в глобальной нумерации труб.

Сечения в каждой трубе k задаются, например, путем задания таблицы значений сечения вдоль трубы:

$$s(x_i, k) = s_{i,k}, i = 1, \dots, n(k), x_1 = 0, x_{n(k)} = L(k),$$

где $n(k)$ – число строк в таблице сечений для трубы k .

Значение сечения в любой точке вдоль длины каждой трубы находится интерполяцией соответствующих значений в таблице сечений этой трубы.

В спецификации труб удобно добавить указание на то, с какими по номеру стыками соединены ее концы:

$t_a(k)$ – номер стыка на левом конце трубы k , из которого труба выходит,

$t_b(k)$ – номер стыка на правом конце трубы k , в который труба входит (под левым концом будем понимать начало трубы, а под правым – ее конец).

Характеристики стыков

$n(m)$ – число соединенных труб в стыке m , $m = 1, \dots, M_{\text{ст}}$;

m – номер стыка, $M_{\text{ст}}$ – общее число стыков сети,

$k_{\text{ст}}(i, m)$ – глобальные номера труб, соединенных в стыке m , $i = 1, \dots, n(m)$,

$$\mathcal{A}(i,m) = \begin{cases} +1, & \text{труба выходит из стыка,} \\ -1, & \text{труба входит в стык,} \end{cases}$$

– характеристика того, каким концом труба соединена со стыком.

Концы труб, не соединенных с другими трубами через стыки (свободные концы, например, заглушки), формально будем относить к стыкам, состоящим из одной трубы.

Систему 1D уравнений для рассматриваемой сети будем численно решать с помощью метода конечных разностей (см. [6,7,8]).

Расчетная разностная сетка

Для применения метода конечных разностей, на каждой трубе k введем расчетную сетку, состоящую из N_k ячеек:

$$\{\Omega\} = \{\Omega_i^{(k)}, i = 0, \dots, N_k + 1; k = 1, \dots, N_{\text{тр}}\},$$

т.е. задаются центры ячеек и области, приписываемые к ячейкам (см. рис.1).

На концах труб находятся «половинные» приграничные ячейки – ячейки половинных, по сравнению с внутренними ячейками, размеров.

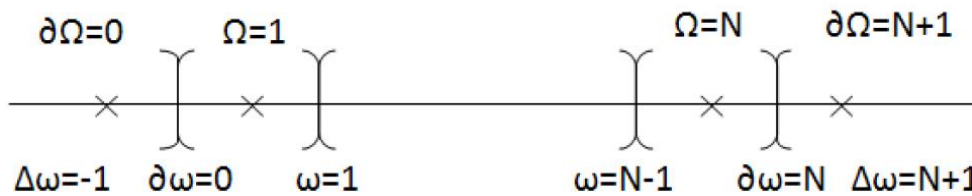


Рис.1. Схема нумерации ячеек и узлов на отдельной трубе

Числа N_k связаны с длинами труб L_k и требованиями, с одной стороны, обеспечить достаточную точность вычислений, а с другой – получить решение за приемлемое время. Числа N_k указываются в спецификациях трубы.

Ячейки подразделяются на внутренние ячейки, $\{\Omega_i^{(k)}, 1 \leq i \leq N_k, k = 1, \dots, N_{\text{тр}}\}$, и ячейки-стыки $\{\Omega_{\text{ст}}(m), m = 1, \dots, M_{\text{ст}}\}$. На рис.1 такие ячейки обозначены как $\partial\Omega$.

Каждая полноценная ячейка-стык (не свободный конец) будет общей ячейкой для всех труб, образующих данный стык. Причем с точки зрения каждой из таких труб ячейка-стык будет иметь либо номер $\Omega_{i=0}^{(k)}$, либо $\Omega_{i=N_k+1}^{(k)}$ в зависимости от того, каким концом труба соединена со стыком.

Более точно: ячейка-стык рассматривается как объединение соответствующих приграничных «половинных» ячеек всех труб, образующих стык.

Система ячеек $\{\Omega\}$ порождает соответствующую систему граней $\{\omega\}$, являющихся границами ячеек, - в рассматриваемом 1D приближении границами внутренних ячеек служат узлы ω (см. рис.1 со схемой нумерации ячеек и узлов на отдельной трубе).

В каждой трубе k узлы подразделяются на **внутренние узлы**, $\omega_i^{(k)}, 1 \leq i \leq N_k$, и **приграничные узлы**: $\omega_0^{(k)}$ и $\omega_{N_k}^{(k)}$. На рис.1 приграничные узлы обозначены как $\partial\omega$.

Граница каждой внутренней ячейки состоит из двух узлов-граней (необязательно внутренних):

$$\omega(\Omega_i^{(k)}) = \{\omega_{i-1}^{(k)}, \omega_i^{(k)}\}, \text{ где } 1 \leq i \leq N_k.$$

Граница ячейки-стыка $\Omega_{\text{ст}}(m)$ будет состоять из $n(m)$ приграничных узлов труб, образующих стык m :

$$\omega(\Omega_{\text{ст}}(m)) = \{\omega_{\text{ст}}(i, m), i = 1, \dots, n(m)\}.$$

В центрах ячеек меряются термодинамические величины (P, T, ρ, E, Ψ). Скорости течения в трубах (w) меряются на границах ячеек, являющихся гранями в 2D и 3D случае. В 1D случае, как уже отмечалось выше, такие грани совпадают с узлами одномерной пространственной сетки $\{\omega\}$. При этом надо понимать, что, несмотря на используемое название (узлы), это не одномерные точки, а грани, проходящие через эти узлы, имеющие площадь, равную площади сечения трубы, и обладающие нормальными, коллинеарными вектору направления трубы.

На гранях-узлах меряются также скорости переноса массы, энергии и импульса, пропорциональные w : $\vec{j}_\rho = \rho \vec{w}$, $\vec{j}_E = E \vec{w}$, $\vec{j}_{x,w} = \rho w_x \vec{w}$.

Каждая ячейка в одномерной сети труб имеет своей границей несколько узлов:

- два узла для внутренних ячеек трубы и для стыков из двух труб,
- $n(m)$ приграничных узлов для ячеек-стыков из n труб.

Каждый узел находится между двумя смежными ячейками $\Omega(\omega)$, кроме свободных концов труб, - но и тогда можно считать, что грань на конце трубы находится между краевой ячейкой трубы и фиктивной ячейкой нулевого объема, в которой заданы краевые условия.

5. Разностная аппроксимация оператора дивергенции

При разностной аппроксимации оператора дивергенции вектора \vec{A} на некоем разностном объеме V будем использовать интегральное тождество Гаусса-Остроградского [9]:

$$V \langle \text{div} \vec{A} \rangle_V = \int_V \text{div} \vec{A} dv = \oint_{\partial V} \vec{A} \vec{n} d\sigma,$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к границе области ∂V .

Отсюда можно получить выражения для аппроксимации оператора дивергенции на разностных ячейках, а также на гранях – узлах.

5.1. Аппроксимация дивергенции в разностных ячейках

Аппроксимация оператора дивергенции вектора \vec{A} в разностной ячейке Ω имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} \vec{A} \rangle_{\Omega} &= \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{\partial \Omega} \vec{A} \vec{n} d\sigma = \frac{1}{V_{\Omega}} \operatorname{DIV}_{\Omega} \vec{A}, \\ \operatorname{DIV}_{\Omega} \vec{A} &= \sum_{\omega(\Omega)} \vec{A}_{\omega} \vec{n}_{\omega} s_{\omega} = \sum_{\omega(\Omega)} A_{\omega} n_{\omega} s_{\omega}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$V_{\Omega} = \int_{\Omega} s(x) dx - \text{объем ячейки } \Omega \text{ разностной сетки;}$$

\vec{n}_{ω} – внешняя нормаль к границе области ячейки Ω ; s_{ω} – площадь узла-границы ω , равная площади сечения трубы; $A_{\omega} = \vec{A}_{\omega} \vec{l}_x$ – значение сеточной векторной функции в узле ω ; $n_{\omega} = \vec{n}_{\omega} \vec{l}_x$ и равно $+1$, если направление внешней нормали совпадает с положительным направлением \vec{l}_x в трубе, и равно -1 в противном случае.

Разностный оператор дивергенции $\operatorname{DIV}_{\Omega}$ действует из пространства сеточных функций, определенных в узлах, в пространство функций, определенных в ячейках, $\operatorname{DIV}_{\Omega} : \omega \Rightarrow \Omega$.

Выражение $\omega(\Omega)$ означает множество граней-узлов, составляющих границу ячейки Ω . В простейшем случае, когда ячейка является внутренней ячейкой трубы, множество узлов, составляющих границу ячейки, будет содержать всего два узла: узлы слева и справа от центра ячейки.

В более сложном случае, когда ячейка является стыком n труб, граница будет состоять из n приграничных граней-узлов этих труб.

5.2. Аппроксимация дивергенции на приузловых доменах

Аппроксимация оператора дивергенции вектора \vec{A} в узле ω происходит на разностном объеме, приписываемом узлу, – приузловом домене $d(\omega)$:

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} \vec{A} \rangle_{\omega} &= \frac{1}{V_{\omega}} \int_{\partial d(\omega)} \vec{A} \vec{n} d\sigma = \frac{1}{V_{\omega}} \operatorname{Div}_{\omega} \vec{A}, \\ \operatorname{Div}_{\omega} \vec{A} &= \sum_{\sigma(\omega)} \vec{A}_{\sigma} \vec{n}_{\sigma} s_{\sigma} = \sum_{\sigma(\omega)} A_{\sigma} n_{\sigma} s_{\sigma}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$v_\omega = \int_{d(\omega)} s(x) dx - \text{объем приузлового домена};$$

под $\sigma(\omega)$ понимается множество участков границы домена $d(\omega)$; \vec{n}_σ – внешняя нормаль к участку границы домена; s_σ – площадь границы на рассматриваемом участке, равная площади сечения трубы; $\vec{A}_\sigma = A_\sigma \vec{l}_x$ – значение сеточной векторной функции; $n_\sigma = \vec{n}_\sigma \vec{l}_x$ и равно +1, если направление внешней нормали совпадает с положительным направлением \vec{l}_x в трубе, и равно -1 в противном случае.

Разностный оператор дивергенции Div_ω действует из пространства сеточных функций, определенных в ячейках, в пространство функций, определенных на гранях-узлах, $\text{Div}_\omega : \Omega \Rightarrow \omega$.

6. Разностные схемы для уравнений баланса массы и внутренней энергии

Уравнения баланса массы (7) и баланса внутренней энергии (9) будем аппроксимировать в разностных ячейках с помощью двухслойных по времени разностных схем:

$$V_\Omega(\rho_\Omega)_t + \text{DIV}_\Omega \hat{j}_{\rho,\omega} = 0, \quad (12)$$

$$V_\Omega(E_\Omega)_t + \text{DIV}_\Omega \hat{j}_{E,\omega} = -\hat{P}_\Omega \text{DIV}_\Omega (s\hat{w})_\omega, \quad (13)$$

где

$$\hat{j}_{\rho,\omega} = \rho_\omega s_\omega \hat{w}_\omega, \quad \hat{j}_{E,\omega} = E_\omega s_\omega \hat{w}_\omega,$$

- потоки массы и внутренней энергии в узле ω , причем плотность и внутренняя энергия в потоках берутся явными (т.е. на нижнем временном слое), а скорости – неявными (на верхнем – неявном – слое по времени); «крышкой» наверху обозначены величины на неявном слое по времени.

Величина без крышки означает, что она берется с нижнего слоя по времени.

Волной сверху будем обозначать величины, которые считаются известными при расчете очередной итерации значений на верхнем слое по времени, – например, они берутся с предыдущей итерации. Индекс x для скорости будем часто опускать, подразумевая, что $w = w_x$ – проекция вектора скорости на вектор положительного направления в трубе.

Обозначено:

$$(f_\Omega)_t = \frac{1}{\tau} (\hat{f}_\Omega - f_\Omega)$$

– разностная производная по времени, τ – шаг по времени.

Разностная схема (12), (13) содержит разностные аппроксимации операторов дивергенции на разностных ячейках:

$$\text{DIV}_{\Omega} \hat{J}_{\rho, \omega} = \sum_{\omega(\Omega)} (\rho s \hat{w})_{\omega} n_{\omega}, \quad \text{DIV}_{\Omega} \hat{J}_{E, \omega} = \sum_{\omega(\Omega)} (E s \hat{w})_{\omega} n_{\omega}, \quad \text{DIV}_{\Omega} (s \hat{w})_{\omega} = \sum_{\omega(\Omega)} (s \hat{w})_{\omega} n_{\omega},$$

которые требуется конкретизировать.

Рассмотрим аппроксимацию дивергенции во внутренних ячейках трубы k , $\Omega_i^{(k)}$, $1 \leq i \leq N_k$. Множество узлов, составляющих границу внутренних ячеек, содержит два узла:

$$\omega(\Omega_i^{(k)}) = \{\omega_{i-1}^{(k)}, \omega_i^{(k)}, 1 \leq i \leq N_k\}.$$

Следовательно, при $1 \leq i \leq N_k$ (опуская ниже указание номеров труб, и обозначая $\Omega(i) = \Omega_i^{(k)}$, $\omega(i) = \omega_i^{(k)}$), имеем

$$\begin{aligned} \text{DIV}_{\Omega(i)} \hat{J}_{\rho, \omega} &= \rho_{\omega(i)} (s \hat{w})_{\omega(i)} - \rho_{\omega(i-1)} (s \hat{w})_{\omega(i-1)}, \\ \text{DIV}_{\Omega(i)} \hat{J}_{E, \omega} &= E_{\omega(i)} (s \hat{w})_{\omega(i)} - E_{\omega(i-1)} (s \hat{w})_{\omega(i-1)}, \\ \text{DIV}_{\Omega(i)} (s \hat{w})_{\omega} &= (s \hat{w})_{\omega(i)} - (s \hat{w})_{\omega(i-1)}. \end{aligned}$$

Здесь ρ_{ω} , E_{ω} – проекции сеточных функций плотности и внутренней энергии, определенных в центрах ячеек, в узлы ячейки. Для их определения будем использовать снос по потоку (“up wind”), зависящий от знака $\tilde{w}_{\omega(i)}$:

$$\rho_{\omega(i)} = \rho_{\omega(i)}^{up} = \begin{cases} \rho_{\Omega(i)}, & \text{if } \tilde{w}_{\omega(i)} > 0 \\ \rho_{\Omega(i+1)}, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (14)$$

т.к. граница внутренней ячейки состоит из двух узлов, $\Omega(\omega(i)) = \{\Omega(i), \Omega(i+1)\}$.

Аналогично определяется E_{ω} . Такая аппроксимация потоковых членов обладает первым порядком точности. Ее достоинством является то, что она обеспечивает устойчивость и монотонность разностной схемы.

Аппроксимация дивергенции в ячейках-стыках $\Omega_{ct}(m)$, $m = 1, \dots, M_{ct}$, равна сумме по всем приграничным узлам, $\omega_{ct}(i, m)$, труб, составляющих стык,

$$\omega(\Omega_{ct}(m)) = \{\omega_{ct}(i, m), i = 1, \dots, n(m)\},$$

с учетом знаков внешних нормалей $\mathcal{G}(i, m)$:

$$\text{DIV}_{\Omega_{ct}(m)} \hat{J}_{\rho, \omega} = \sum_{i=1}^{n(m)} (\rho s \hat{w})_{\omega=\omega_{ct}(i, m)} \mathcal{G}(i, m). \quad (15)$$

Аналогично осуществляется аппроксимация $\text{DIV}_{\Omega_{ct}(m)} \hat{J}_{E, \omega}$, $\text{DIV}_{\Omega_{ct}(m)} (s \hat{w})_{\omega}$.

Величины ρ_ω и E_ω в приграничных узлах $\omega = \omega_{ct}(i, m)$ определяются аналогично (14) в зависимости от знака $\tilde{w}_{\omega_{ct}(i, m)}$.

Запишем получающиеся в конечном итоге разностные схемы, аппроксимирующие уравнения (7) и (9), в виде системы нелинейных уравнений относительно неизвестных на верхнем слое по времени.

Для внутренних ячеек трубы k имеем (при $1 \leq i \leq N_k$):

$$f_{1i} = \hat{\rho}_i - \rho_i + \xi_i \left[(\rho^{up} s \hat{w})_{\omega(i)} - (\rho^{up} s \hat{w})_{\omega(i-1)} \right] = 0, \quad (16)$$

$$f_{2i} = \hat{E}_i - E_i + \xi_i \left[(E s \hat{w})_{\omega(i)} - (E s \hat{w})_{\omega(i-1)} + \hat{P}_i \left((s \hat{w})_{\omega(i)} - (s \hat{w})_{\omega(i-1)} \right) \right] = 0, \quad (17)$$

$$\xi_i = \tau / V_{\Omega(i)}.$$

В ячейках-стыках, $\Omega_{ct}(m), m = 1, \dots, M_{ct}$:

$$f_{1\Omega_{ct}(m)} = \hat{\rho}_{\Omega_{ct}(m)} - \rho_{\Omega_{ct}(m)} + \xi_{\Omega_{ct}(m)} \sum_{j=1}^{n(m)} (\rho^{up} s \hat{w})_{\omega_{ct}(j, m)} \mathcal{G}_j = 0, \quad (18)$$

$$f_{2\Omega_{ct}(m)} = \hat{E}_{\Omega_{ct}(m)} - E_{\Omega_{ct}(m)} + \xi_{\Omega_{ct}(m)} \sum_{j=1}^{n(m)} \left[E_{\omega_{ct}(j, m)}^{up} + \hat{P}_{\Omega_{ct}(m)} \right] (s \hat{w})_{\omega_{ct}(j, m)} \mathcal{G}_j = 0, \quad (19)$$

где $\xi_{\Omega_{ct}(m)} = \tau / V_{\Omega_{ct}(m)}, \mathcal{G}_j = \mathcal{G}(j, m)$.

7. Разностная схема для уравнения баланса импульса

Разностная аппроксимация уравнения движения (импульса) (8) осуществляется в узлах разностной сетки с помощью двухслойной по времени разностной схемы:

$$\left(s \rho_\omega w_{x, \omega} \right)_t + \left\langle \hat{J}_{x, \Omega} \right\rangle_\omega + \left\langle s \nabla_x \hat{P}_\Omega \right\rangle_\omega = 0,$$

сюда входят аппроксимации на приузловом домене $d(\omega_i^{(k)})$ операторов дивергенции вектора потока импульса и градиента давления, причем заданных в ячейках.

$\vec{J}_{x, \Omega} = (\rho s w_x \hat{w})_\Omega$ – вектор потока импульса в ячейке для проекции вектора скорости на координатное направление, $w_x = \hat{w} \vec{l}_x$.

Заметим, что величину $J_{x, \Omega} = (\rho s w_x^2)_\Omega$ в ячейках можно аппроксимировать разными способами, например, полагать

$$\vec{J}_{x, \Omega} = \frac{\rho_\Omega}{s_\Omega} (s w_x)_{\Omega, up}^2 \quad \text{либо брать «напрямую»} \quad \vec{J}_{x, \Omega} = \rho_\Omega (s w_x^2)_{\Omega, up}.$$

Первый способ предпочтительней в случае резкого изменения площади сечения вдоль трубы. Ниже рассмотрен второй способ аппроксимации.

Согласно (11) имеем

$$\text{Div}_\omega \vec{J}_{x,\Omega} = \sum_{\sigma(\omega)} (\rho s w_x^2)_\sigma n_\sigma.$$

Заметим, что проекцию градиента на координатное направление можно представить в виде оператора дивергенции (при условии постоянства вектора направления \vec{l}_x , что выполняется в рамках приузлового домена):

$$\text{grad}_x P = \vec{\nabla} P \cdot \vec{l}_x = \text{div}(P \vec{l}_x).$$

Тогда соответствующая аппроксимация оператора градиента давления осуществляется также с помощью (11):

$$v_\omega \langle s \vec{\nabla}_x P \rangle_\omega = s \cdot \text{Div}_\omega (P \vec{l}_x) = s \sum_{\sigma(\omega)} (P \vec{l}_x)_\sigma \vec{n}_\sigma = s \sum_{\sigma(\omega)} P_\sigma n_\sigma.$$

Следовательно, имеем следующую разностную аппроксимацию уравнения движения (импульса) на приузловом домене $d(\omega_i^{(k)})$:

$$v_\omega (\rho_\omega w_\omega)_t + \text{Div}_\omega \hat{J}_{x,\Omega} + s_\omega \text{Div}_\omega (\hat{P}_\Omega \vec{l}_x) = 0.$$

Под разностной производной по времени содержится проекция в узел функции плотности, заданной в ячейках, для которой будем использовать симметричную аппроксимацию по смежным ячейкам, содержащим узел:

$$\rho_{\omega(i)} = [\Omega(\omega_i) = \{\Omega_i, \Omega_{i+1}\}] = (\rho_{\Omega(i)} + \rho_{\Omega(i+1)}) / 2$$

- используется, что любой узел $\omega_i^{(k)}$ трубы является границей между двумя смежными ячейками $\Omega_i^{(k)}, \Omega_{i+1}^{(k)}$. Отсюда также следует, что приузловой домен $d(\omega_i^{(k)})$ будет состоять из частей этих двух смежных ячеек.

Следует отдельно рассмотреть аппроксимацию дивергенции во внутренних и приграничных узлах.

Для **внутренних узлов** трубы k , $\omega_i^{(k)}$, $1 \leq i \leq N_k - 1$, граница приузлового домена состоит из центров двух смежных ячеек, содержащих узел:

$$\sigma(\omega_i^{(k)}) = \{\Omega_i^{(k)}, \Omega_{i+1}^{(k)}, 1 \leq i \leq N_k - 1\},$$

$\Omega_i^{(k)}$ – обозначение центра ячейки.

В результате, при $1 \leq i \leq N_k - 1$, имеем следующее выражение для аппроксимации дивергенции во внутренних узлах (опуская указание номера трубы и обозначая $\Omega(i) = \Omega_i^{(k)}$):

$$\begin{aligned}\text{Div}_\omega \vec{J}_{x,\Omega} &= \hat{\rho}_{\Omega(i+1)}(s\hat{w}^2)_{\Omega(i+1)} - \hat{\rho}_{\Omega(i)}(s\hat{w}^2)_{\Omega(i)}, \\ \text{Div}_\omega (\hat{P}_\Omega \vec{l}_x) &= \hat{P}_{\Omega(i+1)} - \hat{P}_{\Omega(i)}.\end{aligned}$$

При определении значений потока импульса в ячейке используется **up wind** на основании значений скорости течения в узлах, составляющих ячейку:

$$(s\hat{w}^2)_{\Omega(i)} = (s\hat{w}^2)_{\Omega(i)}^{up} = \begin{cases} (s\hat{w}^2)_{\omega(i-1)}, & \text{if } \tilde{w}_{\omega(i-1)} > 0 \ \& \ \tilde{w}_{\omega(i)} > 0, \\ (s\hat{w}^2)_{\omega(i)}, & \text{if } \tilde{w}_{\omega(i-1)} < 0 \ \& \ \tilde{w}_{\omega(i)} < 0, \\ 0, & \text{if } \tilde{w}_{\omega(i-1)} \tilde{w}_{\omega(i)} < 0 \end{cases}, \quad (20)$$

т.к. $\omega(\Omega(i)) = \{\omega(i-1), \omega(i)\}$.

Рассмотрим аппроксимацию дивергенции в приграничном узле $\omega_{\text{ct}}(j, m)$, принадлежащем множеству приграничных узлов стыка под номером m , $\Omega_{\text{ct}}(m)$. Напомним, что в наших обозначениях множество всех приграничных узлов стыка $\Omega_{\text{ct}}(m)$ равно $\omega(\Omega_{\text{ct}}(m)) = \{\omega_{\text{ct}}(i, m), i = 1, \dots, n(m)\}$.

Приузловой домен для $\omega_{\text{ct}}(j, m)$ состоит из объемов, принадлежащих двум смежным ячейкам, $\Omega_1(j, m), \Omega_2(j, m)$ (ячейки расположены в порядке следования вдоль положительного направления трубы под номером $k = k_{\text{ct}}(j, m)$), идентификации которых зависят от знака $\mathcal{G}(j, m)$:

$$\Omega_1(j, m) = \begin{cases} \Omega_{\text{ct}}(m), & \mathcal{G}(j, m) > 0, \\ \Omega_{N_k}^{(k)}, & \mathcal{G} < 0 \end{cases}; \quad \Omega_2(j, m) = \begin{cases} \Omega_1^{(k)}, & \mathcal{G}(j, m) > 0, \\ \Omega_{\text{ct}}(m), & \mathcal{G} < 0 \end{cases}$$

В результате имеем следующую аппроксимацию дивергенции потока на приграничном узле $\omega_{\text{ct}}(j, m)$:

$$\begin{aligned}\text{Div}_{\omega_{\text{ct}}(j, m)} J_{x,\Omega} &= \hat{\rho}_{\Omega_2(j, m)}(s\hat{w}^2)_{\Omega_2(j, m)}^{up} - \hat{\rho}_{\Omega_1(j, m)}(s\hat{w}^2)_{\Omega_1(j, m)}^{up}, \\ (\text{grad}_x \hat{P}_\Omega)_{\omega_{\text{ct}}(j, m)} &= \text{Div}_{\omega_{\text{ct}}(j, m)} (\hat{P}_\Omega \vec{l}_x) = \hat{P}_{\Omega_2(j, m)} - \hat{P}_{\Omega_1(j, m)}.\end{aligned}$$

Величины плотности и давления определяются непосредственно в ячейках, причем неявным образом. Тогда как для нахождения величины переноса импульса течения в ячейках используется **up wind** на основании значений скорости течения через границы соответствующих ячеек. В случае, когда $\Omega_1(j, m)$ или $\Omega_2(j, m)$ равны внутренним ячейкам трубы (т.е. равны $\Omega_1^{(k)}$ или $\Omega_{N_k}^{(k)}$), имеем вышеуказанную формулу (20).

Если же $\Omega_1(j, m)$ или $\Omega_2(j, m)$ совпадают с ячейкой-стыком $\Omega_{\text{ct}}(m)$, тогда граница приузловой домена для узла $\omega_{\text{ct}}(j, m)$ в этой ячейке-стыке будет состоять из $n-1$ участков, отвечающих всем парам соединений труб j и i ,

$\{(j, i), i = 1, \dots, n(m), i \neq j\}$. Такая совокупность, которую мы будем обозначать как $\Sigma(j, m) = \bigcup_{i \neq j} \sigma_{j,i}(m)$, образует некую «эквивалентную трубу», оппозиционную рассматриваемой трубе j . При таком подходе стык с точки зрения трубы j рассматривается как соединение этой трубы с некой эквивалентной трубой, представляющей объединение потоков всех остальных труб стыка. Поток импульса через границу эквивалентной трубы будем полагать равным сумме потоков через приграничные узлы во всех трубах, составляющих эквивалентную трубу:

$$(s\hat{w})_{\Sigma(j,m)} = \sum_{i \neq j} (s\hat{w} \mathcal{G})_{\omega_{\text{cr}}(i,m)},$$

ПОЭТОМУ

$$(s\hat{w}^2)_{\Sigma(j,m)} = [(s\hat{w})_{\Sigma(j,m)}]^2 / \left(\sum_{i \neq j} s_{\omega_{\text{cr}}(i,m)} \right).$$

Запишем получающуюся в итоге разностную схему для уравнения (8) в узлах в виде системы нелинейных разностных уравнений относительно величин на верхнем слое по времени.

Во внутренних узлах трубы k , $\omega_i^{(k)}$, $1 \leq i \leq N_k - 1$:

$$\begin{aligned} f_{3i} = & \frac{\hat{\rho}_i + \hat{\rho}_{i+1}}{2} \hat{w}_{\omega(i)} - \frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{2} w_{\omega(i)} + \\ & + \zeta_{\omega(i)} \left[\hat{\rho}_{i+1} (s\hat{w}^2)_{\Omega_{i+1}}^{up} - \hat{\rho}_i (s\hat{w}^2)_{\Omega(i)}^{up} \right] + (s\zeta)_{\omega(i)} (\hat{P}_{i+1} - \hat{P}_i) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\zeta_{\omega(i)} = \tau / v_{\omega(i)}$.

В каждом приграничном узле $\omega_{\text{cr}}(j, m)$ стыка $m, j = 1, \dots, n(m)$ имеем:

$$\begin{aligned} f_{3\omega_{\text{cr}}(j,m)} = & \frac{\hat{\rho}_{\Omega_1} + \hat{\rho}_{\Omega_2}}{2} \hat{w}_{\omega_{\text{cr}}(j,m)} - \frac{\rho_{\Omega_1} + \rho_{\Omega_2}}{2} w_{\omega_{\text{cr}}(j,m)} + \\ & + \zeta_{\omega_{\text{cr}}(j,m)} \left[\hat{\rho}_{\Omega_2} (s\hat{w}^2)_{\Omega_2}^{up} - \hat{\rho}_{\Omega_1} (s\hat{w}^2)_{\Omega_1}^{up} \right] + (s\zeta)_{\omega_{\text{cr}}(j,m)} (\hat{P}_{\Omega_2} - \hat{P}_{\Omega_1}) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть для определенности $\mathcal{G}(j, m) > 0$. Тогда смежные ячейки, между которыми находится узел $\omega_{\text{cr}}(j, m) = \omega_0^{(k)}$, будут:

$$\Omega_1 = \Omega_1(j, m) = \Omega_{\text{cr}}(m); \quad \Omega_2(j, m) = \Omega_1^{(k)};$$

причем границы этих ячеек равны:

$$\sigma(\Omega_1) = \{\Sigma(j, m), \omega_{\text{cr}}(j, m)\}, \quad \sigma(\Omega_2) = \{\omega_{\text{cr}}(j, m), \omega_1^{(k)}\},$$

Обозначение σ вместо ω используется для обозначения границы ячейки в силу того, что в ячейках-стыках граница не совпадает с узлами, $\sigma = \Sigma(j, m)$, будучи

границей (условной) эквивалентной трубы. Для нахождения значений потока импульса в ячейке используется **up wind** на основании значений скорости течения на границах ячейки $\sigma(\Omega_1)$.

Аналогичные соотношения несложно получить и в случае $\mathcal{G}(j, m) < 0$.

8. Свободный конец трубы

Отдельно следует рассмотреть случай свободного конца трубы, когда на одном из концов трубы k находится не полноценный стык с другими трубами, а, например, заглушка. В этом случае уравнения вида (18), (19), очевидно, отсутствуют. Остальные разностные уравнения справедливы.

Пусть свободный конец находится на левом конце трубы k (обозначим его как «а») и формально отвечает стыку номер m , содержащему всего одну трубу, k . Разностное уравнение для импульса (22) в левом приграничном узле (а), $\omega_{\text{ст}}(j_a, m_a) = \omega_0^{(k)}$ в рассматриваемом случае принимает следующий вид

$$f_{3a} = \frac{\hat{\rho}_a + \hat{\rho}_1}{2} \hat{w}_0 - \frac{\rho_a + \rho_1}{2} w_0 + \zeta_0 \left[\hat{\rho}_1 (s\hat{w}^2)_{\Omega_2}^{up} - \hat{\rho}_a (s\hat{w}^2)_{\Omega_1}^{up} \right] + s_0 \zeta_0 (\hat{P}_1 - \hat{P}_a) = 0,$$

где

$$\hat{\rho}_1 (s\hat{w}^2)_{\Omega_2}^{up} - \hat{\rho}_a (s\hat{w}^2)_{\Omega_1}^{up} = \begin{cases} \hat{\rho}_1 (s\hat{w}^2)_{\Sigma_a} - \hat{\rho}_a (s\hat{w}^2)_{\omega_0}, \hat{w}_{\Sigma_a} > 0 \\ \hat{\rho}_1 (s\hat{w}^2)_{\omega_0} - \hat{\rho}_a (s\hat{w}^2)_{\omega_1}, \hat{w}_{\Sigma_a} < 0 \end{cases}.$$

Из записи этого уравнения следует, что в случае свободного левого конца трубы на этом конце должны быть заданы:

ρ_a, P_a – значения термодинамических величин;

кроме того, в случае положительного направления скорости течения должно быть задано значение скорости, \hat{w}_{Σ_a} , причем положительное.

В случае свободного правого конца трубы (b) аналогично можно получить, что на этом конце должны быть заданы:

ρ_b, P_b – значения термодинамических величин;

кроме того, в случае отрицательного направления скорости течения, должно быть задано значение скорости на правом конце трубы, \hat{w}_{Σ_b} , причем отрицательное.

Таким образом, из структуры разностных уравнений можно заключить, какие требуются граничные условия на свободном конце трубы, причем вопрос, нужно ли задавать на данном конце скорость и какого знака, зависит от направления течения в трубе.

9. Решение итерационным методом Ньютона

Будем решать построенную систему (16) - (19), (21), (22) итерационным методом Ньютона [6,10,11].

9.1. Метод Ньютона

Напомним описание метода Ньютона. Метод Ньютона является эффективным итерационным способом решения систем нелинейных уравнений вида

$$F_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, \dots, N, \quad \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N) - \text{вектор неизвестных.}$$

Применение метода Ньютона на каждой s -ой итерации, как известно, сводится к построению и решению линеаризованной системы уравнений в приращениях неизвестных:

$$\sum_{j=1}^N F_{i,j}^s \delta X_j^{s+1} = -F_i^s, i = 1, \dots, N, \quad (22)$$

где $F_{i,j}^s = \partial F_i^s / \partial X_j$, $F_i^s = F_i(X_1^s, \dots, X_N^s)$,

$\delta X_j^{s+1} = X_j^{s+1} - X_j^s$ – приращение неизвестных на s -ой итерации.

После решения этой системы и нахождения соответствующих приращений определяем значения неизвестных на следующей ньютоновской итерации:

$$X_j^{s+1} = X_j^s + \delta X_j^{s+1}, j = 1, \dots, N.$$

При этом на каждой итерации необходимо, вообще говоря, проверять получающееся в процессе итераций решение на удовлетворение неких априорных ограничений, вытекающих из условий задачи, и при нарушении принимать меры по их устранению.

Итерации продолжаются, пока не будет выполнено какое-нибудь условие сходимости, означающее, что приращение на итерациях стало достаточно мало и, следовательно, достигнута требуемая точность вычислений. Например, в качестве условия сходимости часто берут следующее:

$$\|\delta X^{s+1}\| < \varepsilon_1 \|X^s\| + \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – параметры точности, $\|\cdot\|$ – какая-либо норма решения, например, $\|\cdot\|_C$.

Есть варианты организации итераций, когда производные берутся приблизительно:

$$F_{i,j}^s = \frac{F_i(X_1^s, \dots, \tilde{X}_j^s, \dots, X_N^s) - F_i(X_1^s, \dots, X_j^s, \dots, X_N^s)}{\tilde{X}_j^s - X_j^s},$$

где $\tilde{X}_j^s = X_j^s(1 + \varepsilon)$ – **квазиньютон**, либо $\tilde{X}_j^s = X_j^{s-1}$ – **метод секущих**.

Указанные варианты будут предпочтительней, когда точное вычисление производных $\partial F_i^s / \partial X_j$ затруднительно или громоздко. Отметим, однако, что при «неточном» ньютоне снижается скорость сходимости итераций.

9.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Применение итерационного метода Ньютона приводит к необходимости решения на каждой итерации системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Существуют точные методы решения СЛАУ, например, метод исключения неизвестных Гаусса [10,11]. Область его применения, однако, практически ограничена случаем СЛАУ небольшой размерности.

В одномерном случае существует точный метод решения системы n -точечных линейных разностных уравнений ($n = 3, 4, 5 \dots$) - известный метод прогонки [6,7].

В общем случае решение СЛАУ большой размерности производится, как правило, путем специальных итерационных процессов [8,12-15], при построении которых максимально используется информация о матрице решаемой системы. Например, учитываются такие свойства, как разреженность матрицы (большое число нулей), диагональное преобладание, блочная структура и др. Упомянем такие наиболее простые итерационные методы решения СЛАУ, как метод простой итерации, верхней релаксации, сопряженных градиентов.

В последнее время развивается подход, при котором строится так называемый **предобуславливатель**, представляющий собой специально подобранную матрицу, умножение на которую матрицы решаемой системы, приводит к системе с более «хорошей» матрицей (например, стремятся получить матрицу системы, близкую к диагональной).

9.3. Линеаризация разностной схемы для ньютоновских итераций

Произведем соответствующую линеаризацию уравнений (16) - (19), (21), (22) для приведения к виду (23) и организации ньютоновских итераций.

Рассмотрим произвольную трубу k , имеющую на концах стыки (включая стыки из одной трубы, означающие свободный конец трубы) и произведем линеаризацию уравнений (16)-(17), (18)-(19) и (21)-(22), относящихся к этой трубе. Для упрощения изложения конкретизируем, что на левом конце труба выходит из стыка “ a ” (стыка под номером m_a), а на правом – входит в другой стык, “ b ” (стык под номером m_b), причем приграничные узлы данных стыков на левом и правом концах трубы k будут, соответственно, $\omega_{\text{ст}}(j_a, m_a)$ и $\omega_{\text{ст}}(j_b, m_b)$.

Направление течения в данной трубе выберем совпадающим с положительным направлением.

Ниже будем использовать сокращенную нумерацию для ячеек и узлов трубы k :

$$\rho_i = \rho_{\Omega(i)}, P_i = P_{\Omega(i)}, w_i = w_{\omega(i)}, s_i = s_{\omega(i)};$$

$$\rho_a = \rho_{\Omega_{\text{ст}}(m_a)}, \rho_b = \rho_{\Omega_{\text{ст}}(m_b)}, P_a = P_{\Omega_{\text{ст}}(m_a)}, P_b = P_{\Omega_{\text{ст}}(m_b)}$$

– плотность и давление на стыках a, b ; номер итерации s будем опускать; вместо функции внутренней энергии будем использовать функцию давления, P , т.к. в нашем случае $E = \alpha P$.

Имеем: $\rho_{\omega(i)}^{up} = \rho_i$, $(s\tilde{w}^2)_{\Omega(i)}^{up} = (s\tilde{w}^2)_{i-1}$ и т.д., так как по предположению $\tilde{w}_i > 0$.

Линеаризация разностных схем для уравнений баланса массы и внутренней энергии (16), (17) **во внутренних ячейках**, $\Omega_i^{(k)}$, $1 \leq i \leq N_k$ трубы k позволяет выразить приращения плотности и давления в этих ячейках через приращения скорости:

$$\delta\rho_i = -\xi_i [\rho_i (s\delta w)_i - \rho_{i-1} (s\delta w)_{i-1}] - \tilde{f}_{1i}, \quad (24)$$

$$\delta P_i = -\frac{\xi_i}{\eta_i} [(\alpha P_i + \tilde{P}_i)(s\delta w)_i - (\alpha P_{i-1} + \tilde{P}_i)(s\delta w)_{i-1}] - \frac{\tilde{f}_{2i}}{\eta_i} \quad (25)$$

$$\eta_i = [\alpha + \xi_i ((s\tilde{w})_i - (s\tilde{w})_{i-1})],$$

$\tilde{f}_{1i} = f_{1i}^s = f_1(\tilde{\rho}_i, \tilde{w}_{i-1}, \tilde{w}_i)$, $\tilde{\rho}_i = \rho_i^s$ и т.д. Волной обозначены значения на предыдущей, s -ой итерации.

Линеаризуя уравнения баланса массы и энергии (18)-(19) для ячеек-стыков a, b на концах рассматриваемой трубы k , выразим приращения плотности и давления на этих стыках через приращения скорости на множестве приграничных узлов стыков:

$$\delta\rho_a = -\xi_a \sum_{j=1}^{n(m_a)} (\rho^{up} s\delta w)_{\omega_j} \mathcal{G}_j - \tilde{f}_{1a}, \quad (26)$$

$$\delta P_a = -\frac{\xi_a}{\eta_a} \sum_{j=1}^{n(m_a)} (\alpha P_{\omega_j}^{up} + \tilde{P}_a)(s\delta w)_{\omega_j} \mathcal{G}_j - \frac{\tilde{f}_{2a}}{\eta_a} \quad (27)$$

$$\eta_a = \alpha + \xi_a \sum_{j=1}^{n(m_a)} (s\tilde{w})_{\omega_j} \mathcal{G}_j, \quad \omega_j = \omega_{\omega_{cr}}(j, m_a), \quad \mathcal{G}_j = \mathcal{G}(j, m_a).$$

Аналогичные выражения нетрудно получить и для стыка b на противоположном конце трубы.

Линеаризация уравнения баланса импульса (21) для внутренних узлов $\omega_i^{(k)}$, $0 < i < N_k$, трубы k дает:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta\rho_i + \delta\rho_{i+1}}{2} \tilde{w}_i + \frac{\tilde{\rho}_i + \tilde{\rho}_{i+1}}{2} \delta w_i + 2\xi_i [\rho_{i+1} (s\tilde{w}\delta w)_{i+1}^{up} - \rho_i (s\tilde{w}\delta w)_i^{up}] + \\ & + s_i \xi_i (\delta P_{i+1} - \delta P_i) = -\tilde{f}_{3i} \end{aligned}, \quad (23)$$

$$(s\tilde{w}\delta w)_{i+1}^{up} = (s\tilde{w}\delta w)_i.$$

Линеаризация уравнения импульса (22) для левого приграничного узла $\omega_a = \omega_{ct}(j_a, m_a)$ трубы k приводит к уравнению:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\delta\rho_a + \delta\rho_1)\tilde{w}_{\omega_a} + \frac{1}{2}(\tilde{\rho}_a + \tilde{\rho}_1)\delta w_{\omega_a} + (s\zeta)_{\omega_a}(\delta P_1 - \delta P_a) + \\ & + 2\zeta_{\omega_a} \left[\rho_{\Omega_2} (s\tilde{w}\delta w)_{\Omega_2}^{up} - \rho_a (s\tilde{w}\delta w)_{\omega_{up}(\Omega_1)} \right] = -\tilde{f}_{3a} \end{aligned} \quad (29)$$

Для правого приграничного узла $\omega_b = \omega_{ct}(j_b, m_b)$ нетрудно получить линеаризованный вид аналогичного уравнения.

Отдельно следует рассмотреть случай свободного конца трубы.

9.4. Организация ньютоновских итераций

Полученная линейная система (24)-(29) уравнений на множестве ячеек и узлов всех труб образует полную систему уравнений для приращений базовых неизвестных, решая которую можно определить все приращения на текущей ньютоновской итерации и перейти к следующей итерации.

Заметим, что размерность общей системы можно сократить, выразив приращения плотности и давления через приращения скорости, используя (24)-(27) и подставив полученные выражения в (28)-(29). При этом получим, что в каждой отдельной трубе k система уравнений для приращений скорости на s -ой итерации имеет вид 3-точечного разностного уравнения вида:

$$A_{i,k}^s Y_{i-1} - C_{i,k}^s Y_i + B_{i,k}^s Y_{i+1} = -F_{i,k}^s + \delta_{i,0} \pi_{a,k}^s + \delta_{i,N_k} \pi_{b,k}^s, \quad 0 \leq i \leq N_k, \quad (30)$$

где $Y_i = \delta w_{i,k}^s$ – приращения скорости на s -ой итерации в узлах трубы k ,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j; \end{cases}$$

$\pi_{a,k}^s, \pi_{b,k}^s$ – линейные комбинации приращений скорости в приграничных узлах труб стыков, находящихся на левом (a) и правом (b) концах трубы k .

Эффективным методом решения полученной системы (30) является применение известного метода трехточечной прогонки [6,7] на каждой трубе k , если брать члены в правой части (30), содержащие приращения неизвестных на других трубах, с предыдущей итерации, $\pi_{a,k}^{s-1}, \pi_{b,k}^{s-1}$.

Решая на s -ой итерации уравнение (30) на каждой трубе трубопровода, получим приращения скорости во всех узлах сети на данной итерации. После чего определяем скорости, плотности и давления на следующей ньютоновской итерации, переходим к новой итерации и т.д.

Отметим, что сведение интегрирования полной системы уравнений в приращениях к решению на каждой итерации серии независимых друг от друга 3-точечных уравнений методом прогонки позволяет эффективно распараллелить процесс решения. Заметим, однако, что при таком подходе увеличивается число ньютоновских итераций, требуемых для расчета временного слоя по сравнению с «полным» Ньютоном.

10. Результаты расчета системы из 3 труб с тройником

Вышеописанный алгоритм расчета был реализован авторами работы в виде программного кода на компьютере. Для апробации предложенной методики и программного кода был проведен ряд численных экспериментов. Ниже показан пример расчета трубопроводной системы из трех труб, соединенных через тройник (см. рис.2).

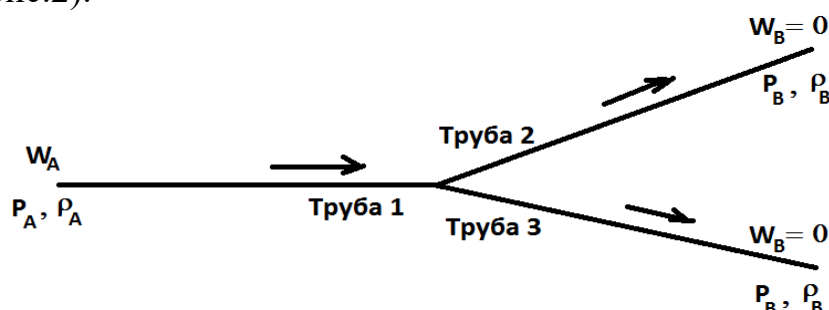


Рис.2. Система из трех труб, соединенных через стык-тройник. Стрелками показано направление течения в трубах.

Труба 1 входит в тройник. Трубы 2 и 3 из него выходят. Трубы одинаковые, длиной в 1 м и постоянным сечением в 0.1 м^2 .

На входе в первую трубу (на ее левом конце) задаются давление, плотность и скорость:

$$P = P_A = 2; \rho = \rho_A = 1.740648; W = W_A = 0.652304$$

Используем систему единиц СИ: давление измеряется в паскалях, скорость в м/с, плотность в кг/м^3 .

На выходе (на правых концах второй и третьей трубы) заданы плотность и давление:

$$P = P_B = 1; \rho = \rho_B = 1$$

В начальный момент задано покоящееся одинаковое состояние среды во всех трубах: $P = P_0 = 1; \rho = \rho_0 = 1; W = W_0 = 0$.

В силу того что $P_A > P_B$, течение направлено слева направо, скорости во всех трубах положительны.

Указанные граничные условия соответствуют соотношениям Гюгонио для ударной волны. Напомним эти соотношения (см. [6, 16]).

Рассматривается ударная волна (УВ), распространяющаяся слева направо со скоростью D по покоящемуся фону с постоянными значениями давления,

плотности и скорости, равной нулю. Эти значения, отвечающие значениям справа от разрыва (перед фронтом УВ), будем обозначать индексом «0». Постоянные значения слева от разрыва (за фронтом УВ) будем обозначать индексом «1».

Пусть заданы фоновые (начальные) значения: $\rho_0, P_0, W_0 = 0$, а также задан один из параметров за фронтом разрыва, например P_1 . Надо определить все остальные параметры слева от разрыва и скорость распространения разрыва: ρ_1, W_1, D . Обозначим $\eta = 1/\rho, u = W - D$. Имеем следующую систему уравнений, связывающую параметры перед и за фронтом УВ:

$$\frac{u_0^2}{\eta_0^2} = \frac{u_1^2}{\eta_1^2} = \frac{P_1 - P_0}{\eta_0 - \eta_1},$$

$$\varepsilon_1(P_1, \eta_1) - \varepsilon_0(P_0, \eta_0) = \frac{1}{2}(P_0 + P_1)(\eta_0 - \eta_1)$$

Последнее соотношение называют адиабатой Гюгонио. В случае идеального газа соотношения Гюгонио можно представить в следующем виде:

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{(\gamma + 1)\alpha + (\gamma - 1)}{(\gamma + 1) + (\gamma - 1)\alpha},$$

где $\alpha = P_1 / P_0$, γ – показатель адиабаты.

$$D = \sqrt{\frac{P_0}{2\rho_0} [(\gamma - 1) + (\gamma + 1)\alpha]}, \quad W_1 = D - \sqrt{\frac{P_1}{2\rho_1} [(\gamma - 1) + (\gamma + 1)/\alpha]}.$$

В качестве флюида в трубах берется газ – метан. Используем уравнения состояния идеального газа (6).

$$\text{Для метана } \mu = 16 \frac{\text{kg}}{\text{kmole}}, \quad c_s = 2226 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, \quad \gamma = 1.233.$$

Выбирая параметры $P_1 = 2, P_0 = 1, \rho_0 = 1, W_0 = 0$,

из соотношений Гюгонио получим: $\rho_1 = 1.740648, W_1 = 0.652304, D = 1.533026$.

Эти параметры задавались в качестве соответствующих граничных условий.

В каждой трубе введена расчетная сетка, состоящая из N_c ячеек. Узлов, соответственно, будет на 1 больше.

На следующих рисунках 3-6 представлены результаты расчетов плотности, давления и скорости в системе труб на ряд моментов времени ($t=0.3, 0.6, 0.9, 1.2$ с) на сетке с $N_c=100$ и с шагом по времени $\tau=0.001$.

Результаты расчетов в трубах 2 и 3 совпадают, как и должно быть в силу симметрии задачи. Поэтому представлены результаты только для трубы 2, причем на одном графике с результатами для трубы 1: трубе 1 отвечает область $0 < x < 1$, а трубе 2 область $1 < x < 2$. Тройнику на графике отвечает координата $x=1$. На рисунках синий цвет отвечает графику плотности, красный – давлению, зеленый – скорости.

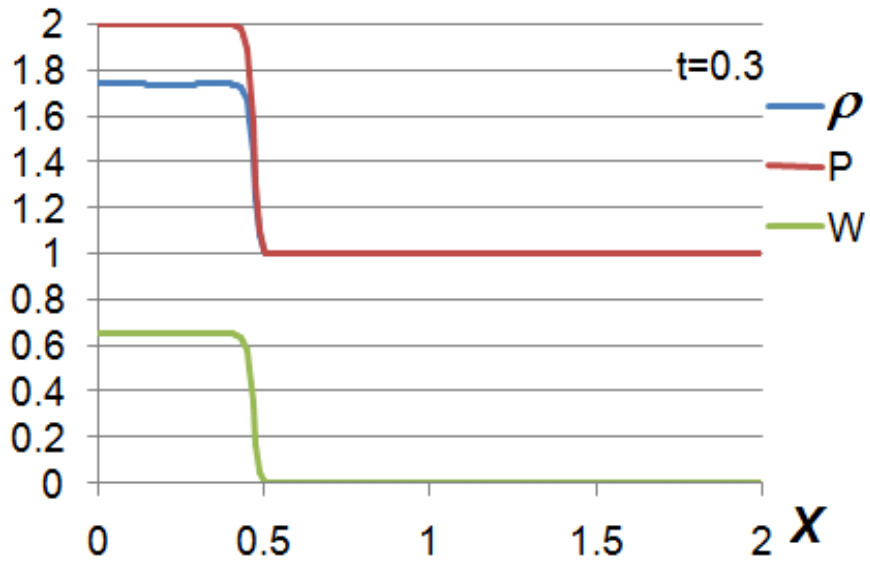


Рис.3. Момент времени $t = 0.3$

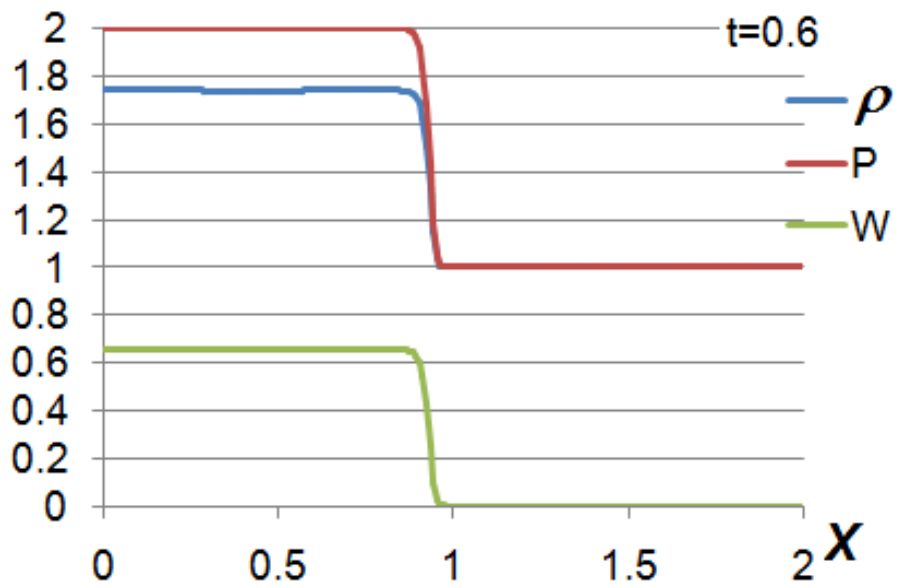


Рис.4. Момент времени $t = 0.6$

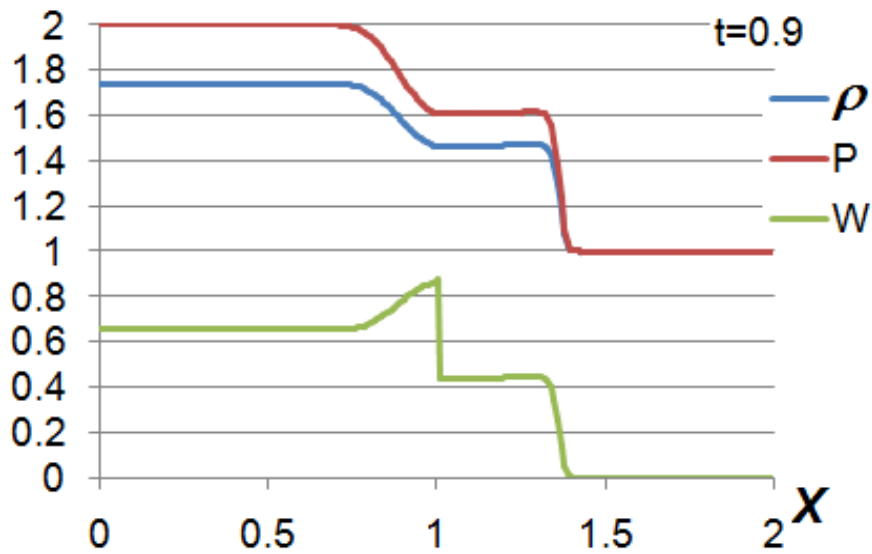


Рис.5. Момент времени $t = 0.9$

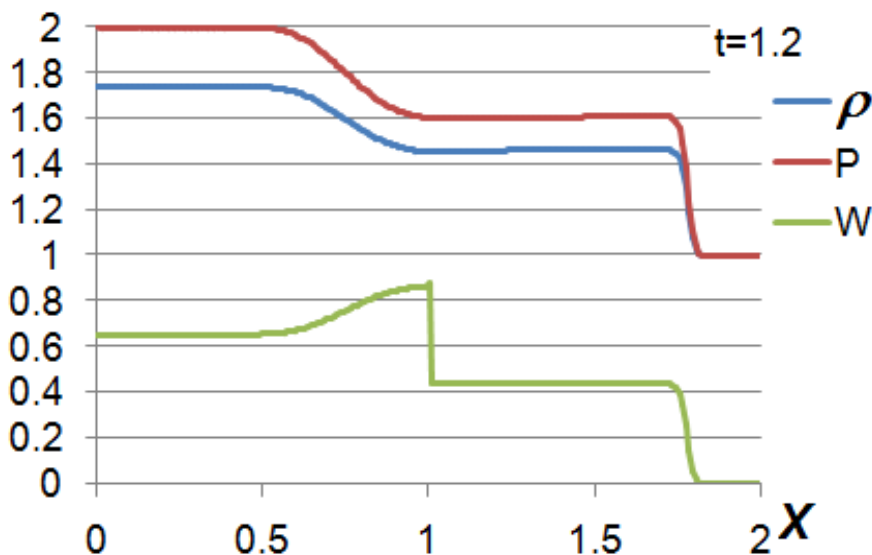


Рис.6. Момент времени $t = 1.2$

На рисунках 3,4 видно, что, как и ожидалось, в первой трубе формируется УВ. Скорость ее распространения соответствует скорости, полученной из соотношений Гюгоню, $D=1.533$.

При подходе этой ударной волны к тройнику возникает «горб» скорости течения на правом конце трубы 1 и формируется волна разрежения, идущая от тройника справа налево (см. рис.5,6).

Во второй трубе формируется своя УВ (см. рис.5,6). Наблюдаемая в расчете скорость ее распространения, $D2=1.384$.

Заметим, что скорость W на левом конце трубы 2 (отвечающем выходному течению из тройника) получается почти в 2 раза меньше скорости на правом конце трубы 1 (отвечающем входному течению в тройник). На рисунках, отвечающих $t=0.9$ и $t=1.2$, наблюдаются небольшие скачки давления и

плотности на тройнике. Если пренебречь этими скачками, можно считать, что плотность и давление на тройнике близки к непрерывным (значения на правом конце трубы 1 и на левом конце трубы 2 примерно равны).

Заключение

В работе разработана методика расчета течения в трубопроводной системе на основе квазиодномерной (усредненной по поперечному сечению трубы) системы классических уравнений сохранения массы, энергии и импульса в переменных Эйлера. Построена консервативная разностная схема, аппроксимирующая уравнения баланса массы, энергии и импульса, в которой выполнены сеточные аналоги основных законов сохранения и удовлетворяются критерии устойчивости и монотонности решения. Для расчета временного шага используется итерационный метод Ньютона, требующий при своем «оригинальном» применении, вообще говоря, решения на каждой итерации системы линеаризованных уравнений большой размерности.

В работе предложено использовать «неполный» Ньютон, в котором на каждой итерации общая задача расчета приращений неизвестных в системе труб разбивается на совокупность подзадач расчета в каждой трубе по отдельности. Причем расчет в каждой трубе осуществляется независимо от остальных труб путем известного эффективного метода 3-точечной прогонки.

При данном подходе, в отличие от «полного» Ньютона, несложно организовать распараллеливание процесса вычислений очевидным образом. Это открывает перспективы для использования данного метода в многопроцессорных вычислительных комплексах, включая гибридные системы.

Соответствующий предложенной схеме вычислений алгоритм расчета был реализован авторами в виде программного кода на компьютере.

В работе приведены результаты численных расчетов, демонстрирующие работоспособность разработанной методики и программного кода.

Библиографический список

[1] Ашметков И.В., Мухин С.И., Соснин Н.В., Фаворский А.П. Краевая задача для ЛГД уравнений на графе // Препринт. – М.: МАКС Пресс, 2002 г. – 88 с.

[2] Фаворский А.П., Ашметков И.В., Мухин С.И., Соснин Н.В. Краевая задача для линеаризованных гемодинамических уравнений на графе // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 78-84.

[3] Ртищева А.С. Теоретические основы гидравлики и теплотехники: Учебное пособие. – Ульяновск, УлГТУ, 2007. – 171 с. ISBN 5-06-003712-6

- [4] Брюханов О.Н. Основы гидравлики и теплотехники: Учебник для сред. проф. образования / О.Н. Брюханов, А.Т. Мелик-Аракелян, В.И. Коробко. — М.: Издательский центр «Академия», 2004. — 240 стр. ISBN 5-7695-1651-8
- [5] Повещенко Т.С., Гасилов В.А., Повещенко Ю.А., Галигузова И.И. Метод расчета многоконтурных термогидравлических течений в теплообменной части ЯЭУ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2015, № 67, 29 с.,
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-67>
- [6] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, Глав. ред. физ-мат. лит., 1980, - 352 стр.
- [7] Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977, - 656 стр.
- [8] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
- [9] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II. М.: Наука, Глав. ред. физ-мат. лит., 1973, - 448 стр.
- [10] Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Наука, Глав. ред. физ-мат. лит., 1973, - 632 стр.
- [11] Калиткин Н.Н. Численные методы / Учеб. пособие. -2-е изд., исправленное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 592 с. — ISBN 978-5-9775-0500-0, OCR.
- [12] Белов С.А., Золотых Н.Ю. Численные методы линейной алгебры. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2005.
- [13] Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
- [14] Dongarra J. et al. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods // SIAM, 1994.
- [15] Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems // SIAM, 2003
- [16] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, Глав. ред. физ-мат. лит., 1978, 688 стр.

Оглавление

1. Введение	3
2. Используемые приближения, модель трубопроводной сети	4
3. Математическая формулировка	5
4. Формализация графа трубопроводной сети и построение расчетной сетки	8
5. Разностная аппроксимация оператора дивергенции	10
5.1. Аппроксимация дивергенции в разностных ячейках	11
5.2. Аппроксимация дивергенции на приузловых доменах	11
6. Разностные схемы для уравнений баланса массы и внутренней энергии	12
7. Разностная схема для уравнения баланса импульса	14
8. Свободный конец трубы	18
9. Решение итерационным методом Ньютона	18
9.1. Метод Ньютона	19
9.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений	20
9.3. Линеаризация разностной схемы для ньютоновских итераций	20
9.4. Организация ньютоновских итераций	22
10. Результаты расчета системы из 3 труб с тройником	23
Заключение	27
Библиографический список	27