ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 130 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова,
В.Ф. Тишкин

Построение гибридных численных потоков, обеспечивающих подавление развития ударно-волновой неустойчивости

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Построение гибридных численных потоков, обеспечивающих подавление развития ударно-волновой неустойчивости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 130. 12 с.
https://doi.org/10.20948/prepr-2020-130
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-130

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

М.Е.Ладонкина, О.А.Неклюдова, В.Ф.Тишкин

Построение гибридных численных потоков, обеспечивающих подавление развития ударно-волновой неустойчивости

Москва — 2020

Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф.
Построение гибридных потоков, обеспечивающих подавление развития ударно-волновой неустойчивости

В настоящей работе предлагается новый гибридный численный поток для вычисления потоков эйлеровой части системы уравнений Навье-Стокса, который позволяет избежать возникновения неустойчивости и сохраняет высокую точность на ударных волнах и пограничных слоях. Данный поток представляет собой комбинацию численного потока Годунова и численного потока Русанова-Лакса-Фридрихса. Проведено численное моделирование сверхзвукового обтекания крылатой ракеты Tomahawk.
Ключевые слова: гиперзвуковая газовая динамика, численный поток, разрывный метод Галеркина.

Marina Eugenievna Ladonkina, Olga Alexandrovna Nekliudova, Vladimir Fedorovich Tishkin
Construction of hybrid flows that suppress the development of shock-wave instability

In this paper, we propose a new hybrid numerical flux for calculating the fluxes of the Euler part of the Navier-Stokes system of equations. This flux avoids the occurrence of instability and maintains high accuracy on shock waves and boundary layers. This flux is a combination of Godunov's numerical flow and Rusanov-Lax-Friedrichs numerical flow. Numerical simulation of supersonic flow around a cruise missile Tomahawk has been carried out.
Keywords: hypersonic gas dynamics, numerical flux, discontinuous Galerkin method

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-01-00578-а.

Оглавление

Введение

Численное моделирование сверхзвукового обтекания твердых тел представляет собой незаменимый инструмент для проектирования авиационно-космической техники. Ударные волны, которые формируются в сверхзвуковых потоках, создают некоторые вычислительные проблемы, которые увеличивают сложность моделирования: снижение порядка точности, проблемы сходимости, возникновение неустойчивостей. Одной из таких наиболее изученных неустойчивостей является возникновение «карбункула», который влияет на профиль фронта ударной волны и деформирует его [1,2]. Эта неустойчивость может резко повлиять на численное моделирование головной ударной волны перед носовой частью летательного аппарата.

Как известно, на возникновение неустойчивости карбункула влияют используемые численные потоки. В работе [2] проведено сравнение различных численных потоков и показано, что наиболее подвержены возникновению этой неустойчивости потоки, обладающие низкой диссипацией. К такого типа потокам относятся некоторые upwind потоки, такие как потоки Ошера [3], Пандольфи [4], Роу [5], кроме того, поток Годунова [6], HLLC [7] и др. А использование высокодиссипативных потоков, таких как поток Русанова-Лакса-Фридрихса [8,9], поток Ван Лира [10] или AUSM + [11], позволяет избежать возникновения карбункула. С другой стороны, высокая диссипация приводит к понижению точности расчетной схемы. По этой причине было предпринято несколько попыток разработки новых методов, подавляющих развитие неустойчивостей, при этом обеспечивающих низкую диссипацию [12-15].

В настоящей работе предлагается новый гибридный численный поток для эйлеровой части системы уравнений Навье-Стокса, который позволяет избежать возникновения неустойчивости и сохраняет высокую точность на ударных волнах и пограничных слоях. Данный поток представляет полусумму потоков Годунова, рассчитанных в подвижных системах координат, движущихся со скоростями W и –W, с последующим пересчетом в неподвижную систему координат. При W=0 данный поток переходит в поток Годунова, а при W, большем, чем модуль максимальной скорости распространения волн, образовавшихся при распаде разрыва, – в поток Русанова-Лакса-Фридрихса. Такого типа поток рассматривался в работе [16].

Проведено тестирование данного алгоритма для численного моделирования сверхзвукового обтекания крылатой ракеты Tomahawk.

Вычислительный алгоритм

Рассмотрим эйлерову часть уравнений Навье-Стокса:

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = \left(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E\right)^T,$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \left(\mathrm{F}_x(\mathbf{U}), \mathrm{F}_y(\mathbf{U}), \mathrm{F}_z(\mathbf{U})\right),$$
$$\mathrm{F}_x(\mathbf{U}) = \left(\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (E+p)u\right),$$
$$\mathrm{F}_y(\mathbf{U}) = \left(\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho uw, (E+p)v\right),$$
$$\mathrm{F}_z(\mathbf{U}) = \left(\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + p, (E+p)w\right),$$

где $\mathbf{U}$ – вектор консервативных переменных и $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ – компоненты потоковых функции, ρ – плотность жидкости, u, v, w – компоненты скорости $\mathbf{v}$, p – давление, ε – удельная внутренняя энергии и $E = \rho\left(\varepsilon + \dfrac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)$ – полная энергия на единицу объема.

Для определения давления p будем использовать уравнение состояния идеального газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (2)$$

где γ – показатель адиабаты.

Для применения разрывного метода Галеркина покроем область Ω, на которой ищется решение, сеткой T_h. На каждом элементе T_j приближенное решение системы уравнений (1) будем искать в виде полиномов $P(\mathrm{x})$ степени N с зависящими от времени коэффициентами:

$$\mathbf{U}_{hj}(\mathrm{x},t) = \sum_{k=0}^{st} \mathbf{U}_{kj}(t)\phi_{kj}(\mathrm{x}), \quad (3)$$

где st – размерность пространства полиномов, а $\phi_k(\mathrm{x})$ – соответствующая базисная функция. В данной работе в качестве базисных функций используется базис Тейлора:

$$\phi_{kj} = \frac{(x-x_c)^\alpha (y-y_c)^\beta (z-z_c)^\gamma}{\Delta x^\alpha \Delta y^\beta \Delta z^\gamma}, \quad \alpha+\beta+\gamma = 0,\ldots,p, \quad k = 0,1,\ldots,C_{N+p}^p - 1, \quad (4)$$

где x_c, y_c, z_c – координаты центра масс j-ой ячейки, $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – проекция ячейки на оси x, y и z, $C_{N+p}^p = \dfrac{(N+p)!}{N!\,p!}$, N – размерность пространства, p – степень полинома.

Приближенное решение системы (1) в разрывном методе Галеркина ищется как решение следующей системы [17,18]:

$$\frac{d}{dt}\int_{T_j}\phi_k(\mathrm{x})\mathbf{U}_h(\mathrm{x},t)\,d\Omega+\oint_{\partial T_j}\phi_k(\mathrm{x})\cdot\mathbf{h}_F\left(\mathbf{U}_h^+,\mathbf{U}_h^-,n\right)d\sigma-$$
$$-\int_{T_j}\left(\frac{\partial\phi_k(\mathrm{x})}{\partial x}\mathrm{F}_x\left(\mathbf{U}_h(\mathrm{x},t)\right)+\frac{\partial\phi_k(\mathrm{x})}{\partial y}\mathrm{F}_y\left(\mathbf{U}_h(\mathrm{x},t)\right)+\frac{\partial\phi_k(\mathrm{x})}{\partial z}\mathrm{F}_z\left(\mathbf{U}_h(\mathrm{x},t)\right)\right)d\Omega=0. \tag{5}$$

Формула (5) выписана на сеточном элементе T_j поэтому в коэффициентах и базисных функциях опущен индекс j. $\mathbf{U}_h(\mathrm{x},t)$ – вектор решения, $\mathbf{n}$ – вектор внешней единичной нормали к границе элемента ∂T_j, $\mathbf{h}_F(\mathbf{U}_h^+,\mathbf{U}_h^-,\mathbf{n})$ – потоковые функции, вычисленные на границе элемента ∂T_j. Величины, обозначенные через $\mathbf{U}_h^-$, вычисляются на границе ∂T_j элемента T_j по значениям внутри элемента T_j, в то время как величины, обозначенные через $\mathbf{U}_h^+$, вычисляются на границе ∂T_j по значениям в соседней к данному элементу T_j ячейке.

Для обеспечения монотонности решения, полученного данным методом, используется SLOP лимитер [19].

Полученная в результате пространственной аппроксимации разрывным методом Галеркина система обыкновенных дифференциальных уравнений (6), которая регулирует изменения во времени дискретного решения, может быть записана в виде

$$\frac{d\mathbf{U}^p}{dt}=\mathbf{R}(\mathbf{U}^p),\ \mathbf{R}(\mathbf{U}^p)=-\mathbf{A}^{-1}\Pi_k^p, \tag{6}$$

где $\mathbf{A}$ обозначает матрицу масс, $\mathbf{U}^p$ – глобальный вектор степеней свободы (коэффициенты разложения всех искомых функций), k – порядковый номер уравнения в системе (1) и $\mathbf{R}(\mathbf{U}^p)$ – вектор правых частей.

Интегрирование по времени осуществляется по схеме третьего порядка точности [20].

Численные потоки, соответствующие системе уравнений Эйлера

В уравнении (5) $\mathbf{h}_F(\mathbf{U}_h^+,\mathbf{U}_h^-,\mathbf{n})$ – численная потоковая функция, зависящая от значений приближенного решения по обе стороны границы элемента и от направления единичного вектора нормали $\mathbf{n}$, являющаяся монотонной и для которой выполнено условие согласования:

$$\mathbf{h}_F\left(\mathbf{U}_h(\mathrm{x},\mathrm{t}),\mathbf{U}_h(\mathrm{x},\mathrm{t}),\mathbf{n}\right)=\mathbf{F}(\mathbf{U}_h(\mathrm{x},\mathrm{t})). \tag{7}$$

В наших работах при решении задач о сверхзвуковом обтекании твердых тел наиболее часто используются численный поток Годунова, основанный на численном решении задачи Римана, численный поток HLLC и поток Русанова–Лакса–Фридрихса (RLF).

$$\mathbf{h}_{\mathrm{F}}\left(\mathbf{U}_h^+,\mathbf{U}_h^-,\mathbf{n}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{F}(\mathbf{U}_h^+ +\mathbf{F}(\mathbf{U}_h^-)-A\cdot(\mathbf{U}_h^+-\mathbf{U}_h^-)\right),$$
$$A=\max\left(\left|\mathbf{v}^+\right|+c^+,\left|\mathbf{v}^-\right|+c^-\right). \tag{8}$$

Здесь используется обозначение, введенное выше, c^+– скорость звука вычисленная на границе ∂T_j элемента T_j по значениям внутри элемента T_j, c^-– скорость звука, вычисленная на границе ∂T_j по значениям в соседней к данному элементу T_j ячейке, $\mathbf{v}$– скорость.

При этом поток RLF обладает более высокой диссипацией по сравнению с численными потоками Годунова и HLLC и обеспечивает наиболее устойчивую работу программного комплекса.

В данной работе построен гибридный численный поток, основная идея которого была предложена в работе [15]. Данный поток представляет собой линейную комбинацию одного из потоков (HLLC либо потока Годунова) и устойчивого потока Русанова-Лакса-Фридрихса (RLF)

$$\hat{\mathbf{F}}=\theta\mathbf{F}^{HLLC}+(1-\theta)\mathbf{F}^{RLF}, \tag{9}$$

$$\hat{\mathbf{F}}=\theta\mathbf{F}^{Godunov}+(1-\theta)\mathbf{F}^{RLF} \tag{10}$$

где $$\theta=\begin{cases}\dfrac{|\Delta\mathrm{u}\cdot\mathrm{n}|}{|\Delta\mathrm{u}|}=\dfrac{|\Delta u n_x+\Delta v n_y+\Delta w n_z|}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2+\Delta w^2}}, & |\Delta\mathrm{u}|>\varepsilon,\\ 1, & |\Delta\mathrm{u}|\le\varepsilon,\end{cases} \tag{11}$$

где ε – малая константа, чтобы избежать деления на ноль (например $\varepsilon=10^{-6}$), n – нормаль к границе ячейки, а $\Delta\mathrm{u}=\left(u_L-u_{\mathrm{R}},v_L-v_{\mathrm{R}},w_L-w_{\mathrm{R}}\right)$ – скачок вектора скорости через границу. Параметр θ вычисляется из нормали к границе ячейки и скачка скорости через поверхность границы ячейки.

Направление скачка скорости определяет нормаль к ударной волне: когда граница ячейки совпадает с фронтом ударной волны, используется поток Годунова ($\mathbf{F}^{Godunov}$), а когда граница раздела перпендикулярна ударной волне, применяется поток Русанова-Лакса-Фридрихса ($\mathbf{F}^{RLF}$).

Таким образом, увеличивается диссипация в направлении, совпадающем с ударной волной, и устраняется неустойчивость. Алгоритм является локальным и может быть легко реализован в разрывном методе Галеркина. Поскольку стоимость потока RLF значительно ниже по сравнению с потоком HLLC, предлагаемый гибридный подход не увеличивает значительно вычислительные затраты по сравнению с исходным потоком HLLC. Однако надежность значительно улучшена. Более того, гибридный подход не вызывает перегрузки памяти, поскольку он работает с переменными, которые уже доступны из исходных числовых потоков.

Иной подход к построению гибридного потока заключается в добавлении диссипативного члена в областях, где это необходимо.

Для его построения перейдем в локальную систему координат с ортом (n,τ_1,τ_2), где n – вектор внешней нормали к поверхности, через которую считается поток, τ_1,τ_2 – любые единичные ортогональные друг другу вектора, лежащие на этой поверхности. Вектора $\mathbf{U}$ и $\mathbf{F}$ в этой системе координат (обозначенные индексом *) будут иметь вид

$$\begin{gathered}\mathbf{U}^* = \left(\rho, \rho(\mathrm{u,n}), \rho(\mathrm{u},\tau_1), \rho(\mathrm{u},\tau_1), E\right)^T, \\ \mathbf{F}^*(\mathbf{U}) = \left(\rho(\mathrm{u,n}), \rho(\mathrm{u,n})u_n + p, \rho(\mathrm{u,n})u_{\tau_1}, \rho(\mathrm{u,n})u_{\tau_2}, (E+p)(\mathrm{u,n})\right).\end{gathered} \tag{12}$$

Используемый гибридный поток может быть получен следующим образом. Рассмотрим инерциальную систему координат, движущуюся со скоростью $W\cdot\mathrm{n}$ относительно исходной системы и вычислим поток Годунова или HLLC, который затем пересчитаем в исходной системе координат. Полученное в результате значение обозначим через $\mathbf{U}^{*+}$. Аналогичную процедуру проведем со скоростью $-W\cdot\mathrm{n}$ и соответствующее значение обозначим $\mathbf{U}^{*-}$. Взяв полусумму таких потоков, приходим к формулам:

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{F}^{*Godunov}\left(\mathbf{U}^{*+}\right) + \mathbf{F}^{*Godunov}\left(\mathbf{U}^{*-}\right)}{2} - W\frac{\mathbf{U}^{*+} + \mathbf{U}^{*-}}{2} \tag{13}$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{F}^{*HLLC}\left(\mathbf{U}^{*+}\right) + \mathbf{F}^{*HLLC}\left(\mathbf{U}^{*-}\right)}{2} - W\frac{\mathbf{U}^{*+} + \mathbf{U}^{*-}}{2} \tag{14}$$

$$W = \theta W^*, \quad W^* = max\left(|\mathrm{u}+c|, |\mathrm{u}-c|\right) \tag{15}$$

где W^* – максимум модулей собственных значений матрицы $\dfrac{\partial\mathbf{F}^*(\mathbf{U})}{\partial\mathbf{U}^*}$, θ – параметр (11).

Численные эксперименты

Проведена серия численных расчетов обтекания сверхзвуковым вязким потоком с числом Рейнольдса Re = $1.104*10^7$, с числом Маха в набегающем потоке M_∞ =1.3 крылатой ракеты Tomahawk. Газ предполагался идеальным с постоянной адиабаты γ = 1.4. Давление в набегающем потоке P_∞= 26500 Па, плотность –ρ_∞=0.41351 кг/м^3, угол атаки α = 5^0. Вычислительная область представляет собой структурированную сетку с N= 1.1 $*10^7$ элементами. Расчеты выполнялись программным комплексом DG3D [21].

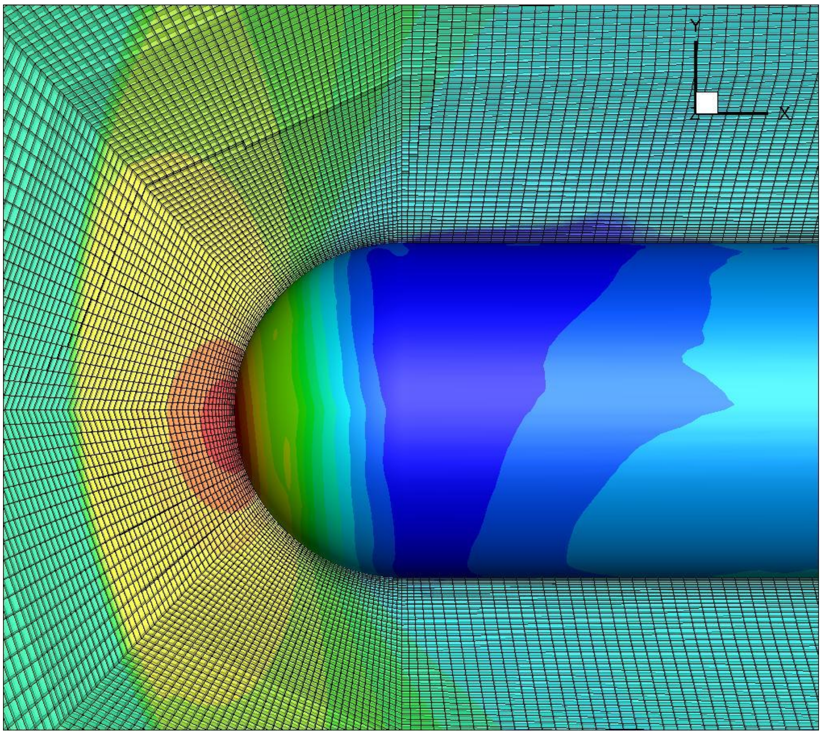
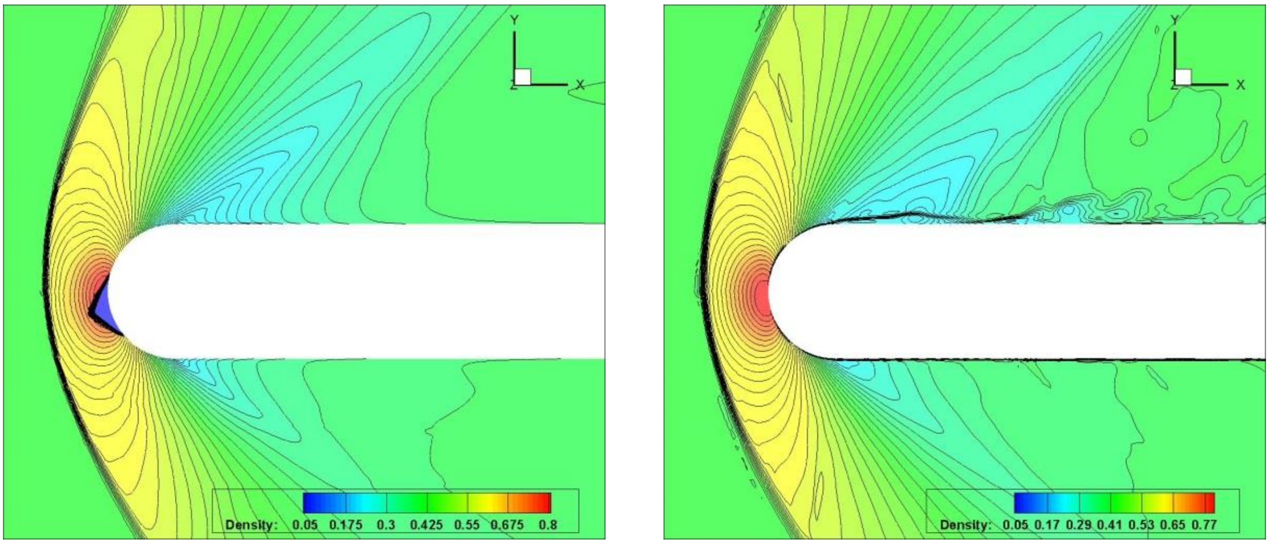


Рис.1

При моделировании данной задачи разрывным методом Галеркина второго порядка точности с численным потоком HLLC было обнаружено развитие неустойчивости. В носовой части твердого тела возникала область низкого давления (рис.2.а) в виде клина, перпендикулярного направлению набегающего потока, которая возрастала со временем, искривляла ударную волну и приводила к разваливанию расчета на достаточно раннем времени.

Механизм появления данного вида неустойчивости, по-видимому, аналогичен возникновению карбункула [1]: высокие числа Рейнольдса, порядка 10^7, низкодиссипативный поток HLLC, первый порядок точности схемы. Расчет проводился разрывным методом Галеркина второго порядка, но в области за фронтом ударной волны порядок схемы может падать до первого порядка [22].

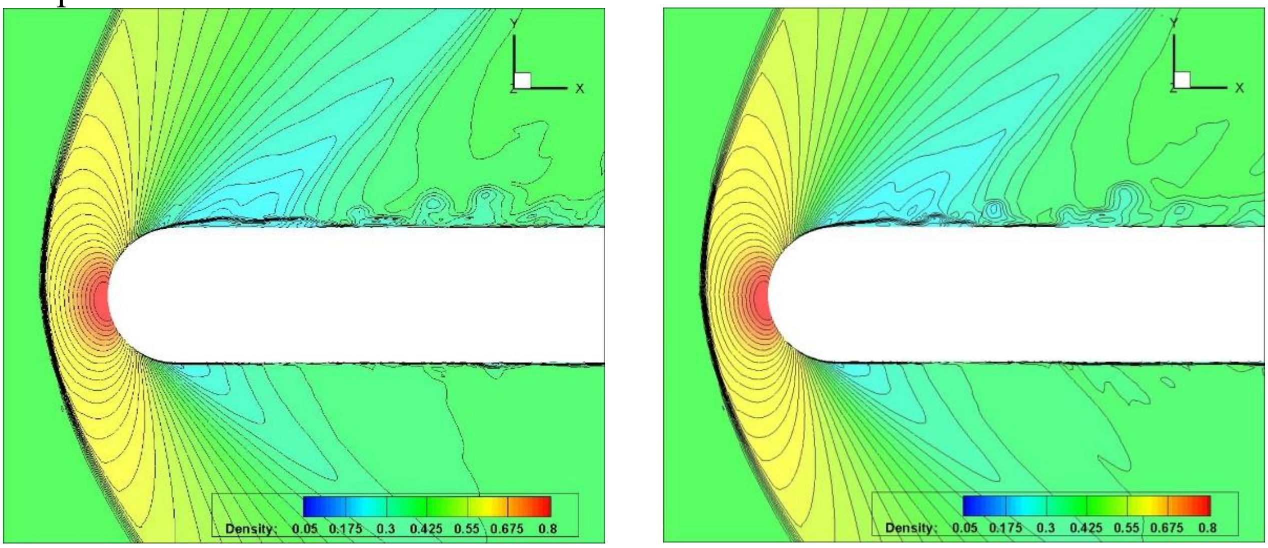
При расчете с численным потоком Русанова-Лакса-Фридрихса такой неустойчивости не возникло (рис.2б), но высокая диссипативность потока создала более размытые области.



а) численный поток HLLC б) численный поток RLF

Рис. 2. Распределение поля плотности

Далее были проведены два расчета с новыми гибридными численными потоками (рис.3). Оба предложенных потока показали устойчивую работу при расчетах, позволили избежать возникновения неустойчивостей, сохранили точность и структуру ударной волны и показали хорошую точность решения в пограничном слое.



а) численный гибридный поток 1 типа б) численный гибридный поток 2 типа

Рис.3. Распределение поля плотности

Полученные результаты

Был предложен новый гибридный поток, позволяющий подавить развитие неустойчивости и сохраняющий точность метода. Проведено численное моделирование полета крылатой ракеты Tomahawk разрывным методом

Галеркина второго порядка точности с различными численными потоками. Использование в расчетах численного потока HLLC может привести к возникновению неустойчивости, потока Русанова-Лакса-Фридрихса – к высокой диссипации расчета. Применение нового гибридного численного потока позволяет избежать возникновения неустойчивости и сохранить точность расчета.

Список литературы

1. *Родионов А. В.* Искусственная вязкость для подавления ударно-волновой неустойчивости в схемах типа Годунова повышенной точности. - ФГУП "Российский федеральный ядерный центр ВНИИЭФ", 2018, препринт №116, 51с;
2. *Pandolfi M., D'Ambrosio D.* Numerical Instabilities in Upwind Methods: Analysis and Cures for the “Carbuncle” Phenomenon//Journal of Computational Physics, 2001, v.166, p.271–301.
3. *Osher S., Solomon F.* Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws//Mathematics of computation, 1982, v.38, p.339–374.
4. *Pandolfi M.* A contribution to the numerical prediction of unsteady flows //AIAAjournal, 1984, v.22, p.602–610.
5. *Roe P.L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes//Journal of computational physics, 1981, v.43, p.357–372.
6. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики //Мат. сборник, 1959, т.47(89):3, с.271-306;
7. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics//Springer, Third Edition, 2010.
8. *Русанов В.В.* Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // ЖВМиМФ, 1961, т.I, №2, с.267-279;
9. *Lax P.D.* Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation //Communications on Pure and Applied Mathematics, 1954, v.7, №1, p.159-193.
10. *Van Leer B.* Upwind and High-Resolution Schemes // Springer, 1997, p.80–89.
11. *Liou M.-S.* A Sequel to AUSM: AUSM$^+$ // Journal of computational Physics, 1996, v.129, p.364–382.
12. *Nishikawa H., Kitamura K.* Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers// Journal of Computational Physics, 2008, v.227, p.2560–2581.

13. *Guo S., Tao W.-Q.* Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 2018, v.73, p.33–47.

14. *Hu L.J., Yuan L.* A robust hybrid hllc-force scheme for curing numerical shock instability // Applied Mechanics and Materials, 2014, v.577, p.749–753.

15. *Ferrero A., D'Ambrosio D.* An Hybrid Numerical Flux for Supersonic Flows with Application to Rocket Nozzles // 17TH International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, 23-28 September 2019, Rhodes, Greece.

16. *Woodward P., Colella Ph.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. of Comp. Phys., 1984, v.54, №1, p.115-173.

17. *Cockburn B.* An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics, 1998, v.1697, p.151-268.

18. *Bassi F., Rebay S.* Numerical evaluation of two discontinuous Galerkin methods for the compressible Navier-Stokes equations // Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2002, v.40, p.197-207.

19. *Yasue K., Furudate M.* N. Ohnishi and K. Sawada Implicit Discontinuous Galerkin Method for RANS Simulation Utilizing Pointwise Relaxation Algorithm // Commun. Comput. Phys.,2010, v.7, №3, p.510-533, doi: 10.4208/cicp.2009.09.055.

20. *Spiteri R. J., Ruuth S. J.* A New Class of Optimal High-Order Strong Stability-Preserving Time Discretization Methods // SIAM J. NUMER. ANAL. 2002. v.40, №2, p.469–491.

21. *Краснов М.М., Кучугов П.А., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф.* Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования // Матем. моделирование, 2017, v.29:2, p.3–22;

22. *Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф.* О точности разрывного метода Галеркина при расчете ударных волн // ЖВМиМФ, Т. 58, № 8, 2018, С.148-156.