



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахвалов П.А.

Интегральное
представление решения
задачи о дифракции
акустического импульса в
секторе с углом $2\pi/n$ и его
численная аппроксимация

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П.А. Интегральное представление решения задачи о дифракции акустического импульса в секторе с углом $2\pi/n$ и его численная аппроксимация // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 15. 23 с.
<http://doi.org/10.20948/prepr-2020-15>
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-15>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

П. А. Бахвалов

**Интегральное представление решения задачи
о дифракции акустического импульса
в секторе с углом $2\pi/n$
и его численная аппроксимация**

Москва — 2020

Бахвалов П. А.

Интегральное представление решения задачи о дифракции акустического импульса в секторе с углом $2\pi/n$ и его численная аппроксимация

Рассматривается начально-краевая задача для акустической системы уравнений в секторе $0 < \phi < 2\pi/n$. На границе сектора ставятся условия непротекания. В начальный момент времени скорость полагается равной нулю, а пульсации давления задаются в виде гауссиана, центр которого находится на достаточном расстоянии от границ области, так чтобы его величиной на границе области можно было пренебречь. Решение этой задачи выражается в интегральном виде. Предлагается способ быстрого вычисления интегралов, входящих в это решение.

Ключевые слова: численное интегрирование, дифракция

Pavel Alexeevich Bakhvalov

Evaluation of the solution of the Gaussian impulse diffraction inside a sector with the angle $2\pi/n$ using its integral representation

We consider an initial-boundary-valued problem for the acoustic system in the sector $G = \{(r, \phi) : 0 < \phi < 2\pi/n\}$ with slip conditions on the domain boundaries. The initial values are zero for the velocity and the Gaussian profile for the pressure pulsation. The center of the pulse is far enough from ∂G so that its value on ∂G is negligible. The solution of the problem has an integral representation. We present an efficient method for numerical evaluation of the solution.

Key words: numerical integration, diffraction

Оглавление

1	Постановка задачи	3
2	Свойства решения	4
3	Функция Грина	5
4	Решение для непрерывных начальных данных	8
5	Решение для физических пульсаций	12
6	Регуляризация при малых r	13
7	Численное вычисление интегралов	17
8	Учёт локальности начального импульса	20
9	Заключение	23
	Список литературы	23

1. Постановка задачи

Рассматривается акустическая система

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u}' = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla p' = 0, \quad (1.2)$$

где \mathbf{u}' и p' – пульсации и давления соответственно, при $t > 0$ в секторе $G \subset \mathbb{R}^2$, задаваемом в полярных координатах неравенствами $r > 0$, $0 < \phi < 2\pi/n$. Здесь $n \in \mathbb{N}$ – параметр задачи. В частности, если $n = 1$, то область определения уравнения является плоскость с разрезом в форме полупрямой: $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x > 0\}$. На границе ставится условие непротекания $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} = 0$.

Начальные данные задаются в виде

$$u'(0, \mathbf{r}) = 0, \quad p'(0, \mathbf{r}) = p_0(\mathbf{r}) = F((\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)^2), \quad (1.3)$$

где $F \in C^2(0, \infty)$, такая что $\|F(\zeta) - \exp(-\alpha\zeta)\| \ll \varepsilon$, $\alpha > 0$, и $F(\zeta) = 0$ при $\zeta \geq (\operatorname{dist}(\mathbf{r}_s, \partial G))^2$. Требуется построить алгоритм вычисления $p'(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{u}'(t, \mathbf{r})$ в заданной точке (t, \mathbf{r}) с заданной точностью ε (для скоростей при $n = 1$ требуемой точностью является ε/\sqrt{r}), работающий за разумное время. Под построением такого алгоритма понимается сведение задачи к интегрированию аналитических функций по отрезкам, причём отношение длины отрезка интегрирования к радиусу сходимости рядов, которыми представляется подынтегральная функция, не должно превосходить константы, не зависящей от t и \mathbf{r} . Такие интегралы могут вычисляться по составным формулам Гаусса.

Фактически начальные данные имеют форму гауссиана: $p_0(\mathbf{r}) = \exp(-\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)^2)$, центр которого находится достаточно далеко от границ, так чтобы при $\mathbf{r} \in \partial G$ с машинной точностью выполнялось $p_0(\mathbf{r}) = 0$. Приведённая выше формулировка сделана для того, чтобы избежать вопросов, связанных с рассогласованностью начальных и граничных условий и возникающих вследствие этого разрывов в решении.

Предлагаемая задача предназначается для верификации численных алгоритмов для моделирования задач акустики. В [1] автором был построен численный алгоритм для вычисления с гарантированной точностью решения задачи дифракции плоской волны в этой же геометрии. Однако задача с плоской волной имеет существенный недостаток: на любой конечный момент времени её решение не стремится к нулю на бесконечности, что вызывает проблемы с постановкой граничных условий в вычислительном эксперименте. В отличие от неё, в задаче, рассматриваемой в настоящей работе, решение убывает на бесконечности как $\exp(-\alpha x^2)$, $\alpha > 0$, и границы расчётной области легко удалить так, чтобы отражением от них акустической волны можно было пренебречь.

Дальнейший текст структурирован следующим образом. В §2 описаны свойства решения в вершине угла. В §3 приведено решение для волнового потенциала в случае точечного импульса. В §4 проводится свёртка этого решения с профилем начальных данных, после чего интеграл разбивается на части, чтобы избежать разрывов в подынтегральной функции. В §5 полученное решение дифференцируется для получения пульсаций давления и скоростей. В §6 проводится преобразование решения таким образом, чтобы исключить неопределённости вида $0/0$. В §7 двумерные интегралы сводятся к повторным таким образом, чтобы внутренний интеграл был гладкой функцией переменной, по которой проводится интегрирование во внешнем интеграле. Наконец, в §8 описываются ограничения интервалов интегрирования, учитывающие локальность начальных данных.

2. Свойства решения

Преобразуем поставленную задачу к начально-краевой задаче для волнового уравнения. Применяя оператор ротора к (1.2), получаем $\partial/\partial t(\text{rot } \mathbf{u}') = 0$, откуда с учётом начальных данных следует потенциальность поля скоростей. Подставляя $\mathbf{u}' = \nabla V$ в (1.2), получаем $p' = -\partial V/\partial t - \partial \hat{f}/\partial t$, где $\hat{f}(t)$ – некоторая функция, зависящая только от времени. Подставляя в (1.1), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(V(t, \mathbf{r}) + \hat{f}(t)) - \Delta(V(t, \mathbf{r}) + \hat{f}(t)) = 0.$$

Обозначая $W(t, \mathbf{r}) = V(t, \mathbf{r}) + \hat{f}(t)$, получаем, что волновой потенциал $W(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \Delta W = 0, \quad (2.1)$$

а пульсации физических величин выражаются через него по формулам

$$p'(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial W(t, \mathbf{r})}{\partial t}, \quad \mathbf{u}'(t, \mathbf{r}) = \nabla W(t, \mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Соответственно, начальные условия (1.3) переписываются в виде

$$W(0, \mathbf{r}) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t}(0, \mathbf{r}) = -F((\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)^2), \quad (2.3)$$

а граничные условия – в виде $\partial W/\partial \mathbf{n} = 0$ при $\mathbf{r} \in \partial G$.

Гладкость этого решения такая же, как и в случае дифракции плоской волны. При $n = 1$ волновой потенциал и пульсации давления являются непрерывными на G , на полупрямой имеет место односторонняя непрерывность с

каждой стороны, но пульсации скоростей не являются ограниченными в вершине полупрямой ($x = y = 0$). При $n = 2$ область является полуплоскостью, и начало координат ничем не отличается от любой другой точки границы; при $n \geq 3$ в вершине угла пульсации скоростей равны нулю и, следовательно, u' и p' непрерывны на \bar{G} . Последний факт будет использоваться в настоящей работе по существу. Его можно объяснить следующим образом. Будем искать решение волнового уравнения в угловой области с углом β в виде

$$W(t, r, \phi) = f(r) \cos\left(\pi k \frac{\phi}{\beta}\right) \exp(i\omega t), \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $f(r) = r^\alpha(1 + \bar{o}(r))$. Подставляя в (2.1) и приравнивая коэффициенты при $r^{\alpha-2}$, получаем $\alpha = \pm \pi k / \beta$. Отрицательные значения α не допускаются, поскольку соответствующие решения обладали бы бесконечным интегралом энергии. Случай $\alpha = k = 0$ соответствует константной добавке, исчезающей при пространственном дифференцировании (см. (2.2)). Наименьшее положительное значение α равно π / β и при $\beta < \pi$ больше единицы, что и означает, что пульсации скорости в начале координат равны нулю. Строгое доказательство этого утверждения приведено в [2], §6.

Отметим, что при чётных n решение может быть выражено через решение задачи в свободном пространстве методом отражений, поэтому интерес представляет только случай нечётных n .

3. Функция Грина

Рассмотрим функцию

$$H(t, r, \psi, a) = \frac{1}{2\pi} (t^2 - (r \cos \psi - a)^2 - (r \sin \psi)^2)_+^{-1/2} \times \begin{cases} 1/2, & t > r + a; \\ 1, & t < r + a, \quad -\pi < \psi < \pi \bmod{4\pi}; \\ 0, & t < r + a, \quad -3\pi < \psi < -\pi \bmod{4\pi}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Нижний индекс плюс означает, что выражение принимается равным нулю, если аргумент степенной функции отрицательный. Легко заметить, что эта функция является 4π -периодической по ψ функцией, причём при $t < a$ она совпадает с функцией Грина волнового уравнения в свободном пространстве, продолженной нулём на $\pi < |\psi| < 2\pi \pmod{4\pi}$. В [3] доказано (теорема 1.2.1), что $H(t, r, \psi, a)$ является обобщённым решением волнового уравнения в полярных координатах:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) H(t, r, \phi, a) = 0. \quad (3.2)$$

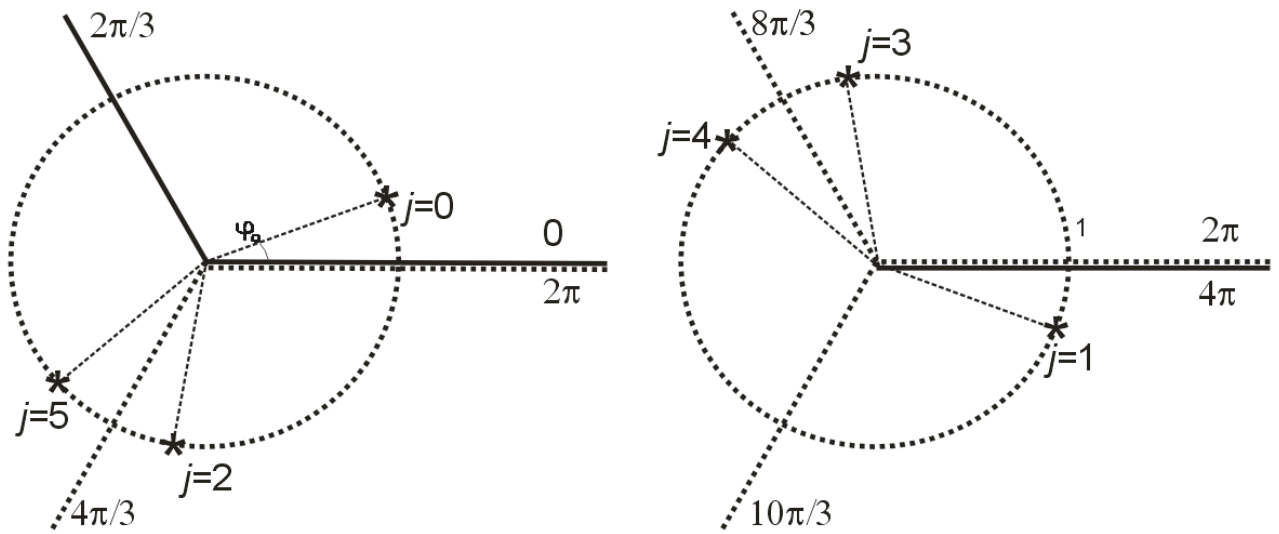


Рис. 1. Расположение отражённых импульсов

Приведём теперь решение поставленной задачи в секторе $2\pi/n$ с точечными начальными данными $W|_{t=0} = 0$, $\partial W/\partial t|_{t=0} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Оно выражается через функцию $H(t, r, \psi, a)$ методом отражений. Пусть \mathbf{r}_0 – точка с координатами $r_0 \cos \phi_0$ и $r_0 \sin \phi_0$, где $r_0 > 0$, $0 < \phi_0 < 2\pi/n$. Определим для $k = 0, \dots, n-1$ функции

$$\phi_{2k}(\phi_0) = \phi_0 + 4\pi k/n, \quad \phi_{2k+1}(\phi_0) = -\phi_{2k}(\phi_0). \quad (3.3)$$

Они задают расположение отражённых импульсов, см. рис. 1. Тогда решением задачи с точечными начальными данными будет функция

$$W(t, r, \phi, \mathbf{r}_0) = \sum_{j=0}^{2n-1} H(t, r, \phi - \phi_j(\phi_0), r_0). \quad (3.4)$$

Действительно, при малых t эта функция совпадает с $H(t, r, \phi - \phi_0, r_0)$ и поэтому удовлетворяет начальным условиям. При $0 < \phi_0 < 2\pi/n$ она является решением (3.2) как сумма конечного числа решений. Проверка условия $\nabla W \cdot \mathbf{n} = \pm r \partial W/\partial \phi = 0$ на границе сектора повторяет [1], поэтому для краткости её опустим.

Проиллюстрируем решение для случая точечных начальных данных, расположенных в точке $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$, в случае $n = 1$, то есть для дифракции на полупрямой. Обозначим через $\tilde{\mathbf{r}}_0$ точку, симметричную \mathbf{r}_0 относительно полупрямой. Введём

$$\hat{d} = \text{dist}(\mathbf{r}_0, \partial G) = \text{dist}(\tilde{\mathbf{r}}_0, \partial G) = \begin{cases} |y_0|, & x_0 > 0; \\ |\mathbf{r}_0|, & x_0 \leq 0. \end{cases}$$

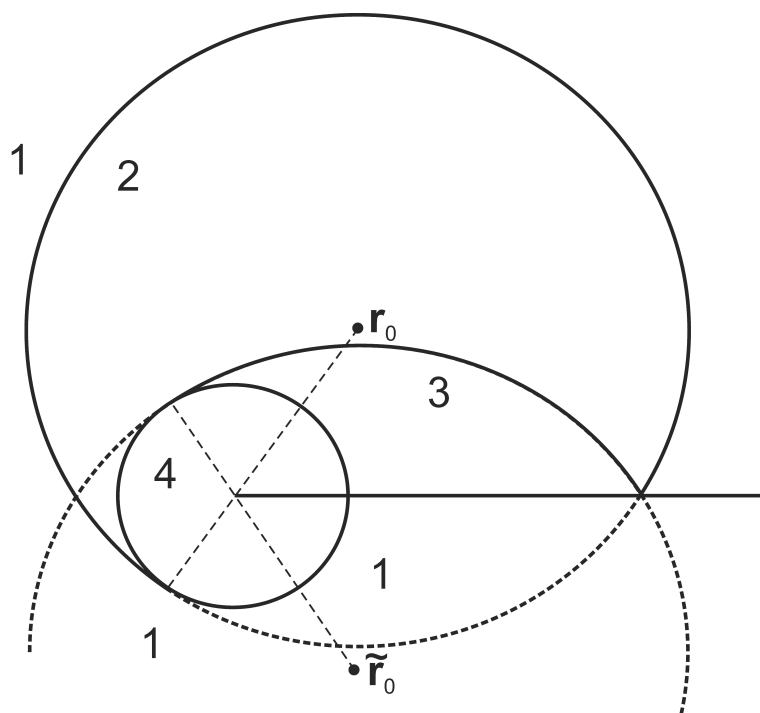


Рис. 2. Иллюстрация к решению задачи о дифракции на полупрямой

При $t < \hat{d}$ возмущение не достигает полупрямой, и потому решение этой задачи совпадает с решением в свободном пространстве. При $\hat{d} < t < |r_0|$ (этот интервал непуст только при $x_0 > 0$) решение получается методом отражений, то есть является суммой двух функций Грина волнового уравнения в свободном пространстве, взятых относительно точек r_0 и \tilde{r}_0 с коэффициентом, выбираемым 0 или 1 из геометрических соображений.

При $t > |r_0|$ возмущение достигает вершины полупрямой. Схема решения представлена на рисунке 2. В области 1 решение нулевое. В области 2 присутствует только “падающее” возмущение, выражающееся функцией Грина в свободном пространстве. В области 3 присутствуют “падающее” и “отражённое” возмущения. В области 4 решение задачи является суммой “падающего” и “отражённого” возмущений, взятых с коэффициентом 1/2. В соответствии с (3.4), решение может быть записано в виде $W(t, r, \phi, r_0) = H(t, r, \phi - \phi_0, r_0) + H(t, r, \phi + \phi_0, r_0)$, где

$$H(t, r, \phi - \phi_0, r_0) = \frac{1}{2\pi} (t^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{r}_0)^2)_+^{-1/2} g(t, \mathbf{x}, \mathbf{r}_0),$$

$$H(t, r, \phi + \phi_0, r_0) = \frac{1}{2\pi} (t^2 - (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{r}}_0)^2)_+^{-1/2} (1 - g(t, \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{r}}_0)),$$

где $\mathbf{x} = (r \cos \phi, r \sin \phi)$, а геометрический множитель определяется как

$$g(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1/2, & t > |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|, \\ 1, & t < |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|, \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \cap \{y = 0, x > 0\} = \emptyset, \\ 0, & t < |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|, \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \cap \{y = 0, x > 0\} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Здесь $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ – отрезок, соединяющий точку \mathbf{x} и \mathbf{y} .

4. Решение для непрерывных начальных данных

Решение для задачи с начальными данными (2.3) получается свёрткой их профиля с решением (3.1), (3.4) для точечных начальных данных:

$$W(t, r, \phi) = - \sum_{j=0}^{2n-1} W_j(t, r, \phi), \quad (4.1)$$

$$W_j(t, r, \phi) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi/n} f \left(\begin{array}{c} r_0 \cos \phi_0 \\ r_0 \sin \phi_0 \end{array} \right) H(t, r, \phi - \phi_j(\phi_0), r_0) r_0 d\phi_0 dr_0. \quad (4.2)$$

Поскольку $f(\mathbf{r}_0) = F((\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_s)^2)$, имеем

$$f \left(\begin{array}{c} r_0 \cos \phi_0 \\ r_0 \sin \phi_0 \end{array} \right) = F(r_0^2 + r_s^2 - 2r_0 r_s \cos(\phi_0 - \Phi_s)), \quad (4.3)$$

где $0 < \Phi_s < 2\pi/n$ – направление на центр начального импульса, а r_s – его удаление от начала координат (вершины угла).

Формально решение задачи, поставленной в §1, для волнового потенциала получено. Но поскольку функция $H(\dots)$ имеет разрывы, вычисление значения $W_j(t, r, \phi)$ путём непосредственной аппроксимации формулы (4.2) было бы исключительно ресурсоёмкой задачей. Займёмся преобразованием (4.2), чтобы привести решение к виду, более пригодному для численного вычисления. Ниже будем рассматривать вычисление $W_j(t, r, \phi)$ при некотором значении j , подразумевая, что решение выражается через них формулой (4.1).

Начнём с того, что изменим пределы интегрирования по ϕ_0 . Доопределив функцию f как функцию на плоскости нулём вне сектора $(0, 2\pi/n)$ и учитывая, что носитель функции f является кругом, не пересекающим ∂G , заменим интервал интегрирования $(0, 2\pi/n)$ на $(\Phi_s - \pi/2, \Phi_s + \pi/2)$.

Далее, во внутреннем интеграле в (4.2) перейдём к интегрированию по $\psi = \phi - \phi_j(\phi_0)$. Имеем

$$W_j(t, r, \phi) = \int_0^\infty \int_{\Phi_s - \pi/2}^{\Phi_s + \pi/2} f \left(\begin{array}{c} r_0 \cos(\phi_0(\psi)) \\ r_0 \sin(\phi_0(\psi)) \end{array} \right) H(t, r, \psi, r_0) r_0 d\psi dr_0.$$

Здесь

$$\Phi = \begin{cases} \phi - 2\pi j/n - \Phi_s, & j = 2k, k \in \mathbb{Z}; \\ \phi + 2\pi(j-1)/n + \Phi_s, & j = 2k+1, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Поскольку якобиан проведённой замены переменных равен $(-1)^{j+1}$, выражение $\phi_0 - \Phi_s$, входящее в (4.3), с точностью до знака совпадает с $\psi - \Phi$ и, следовательно, $\cos(\phi_0(\psi) - \Phi_s) = \cos(\psi - \Phi)$. Таким образом,

$$W_j(t, r, \phi) = \int_0^\infty \int_{\Phi - \pi/2}^{\Phi + \pi/2} F\left(r_0^2 + r_s^2 - 2r_0r_s \cos(\psi - \Phi)\right) H(t, r, \psi, r_0) r_0 d\psi dr_0.$$

Далее, поскольку функция H имеет разрыв при $\psi = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, полезно разделить отрезок интегрирования $[\Phi - \pi/2, \Phi + \pi/2]$ на “светлую” составляющую, лежащую в $(-\pi + 4\pi k, \pi + 4\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$, и “тёмную”, лежащую в $(-3\pi + 4\pi k, -\pi + 4\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$. Для этого поступим следующим образом. В полуинтервале $[\Phi - \pi/2, \Phi + \pi/2)$ лежит ровно одна точка вида πj , $j \in \mathbb{Z}$; обозначим её через πJ . Иначе говоря, пусть J – ближайшее целое число к Φ/π . Поскольку при $\psi \in [\Phi - 3\pi/2, \Phi + 3\pi/2] \setminus [\Phi - \pi/2, \Phi + \pi/2]$ аргумент функции F больше или равен r_s^2 и, следовательно, лежит вне её носителя, пределы интегрирования можно расширять в этих пределах. Расширим пределы интегрирования до $(\pi(J-1), \pi(J+1))$ и разобьём область интегрирования на две части: $(\pi J - \pi, \pi J)$ и $(\pi J, \pi J + \pi)$. Тогда получим

$$W_j(t, r, \phi) = W_j^{(+)}(t, r, \phi) + W_j^{(-)}(t, r, \phi),$$

$$W_j^{(\pm)}(t, r, \phi) = \int_0^\infty \int_{\pi J + \min\{\pm\pi, 0\}}^{\pi J + \max\{\pm\pi, 0\}} F\left(r_0^2 + r_s^2 - 2r_0r_s \cos(\psi - \Phi)\right) H(t, r, \psi, r_0) r_0 d\psi dr_0.$$

Определим значения g_+ и g_- :

$$\begin{aligned} g_+ &= g_- = 1, & \text{if } J &= 4k; \\ g_- &= 1, \quad g_+ = 0, & \text{if } J &= 4k+1; \\ g_+ &= g_- = 0, & \text{if } J &= 4k+2; \\ g_- &= 0, \quad g_+ = 1, & \text{if } J &= 4k+3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подставляя в определение $W_j^{(\pm)}$ выражение (3.1) для $H(\dots)$, получаем

$$W_j(t, r, \phi) = \sum_{+,-} \left[g_{\pm} W_j^{(\pm)}(t, r, \phi) + \left(\frac{1}{2} - g_{\pm} \right) W_{j,d}^{(\pm)}(t, r, \phi) \right], \quad (4.6)$$

где

$$W_j^{(\pm)}(t, r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{\pi J + \min\{\pm\pi, 0\}}^{\pi J + \max\{\pm\pi, 0\}} F\left(r_0^2 + r_s^2 - 2r_0r_s \cos(\psi - \Phi)\right) \times \quad (4.7)$$

$$\times \left(t^2 - (r \cos \psi - r_0)^2 - (r \sin \psi)^2\right)_+^{-1/2} r_0 d\psi dr_0,$$

а выражения для $W_{j,d}^{(\pm)}$ отличаются от формул для $W_j^{(\pm)}$ тем, что интеграл по r_0 берётся от 0 до $\max\{0, t - r\}$. Таким образом, мы разбили интеграл на четыре слагаемых, чтобы в каждом из них геометрический множитель был постоянным. Отметим, что в правой части (4.7) величина Φ определена (4.4) и, таким образом, зависит от ϕ и j .

Теперь выполним линейную замену переменных, чтобы свести интегрирование по ψ к интервалу $(0, \pi)$. При чётных J сдвинем пределы интегрирования на πJ , после чего для $W_{j,d}^{(-)}$ выполним замену переменных $\psi = -\psi$. При нечётных J сдвинем пределы интегрирования на $\pi(J - 1)$, после чего для $W_{j,d}^{(+)}$ выполним замену переменных $\psi = 2\pi - \psi$. Также заметим, что

$$(r \cos \psi - r_0)^2 + (r \sin \psi)^2 = (r - r_0 \cos \psi)^2 + (r_0 \sin \psi)^2.$$

В результате получим

$$W_{j,d}^{(\pm)}(t, r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\dots} \int_0^\pi \frac{F(r_0^2 + r_s^2 - 2r_0r_s \cos(\pm(-1)^J \psi - \Phi))}{(t^2 - (r - r_0 \cos \psi)^2 - (r_0 \sin \psi)^2)_+^{1/2}} r_0 d\psi dr_0. \quad (4.8)$$

Удобно дополнительно сделать замену ψ на $\pi - \psi$, тогда получим

$$W_{j,d}^{(\pm)}(t, r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\dots} \int_0^\pi \frac{F(r_0^2 + r_s^2 - 2r_0r_s \cos(\psi - \hat{\Phi}))}{(t^2 - (r + r_0 \cos \psi)^2 - (r_0 \sin \psi)^2)_+^{1/2}} r_0 d\psi dr_0, \quad (4.9)$$

$$\hat{\Phi} = \pi \mp (-1)^J \Phi. \quad (4.10)$$

Верхний предел интегрирования по r_0 равен $+\infty$ для $W_j^{(\pm)}$ и $\max\{0, t - r\}$ для $W_{j,d}^{(\pm)}$. Знак \mp в (4.10) противоположен знаку индекса у $W_{j,d}^{(\pm)}$, а величина J определена выше.

Можно рассматривать интеграл в (4.9) как интеграл по области: для вычисления $W_j^{(\pm)}$ интегрирование ведётся по внешнему полукругу, а для вычисления $W_{j,d}^{(\pm)}$ – по внутреннему, см. рис. 3. Отметим, что аргумент функции F

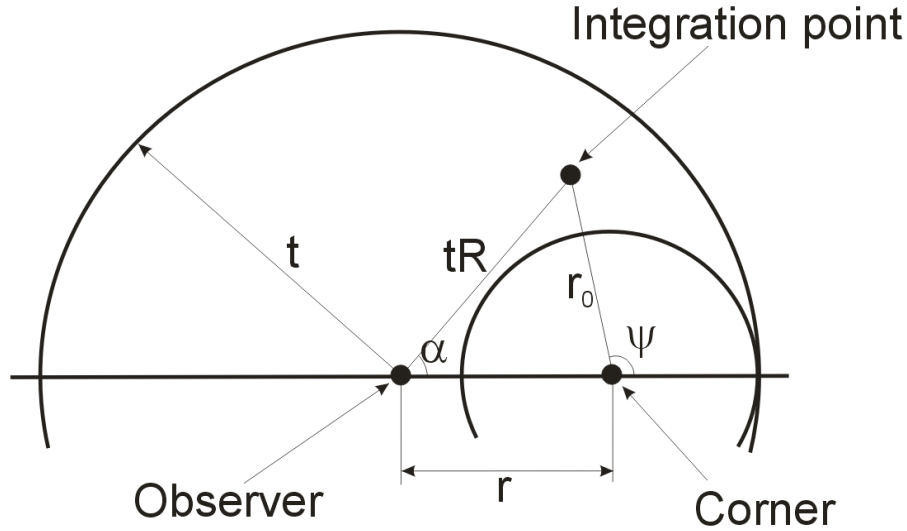


Рис. 3. Область интегрирования

есть квадрат расстояния между переменной интегрирования (точкой с координатами $(r_0 \cos \psi, r_0 \sin \psi)$) и точкой с координатами $(r_s \cos \hat{\Phi}, r_s \sin \hat{\Phi})$, которую можно считать центром условного источника.

Перейдём к полярным координатам с центром в $(-r, 0)$, отмасштабированным с множителем R . Для этого положим

$$r_0 \cos \psi = -r + tR \cos \alpha, \quad r_0 \sin \psi = tR \sin \alpha. \quad (4.11)$$

Подкоренная функция в (4.9) положительна при $R < 1$. Введём обозначения

$$x_s = r + r_s \cos \hat{\Phi}, \quad y_s = r_s \sin \hat{\Phi} \quad (4.12)$$

и

$$\mathcal{R}(t, r, \phi, R, \alpha) = (tR \cos \alpha - x_s)^2 + (tR \sin \alpha - y_s)^2. \quad (4.13)$$

Тогда решение задачи для волнового потенциала выражается формулами (4.1), (4.4), (4.6), (4.12), (4.13),

$$W_j^\pm(t, r, \phi) = \frac{t}{2\pi} \int_0^1 \int_0^\pi \frac{F(\mathcal{R}(t, r, \phi, R, \alpha))}{\sqrt{1 - R^2}} R d\alpha dR, \quad (4.14)$$

$$W_{j,d}^\pm(t, r, \phi) = \frac{t}{2\pi} \int_0^1 \int_0^\pi \frac{F(\mathcal{R}(t, r, \phi, R, \alpha))}{\sqrt{1 - R^2}} \Theta \left(1 - \frac{r}{t} - \frac{r_0}{t} \right) R d\alpha dR, \quad (4.15)$$

где

$$r_0 = (r^2 + (tR)^2 - 2rtR \cos \alpha)^{1/2}. \quad (4.16)$$

5. Решение для физических пульсаций

Пульсации физических переменных выражаются через волновой потенциал по формулам (2.2). Их вычисление сводится к вычислению производных от выражений, стоящих в правых частях (4.14) и (4.15). Вначале запишем производные от $\mathcal{R}(\dots)$ по t, r и ϕ при постоянных R и α . При этом учтём, что $d\hat{\Phi}/d\phi = 1$, $d\hat{\Phi}/d\phi = \pm(-1)^J$, $\partial x_s/\partial r = 1$, $\partial y_s/\partial r = 0$, $\partial x_s/\partial \phi = \mp(-1)^J r_s \sin \hat{\Phi}$, $\partial y_s/\partial \phi = \pm(-1)^J r_s \cos \hat{\Phi}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial(t, r, \phi)} = & 2(tR \cos \alpha - x_s) \begin{pmatrix} R \cos \alpha \\ -1 \\ \pm(-1)^J r_s \sin \hat{\Phi} \end{pmatrix} + \\ & + 2(tR \sin \alpha - y_s) \begin{pmatrix} R \sin \alpha \\ 0 \\ \mp(-1)^J r_s \cos \hat{\Phi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Далее имеем

$$\frac{\partial(W_{j,d}^{\pm}/t)}{\partial(t, r, \phi)}(t, r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi} F'(\mathcal{R}) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial(t, r, \phi)} \frac{1}{\sqrt{1-R^2}} R d\alpha dR. \quad (5.2)$$

Для вычисления производных от $W_{j,d}^{\pm}$ удобно рассматривать (4.15) как двумерный интеграл, см. рис. 3. Будем предполагать $t > r$, так как в противном случае $W_{j,d}^{\pm} = 0$. Аргумент функции Хевисайда зависит только от $r/t, \alpha$ и R ; вычислим производную по r/t при постоянных α и R :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(1 - \frac{r}{t} - \frac{r_0}{t})}{\partial(r/t)} &= -\delta(1 - r/t - r_0/t) \left(1 + \frac{r/t - R \cos \alpha}{r_0/t} \right) = \\ &= -t(1 - \cos \psi) \delta(t - r - r_0). \end{aligned}$$

Поскольку носитель правой части последнего равенства является окружностью с радиусом $t - r$, граничный интеграл удобно записать как интеграл по ψ . В координатах $(r_0 \cos \alpha, r_0 \sin \alpha)$ нормальная производная от аргумента δ -функции равна -1 ; длина дуги равна $dl = r_0 d\psi = (t - r) d\psi$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(W_{j,d}^{\pm}/t)}{\partial(t, r, \phi)}(t, r, \phi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi} F'(\mathcal{R}) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial(t, r, \phi)} \frac{1}{\sqrt{1-R^2}} \Theta(t - r - r_0) R d\alpha dR - \\ &- \frac{t - r}{2\pi} \begin{pmatrix} r/t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \int_0^{\pi} F(\mathcal{R}(t, r, \phi, R, \alpha)) \frac{1 - \cos \psi}{\sqrt{1-R^2}} d\psi. \end{aligned}$$

В последнем интеграле $R = R(\psi)$ и $\alpha = \alpha(\psi)$ определяются из (4.11) с подстановкой $r_0 = t - r$. Поэтому имеем

$$R^2 = (((t-r) \cos \psi + r)^2 + ((t-r) \sin \psi)^2)/t^2 = ((t-r)^2 + r^2 + 2r(t-r) \cos \psi)/t^2,$$

$$\sqrt{1 - R^2} = \sqrt{2r(t-r)(1 - \cos \psi)}/t.$$

В итоге, решение поставленной задачи для пульсаций физических переменных выражается формулами (2.2), (4.1), (4.4), (4.6), (4.12), (4.13), (5.1), (5.2),

$$\frac{\partial(W_{j,d}^\pm/t)}{\partial(t, r, \phi)}(t, r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^\pi F'(\mathcal{R}) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial(t, r, \phi)} \frac{1}{\sqrt{1 - R^2}} \Theta(t - r - r_0) R d\alpha dR -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{t-r}}{t\sqrt{r}} \begin{pmatrix} r/t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \int_0^\pi F\left((t-r)^2 + r_s^2 - 2(t-r)r_s \cos(\psi - \hat{\Phi})\right) \sin(\psi/2) d\psi.$$

6. Регуляризация при малых r

При переходе от производных по цилиндрическим координатам к производным по декартовым координатам будет возникать множитель $1/r$, который может привести к накоплению арифметической ошибки при малых r . Поэтому преобразуем выражение для $\partial(W_j^\pm/t)/\partial\phi$. Из (4.13) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \alpha} &= 2tR \left(-(tR \cos \alpha - x_s) \sin \alpha + (tR \sin \alpha - y_s) \cos \alpha \right) = \\ &= 2tR(x_s \sin \alpha - y_s \cos \alpha) = 2tR((r + r_s \cos \hat{\Phi}) \sin \alpha - r_s \sin \hat{\Phi} \cos \alpha) = \\ &= 2tRr \sin \alpha + 2tRr_s \sin(\alpha - \hat{\Phi}). \end{aligned}$$

Преобразуя (5.1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \phi} &= \pm(-1)^J 2r_s \left((tR \cos \alpha - x_s) \sin \hat{\Phi} - (tR \sin \alpha - y_s) \cos \hat{\Phi} \right) = \\ &= \mp(-1)^J 2tRr_s \sin(\alpha - \hat{\Phi}) \pm(-1)^J 2r_s \left(-x_s \sin \hat{\Phi} + y_s \cos \hat{\Phi} \right) = \\ &= \mp(-1)^J \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \alpha} - 2tRr \sin \alpha \right) \pm(-1)^J 2r_s \left(-(r + r_s \cos \hat{\Phi}) \sin \hat{\Phi} + r_s \sin \hat{\Phi} \cos \hat{\Phi} \right) = \\ &= \mp(-1)^J \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \alpha} \pm(-1)^J 2r (tR \sin \alpha - y_s). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (5.2), получаем

$$\frac{\partial(W_j^\pm/t)}{\partial\phi}(t, r, \phi) = \pm(-1)^J \frac{r}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi F'(\mathcal{R}) \frac{tR \sin \alpha - y_s}{\sqrt{1-R^2}} R d\alpha dR + B_j^\pm, \quad (6.1)$$

где

$$B_j^\pm = \mp(-1)^J \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{R}{\sqrt{1-R^2}} \left(F(\mathcal{R}(t, r, \phi, R, \pi)) - F(\mathcal{R}(t, r, \phi, R, 0)) \right) dR. \quad (6.2)$$

Одномерный интеграл в (6.2) является интегралом от $F(\mathcal{R})$ по отрезку, на рис. 3 расположенному горизонтально и являющемуся нижней границей большого полукруга.

Аналогичное преобразование проводится и для $\partial(W_{j,d}^\pm/t)/\partial\phi$; в результате возникает интеграл по границе малого полукруга. Этот интеграл состоит из интеграла по его горизонтальному участку границы $B_{j,d}^\pm$ и интеграла по его верхней границе. Для последнего получим явное выражение в виде интеграла по ψ . Заметим, что на полуокружности, по которой производится интегрирование,

$$\frac{dR}{d\psi} = -\frac{r(t-r)}{Rt^2} \sin \psi d\psi,$$

$$\sqrt{1-R^2} = \left(2\frac{r(t-r)}{t^2} (1 - \cos \psi) \right)^{1/2} = \frac{2\sqrt{r}\sqrt{t-r}}{t} \sin(\psi/2).$$

Поэтому

$$-\frac{RdR}{\sqrt{1-R^2}} = \frac{r(t-r) \sin \psi / r^2}{2\sqrt{r}\sqrt{t-r} \sin(\psi/2) / t} d\psi = \frac{1}{t} \sqrt{r}\sqrt{t-r} \cos(\psi/2).$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(W_{j,d}^\pm/t)}{\partial\phi}(t, r, \phi) &= \frac{r}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi F'(\mathcal{R}) \frac{tR \sin \alpha - y_s}{\sqrt{1-R^2}} \Theta(t-r-r_0) R d\alpha dR + B_{j,d}^\pm \mp \\ &\mp(-1)^J \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{t-r}\sqrt{r}}{t} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F\left((t-r)^2 + r_s^2 - 2(t-r)r_s \cos(\psi - \hat{\Phi}) \right) \cos(\psi/2) d\psi. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Последнее слагаемое в (6.3) имеет такой же вид, что и последнее слагаемое в полученном ранее выражении для $\partial(W_{j,d}^\pm/t)/\partial r$, с заменой $\sin(\psi/2)$ на

$\pm(-1)^J r \cos(\psi/2)$. Наконец, в повторном интеграле от интегрирования по α и R вернёмся обратно к интегрированию по r_0 и ψ .

Подытоживая проведённые преобразования, получаем следующую цепочку формул, определяющих решение поставленной задачи. Во-первых, для всех значений $j = 0, \dots, 2n - 1$ определяются величины (зависящие от ϕ) $\Phi_j \in \mathbb{R}$ (формулой (4.4)), $J_j \in \mathbb{Z}$ (как ближайшее целое число к Φ_j/π), $g_{j,\pm} \in \{0,1\}$ (формулами (4.5)) и $\hat{\Phi}_{j,\pm} \in \mathbb{R}$ (формулой (4.10)). Также вводятся величины x_s и y_s формулами (4.12), зависящие от ϕ , r и j . В тексте выше индекс j у этих величин опускался. Далее решение выражается следующим образом.

$$p'(t, r, \phi) = -t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{W(t, r, \phi)}{t} \right) - \frac{W(t, r, \phi)}{t};$$

$$u_x(t, r, \phi) = \cos \phi \partial(W(t, r, \phi)/t)/\partial r - \sin \phi \partial(W(t, r, \phi)/(tr))/\partial \phi;$$

$$u_y(t, r, \phi) = \sin \phi \partial(W(t, r, \phi)/t)/\partial r + \cos \phi \partial(W(t, r, \phi)/(tr))/\partial \phi.$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} W(t, r, \phi)/t \\ \partial(W(t, r, \phi)/t)/\partial t \\ \partial(W(t, r, \phi)/t)/\partial r \\ \partial(W(t, r, \phi)/(tr))/\partial \phi \end{pmatrix} = \\ & = - \sum_{j=0}^{2n-1} \sum_{\pm} \left[g_{j,\pm} \begin{pmatrix} W_j^{\pm}/t \\ \partial(W_j^{\pm}/t)/\partial t \\ \partial(W_j^{\pm}/t)/\partial r \\ \partial(W_j^{\pm}/(tr))/\partial \phi \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2} - g_{j,\pm} \right) \begin{pmatrix} W_{j,d}^{\pm}/t \\ \partial(W_{j,d}^{\pm}/t)/\partial t \\ \partial(W_{j,d}^{\pm}/t)/\partial r \\ \partial(W_{j,d}^{\pm}/(tr))/\partial \phi \end{pmatrix} \right] \cdot \\ & \begin{pmatrix} W_j^{\pm}/t \\ \partial(W_j^{\pm}/t)/\partial t \\ \partial(W_j^{\pm}/t)/\partial r \\ \partial(W_j^{\pm}/(tr))/\partial \phi \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^\pi \mathcal{S}(t, r, \phi, R, \alpha) \frac{R d\alpha dR}{\sqrt{1-R^2}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_j^{\pm}/r \end{pmatrix}. \quad (6.4) \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{S}(t, r, \phi, R, \alpha) = \begin{pmatrix} F(\mathcal{R}) \\ 2F'(\mathcal{R})R(tR - x_s \cos \alpha - y_s \sin \alpha) \\ -2F'(\mathcal{R})(tR \cos \alpha - x_s) \\ \pm(-1)^J 2F'(\mathcal{R})(tR \sin \alpha - y_s) \end{pmatrix},$$

а $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t, r, \phi, R, \alpha)$ определено (4.13).

$$\begin{pmatrix} W_{j,d}^{\pm}/t \\ \partial(W_{j,d}^{\pm}/t)/\partial t \\ \partial(W_{j,d}^{\pm}/t)/\partial r \\ \partial(W_{j,d}^{\pm}/(tr))/\partial \phi \end{pmatrix} = Y_{j,d}^{\pm} - \frac{1}{2\pi} \frac{(t-r)_+^{1/2}}{t\sqrt{r}} \begin{pmatrix} 0 \\ (r/t)\text{Im } I_{j,d}^{\pm} \\ -\text{Im } I_{j,d}^{\pm} \\ \mp(-1)^J \text{Re } I_{j,d}^{\pm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_{j,d}^{\pm}/r \end{pmatrix}.$$

Выражение $Y_{j,d}^{\pm}$ определяется любой из формул

$$Y_{j,d}^{\pm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi} \mathcal{S}(t, r, \phi, R, \alpha) \Theta(t - r - r_0) \frac{R d\alpha dR}{\sqrt{1 - R^2}}, \quad (6.5)$$

$$Y_{j,d}^{\pm} = \frac{1}{2\pi t} \int_0^{\pi} \int_0^{t-r} \frac{\tilde{\mathcal{S}}(t, r, \phi, r_0, \psi)}{(t^2 - r^2 - 2rr_0 \cos \psi - r_0^2)^{1/2}_+} r_0 dr_0 d\psi, \quad (6.6)$$

где функция $\tilde{\mathcal{S}}$ получается из \mathcal{S} , если связать r_0, ψ, R, α равенствами (4.11):

$$\mathcal{S}(t, r, \phi, r_0, \psi) = \begin{pmatrix} F(\mathcal{R}) \\ 2F'(\mathcal{R})(\Delta_1(r_0 \cos \psi + r) + \Delta_2 r_0 \sin \psi)/t \\ -2F'(\mathcal{R})\Delta_1 \\ \pm(-1)^J 2F'(\mathcal{R})\Delta_2 \end{pmatrix},$$

где $\Delta_1 = r_0 \cos \psi - r_s \cos \hat{\Phi}_{j,\pm}$, $\Delta_2 = r_0 \sin \psi - r_s \sin \hat{\Phi}_{j,\pm}$, $\mathcal{R} = \Delta_1^2 + \Delta_2^2$.

Выражение $I_{j,d}^{\pm}$ определяется формулой

$$I_{j,d}^{\pm}(t, r, \phi) = \int_0^{\pi} F\left((t-r)^2 + r_s^2 - 2(t-r)r_s \cos(\psi - \hat{\Phi}_{j,\pm})\right) \exp(i\psi/2) d\psi.$$

Можно показать, что

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \sum_{\pm} \left[g_{j,\pm} B_j^{\pm} + \left(\frac{1}{2} - g_{j,\pm} \right) B_{j,d}^{\pm} \right] = 0,$$

поэтому соответствующие слагаемые можно не вычислять. Далее, при $n = 1$ в решении присутствует коренная особенность по скоростям при $r = 0$. При $n > 1$ (дифракция на углу с мерой не больше π) скорости являются непрерывными на замыкании области определения и в угловой точке равны нулю. Следовательно, при $r = 0$ должно выполняться

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \sum_{\pm} \left[\left(\frac{1}{2} - g_{j,\pm} \right) I_{j,d}^{\pm}(t, r, \phi) \right] = 0. \quad (6.7)$$

Но поскольку $I_{j,d}^{\pm}$ зависит только от $t - r$, но не от r в отдельности, то сумма, задаваемая формулой (6.7), должна равняться нулю при всех $t \geq r$. Значит, при $n > 1$ выражения $I_{j,d}^{\pm}(t, r, \phi)$ можно просто не вычислять.

7. Численное вычисление интегралов

Интеграл $I_{j,d}^{\pm}$ является одномерным интегралом от аналитической функции с бесконечным радиусом сходимости, поэтому он может быть вычислен с любой наперёд заданной точностью по квадратурным формулам Гаусса – Лежандра. Вычисление повторного интеграла, стоящего в (6.4), проводится вначале по α и затем по R . Поскольку \mathcal{S} является аналитической по R и α с бесконечным радиусом сходимости, она может быть проинтегрирована по α с использованием квадратур Гаусса – Лежандра. Получаемая при этом функция является аналитической по R с бесконечным радиусом сходимости. Множитель $R/\sqrt{1-R^2}$ можно рассматривать в качестве весового, и тогда внешний интеграл по R также может вычисляться с использованием квадратур Гаусса с этим весом. Чтобы специально не определять квадратурную формулу для этого весового множителя, можно в качестве веса выбрать функцию $1/\sqrt{1-R}$ и пользоваться стандартными квадратурами Гаусса – Якоби.

Основную трудность представляет вычисление интегралов $Y_{j,d}^{\pm}$, определённых (6.5) или (6.6). Отметим, что $Y_{j,d}^{\pm} \equiv 0$ при $t \leq r$. Рассмотрим два алгоритма, которыми можно вычислить их значения.

Алгоритм 1. Будем вычислять $Y_{j,d}^{\pm}$ по формуле (6.6) как повторный: вначале при фиксированном ψ вычислять значение интеграла по r_0 и затем интегрировать по ψ . Рассмотрим выражение, стоящее в знаменателе, как квадратичную функцию от r_0 . Она имеет нули

$$(r_0)_{\pm} = -r \cos \psi \pm \sqrt{t^2 - r^2 \sin^2 \psi}.$$

Легко показать, что $(r_0)_{-} \leq 0 < t - r \leq (r_0)_{+}$, причём $(r_0)_{+} = t - r$ только при $\psi = 0$. Выполним замену переменных $r_0 = a + b \sin \xi$, где

$$a(t, r, \psi) = \frac{(r_0)_{-} + (r_0)_{+}}{2} = -r \cos \psi,$$

$$b(t, r, \psi) = \frac{(r_0)_{+} - (r_0)_{-}}{2} = \sqrt{t^2 - r^2 \sin^2 \psi}.$$

Тогда получим

$$Y_{j,d}^{\pm} = \int_0^{\pi} \int_{\xi_{-}(t,r,\psi)}^{\xi_{+}(t,r,\psi)} \tilde{\mathcal{S}}(t, r, \phi, a + b \sin \xi, \psi) (a + b \sin \xi) d\xi d\psi, \quad (7.1)$$

где

$$\xi_{-}(t, r, \psi) = -\arcsin \left(\frac{a(t, r, \psi)}{b(t, r, \psi)} \right), \quad \xi_{+}(t, r, \psi) = \arcsin \left(\frac{t - r - a(t, r, \psi)}{b(t, r, \psi)} \right).$$

Покажем, что пределы интегрирования являются бесконечно гладкими функциями ψ . Для этого запишем (опуская аргументы у a и b)

$$\xi_-(t, r, \psi) = -\operatorname{arctg} \frac{a/b}{\sqrt{1 - (a/b)^2}} = -\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} \cos \psi \right);$$

аналогично,

$$\xi_+(t, r, \psi) = \operatorname{arctg} \frac{t - r - a}{\sqrt{b^2 - (t - r - a)^2}} = \operatorname{arctg} \left(\frac{t - r + r \cos \psi}{2\sqrt{r}\sqrt{t - r} \sin(\psi/2)} \right).$$

В обоих случаях аргумент арктангенса является бесконечно гладкой функцией за исключением случая $\psi = 0$ в выражении для ξ_+ , когда знаменатель обращается в ноль. Но поскольку при $x \geq 0$ функция $\operatorname{arctg}(1/x) = \arcsin(1/\sqrt{x^2 + 1})$ является бесконечно гладкой функцией x (вплоть до границы, где производные понимаются как односторонние), то ξ_+ является бесконечно гладкой.

Вычисление интеграла по ξ выполняется по квадратурным формулам Гаусса, поскольку подынтегральная функция аналитическая по ξ с бесконечным радиусом сходимости. Поскольку пределы интегрирования являются бесконечно гладкими функциями ψ , бесконечно гладкой функцией ψ является и значение внутреннего интеграла. Следовательно, вычисление внешнего интеграла по ψ также можно выполнять по квадратурным формулам высокого порядка.

Описанный алгоритм вычисления $Y_{j,d}^\pm$ обладает кажущимся недостатком: при $t - r \ll t$ и $\psi \approx \pi/2$ производные от подынтегральной функции, получающейся после вычисления интеграла по ξ , могут быть очень большими. Хотя на практике никаких проблем с использованием алгоритма 1 в этих условиях обнаружено не было, будем применять его¹ только при $t \geq 2r$, а при $t < 2r$ пользоваться вторым способом.

Алгоритм 2. При $r < t < 2r$ разобьём область интегрирования на две части окружностью радиуса $R = r/t$. Схема интегрирования изображена на рис. 4, на которой пунктиром обозначены кривые, по которым проводится интегрирование во внутреннем интеграле после перехода к повторному.

Интеграл по области $R > r/t$ вычисляется исходя из (6.5) как повторный. Внутренний интеграл вычисляется по α ; при этом подынтегральная функция является аналитической с бесконечным радиусом сходимости. Нижний предел

¹ При $t > 2r + \delta$, $\delta > 0$, можно вычислять интеграл и по формуле (6.5) как повторный: внешний по α , внутренний по R . Верхний предел интегрирования $R_{\max}(\alpha)$ определяется из равенства (7.2). При $t > 2r$ это квадратное уравнение имеет единственное положительное решение

$$R_{\max}(\alpha) = \frac{1}{t} \left[-r \cos \alpha + \left((t - r)^2 - r^2 \sin^2 \alpha \right)^{1/2} \right],$$

являющееся бесконечно гладкой функцией α .

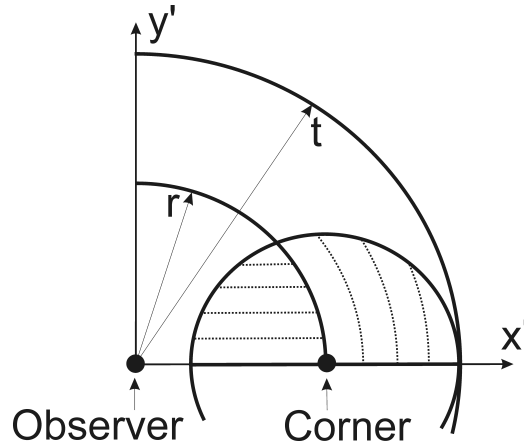


Рис. 4. Схема интегрирования. Пунктиром обозначены кривые, по которым проводится интегрирование во внутреннем интеграле

интегрирования по α равен 0; верхний предел $\alpha_{\max}(R)$ определяется из равенства

$$(t - r)^2 = r^2 + (tR)^2 + 2rtR \cos \alpha. \quad (7.2)$$

Введём обозначение $a = r/t$. Имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{\max}(\xi) &= \arccos \left(\frac{(t - r)^2 - r^2 - (tR)^2}{2rtR} \right) = \arccos \left(\frac{(1 - a)^2 - a^2 - R^2}{2aR} \right) = \\ &= \arcsin \left(\frac{\sqrt{(2aR)^2 - ((1 - a)^2 - a^2 - R^2)^2}}{2aR} \right). \end{aligned}$$

Последнее равенство написано с учётом $0 < \alpha_{\max}(\xi) < \pi/2$. Далее,

$$\begin{aligned} \alpha_{\max}(\xi) &= \arcsin \left(\frac{\sqrt{((1 - a)^2 - (a - R)^2)((a + R)^2 - (1 - a)^2)}}{2aR} \right) = \\ &= \arcsin \left(\frac{\sqrt{(1 - 2a + R)(1 - R)(1 + R)(2a + R - 1)}}{2aR} \right). \end{aligned}$$

Внешний интеграл вычисляется по R от r/t до 1. Негладкой является как подынтегральная функция (в ней стоит множитель $1/\sqrt{1 - R^2}$), так и функция $\alpha_{\max}(\xi)$ (она пропорциональна $\sqrt{1 - R}$). В зависимости от параметров, эти корни могут как компенсировать друг друга, так и не компенсировать. Поэтому удобно сделать замену переменных $R = 1 - \xi^2(1 - a)$. Тогда пределы интегрирования по ξ будут от 0 до 1, а

$$\alpha_{\max}(\xi) = \arcsin \left((1 - a)\xi \frac{\sqrt{(2 - \xi^2)(2a - \xi^2 + \xi^2 a)(2 - \xi^2 + \xi^2 a)}}{2a(1 - \xi^2 + \xi^2 a)} \right).$$

Особо отметим, что вычислять $\alpha_{\max}(\xi)$ по исходной формуле (через арккосинус) некорректно, поскольку при малых значениях α_{\max} это ведёт к накоплению арифметической погрешности (как $1/\alpha_{\max}$).

Поскольку $1/2 < a < 1$ при $0 < \xi < 1$ функция $\alpha_{\max}(\xi)$ является бесконечно гладкой, причём производные всех порядков ограничены по α . Множитель $R/\sqrt{1-R^2}$ преобразуется к виду

$$\frac{RdR}{\sqrt{1-R^2}} = -2\sqrt{1-a} \frac{1-\xi^2(1-a)}{\sqrt{2-\xi^2+\xi^2a}} d\xi.$$

В итоге, имеем

$$Y_{j,d}^{\pm} = \frac{\sqrt{1-a}}{\pi} \int_0^1 \left(\int_0^{\alpha_{\max}(\xi)} \mathcal{S}(t, r, \phi, R, \alpha) d\alpha \right) \frac{1-\xi^2(1-a)}{\sqrt{2-\xi^2+\xi^2a}} d\xi,$$

где $a = r/t$.

Аналогичный алгоритм, по всей видимости, может быть использован и для вычисления интеграла по области $R < r/t$ (предполагая, что $t < 2r - \delta$, $\delta > 0$). Однако был реализован другой подход, заключающийся в интегрировании в декартовой системе координат (x', y') , см. рис. 4. Внешним является интеграл по y' от 0 до y_{\max} . Величину y_{\max} проще всего найти как высоту треугольника с вершинами в точке наблюдения, вершине полупрямой и точке пересечения окружностей радиуса r и $t-r$. Это равнобедренный треугольник со сторонами r , r и $t-r$; его периметр равен $t+r$, площадь находится по формуле Герона как

$$S = \left(\frac{t+r}{2} \left(\frac{t-r}{2} \right)^2 \frac{3r-t}{2} \right)^{1/2} = \frac{1}{4}(t-r)\sqrt{(3r-t)(t+r)};$$

поэтому $y_{\max} = 2S/r = (t-r)\sqrt{(3r-t)(t+r)}/(2r)$. Напомним, что при $t > 2r$ используется другой алгоритм, поэтому здесь подкоренное выражение неотрицательно. Внутренним интегралом является интеграл по x' от x_{\min} до x_{\max} , где $x_{\min} = r - \sqrt{(t-r)^2 - (y')^2}$, $x_{\max} = \sqrt{r^2 - (y')^2}$. Очевидно, при $y' = y_{\max}$ выполняется $x_{\min} = x_{\max}$. Поскольку y' отделено от r и $t-r$, пределы интегрирования являются бесконечно гладкими функциями y' и внешний интеграл может быть вычислен при помощи формул Гаусса – Лежандра.

8. Учёт локальности начального импульса

Во все интегралы, через которые выражается решение, входит функция формы начального импульса. Если начальный импульс локализован в узкой

области пространства, то неучёт этого свойства приводит к интегрированию функций, на большей части равных нулю (точно либо с машинной точностью). При этом сложность вычисления решения с ростом t , скорее всего, возрастала бы квадратичным образом. Поэтому в численный алгоритм необходимо закладывать априорную информацию о форме импульса. А именно, область интегрирования во всех интегралах необходимо ограничивать, пересекая её с носителем начальных данных.

Если начальный импульс имел бы финитный носитель, но форма импульса не была бы бесконечно гладкой вплоть до границы своего носителя, то при вычислении двумерных интегралов функция, являющаяся значением внутреннего интеграла, может быть негладкой или содержать узкую область с очень большими производными. В особенности эта проблема стоит для интегралов вида (6.5); применительно к двумерному интегралу, стоящему в (6.4), она обходится сравнительно просто. Чтобы избежать этой проблемы, в качестве формы начального импульса был выбран гауссиан. Хотя формально носитель гауссиана является бесконечным, по мере удаления от его центра его величина быстро становится пренебрежимо малой. Можно считать, что носителем начальных данных является круг радиусом $L = H/\sqrt{2\alpha}$, где $H = \sqrt{2 \ln(C\alpha^2\varepsilon/n)}$, ε – требуемая точность интегрирования, а C – некоторая константа порядка единицы; при этом погрешность, связанная с обрезанием гауссиана, не будет превосходить ε . На практике C полагается равной 1. Таким образом, учёт локальности начального импульса заключается в том, чтобы все встречающиеся в алгоритме интервалы интегрирования ограничить исходя из условия $F(\mathcal{R}) = 0$ при $\mathcal{R} \geq L^2$.

Начнём с описания процедуры определения носителей подынтегральной функции, используемой при вычислении интеграла $Y_{j,d}^\pm$ при помощи алгоритма 1, попутно описав ограничение по ψ при вычислении $I_{j,d}^\pm$. Носитель подынтегральной функции определяется условием

$$r_0^2 + r_s^2 - 2r_0r_s \cos(\psi - \hat{\Phi}) \leq L^2, \quad (8.1)$$

где $r_0 = a + b \sin \xi$.

Начнём с интеграла по ξ . Относительно r_0 неравенство является квадратичным; корни равны

$$(r_0)_\pm = r_s \cos(\psi - \hat{\Phi}) \pm \left(L^2 - r_s^2 \sin^2(\psi - \hat{\Phi}) \right)^{1/2}.$$

Если дискриминант отрицателен, то область интегрирования не пересекается с носителем подынтегральной функции и, следовательно, интеграл равен нулю. Далее, интервал $((r_0)_-, (r_0)_+)$ пересекается с дифракционной зоной $(0, t-r)$; отрицательные значения r_0 учитываются в других слагаемых. Применение функ-

ции $\arcsin(((\cdot) - a)/b)$ к границам полученного интервала даёт границы интервала интегрирования по ξ .

Теперь рассмотрим интегрирование по ψ . Перепишем неравенство (8.1) в виде

$$\cos(\psi - \hat{\Phi}) \geq \mu(r_0) = \frac{r_0^2 + r_s^2 - L^2}{2r_0r_s}.$$

Рассмотрим два случая: при вычислении $I_{j,d}^{\pm}$ пределы интегрирования нужно определять исходя из того, чтобы при $r_0 = t - r$ интегрирование покрывало носитель источника; при вычислении интеграла (6.5) пределы определяются из того, чтобы при всех $r_0 \leq t - r$ интегрирование покрывало носитель источника.

Начнём с первого случая. При $\mu(t - r) > 1$ область интегрирования пустая; при $\mu(t - r) < -1$ область интегрирования не ограничивается и остаётся равной $(0, \pi)$; если же $-1 < \mu(t - r) < 1$, то область интегрирования определяется как пересечение $(0, \pi)$ с $(\hat{\Phi} - \arccos\mu(t - r), \hat{\Phi} + \arccos\mu(t - r))$, причём пересечение берётся по модулю 2π .

Второй случай отличается от первого тем, что при $r_0 > r_s$ носитель начального импульса может находиться, например, строго внутри окружности $t - r$, а при этом область интегрирования остаётся непустой. Минимизируя величину $(r_0^2 + r_s^2 - L^2)/(2r_0r_s)$ по r_0 , получаем, что минимум достигается при $r_0 = (r_s^2 - L^2)^{1/2}$ (если $r_s < L$, то область интегрирования остаётся равной $(0, \pi)$). При дальнейшем увеличении r_0 в первом случае значение μ уменьшалось; здесь же оно остаётся постоянным. Таким образом, второй случай отличается от первого тем, что если выполняется условие $r_0 \geq (r_s^2 - L^2)^{1/2}$, то нужно положить $r_0 = (r_s^2 - L^2)^{1/2}$. При этом

$$\mu(r_0) = \left(1 - \frac{L^2}{r_s^2}\right)^{1/2}.$$

Аналогичные условия возникают и при вычислении интеграла по α в (6.4) и по α и R в первой части алгоритма 2. Положим $x_s = d \cos \Phi_1$, $y_s = d \sin \Phi_1$. Тогда условие $\mathcal{R} \leq L^2$, где \mathcal{R} определено (4.13), сводится к

$$(R \cos(\alpha - \Phi_1) - d)^2 + (R \sin(\alpha - \Phi_1))^2 \leq L^2/t^2.$$

Это неравенство определяет множество в координатах R и α и отличается от (8.1) только обозначениями искомых переменных.

Наконец, рассмотрим вторую часть алгоритма 2, где интегрирование проводится в декартовых координатах. Центр источника в системе координат (x', y') имеет координаты (x_s, y_s) , определённые (4.12). Интервал интегрирования $y' \in (0, y_{\max})$ необходимо пересечь с интервалом $(y_s - L, y_s + L)$, а интервал интегрирования по x' при фиксированном y' – с интервалом $(x_s - l, x_s + l)$, где $l = (L^2 - (y_s - y')^2)^{1/2}$.

9. Заключение

Была рассмотрена задача о распространении акустического импульса в секторе с углом $2\pi/n$, $n \in \mathbb{N}$. Был построен алгоритм, сводящий вычисление значения в заданной точке и заданный момент времени к вычислению интегралов по квадратурам Гаусса. Он позволяет корректно вычислить решение в широком диапазоне значений t и r , в том числе при приближении r к вершине полупрямой. Алгоритм реализован в библиотеке точных решений ColESo [4].

В работе не были проведены аккуратные оценки числа квадратурных точек, требуемых для достижения заданной точности. Численные эксперименты показывают, что для получения решения с двойной точностью достаточно использовать 80 узлов квадратуры, с четверной точностью – 150 узлов. Поскольку вычисляются двумерные интегралы, эти числа возводятся в квадрат. Машинное время вычисления значения в одной точке в один момент времени составляет примерно 0.4 мс в арифметике с двойной точностью и примерно 0.14 с в арифметике с четверной точностью.

Автор благодарит М. Д. Сурначёва, указавшего на работу [2].

Список литературы

1. Бахвалов П. А. Численное вычисление решений задач о распаде гауссового импульса и дифракции на углу $2\pi/n$ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 3. С. 1–36.
2. Кокотов А. Ю., Пламеневский Б. А. Об асимптотике решений задачи Неймана для гиперболических систем в областях с коническими точками // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, № 3. С. 56–98.
3. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М.: Наука, 1966. с. 455.
4. Collection of exact solutions (ColESo). URL: <http://caa.imamod.ru/index.php/research/coleso>.