



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**[А.В. Александров,](#)
Л.В. Дородницын, Д.Р. Колюхин**

Стохастический алгоритм
генерации бездивергентного
анизотропного однородного
поля турбулентных
пульсаций скоростей

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Александров А.В., Дородницын Л.В., Колюхин Д.Р. Стохастический алгоритм генерации бездивергентного анизотропного однородного поля турбулентных пульсаций скоростей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 118. 17 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2020-118>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-118>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.В. Александров, Л.В. Дородницын, Д.Р. Колюхин

**Стохастический алгоритм генерации
бездивергентного анизотропного
однородного поля
турбулентных пульсаций скоростей**

Москва — 2020

Александров А.В., Дородницын Л.В., Колюхин Д.Р.

Стохастический алгоритм генерации бездивергентного анизотропного однородного поля турбулентных пульсаций скоростей

В работе предлагается методика генерации синтетического турбулентного поля, удовлетворяющего важнейшим свойствам: заданным тензору рейнольдсовых напряжений и энергетическому спектру, а также бездивергентности. Предложенная технология основана на полностью стохастическом рандомизированном спектральном методе. Проведена численная верификация статистических параметров построенных турбулентных полей.

Ключевые слова: синтетическая турбулентность, анизотропная турбулентность, рандомизированный спектральный метод

Alexandrov Anatoly, Dorodnicyn Ludwig, Kolyukhin Dmitry

Stochastic algorithm for generation of a divergence-free anisotropic homogeneous turbulent velocity fluctuation field

A method for the generation of a synthetic turbulent field is proposed in this paper. The velocity field generated satisfies three important properties: the given Reynolds stress tensor and energy spectrum, and, besides, incompressibility. The proposed technique is based on the fully stochastic Randomized Spectral Method. Statistical properties of the turbulent fields obtained have been verified numerically.

Key words: synthetic turbulence, anisotropic turbulence, Randomized Spectral Method

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00726-А.

Оглавление

Введение	3
Методика построения анизотропного турбулентного поля скорости	4
Построение полного спектрального тензора	5
Свойства тензоров анизотропного поля.....	8
Генерация поля пульсационных скоростей	10
Статистическая верификация метода.....	13
Заключение.....	15

Введение

Искусственно сгенерированные турбулентные поля широко востребованы. Их использование позволяет существенно сократить – иногда в несколько раз – вычислительную стоимость во многих задачах. Критерии качества сгенерированных полей до конца не понятны, однако обычно считается, что синтетическое поле должно передавать свойства реальной физической турбулентной среды [1]. К последним относятся спектральные, корреляционные характеристики, а также несжимаемость (бездивергентность).

Методы генерации искусственных турбулентных полей с заданными свойствами развиваются уже давно. Еще в 1970 году [2] был предложен спектральный метод генерации поля скоростей для моделирования диффузии в турбулентном потоке. Позже эта методика была развита во многих работах, например, [3 – 6].

Одним из наиболее перспективных подходов можно считать рандомизированный спектральный метод, глубокое теоретическое обоснование которого дается в [7 – 12]. Среди преимуществ данной методики следует указать полностью стохастический способ задания поля скоростей. В работе [13] были практически реализованы однородные изотропные трехмерные турбулентные поля, сгенерированные на основе рандомизированного спектрального метода. Было показано, что полученные поля обладают необходимыми спектральными и корреляционными свойствами.

Важными свойствами турбулентных полей, которые встречаются в большинстве прикладных задач, являются анизотропия и пространственная неоднородность. Желательно, чтобы синтетическое поле скоростей удовлетворяло с точки зрения статистики заданному полю тензора турбулентных напряжений Рейнольдса, при соблюдении остальных требований. В литературе, посвященной методам генерации синтетической турбулентности, не так много примеров, где бы явно учитывалась анизотропия поля.

В ряде работ, например [14 – 18], были предложены обобщения спектральных методов на случай неоднородных анизотропных случайных полей, основанные на масштабировании поля скорости. Построение анизотропного поля в таких методах происходит в два этапа. На первом этапе строится однородное изотропное турбулентное поле скорости. Построенное поле обычно обладает заданными спектральными и корреляционными свойствами, а также является бездивергентным. На втором этапе для адаптации к анизотропному случаю выполняется линейное масштабирование поля с учетом тензора рейнольдсовых напряжений. Последний подвергается факторизации: либо с помощью спектрального разложения [14], либо – чаще – путем разложения Холецкого [15 – 18]. При этом, однако, теряется свойство бездивергентности поля.

В настоящей работе предлагается методика построения анизотропных турбулентных полей, основанная на альтернативном подходе в рамках рандомизированного спектрального метода [7, 9, 12]. В целом методика схожа с масштабированием, применяемым в ранее известных спектральных методах, однако

имеются существенные отличия. Как и в вышеупомянутых алгоритмах, соответствующие моменты полученного поля совпадают с заданными компонентами тензора рейнольдсовых напряжений. При этом бездивергентность поля сохраняется и в анизотропном случае.

Далее мы объясним общий принцип получения искомого турбулентного поля скоростей, ключевым пунктом которого является использование полного спектрального тензора. Затем подробно будет изложен способ построения спектрального тензора: данная технология предлагается впервые. Остановимся на некоторых свойствах тензоров, участвующих в моделировании турбулентности. После этого приступим непосредственно к вопросу генерации случайного поля с заданными характеристиками. Численному исследованию построенных турбулентных полей будет посвящена завершающая часть работы.

Методика построения анизотропного турбулентного поля скорости

Поле пульсационных скоростей должно обладать тем свойством, что вторые моменты соответствуют компонентам тензора турбулентных напряжений Рейнольдса:

$$\langle u_i u_j \rangle = R_{ij}.$$

Здесь и далее угловые скобки обозначают вероятностное осреднение.

В спектральных методах генерации анизотропного турбулентного поля наиболее распространенный подход, который можно назвать традиционным, заключается в *масштабировании* (scaling) поля скоростей [14 – 18]. Он состоит из двух этапов.

1. Строится однородное изотропное бездивергентное поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, удовлетворяющее свойствам

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \langle v_i v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

2. Полученное поле подвергается линейному преобразованию (масштабированию) с применением факторизации матрицы тензора рейнольдсовых напряжений:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_R \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{A}_R \mathbf{A}_R^T = \mathbf{R}.$$

Обычно [15 – 17] матрица \mathbf{A}_R является нижней треугольной матрицей из разложения по Холецкому тензора рейнольдсовых напряжений.

В указанной методике тензор вторых моментов скорости $\langle u_i u_j \rangle$ будет равен исходному тензору рейнольдсовых напряжений, однако полученное поле теряет свойство бездивергентности в анизотропном случае.

В настоящей работе применяется альтернативный подход, теоретически обоснованный в рандомизированном спектральном методе [7, 9, 12] для случаев как изотропного, так и анизотропного поля. Случайное поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ строится сразу в окончательной форме, согласно спектральному тензору, из которого получается тензор рейнольдсовых напряжений R_{ij} в качестве следствия.

Данный метод позволяет сохранить бездивергентность поля и одновременно обеспечивает свойство вторых моментов.

Стоящую перед нами задачу можно разбить на два этапа.

1. Построение полного спектрального тензора, отвечающего заданному тензору рейнольдсовых напряжений R_{ij} и энергетическому спектру.
2. Генерация анизотропного поля скоростей на основе полученного спектрального тензора.

В алгоритме, предлагаемом в настоящей работе, также используется разложение Холецкого, но факторизации подвергается не тензор \mathbf{R} , а зависящий от него вспомогательный тензор \mathbf{M}_R , непосредственно связанный с полным спектральным тензором. Поэтому обсудим необходимые для дальнейшего свойства спектрального тензора.

Построение полного спектрального тензора

В основе спектральной теории турбулентности [19] лежит спектральный тензор ковариаций пульсационных скоростей $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$, где \mathbf{k} – волновой вектор. Остальные спектральные и осредненные характеристики однородного турбулентного поля являются следствиями тензора $\Phi(\mathbf{k})$.

По определению тензор $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ связан с тензором пространственных ковариаций скоростей через преобразование Фурье:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r})u_j(\mathbf{x}) \rangle = \int \Phi_{ij}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (1)$$

Тензор спектральной плотности энергии турбулентности $\Psi(k)$ определяется как интеграл $\Phi(\mathbf{k})$ по сфере радиуса k :

$$\Psi_{ij}(k) = k^2 \int \Phi_{ij}(k\boldsymbol{\omega})d^2\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{k} = k\boldsymbol{\omega}, \quad |\boldsymbol{\omega}| = 1.$$

Для удобства в волновом векторе \mathbf{k} выделена длина k (волновое число) и направление $\boldsymbol{\omega}$.

Перечислим основные свойства спектральных тензоров.

1. Тензор $\Phi(\mathbf{k})$ симметричен и неотрицателен при всех \mathbf{k} :

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ji}, \quad \Phi(\mathbf{k}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{k}.$$

2. Вследствие условия несжимаемости матрица спектрального тензора ортогональна волновому вектору \mathbf{k} :

$$\Phi_{ij} \omega_j = 0.$$

3. След матрицы $\Psi(k)$ равен удвоенной спектральной плотности энергии:

$$\Psi_{ii}(k) = 2E(k).$$

4. Тензор напряжений Рейнольдса получается как интеграл $\Psi(k)$ по всему спектру:

$$R_{ij} = \langle u_i u_j \rangle = \int_0^\infty \Psi_{ij}(k) dk.$$

Свойство 4 следует из формулы (1) как частного случая при $\mathbf{r} = 0$ и из определения тензора $\Psi(k)$.

Практическая проблема построения синтетического турбулентного поля состоит в следующем. Из расчетов RANS известны:

- тензор рейнольдсовых напряжений R_{ij} ;
- спектральная плотность энергии $E(k)$, точнее, осредненные параметры (кинетическая энергия турбулентности σ^2 , скорость ее диссипации ε), определяющие конкретный вид этой функции.

Чтобы определить интересующий нас полный спектральный тензор $\Phi(\mathbf{k})$, требуется решить обратную задачу – восстановить $\Phi(\mathbf{k})$ в соответствии с данными \mathbf{R} и $E(k)$.

Обсудим, как выглядит спектральный тензор ковариаций $\Phi(\mathbf{k})$.

Обычно в литературе [19] встречается следующая форма записи спектрального тензора:

$$\Phi_{ij} = b^2(\delta_{ij} - \omega_i\omega_j) + a_i a_j(1 - b^2/a^2), \quad a_i\omega_i = 0. \quad (2)$$

Здесь фигурируют величины, зависящие от волнового вектора: $a_i(\mathbf{k})$ и $b(\mathbf{k})$. Для цели, поставленной в настоящей работе, такое представление тензора является слишком общим и неудобным.

Найдем выражение спектрального тензора ковариаций в другом виде. Для этого используем матрицу $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega})$ с элементами

$$Q_{ij}(\boldsymbol{\omega}) = \delta_{ij} - \omega_i\omega_j$$

– ортогональный проектор на плоскость, перпендикулярную направлению $\boldsymbol{\omega}$. К свойствам матрицы относятся:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0, \quad \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}, \quad Q_{ij}\omega_j = 0.$$

Полный спектральный тензор $\Phi(\mathbf{k})$ ортогонален волновому вектору (условие 2), а потому может быть представлен в виде

$$\Phi(\mathbf{k}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{M}(\mathbf{k})\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^T. \quad (3)$$

Справедливость выражения (3) основывается на факте из линейной алгебры об общем виде всех матриц, ортогональных единичному вектору $\boldsymbol{\omega}$. Заметим также, что при заданном $\Phi(\mathbf{k})$ матрица $\mathbf{M}(\mathbf{k})$ не определяется однозначно в силу вырожденности матрицы $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega})$.

Далее примем гипотезу, которая базируется на физических соображениях. Будем считать, что матрица \mathbf{M} в (3) есть функция только волнового числа:

$$\mathbf{M}(k), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^T.$$

Зависимость от направления обусловлена лишь свойством 2 ортогональности тензора волновому вектору. Тогда формула (3) переписется в виде

$$\Phi(\mathbf{k}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{M}(k)\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}), \quad (4)$$

Имея выражение (4), получим из него другие характеристики турбулентности, интегрируя по направлениям и волновым числам. Однако перед этим остановимся на изотропном случае и обсудим для него вид тензоров.

При изотропной турбулентности – по смыслу самого понятия – матрица \mathbf{M} пропорциональна единичной матрице:

$$\mathbf{M}(k) = c(k) \mathbf{I}, \quad c(k) > 0.$$

(Символ \mathbf{I} обозначает единичный тензор.) Спектральный тензор, согласно (4), есть

$$\Phi(\mathbf{k}) = c(k) \mathbf{Q}^2 = c(k) \mathbf{Q} \geq 0.$$

Данное выражение совпадает с первым членом (2), но отличие в том, что коэффициент $c(k) \equiv b^2$ зависит не от волнового вектора в целом, а от волнового числа. Именно такая форма полного спектрального тензора для случая изотропной турбулентности известна в литературе [19, 20].

Теперь вернемся к общему случаю исходного тензора \mathbf{M} и порождаемого им тензора Φ из (4). Установим связь \mathbf{M} с тензором рейнольдсовых напряжений и энергетическим спектром.

Запишем спектральный тензор (4) в покомпонентном представлении

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = M_{ij} - \omega_i \omega_k M_{kj} - M_{ik} \omega_k \omega_j + \omega_i \omega_k M_{kl} \omega_l \omega_j \quad (5)$$

Проинтегрируем тензор $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ по всем направлениям, с тем чтобы получить тензор $\Psi_{ij}(k)$.

Введем для удобства обозначение для операции осреднения по направлению:

$$\langle \varphi \rangle_\omega = \frac{1}{4\pi} \int \varphi(\boldsymbol{\omega}) d^2\omega$$

Легко проверить справедливость равенств

$$\begin{aligned} \langle \omega_i \omega_j \rangle_\omega &= \frac{1}{3} \delta_{ij}, \\ \langle \omega_i \omega_j \omega_k \omega_l \rangle_\omega &= \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned}$$

Для наглядности укажем:

$$\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} = \begin{cases} 3, & i = j = k = l, \\ 1, & \text{если индексы совпадают попарно,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Алгебраические преобразования (5) дают:

$$\langle \Phi_{ij} \rangle_\omega = M_{ij} - \frac{1}{3} M_{ij} - \frac{1}{3} M_{ij} + \frac{1}{15} M_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{15} M_{ij} + \frac{1}{15} M_{ji}.$$

Соберем подобные члены, учтя симметрию матрицы $M_{ij} = M_{ji}$:

$$\langle \Phi_{ij} \rangle_\omega = \frac{7}{15} M_{ij} + \frac{1}{15} \text{tr}(\mathbf{M}) \delta_{ij}.$$

Выпишем окончательное выражение для тензора Ψ , а также очевидное следствие для следа тензора:

$$\begin{aligned}\Psi_{ij}(k) &= 4\pi k^2 \langle \Phi_{ij} \rangle_\omega = \frac{4\pi k^2}{15} (7 M_{ij} + \text{tr}(\mathbf{M}) \delta_{ij}), \\ \text{tr}(\Psi) &= \frac{8\pi k^2}{3} \text{tr}(\mathbf{M}).\end{aligned}\quad (6)$$

Из уравнений (6) можно выразить тензор \mathbf{M} через тензор Ψ , что необходимо в дальнейшем:

$$M_{ij}(k) = \frac{1}{56\pi k^2} (30 \Psi_{ij}(k) - 3 \text{tr}(\Psi) \delta_{ij}). \quad (7)$$

Далее встает вопрос о связи тензора $\Psi_{ij}(k)$ с тензором рейнольдсовых напряжений R_{ij} . Будем применять простейшую модель, неявно используемую при построении большинства спектральных генераторов турбулентности [14 – 18]:

$$\Psi_{ij}(k) = \frac{E(k)}{\sigma^2} R_{ij}, \quad (8)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle = \int_0^\infty E(k) dk.$$

При выводе данного соотношения использовались условия 3 и 4.

Равенство (8) не противоречит случаю изотропной турбулентности и выражает гипотезу о независимости степени анизотропии пульсационного поля от волнового числа, т.е. от масштаба турбулентности. Данное предположение, как известно, не соответствует физике, однако, по-видимому, не оказывает решающего влияния на динамику турбулентного поля. По крайней мере, модель (8) более адекватно отражает свойства турбулентного пограничного слоя, чем изотропное приближение.

Формула (8) позволяет ввести тензор $\mathbf{M}_R = \{M_{ij}^R\}$, упоминавшийся ранее, в виде интеграла $\mathbf{M}(k)$ по всему спектру:

$$M_{ij}^R = \int_0^\infty M_{ij}(k) dk.$$

Из формулы (7) следует выражение для искомого тензора

$$\mathbf{M}_R = \frac{15}{7} \mathbf{R} - \frac{3}{7} \sigma^2 \mathbf{I}. \quad (9)$$

В однородном изотропном случае равенство (9) приобретает простой вид

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{R} = \frac{2}{3} \sigma^2 \mathbf{I}.$$

Свойства тензоров анизотропного поля

Рассмотрим более подробно свойства тензора \mathbf{M}_R , а точнее тензора $\mathbf{M}(k)$, на основе которого он строится.

Важным является вопрос о знакоопределенности спектральных тензоров. Помимо физической корректности, положительность матрицы \mathbf{M}_R необходима при ее факторизации. Докажем следующий факт.

Лемма. Матрица $\mathbf{M}(k) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\Phi(k) \geq 0$ при любых значениях k .

Доказательство. *Прямой ход.*

Дано:

$$\xi^T \mathbf{M} \xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$\xi^T \Phi \xi = \xi^T \mathbf{Q} \mathbf{M} \mathbf{Q} \xi = \eta^T \mathbf{M} \eta \geq 0, \quad \eta = \mathbf{Q} \xi.$$

Поскольку формула верна для произвольного вектора ξ , неотрицательность матрицы Φ доказана.

Обратный ход. Докажем от противного.

Если матрица \mathbf{M} не является неотрицательной, это означает, что существует вектор

$$\xi_1: \xi_1^T \mathbf{M} \xi_1 < 0.$$

Поскольку направление волнового вектора произвольно, выберем $\omega = \omega_1$ ортогональным вектору ξ_1 , благодаря чему

$$\mathbf{Q}(\omega_1) \xi_1 = \xi_1.$$

Тогда

$$\xi_1^T \Phi \xi_1 = \xi_1^T \mathbf{Q} \mathbf{M} \mathbf{Q} \xi_1 = \xi_1^T \mathbf{M} \xi_1 < 0,$$

что противоречит условию $\Phi \geq 0$.

Лемма доказана.

Согласно доказанной лемме, из неотрицательности тензора \mathbf{M} следует неотрицательность тензора Ψ , в то время как из неотрицательности Ψ вовсе не вытекает свойство $\mathbf{M} \geq 0$. Поскольку в формуле (7) присутствует знак «минус», это условие может нарушаться при значительной анизотропии тензора Ψ . Оценим далее условия, гарантирующие знакоопределенность обоих тензоров.

Разложим тензор \mathbf{M} в сумму изотропной части и анизотропной (девиатора):

$$\mathbf{M}(k) = c(k) \mathbf{I} + \mathbf{M}'(k), \quad c(k) = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{M}), \quad \text{tr}(\mathbf{M}') = 0.$$

Выражение (6) для тензора Ψ переписывается:

$$\Psi(k) = 4\pi k^2 \left(\frac{2}{3} c(k) \mathbf{I} + \frac{7}{15} \mathbf{M}'(k) \right).$$

Исходный тензор \mathbf{M} должен быть неотрицательным. Никаких других ограничений на его анизотропию не налагается. Воспользуемся неравенствами [21], справедливыми для всякой неотрицательной матрицы и ее девиатора:

$$0 \leq \mathbf{M} \leq \text{tr}(\mathbf{M}) \mathbf{I}, \quad -\frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{M}) \mathbf{I} \leq \mathbf{M}' \leq \frac{2}{3} \text{tr}(\mathbf{M}) \mathbf{I}.$$

Чтобы оценить матрицу Ψ , перепишем ее выражение через \mathbf{M}' в более удобном для дальнейшего виде

$$\Psi = c_0 \left(\frac{2}{9} \text{tr}(\mathbf{M}) \mathbf{I} + \frac{7}{15} \mathbf{M}'(k) \right).$$

Отсюда сразу получим

$$\frac{1}{15} c_0 \text{tr}(\mathbf{M}) \mathbf{I} \leq \Psi \leq \frac{8}{15} c_0 \text{tr}(\mathbf{M}) \mathbf{I}$$

Подставим сюда выражение

$$\text{tr}(\Psi) = \frac{2}{3} c_0 \text{tr}(\mathbf{M})$$

и получим оценку матрицы Ψ :

$$\frac{1}{10} \text{tr}(\Psi) \mathbf{I} \leq \Psi \leq \frac{4}{5} \text{tr}(\Psi) \mathbf{I}.$$

Таким образом, получена оценка на степень анизотропии тензора Ψ . Связь (8) между тензорами Ψ и \mathbf{R} дает аналогичное ограничение на анизотропию тензора напряжений Рейнольдса

$$\frac{1}{10} \text{tr}(\mathbf{R}) \mathbf{I} \leq \mathbf{R} \leq \frac{4}{5} \text{tr}(\mathbf{R}) \mathbf{I}.$$

Последнее выражение подтверждается экспериментальными измерениями тензора турбулентных напряжений. В частности, приводимые в [21] показатели анизотропии тензора \mathbf{R} обнаруживают значительно меньший разброс значений ограничивающих констант.

Генерация поля пульсационных скоростей

В спектральных методах генерации синтетической турбулентности строится поле пульсаций скорости в виде суммы гармоник, содержащих случайные параметры. В традиционных подходах к получению анизотропного поля [15 – 18] используется, как говорилось выше, разложение матрицы тензора рейнольдсовых напряжений \mathbf{R} на взаимно-сопряженные множители.

В отличие от предыдущего, рандомизированный спектральный метод [7, 9, 12] опирается на факторизацию полного спектрального тензора

$$\Phi(\mathbf{k}) = \mathbf{A}_\Phi(\mathbf{k}) \mathbf{A}_\Phi(\mathbf{k})^T.$$

В предлагаемой методике ситуация более простая: мы будем использовать разложение тензора \mathbf{M}_R по Холецкому

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{A} \mathbf{A}^T. \quad (10)$$

Далее матрица \mathbf{A} потребуется для линейного преобразования изотропного поля. Хотя здесь масштабированию подвергается не векторное поле в целом, а каждая гармоника в отдельности, разложение (10) не зависит от параметров гармоники и выполняется всего лишь один раз (в случае однородной турбулентности).

Обобщая результаты [9 – 13, 22] и настоящей работы, будем строить синтетическое турбулентное поле скоростей в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \alpha \sum_{n=1}^N \sqrt{g^n} \mathbf{Q}^n \mathbf{A} \mathbf{v}^n(\mathbf{x}). \quad (11)$$

Опишем составные части формулы (11).

Гармоники $\mathbf{v}^n(\mathbf{x})$ могут задаваться различным образом. В оригинальном рандомизированном спектральном методе [12, 13] они представляются формулой

$$\mathbf{v}^n(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}^n \sin(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x})) + \boldsymbol{\eta}^n \cos(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x})). \quad (12)$$

Для каждой гармоники определяются:

k^n – модуль волнового вектора (волновое число);

$\boldsymbol{\omega}^n$ – направление волнового вектора: вектор, изотропно распределенный по единичной сфере; $\mathbf{k}^n = k^n \boldsymbol{\omega}^n$;

$\boldsymbol{\xi}^n$ и $\boldsymbol{\eta}^n$ – случайные векторы, имеющие трехмерное стандартное распределение Гаусса $N(0,1)$.

Альтернативный вариант берет начало от работы [15], а затем был модифицирован в [22]. Приведем еще одну его разновидность, пригодную для нашего метода, где гармоники имеют вид

$$\mathbf{v}^n(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^n \cos(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) + \varphi^n). \quad (13)$$

Одноименные параметры гармоники определяются, как выше, а остальные таковы:

$\boldsymbol{\sigma}^n$ – вектор единичной длины, равномерно распределенный по сфере;

φ^n – фаза – случайное число, равномерно распределенное в интервале $[0, 2\pi)$;

В обоих подходах гармоники $\mathbf{v}^n(\mathbf{x})$ имеют изотропное вероятностное распределение и произвольны. Для создания бездивергентного поля со статистикой, подчиненной заданному тензору рейнольдсовых напряжений, к каждой гармонике применяется линейное преобразование

$$\mathbf{u}^n(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^n \mathbf{A} \mathbf{v}^n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{Q}^n = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}^n),$$

где треугольная матрица \mathbf{A} получается при факторизации (9) матрицы \mathbf{M}_R :

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} \sqrt{M_{11}^R} & 0 & 0 \\ M_{21}^R/a_{11} & \sqrt{M_{22}^R - a_{21}^2} & 0 \\ M_{31}^R/a_{11} & (M_{22}^R - a_{21}a_{31})/a_{22} & \sqrt{M_{33}^R - a_{31}^2 - a_{32}^2} \end{pmatrix}$$

Энергетический спектр $E(k)$ обеспечивается выбором распределения волновых чисел k^n (узлов квадратуры) и весовых параметров g^n .

В качестве $E(k)$ будем, вслед за [15], использовать безразмерный модифицированный энергетический спектр фон Кармана – Пао

$$E(k) = f_e(k) f_\eta(k) f_{cut}(k). \quad (14)$$

Главная (фон-кармановская) составляющая $f_e(k)$ определяется как

$$f_e(k) = \frac{(k/k_e)^4}{(1 + 2.4(k/k_e)^2)^{17/6}}.$$

Сомножитель $f_\eta(k)$ отвечает за асимптотику $E(k)$ с приближением к колмогоровскому масштабу:

$$f_\eta(k) = \exp\left[-(12k/k_\eta)^2\right].$$

Характерные волновые числа энергонесущих мод k_e и колмогоровского масштаба k_η известны из данных RANS. Функция $f_{cut}(k)$ служит для подавления спектра вблизи минимально разрешимого на сетке масштаба, отвечающего предельно высокому волновому числу k_{cut} :

$$f_{cut}(k) = \exp\left(-\left[\frac{4 \max(k - 0.9k_{cut}, 0)}{k_{cut}}\right]^3\right).$$

Чтобы построить синтетическое поле, разложим функцию спектральной плотности энергии в произведение двух положительных функций:

$$E(k) = F(k)G(k). \quad (15)$$

Независимые случайные волновые числа k^n генерируются с плотностью вероятности, пропорциональной функции $F(k)$:

$$p(k) = \frac{F(k)}{\int_0^\infty F(k')dk'}.$$

Энергетическая весовая функция

$$g^n = \frac{G(k^n)}{\sum_{m=1}^N G(k^m)}.$$

Выделим два частных случая функций $F(k)$ и $G(k)$ в (15). Первый способ фактически применялся в оригинальном рандомизированном спектральном методе [9 – 13] и предполагал одинаковые коэффициенты при всех гармониках:

$$F(k) = E(k), \quad G(k) = 1, \quad g^n = \frac{1}{N}. \quad (16)$$

Второй вариант, предложенный в [22], был нацелен на адаптацию метода к пространственно неоднородной турбулентности. Согласно ему, волновые числа распределяются в соответствии с постепенно меняющейся колмогоровской функцией $f_\eta(k)$, а веса переменные:

$$F(k) = f_\eta(k), \quad G(k) = f_e(k) f_{cut}(k), \quad p(k) = \frac{f_\eta(k)}{\int_0^\infty f_\eta(k')dk'}. \quad (17)$$

Наконец, в формуле (11) перед суммой стоит безразмерная нормировочная константа α , отвечающая заданной энергии турбулентного поля σ^2 .

Два примера задания случайного поля скоростей (11) для наглядности выпишем полностью. Оригинальному рандомизированному спектральному методу соответствуют формулы (12), (16):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}^n) \mathbf{A} [\xi^n \sin(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x})) + \eta^n \cos(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}))]. \quad (18)$$

Второй пример наиболее близок к модифицированному методу из [22] и использует соотношения (13), (17):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 2 \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^N \sqrt{g^n} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}^n) \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}^n \cos(k^n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x}) + \varphi^n). \quad (19)$$

Подчеркнем [7, 12], что с ростом числа гармоник N уравнение (5) обеспечивает слабую сходимость распределений случайного поля скоростей к гауссиану, описываемому средними значениями и функцией ковариации.

В силу свойств матрицы $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}^n)$, построенное поле (11) будет обладать свойством несжимаемости как в изотропном, так и в анизотропном случаях. На примере суммы (19) рассмотрим дивергенцию отдельной гармоники $\mathbf{u}^n(\mathbf{x})$:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^n = \nabla \cdot \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\sigma}' \cos(k(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}) + \varphi) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}^n.$$

Энергетический спектральный тензор $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ в (18) является результатом осреднения тензора

$$\hat{u}_i \hat{u}_j(\mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}) + \hat{u}_i \hat{u}_j(\mathbf{k}, \boldsymbol{\eta}), \quad \hat{u}_i \hat{u}_j(\mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{E(k)}{\sigma^2} Q_{il} A_{lm} \xi_m Q_{jp} A_{pr} \xi_r,$$

по всем $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$. Поскольку $\langle \xi_m \xi_r \rangle = \langle \eta_m \eta_r \rangle = \delta_{mr}$, мы получим

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{\sigma^2} Q_{il} A_{lm} Q_{jm} A_{pm} = Q_{il} M_{lp} Q_{jp},$$

что совпадает с (4).

Статистическая верификация метода

Предложенная в данной работе методика тестировалась на примерах реализаций турбулентного поля скоростей. Цель исследования состоит в следующем. На основе заданного тензора рейнольдсовых напряжений \mathbf{R} и энергетического спектра $E(k)$ генерируется случайное поле. Его статистические характеристики должны сходиться к указанным величинам с ростом числа случайных параметров.

Авторы, пользуясь опытом [13], относящимся к случаю изотропной турбулентности, исследовали сходимость по двум направлениям: увеличение количества гармоник N в реализации стохастического поля либо накопление статистики из многих реализаций поля. Последнее означает, что ансамбль турбулентных полей, задаваемых согласно формулам (18)–(19), подвергался стандартной процедуре численного осреднения:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(s)}, \quad s = 1, \dots, N_s, \quad \langle \varphi \rangle_{N_s} = \frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} \varphi^{(s)}.$$

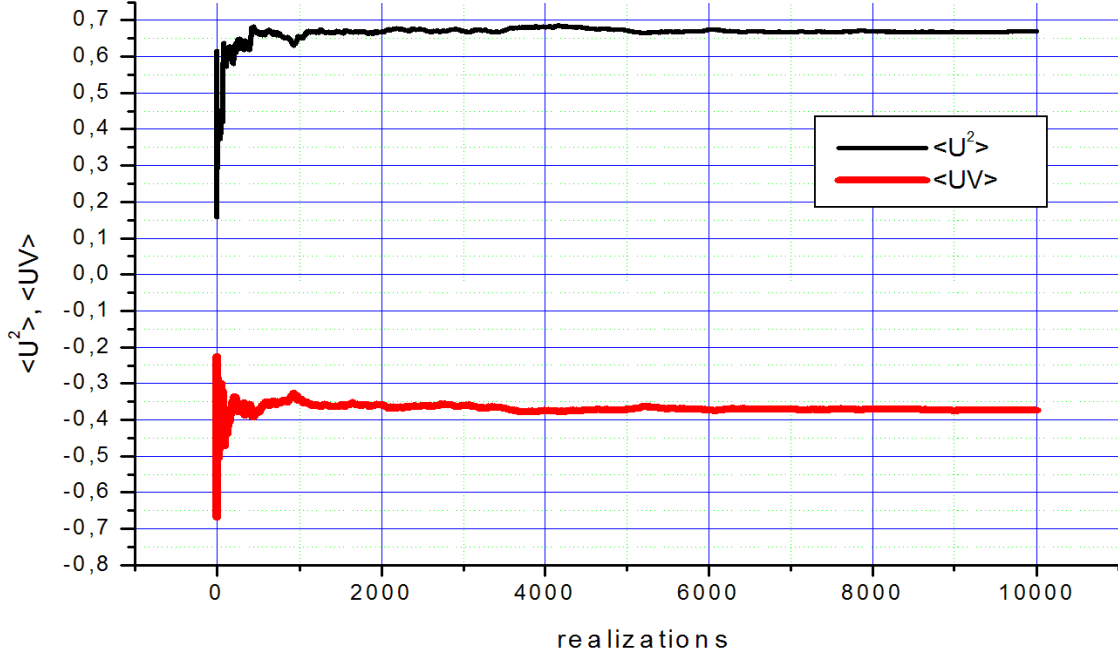


Рис. 1. Зависимость ненулевых компонент тензора рейнольдсовых напряжений от числа реализаций

Как и прежде [13], турбулентные поля скоростей генерировались в кубе со стороной 2π на равномерной сетке 32^3 узлов. На сей раз строились анизотропные поля, согласованные с тензором рейнольдсовых напряжений, отвечающим сдвиговому течению при гипотезе Буссинеска. Количественные параметры постоянны и выбраны произвольно. Выпишем тензор \mathbf{R} и соответствующий ему тензор \mathbf{M}_R из (10):

$$\mathbf{R} = \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 5 & -2.8 & 0 \\ -2.8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.667 & -0.373 & 0 \\ -0.373 & 0.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0.667 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & -0.8 & 0 \\ -0.8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 приведены ненулевые компоненты тензора рейнольдсовых напряжений

$$R_{xx} = \langle u_x u_x \rangle, \quad R_{xy} = \langle u_x u_y \rangle,$$

вычисленных для синтетических полей (18), состоящих из $N = 1000$ гармоник, в зависимости от числа реализаций N_s . По достижении около 2000 реализаций статистика фактически сходится к требуемым значениям компонент тензора.

Воспроизведение энергетического спектра исследовалось на основе одного сгенерированного поля (18), состоящего из $N = 500$ гармоник и соответствующего вышеприведенному тензору рейнольдсовых напряжений и спектральной плотности энергии $E(k)$ из (14). Рис. 2 показывает хорошее согласие между численным и аналитическим спектрами. Ситуация аналогична изотропному случаю, для которого вопросы сходимости по спектру были подробно исследованы в [13].

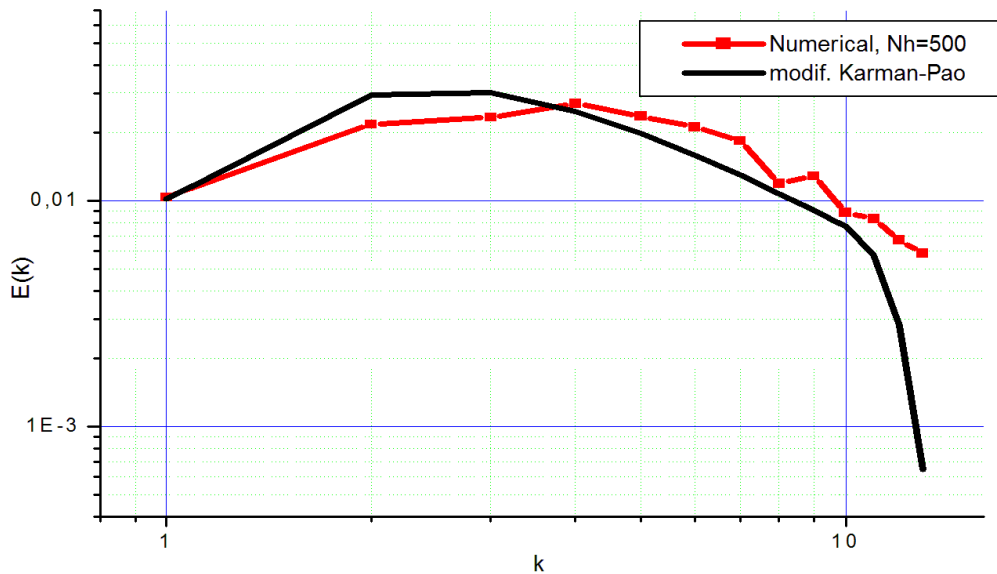


Рис. 2. Аналитический и численный энергетические спектры $E(k)$

Заключение

В работе изложена технология адаптации рандомизированного спектрального метода к генерации анизотропных полей скорости с наперед заданным тензором рейнольдсовых напряжений при сохранении бездивергентности.

Проведенная численная верификация показала, что метод дает возможность генерировать турбулентные поля скорости с заданным тензором рейнольдсовых напряжений, а также энергетическим спектром.

Теоретическая применимость метода охватывает функции спектральной плотности энергии с любой физически адекватной асимптотикой.

Ограничения предложенного метода связаны со степенью анизотропии турбулентного поля. Однако полученные оценки допустимой степени анизотропии являются практически приемлемыми с точки зрения известных примеров турбулентных течений.

В дальнейшем методика будет валидирована на канонических турбулентных течениях, таких как развитое турбулентное течение в канале.

Хотя в работе алгоритм построения анизотропного поля создан на основе рандомизированного спектрального метода, представляется, что данный подход можно адаптировать и для других – более традиционных и частично детерми-

нированных – спектральных методов генерации синтетических турбулентных полей скорости, например, [17 – 18].

Список литературы

1. Dhamankar N.S., Blaisdell G.A., and Lyrintzis A. S. Overview of Turbulent Inflow Boundary Conditions for Large-Eddy Simulations // *AIAA J.*, 56(4), (2018), 1317–1334.
2. Kraichnan R. Diffusion by a random velocity field // *Phys. Fluids* 13(1), (1970), 22–31.
3. Karweit M., Blanc-Benon Ph., Juve D., and Comte-Bellot G. Simulation of the propagation of an acoustic wave through a turbulent velocity field: A study of phase variance // *J. Acoust. Soc Am.* 89(1), January 1991.
4. Bechara W., Bailly C., Lafon P., and Candel S.M. Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows // *AIAA J.*, 32(3), (1994), 455–463.
5. Bailly C., Juve D. A Stochastic Approach To Compute Subsonic-Noise Using Linearized Euler’s Equations // *AIAA 99-1872*, A99-27849.
6. Saad T., Cline D., Stoll R., and Sutherland J.C. Scalable tools for generating synthetic isotropic turbulence with arbitrary spectra // *AIAA J./Technical Notes*, 55(18), (2016), 327–331. DOI: 10.2514/1.J055230.
7. Сабельфельд К.К. Методы Монте-Карло в краевых задачах. – Новосибирск: Наука, 1989, 280 с.; англ. пер.: Sabelfeld K.K. Monte Carlo Methods in boundary value problems. Springer, Heidelberg–Berlin–New York, 1991.
8. Sabelfeld K.K., Kurbanmuradov O. Stochastic Lagrangian models for two-particle motion in turbulent flows // *Monte Carlo Methods Appl.*, 3(1), (1997). DOI: <https://doi.org/10.1515/mcma.1997.3.1.53>.
9. Kurbanmuradov O., Sabelfeld K. Stochastic Spectral and Fourier-Wavelet Methods for Vector Gaussian Random Fields // *Monte Carlo Methods Appl.*, 12:5–6 (2006), 395–445.
10. Боровская И.А. Моделирование однородных случайных полей по заданному спектру в задачах аэроакустики // *Матем. моделирование*, 19:7 (2007), 67–76.
11. Боровская И.А., Козубская Т.К., Курбанмурадov О., Сабельфельд К.К. О моделировании однородных случайных полей и сигналов и их использовании в задачах аэроакустики // *Матем. моделирование*, 19:10 (2007), 76–88.
12. Kurbanmuradov O., Sabelfeld K., and Kramer P.R. Randomized spectral and Fourier-wavelet methods for multidimensional Gaussian random vector fields // *J. Comput. Phys.*, 245, (2013), 218–234.
13. Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П. Генерация трехмерных однородных изотропных турбулентных полей скорости на основе рандомизированного спектрального метода // *Матем. моделирование*, 31:10 (2019), 49–62.
14. Smirnov A., Shi S., and Celik I. Random flow generation technique for large eddy simulations and particle-dynamics modeling // *J. Fluids Eng.*, 123(2), 359–371 (Feb 16, 2001).

15. Адамьян Д.Ю., Стрелец М.Х., Травин А.К. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS–LES подходов к расчету турбулентных течений // Матем. моделирование, 23:7 (2011), 3–19.
16. Адамьян Д.Ю. Метод генерации синтетической турбулентности на входных границах для расчета турбулентных течений в рамках вихреразрешающих подходов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Санкт-Петербург, 2011.
17. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., and Travin A.K. Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems // Flow Turbulence Combust., 93(1), (2014), 63–92.
18. Shur M. et al. Improved Embedded Approaches. In: Mockett C., Haase W. // In-Schwamborn D. (eds) Go4Hybrid: Grey Area Mitigation for Hybrid RANS-LES Methods. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, vol 134 (2018). Springer, Cham, DOI: 10.1007/978-3-319-52995-0_3.
19. Batchelor G.K. The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge University Press, London–New York, 1959.
20. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика, механика турбулентности. Часть 2. М.: Наука, 1967.
21. Stiperski I., Calaf M. Dependence of near-surface similarity scaling on the anisotropy of atmospheric turbulence // Q. J. R. Meteorol. Soc., 144, (2018), 641–657. DOI: 10.1002/qj.3224
22. Александров А.В., Дородницын Л.В., Дубень А.П., Колыхин Д.Р. Генерация неоднородных турбулентных полей скорости на основе модифицированного рандомизированного спектрального метода // Прикладная математика и информатика №63, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2020, с.22–35; англ. пер.: Aleksandrov A.V., Dorodnitsyn L.V., Duben' A.P., Kolyukhin D.R. Generation of nonhomogeneous isotropic turbulent velocity fields by Modified Randomized Spectral Method // Comput. Math. Model., 31(3), (2020), 308–319.