ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 21 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

О типах устойчивости в системах Гамильтона

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. О типах устойчивости в системах Гамильтона // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 21. 24 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-21
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-21

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А. Д. Брюно

О типах устойчивости в системах Гамильтона

Москва — 2020

УДК 517.93+531.314

Александр Дмитриевич Брюно
О типах устойчивости в системах Гамильтона. Препринты института прикладной математики им. М. В. Келдыша, Москва, 2020.

Рассматриваются условия формальной устойчивости неподвижного решения и условия формальной орбитальной устойчивости периодического решения систем Гамильтона с конечным числом степеней свободы. Эти условия содержат ограничения на порядок резонансов и определённые неравенства для начальных коэффициентов нормальных форм гамильтонианов. Показано, что теоретико-числовой анализ частот может помочь в доказательствах устойчивости. Оценены также порядки разбегания решений от неподвижного или периодического решений при отсутствии формальной устойчивости.

Ключевые слова: неподвижное решение, периодическое решение, нормальная форма, формальная устойчивость.

Alexander Dmitrievich Bruno
On types of stability in Hamiltonian systems.

We consider conditions of the formal stability of a stationary solution and conditions of the formal orbital stability of a periodic solution in a Hamiltonian system with finite number of degrees of freedom. The conditions contain restrictions on the order of resonances and some inequalities for initial coefficients of the normal forms of the Hamiltonian functions. We show, that the number-theoretic analysis of frequencies can help in proofs of stability. We estimate also orders of solutions' divergence from the stationary or the periodic ones under lack of the formal stability.

Key words: stationary solution, periodic solution, normal form, formal stability.

Работа поддержана РФФИ, грант № 18–01–00422а.

e-mail: `abruno@keldysh.ru`

1. Введение

К настоящему времени имеются три типа определения устойчивости неподвижной точки системы Гамильтона: устойчивость по Ляпунову, формальная устойчивость по Мозеру и формальная устойчивость по Маркееву. В разделе 2 приводятся эти определения для неподвижной точки и даны условия на функцию Гамильтона, которые их гарантируют. Показано, что теоретико-числовой анализ частот может помочь в доказательствах устойчивости. При отсутствии формальной устойчивости можно считать практической устойчивостью ситуацию, когда порядок разбегания решений мал. Поэтому оценён порядок разбегания решения от неподвижной точки при отсутствии формальной устойчивости. В разделе 3 даны условия формальной орбитальной устойчивости по Мозеру периодического решения системы Гамильтона и проведено доказательство такой устойчивости. Приведены также оценки порядка разбегания решений от периодического при отсутствии формальной орбитальной устойчивости.

Замечание об обозначениях
Векторные величины обозначены полужирным шрифтом. По умолчанию это векторы размерности n, если не оговорено противное, т. е. $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, а $\mathbf{x^p} = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$; скалярное произведение $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n$; $||\mathbf{p}|| = |p_1| + \cdots + |p_n|$.

2. Окрестность неподвижной точки

2.1. Резонансная нормальная форма. Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial \gamma}{\partial \eta_j}\,, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial \gamma}{\partial \xi_j}\,, \quad j = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

с n степенями свободы в окрестности неподвижной точки

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0. \tag{2.2}$$

Если функция Гамильтона $\gamma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ аналитична в этой точке, то она разлагается в степенной ряд

$$\gamma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum \gamma_{\mathbf{pq}} \boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}}\,, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{p}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \geqslant 0$, $\gamma_{\mathbf{pq}}$ — постоянные коэффициенты. Поскольку точка (2.2) — неподвижная, то разложение (2.3) начинается с квадратичных членов. Им соответствует линейная часть системы (2.1).

Собственные числа её матрицы разбиваются на пары

$$\lambda_{j+n} = -\lambda_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Как известно, канонические замены координат

$$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \longrightarrow \mathbf{x}, \mathbf{y} \tag{2.4}$$

сохраняют гамильтоновость системы.

Теорема 2.1 ([Брюно, 1972, §12])**.** *Существует каноническое формальное преобразование* (2.4)*, приводящее гамильтониан* (2.3) *к нормальной форме*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum g_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}}, \tag{2.5}$$

где ряд g содержит только резонансные члены с

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0.$$

Здесь $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = p_1\lambda_1 + \cdots + p_n\lambda_n$ — скалярное произведение. Если $\boldsymbol{\lambda} \neq 0$, то нормальная форма (2.5) эквивалентна системе с меньшим числом степеней свободы и дополнительными параметрами [Брюно, 1990, гл. I, § 3].

Для вещественной исходной системы (2.1) постоянные коэффициенты $g_{\mathbf{pq}}$ комплексной нормальной формы (2.5) удовлетворяют специальным соотношениям вещественности, и при стандартной канонической линейной замене координат $\mathbf{x}, \mathbf{y} \to \mathbf{X}, \mathbf{Y}$ система (2.5) переходит в вещественную систему.

Условие A_k^n. Уравнение

$$\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$$

не имеет целочисленных решений $\mathbf{p}$ с $||\mathbf{p}|| \leqslant k$.

Это условие означает отсутствие резонансов до порядка k включительно. Если оно выполнено, то в нормальной форме (2.5)

$$g = \sum_{l=1}^{[k/2]} g_l(\mathbf{r}) + \tilde{g}^{(k)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{2.6}$$

где $g_l(\mathbf{r})$ — однородные многочлены от

$$r_j = x_j y_j,\ j = 1, \ldots, n,$$

степени l, а $\tilde{g}^{(k)}$ — ряд от $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, начинающийся со степеней выше k и $[k/2]$ — целая часть числа $k/2$.

При этом к гамильтониану вида (2.6) можно прийти при частичной нормализации — только до порядка k, когда в $\tilde{g}^{(k)}$ присутствуют не только резонансные члены.

В частности, при условии A_2^n имеем

$$g = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j r_j + \tilde{g}^{(3)}(\mathbf{x},\mathbf{y}), \tag{2.7}$$

а при условии A_4^n имеем

$$g = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j r_j + \sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} r_j r_k + \tilde{g}^{(5)}(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{2.8}$$

2.2. Устойчивость.

Определение 2.1. Неподвижная точка $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$ вещественной гамильтоновой системы (2.1) является *устойчивой по Ляпунову*, если для каждого $\varepsilon > 0$ в «кубе»

$$||\boldsymbol{\xi}|| + ||\boldsymbol{\eta}|| < \varepsilon$$

существует замкнутое интегральное $2n-1$-мерное многообразие $\mathcal{L}$, окружающее точку $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$ со всех сторон.

Лемма 2.1. *Неподвижная точка $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$ устойчива по Ляпунову, если существует знакоопределённый вещественный интеграл*

$$f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = f_l(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) + \tilde{f}^{(l)}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) \tag{2.9}$$

системы (2.1)*, где $f_l(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ — однородная форма степени l. Другими словами,*

$$\sum_{j=1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right) = 0 \tag{2.10}$$

и $f_l(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ не обращается в нуль при любых $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$, кроме точки $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$.

Устойчивость возможна только, если $\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\lambda} = 0$. Если при этом выполнено условие A_2^n, то все λ_j различны и отличны от нуля. В этом случае комплексные координаты $\mathbf{x},\mathbf{y}$ связаны с вещественными координатами $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ канонической заменой

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}} \left(\mathrm{i} X_j - Y_j \right), \; y_j = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}} \left(\mathrm{i} X_j + Y_j \right), \; j = 1, \ldots, n.$$

При комплексном сопряжении

$$\bar{x}_j = -\mathrm{i} y_j, \quad \bar{y}_j = -\mathrm{i} x_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2.11}$$

а функция Гамильтона $g(\mathbf{x},\mathbf{y})$ переходит в себя, т. е. в (2.5):

$$g_{\mathbf{pq}} = \bar{g}_{\mathbf{qp}}(-\mathrm{i})^{||\mathbf{p}+\mathbf{q}||},$$

ибо $p_j,q_j \geqslant 0$. Положим

$$X_j^2 + Y_j^2 = R_j, \quad \lambda_j = \mathrm{i}\alpha_j, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Тогда в вещественных координатах $R_j \geqslant 0$, α_j — вещественные,

$$r_j = x_j y_j = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(X_j^2 + Y_j^2\right) = \frac{\mathrm{i}}{2}R_j, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{2.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j r_j = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(X_j^2 + Y_j^2\right) = -\frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle.$$

Теорема 2.2 (Dirichlet [2012]). *Если выполнено условие A_2^n и числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ одного знака, то неподвижная точка $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$ устойчива по Ляпунову.*

Здесь роль интеграла f играет сам гамильтониан γ, ибо он является интегралом, запись (2.7) имеет вид (2.6) с $k = 2$ и форма $\gamma_2 = g_2 = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j R_j = -\frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle$ знакоопределена, ибо $\mathbf{R} \geqslant 0$.

2.3. Формальная устойчивость. Под формальными будем понимать степенные ряды, о сходимости которых ничего неизвестно.

Определение 2.2 (Moser [1958]). Неподвижная точка (2.2) вещественной гамильтоновой системы (2.1) является *формально устойчивой*, если существует формальный вещественный знакоопределённый интеграл (2.9) системы (2.1), т. е. выполнено формальное тождество (2.10) и однородная форма f_l обращается в нуль только при $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$.

Формальная устойчивость означает, что уход решений от неподвижной точки если и происходит, то очень медленно: медленнее, чем любая конечная степень t.

Определение 2.3 ([Маркеев, 1978, гл. 4, § 4]). Неподвижная точка (2.2) вещественной гамильтоновой системы (2.1) является *формально устойчивой*, если существует формальный вещественный интеграл

$$f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = f_l(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) + f_{l+1}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) + \ldots + f_m(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) + \tilde{f}^{(m)}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$$

системы (2.1), где $f_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ — однородные формы степени k и сумма

$$f^*(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = f_l + f_{l+1} + \ldots + f_m \tag{2.13}$$

не обращается в ноль в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$ кроме неё.

Определение 2.4 ([Брюно, Батхин, 2012]). Точка $\left(\boldsymbol{\xi}^0, \boldsymbol{\eta}^0\right)$ называется *корнем порядка* k многочлена $\hat{f}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$, если в этой точке обращается в ноль сам многочлен $\hat{f}$ и все его частные производные до порядка k включительно, но отлична от нуля хотя бы одна производная порядка $k + 1$.

Гипотеза 2.1. *Если многочлен* (2.13) *с* $m > l$ *не обращается в ноль в некоторой окрестности точки* $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$ *кроме неё, то всякий корень* $(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ *многочлена* f_l, *отличный от* $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$, *имеет чётную кратность.*

Пример 2.1. Пусть $\hat{f} = \xi^2 + \eta^4$. Тогда $f_2 = \xi^2$, $f_4 = \eta^4$. Уравнение $\hat{f} = 0$ не имеет вещественных решений, кроме $\xi = \eta = 0$. Уравнение $f^{(2)} = 0$ имеет решения $\xi = 0$, η — произвольно и все эти корни $\xi = 0, \eta \neq 0$ имеют кратность 2. □

Поскольку $r_j r_k = -\dfrac{1}{4} R_j R_k$, то при условии A_4^n запись (2.8) принимает вид

$$g = -\frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle - \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} R_j R_k + \tilde{g}^{(5)}. \tag{2.14}$$

Следовательно, все коэффициенты μ_{jk} — вещественны.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — линейная оболочка целочисленных $\mathbf{q}$, удовлетворяющих уравнению $\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{q}\rangle = 0$, и $Q = \{\mathbf{q} \geqslant 0, \mathbf{q} \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ — неотрицательный ортант без начала координат.

Теорема 2.3 (Брюно [1967]). *Если выполнено условие* A_4^n *и в* (2.14)

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} q_j q_k \neq 0 \text{ для } \mathbf{q} \in K \cap Q, \tag{2.15}$$

то точка $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$ *формально устойчива в смысле определения 2.2.*

Здесь для построения формального интеграла используется нормальная форма гамильтониана (2.5) теоремы 2.1.

Согласно (2.12) в вещественных координатах нормальная форма (2.6) имеет вид

$$g = -\frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle + \sum_{l=2}^{[k/2]} h_l(\mathbf{R}) + \tilde{g}^{(k)}, \tag{2.16}$$

где однородные многочлены $h_l = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^l g_l(\mathbf{R})$ вещественны. Следующее обобщение теоремы 2.3 доказывается дословно как она.

Теорема 2.4. *Если выполнено условие* A_k^n *и в нормальной форме* (2.16)

$$\sum_{l=2}^{[k/2]} h_l(\mathbf{R}) \neq 0 \text{ *для* } \mathbf{R} \in K \cap Q,$$

то точка $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$ *формально устойчива в смысле определения 2.3.*

Эта теорема неявно использована в § 4, гл. 8 книги [Маркеев, 1978].

Условие Маркеева 2 ([Маркеев, 1978, гл. 8, § 3]). Система уравнений

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{q} \rangle = 0, \quad \sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} q_j q_k = 0$$

не имеет решения $\mathbf{q} \in Q$, т. е. $\mathbf{q} \geqslant 0$, $\mathbf{q} \neq 0$.

При условиях A_4^n и Маркеева 2 выполнены условия теоремы 2.3 и имеется формальная устойчивость. Но условие Маркеева 2 проще проверить, чем условие (2.15).

При $n = 2$ условие Маркеева 2 приобретает такой вид:
система двух уравнений

$$\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 = 0, \; \mu_{20} q_1^2 + 2\mu_{11} q_1 q_2 + \mu_{02} q_2^2 = 0$$

не имеет решения $q_1, q_2 \geqslant 0$ с $q_1 + q_2 \neq 0$.

Но решения первого уравнения имеют вид $q_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} q_2$. Для них $q_1, q_2 > 0$ только при $\alpha_1 \alpha_2 < 0$, т. е. первое уравнение не имеет решений с $q_1, q_2 > 0$ при условии теоремы Дирихле $\alpha_1 \alpha_2 > 0$. Подставляя их во второе уравнение и сокращая на q_2^2/α_1^2, получаем условие

$$M_2 \overset{\text{def}}{=} \mu_{20} \alpha_2^2 - 2\mu_{11} \alpha_1 \alpha_2 + \mu_{02} \alpha_1^2 \neq 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 < 0,$$

которое называется условием Арнольда-Мозера.

При этом условии имеется не только формальная устойчивость, но и устойчивость по Ляпунову, ибо имеются однопараметрические семейства двумерных инвариантных торов с подобными наборами частот, которые запирают начало координат. Однако в доказательствах этого факта делали ошибки Ю. Мозер (1968) и В.И. Арнольд [1963]. В конце статьи Брюно [1972] приведена критика первого доказательства Moser [1968, Теорема 7]. Эта критика состояла в следующем. Мозер доказывает, что на каждой инвариантной поверхности

$$\gamma = c = \text{const}$$

существует некоторая зона устойчивости $||\boldsymbol{\xi}|| + ||\boldsymbol{\eta}|| < \varepsilon_0$. При этом, вообще говоря, ε_0 может зависеть от c, т. е. $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(c)$. Из его теоремы 9 следует, что

$$\varepsilon_0(c) > 0 \tag{2.17}$$

для всех достаточно малых c. После этого он предполагает, что у $\varepsilon_0(c)$ существует положительная нижняя грань:

$$\varepsilon_0(c) > \varepsilon > 0, \tag{2.18}$$

но нигде этого не доказывает. Из свойства (2.18) действительно легко вывести устойчивость нуля, что Мозер и делает. В то же время доказанное свойство (2.17) недостаточно для устойчивости нуля, если

$$\varliminf_{c \to 0} \varepsilon_0(c) = 0.$$

Мозер учёл эту критику и дал второе правильное доказательство в [Зигель, Мозер, 2001]. Критика единственного доказательства Арнольд [1963] дана Брюно [1986]. Но Арнольд её не учёл и своё доказательство не исправлял. Впрочем, он исправил формулировку в [Арнольд, 1968].

На стр. 86 книги Маркеева [Маркеев, 1978] сформулирована

Теорема 2.5. *Пусть $n = 2$, выполнено условие A_k^2 и в нормальной форме* (2.16)

$$\sum_{l=2}^{[k/2]} h_l(\alpha_2, -\alpha_1) = h_{[k/2]}(\alpha_2, -\alpha_1) \neq 0,$$

тогда положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Доказательство дано в приложении 2 отчёта [Маркеев, 1970]. Там повторяются рассуждения работы [Moser, 1968], которые содержат ошибку, указанную выше (см. [Брюно, 1972]). Поэтому эту теорему нельзя считать доказанной.

2.4. Теоретико-числовой анализ частот. В большинстве работ по устойчивости используются условия типа условия Маркеева 2, где теоретико-числовой характер частот α_j не учитывается. А ведь от них зависит строение нормальной формы. Например, если уравнение

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{q} \rangle = 0$$

не имеет решений в целочисленных $\mathbf{q} \neq 0$, то выполнено условие A_∞^n и нормальная форма гамильтониана (2.5), (2.6) имеет вид $g(\mathbf{r})$. Тогда любое r_j является формальным интегралом и неподвижная точка формально устойчива. В частности, при $n = 2$ это выполнено, если отношение α_1/α_2 является иррациональным числом.

Пример 2.2. В главе 7 книги [Маркеев, 1978] изучается устойчивость точек либрации плоской круговой ограниченной задачи трёх тел. Там $n = 2$, частоты $\omega_1 = \alpha_1, \omega_2 = -\alpha_2$ с $1 \geqslant \omega_1 > \omega_2 > 0$ удовлетворяют уравнению

$$\omega^4 - \omega^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu), \tag{2.19}$$

где μ — отношение масс двух тел и единственный параметр задачи ($0 \leqslant \mu \leqslant 1$). При этом устойчивость изучается для

$$0 < \mu < 0.4. \tag{2.20}$$

В § 4 показано, что согласно (4.7) в нормальной форме (2.16) $h_2(\alpha_2, -\alpha_1) = 0$ при

$$644\omega_1^4\omega_2^4 - 541\omega_1^2\omega_2^2 + 36 = 0. \tag{2.21}$$

Покажем, что при этих значениях частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы, т.е. имеется формальная устойчивость.

Положим $\omega_1^2 = x$, $\omega_2^2 = y$ и заметим, что по формулам Виета из (2.19) и (2.21) следуют равенства

$$644x^2y^2 - 541xy + 36 = 0, \tag{2.22}$$

$$x + y = 1, \tag{2.23}$$

$$xy = \frac{27}{4}\mu(1-\mu). \tag{2.24}$$

Из уравнения (2.22) получаем

$$xy = \frac{541 \pm \sqrt{541^2 - 4\cdot 36\cdot 644}}{2\cdot 644} = \frac{541 \pm \sqrt{199945}}{1288}.$$

Произведение xy может иметь два значения

$$(xy)_1 = 0.7671988\ldots,$$
$$(xy)_2 = 0.0728632\ldots$$

Но на интервале (2.20) функция $\mu(1-\mu)$ принимает наибольшее значение в правом конце при $\mu = 0.4$. Там

$$\frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0.2592\ldots$$

Поэтому из равенства (2.24) следует, что

$$xy = (xy)_2 = \frac{541 - \sqrt{541^2 - 4 \cdot 36 \cdot 644}}{2 \cdot 644} = \frac{541 - \sqrt{199945}}{1288} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega. \qquad (2.25)$$

Положим $z = x/y$, т.е. $x = zy$. Здесь z — это отношение квадратов частот. Согласно (2.23) получаем

$$y = \frac{1}{z+1}.$$

Подставляя это и $x = zy$ в (2.25), получаем

$$\frac{z}{1+z^2} = \Omega.$$

Следовательно, z удовлетворяет квадратному уравнению

$$(z+1)^2 = z/\Omega.$$

Его корни

$$z = \frac{1 - 2\Omega \pm \sqrt{1 - 4\Omega}}{2\Omega}.$$

Учитывая (2.25), видим, что оба значения z иррациональны. Следовательно, отношение частот $\sqrt{z}$ также иррационально. □

В § 4 гл. 7 книги [Маркеев, 1978] для доказательства устойчивости в этом случае используются: недоказанная теорема 2.5 и громоздкое вычисление коэффициентов членов шестого порядка нормальной формы гамильтониана.

Пример 2.3. В главе 8 книги [Маркеев, 1978] изучается устойчивость точек либрации пространственной круговой ограниченной задачи трёх тел. Там $n = 3$, частоты ω_1 и ω_2 такие же как в примере 2.2, а $\omega_3 = 1$. В § 3 на стр. 136 там сформулирована теорема о формальной устойчивости для всех значений μ, таких что $0 < 27\mu(1-\mu) < 4$, кроме тех, где имеется двукратный резонанс. Покажем, что в этой задаче двукратный резонанс невозможен.

Действительно, в случае двукратного резонанса частоты ω_1 и ω_2 соизмеримы между собой и соизмеримы с единицей. Пусть

$$\omega_1 = \frac{r}{s}, \quad \omega_2 = \frac{p}{q}\omega_1,$$

где p,q,r,s — целые числа,

$$0 < p < q, \quad 0 < r < s. \qquad (2.26)$$

Согласно (2.23)

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1,$$

т.е. $\dfrac{r^2}{s^2}\left(1 + \dfrac{p^2}{q^2}\right) = 1$, или $1 + \dfrac{p^2}{q^2} = \dfrac{s^2}{r^2}$, или

$$q^2 r^2 + p^2 r^2 = s^2 q^2. \tag{2.27}$$

Положим

$$k = qr, \quad l = pr, \quad m = qs. \tag{2.28}$$

Тогда уравнение (2.27) приобретает вид

$$k^2 + l^2 = m^2. \tag{2.29}$$

Как известно, все решения уравнения (2.29) в целых неотрицательных числах имеют вид

$$k = \varkappa^2 - 1, \quad l = 2\varkappa, \quad m = \varkappa^2 + 1, \tag{2.30}$$

где $\varkappa$ — неотрицательное целое число. Согласно (2.26) и (2.28) $l < k$. Поэтому равенства (2.30) будем применять при $\varkappa > 2$, а при $\varkappa = 0$, $\varkappa = 1$ и $\varkappa = 2$ положим

$$k = 2\varkappa, \quad l = \varkappa^2 - 1, \quad m = \varkappa^2 + 1. \tag{2.31}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $0 \leqslant \varkappa < 3$ равенства (2.28) и (2.31) невозможны для целых чисел. При $\varkappa > 3$ из равенств (2.28) и (2.30) следуют равенства

$$q = \frac{\varkappa^2 + 1}{s}, \quad r = \frac{2\varkappa}{p}, \quad qr = \varkappa^2 - 1 = \frac{\left(\varkappa^2 + 1\right) 2\varkappa}{ps}.$$

Поэтому

$$ps = \frac{2\varkappa\left(\varkappa^2 + 1\right)}{(\varkappa + 1)(\varkappa - 1)}. \tag{2.32}$$

Числа $\varkappa - 1$, $\varkappa$, $\varkappa + 1$ не имеют общего множителя, а числа $\varkappa^2 - 1$ и $\varkappa + 1$ не имеют общего множителя, отличного от 2. Поэтому отношение (2.32) не может быть целым числом. $\square$

2.5. Порядок разбегания решений. Пусть функция $f(t)$ определена при вещественных $t \to -\infty$. Говорят, что она имеет *порядок* $\delta = \delta(t)$, если $\delta = \inf \varepsilon$ таких, что $f(t)/(-t)^{\varepsilon} \to 0$ при $t \to -\infty$. Если $\delta > 0$, то $f(t)$ неограниченна, если $\delta < 0$, то $f(t) \to 0$ при $t \to -\infty$. В последнем случае $\delta(f) < 0$, чем больше δ, тем медленнее $f(t)$ приближается к нулю.

Определение 2.5. Пусть решение $\boldsymbol{\xi}(t)$,$\boldsymbol{\eta}(t)$ системы Гамильтона (2.1) стремится к неподвижной точке (2.2) при $t \to -\infty$. На этом решении *порядок разбегания*

$$\Delta = \min\left\{\delta||\boldsymbol{\xi}||, \delta||\boldsymbol{\eta}||\right\}.$$

Определение 2.6. *Порядок разбегания решений* системы (2.1) от неподвижной точки (2.2) $\widetilde{\Delta}$ — это нижняя грань порядков разбегания Δ по всем решениям $\boldsymbol{\xi}(t)$, $\boldsymbol{\eta}(t)$, которые стремятся к точке (2.2) при $t \to -\infty$.

Чем меньше $\widetilde{\Delta} < 0$, тем быстрее разбегаются решения от неподвижной точки. При формальной устойчивости порядок разбегания решений от неподвижной точки равен нулю. Оценим порядок разбегания $\widetilde{\Delta}$ при отсутствии формальной устойчивости. Случаи $-10^{-10} < \widetilde{\Delta} < 0$ можно считать практически устойчивыми.

Гипотеза 2.2. *Пусть выполнено условие* A_2^n *и* $\varkappa = \min||\mathbf{p} + \mathbf{q}|| > 2$ *по целочисленным решениям* $\mathbf{p} \geqslant 0$*,* $\mathbf{q} \geqslant 0$ *уравнения* $\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p} - \mathbf{q}\rangle = 0$*, тогда порядок разбегания решений системы* (2.1) *от неподвижной точки* $\widetilde{\Delta} \geqslant 1/(2 - \varkappa)$.

Пример 2.4. Рассмотрим вещественный гамильтониан с n степенями свободы в комплексных координатах

$$G = g_{\mathbf{pq}}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}\mathbf{y}^{\mathbf{q}} + g_{\mathbf{qp}}\mathbf{x}^{\mathbf{q}}\mathbf{y}^{\mathbf{p}}, \tag{2.33}$$

где целочисленные $\mathbf{p}$,$\mathbf{q} > 0$, $||\mathbf{p} + \mathbf{q}|| \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa > 2$, все разности

$$p_j - q_j \neq 0, \text{ одного знака } \sigma = \operatorname{sign}(p_j - q_j), \quad j = 1,\ldots,n, \tag{2.34}$$

все p_j,$q_j \neq 0$,

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{p} - \mathbf{q}\rangle = 0, \tag{2.35}$$

а комплексные коэффициенты $g_{\mathbf{pq}}$ и $g_{\mathbf{qp}}$ связаны соотношениями (2.15), т.е.

$$g_{\mathbf{pq}} = (-\mathrm{i})^{\varkappa}\bar{g}_{\mathbf{qp}} \tag{2.36}$$

и будут определены позже.

Система Гамильтона, соответствующая гамильтониану (2.33), имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \quad q_j g_{\mathbf{pq}}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}\mathbf{y}^{\mathbf{q}-\mathbf{e}_j} + p_j g_{\mathbf{qp}}\mathbf{x}^{\mathbf{q}}\mathbf{y}^{\mathbf{p}-\mathbf{e}_j}, \\ \dot{y}_j &= -\left(p_j g_{\mathbf{pq}}\mathbf{x}^{\mathbf{p}-\mathbf{e}_j}\mathbf{y}^{\mathbf{q}} + q_j g_{\mathbf{qp}}\mathbf{x}^{\mathbf{q}-\mathbf{e}_j}\mathbf{y}^{\mathbf{p}}\right), \end{aligned} \quad j = 1,\ldots,n, \tag{2.37}$$

где $\mathbf{e}_j$ — j-й орт. Умножим верхнее уравнение на y_j, а нижнее — на x_j, получим систему

$$\begin{aligned} y_j\dot{x}_j &= \quad q_j g_{\mathbf{pq}}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}\mathbf{y}^{\mathbf{q}} + p_j g_{\mathbf{qp}}\mathbf{x}^{\mathbf{q}}\mathbf{y}^{\mathbf{p}}, \\ x_j\dot{y}_j &= -\left(p_j g_{\mathbf{pq}}\mathbf{x}^{\mathbf{p}}\mathbf{y}^{\mathbf{q}} + q_j g_{\mathbf{qp}}\mathbf{x}^{\mathbf{q}}\mathbf{y}^{\mathbf{p}}\right), \end{aligned} \quad j = 1,\ldots,n. \tag{2.38}$$

Найдём решение этой системы вида

$$x_j = A_j(-t)^{\Omega}, \quad y_j = \mathrm{i}A_j(-t)^{\Omega}, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{2.39}$$

где A_j — вещественные положительные постоянные, а Ω — вещественный показатель степени и вещественное $t < 0$. Решение (2.39) обладает свойствами (2.11) характерными для вещественных решений в комплексных координатах. Для решения (2.39) уравнения (2.38) принимают вид

$$\begin{aligned}
&-\Omega A_j^2\, \mathrm{i}(-t)^{2\Omega-1} = \left[q_j g_{\mathbf{pq}}(\mathrm{i})^{||\mathbf{q}||} + p_j g_{\mathbf{qp}}(\mathrm{i})^{||\mathbf{p}||}\right] \mathbf{A}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(-t)^{\Omega\varkappa},\\
&-\Omega A_j^2\, \mathrm{i}(-t)^{2\Omega-1} = \left[p_j g_{\mathbf{pq}}(\mathrm{i})^{||\mathbf{q}||} + q_j g_{\mathbf{qp}}(\mathrm{i})^{||\mathbf{p}||}\right] \mathbf{A}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(-t)^{\Omega\varkappa},\\
&j = 1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Сравнивая степени $-t$ в уравнениях (2.40), получаем равенство

$$2\Omega - 1 = \Omega\varkappa.$$

Из него следует, что $\Omega = \dfrac{1}{2-\varkappa}$, в соответствии с гипотезой 2.2. Теперь заметим, что в паре уравнений (2.40) для одного j левые части равны. Поэтому, вычитая из верхнего уравнения нижнее и сокращая на $\mathbf{A}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(-t)^{\Omega\varkappa}$, получаем систему уравнений

$$(p_j + q_j)\left[(\mathrm{i})^{||\mathbf{q}||}g_{\mathbf{pq}} + (\mathrm{i})^{||\mathbf{p}||}g_{\mathbf{qp}}\right] = 0, \quad j = 1,\ldots,n,$$

которая сводится к одному уравнению

$$\left[(\mathrm{i})^{||\mathbf{q}||}g_{\mathbf{pq}} + (\mathrm{i})^{||\mathbf{p}||}g_{\mathbf{qp}}\right] = 0.$$

Согласно (2.36) $g_{\mathbf{qp}} = (-\mathrm{i})^{\varkappa}\bar{g}_{\mathbf{pq}}$. Поэтому это уравнение принимает вид

$$(\mathrm{i})^{||\mathbf{q}||}\left[g_{\mathbf{pq}} + (-1)^{||\mathbf{q}||}\bar{g}_{\mathbf{pq}}\right] = 0. \tag{2.41}$$

Положим

$$g_{\mathbf{pq}} = \begin{cases} \tau = \pm 1, & \text{если } ||\mathbf{q}|| \text{ нечётно},\\ \tau\mathrm{i}, & \text{если } ||\mathbf{q}|| \text{ чётно}. \end{cases} \tag{2.42}$$

В обоих случаях квадратная скобка в (2.41) аннулируется. Значение $\tau = \pm 1$ уточним позже. Теперь система (2.40) сводится к системе

$$\frac{\mathrm{i}}{\varkappa - 2}A_j^2 = (\mathrm{i})^{||\mathbf{q}||}(q_j - p_j)g_{\mathbf{pq}}\mathbf{A}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{2.43}$$

Согласно (2.34) все разности $q_j - p_j$ имеют знак $-\sigma$. Выберем в (2.42) $\tau = \pm 1$ так, чтобы

$$(\mathrm{i})^{||\mathbf{q}||-1}(-\sigma)g_{\mathbf{pq}} = 1. \qquad (2.44)$$

Действительно, если $||\mathbf{q}||$ нечётно, то $(\mathrm{i})^{||\mathbf{q}||-1} = \pm 1$ и можно подобрать знак τ, чтобы было равенство (2.44). Если $||\mathbf{q}||$ чётно, то $(\mathrm{i})^{||\mathbf{q}||-1}g_{\mathbf{pq}} = \pm 1$ и можно подобрать знак τ, чтобы было равенство (2.44). Теперь система (2.43) приобретает вид

$$\frac{A_j^2}{|p_j - q_j|} = (\varkappa - 2)\mathbf{A}^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}, \quad j = 1,\ldots,n. \qquad (2.45)$$

Покажем, что эта система имеет единственное решение $\mathbf{A} > 0$. Перейдём к логарифмам. Тогда система (2.45) примет вид

$$2\ln A_j - \ln|p_j - q_j| = \ln(\varkappa - 2) + \sum_{k=1}^{n}(p_k + q_k)\ln A_k, \quad j = 1,\ldots,n. \qquad (2.46)$$

Это линейная неоднородная система относительно $\ln A_j$. Её определитель $D = (-2)^{n-1}(\varkappa - 2)$. Это легко доказывается индукцией по n. Поэтому система (2.46) имеет единственное решение $\ln\mathbf{A}$, т.е. система (2.45) имеет единственное решение $\mathbf{A} > 0$. Согласно (2.43)

$$A_j^2 = (p_j - q_j)\mathrm{const}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

На этих решениях

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j(t)y_j(t) = \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j A_j^2(-t)^{2\Omega} = \mathrm{i}(-t)^{2\Omega}\langle\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{p} - \mathbf{q}\rangle\,\mathrm{const}.$$

Согласно (2.35) эта сумма тождественно равна нулю. Поэтому полученное решение (2.39) является также решением системы с гамильтонианом

$$g = \mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j y_j + G,$$

который представляет собой частный случай комплексной нормальной формы. □

Замечание 2.1. В примере 2.4 показано существование одного решения с порядком разбегания $1/(2-\varkappa)$. Можно показать, что такие решения образуют n-параметрическое семейство

$$x_j = A_j e^{\mathrm{i}\varphi_j}(-t)^{\Omega}, \quad y_j = \mathrm{i}A_j e^{-\mathrm{i}\varphi_j}(-t)^{\Omega}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Здесь параметрами являются вещественные $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$.

Замечание 2.2. Аналогично и гораздо проще примера 2.4 можно рассмотреть случай $\mathbf{p} > 0$, $\mathbf{q} = 0$. Но в нём не работают формулы (2.37).

3. Окрестность периодического решения

3.1. Локальные координаты. Пусть вещественная система Гамильтона с $n+1$ степенью свободы имеет вещественное 2π-периодическое решение $\mathcal{M}$ и функция Гамильтона аналитична в окрестности решения $\mathcal{M}$. Согласно [Брюно, 1990, гл. II, п. 2.A], вблизи решения $\mathcal{M}$ можно ввести такие вещественные локальные канонически сопряжённые координаты $\boldsymbol{\xi}$, ψ и $\boldsymbol{\eta}$, ρ, что решение $\mathcal{M}$ задаётся уравнениями

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0, \quad \rho = 0, \quad \psi = \psi_0 + t \tag{3.1}$$

и гамильтониан имеет вид

$$\gamma = \Sigma\gamma_{\mathbf{pq}l}(\psi)\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}}\rho^l = \rho + \cdots, \tag{3.2}$$

где целочисленные $\mathbf{p}$, $\mathbf{q} \geqslant 0$, целое $l \geqslant 0$, вещественные аналитические функции $\gamma_{\mathbf{pq}l}(\psi)$ имеют по ψ период 2π и разлагаются в ряды Фурье.

Здесь, как и в разделе 2, имеется понятие устойчивости по Ляпунову, но при $n = 1$ условия его наличия совпадают с условиями формальной устойчивости.

Определение 3.1. Периодическое решение (3.1) гамильтоновой системы

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j &= \frac{\partial\gamma}{\partial\eta_j}, & \dot{\eta}_j &= -\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_j}, \quad j = 1,\dots,n, \\ \dot{\psi} &= \frac{\partial\gamma}{\partial\rho}, & \dot{\rho} &= -\frac{\partial\gamma}{\partial\psi} \end{aligned} \tag{3.3}$$

орбитально формально устойчиво, если существует такой степенной вещественный ряд по $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, ρ почти периодический по ψ

$$F = \sum F_{\mathbf{pq}l}(\psi)\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{p}}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{q}}\rho^l \stackrel{\text{def}}{=} F_s(\boldsymbol{\xi},\psi,\boldsymbol{\eta},\rho) + \widetilde{F}^{(s+1)}(\boldsymbol{\xi},\psi,\boldsymbol{\eta},\rho),$$

который может расходиться, но является формальным знакоопределённым интегралом системы (3.3). Другими словами, все коэффициенты степенного ряда

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial\xi_j}\frac{\partial\gamma}{\partial\eta_j} - \frac{\partial F}{\partial\eta_j}\frac{\partial\gamma}{\partial\xi_j}\right) + \frac{\partial F}{\partial\psi}\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} - \frac{\partial F}{\partial\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial\psi}$$

должны обращаться в ноль, и однородная по $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\sqrt{\rho}$ форма $F_s(\boldsymbol{\xi},\psi,\boldsymbol{\eta},\rho) \geqslant 0$, причём $F_s(\boldsymbol{\xi},\psi,\boldsymbol{\eta},\rho) = 0$ только при $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$, $\rho = 0$.

Напомним, что функция $f(\psi)$ — периодическая, если имеет одну частоту, условно (или квази) периодическая, если имеет конечное количество частот, и почти периодическая, если имеет счётное множество частот. В нашем случае будут квазипериодические функции $F_{\mathbf{pq}l}(\psi)$. Определение 3.1 аналогично определению 2.2, но можно дать также определение формальной орбитальной устойчивости, аналогичное определению 2.3.

3.2. Нормальная форма. При $\rho = 0$ и $\psi = t$ квадратичная по $\boldsymbol{\xi}$,$\boldsymbol{\eta}$ часть γ_2 гамильтониана (3.2) определяет 2π-периодическую, линейную по $\boldsymbol{\xi}$,$\boldsymbol{\eta}$ систему

$$\dot{\xi}_j = \frac{\partial \gamma_2}{\partial \eta_j}, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial \gamma_2}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_{2n}$ — собственные числа её матрицы монодромии, т. е. матрицы подстановки фундаментальной матрицы решений системы (3.4) за период 2π. Пусть все $|\nu_j| = 1$ и $\nu_j \neq -1$. Положим

$$\alpha_j = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \ln \nu_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad \alpha_j \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad j = 1, \ldots, 2n.$$

При правильной нумерации

$$\alpha_{j+n} = -\alpha_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Положим $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Условие B_k^n. Для всех целочисленных $\mathbf{p}$ с $||\mathbf{p}|| \stackrel{\mathrm{def}}{=} |p_1| + \ldots + |p_n| \leqslant k$ скалярные произведения $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$ не являются целыми числами, т.е. сравнение $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \equiv 0 \pmod 1$ не имеет решений с таким $\mathbf{p}$.

Теорема 3.1 ([Брюно, 1990; 2020]). *При условии B_2^n существует комплексная формальная обратимая 2π-периодическая по ψ и φ каноническая замена координат*

$$\boldsymbol{\xi}, \psi, \boldsymbol{\eta}, \rho \longleftrightarrow \mathbf{x}, \varphi, \mathbf{y}, r,$$

которая приводит гамильтониан γ к нормальной форме

$$g(\mathbf{x}, \varphi, \mathbf{y}, r) = r + \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j y_j + \sum g_{\mathbf{pq}lm} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} r^l \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $0 \leqslant \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n$, $l \geqslant 0$ и m целые, все члены второй суммы порядка по $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\sqrt{r}$ выше двух и резонансные, т. е.

$$\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha} \rangle + m = 0. \tag{3.6}$$

Положим

$$r_j = x_j y_j, \quad j = 1, \ldots, n; \quad \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n).$$

Следствие 3.1. *Если выполнено условие B_4^n, то нормальная форма* (3.5), (3.6) *имеет вид*

$$g = r + \mathrm{i} \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r} \rangle + \sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} r_j r_k + r \langle \boldsymbol{\delta}, \mathbf{r} \rangle + \varepsilon r^2 + \tilde{g}^{(5)}, \tag{3.7}$$

где $\boldsymbol{\delta} = \mathrm{const} \in \mathbb{C}^n$, $\varepsilon = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$.

Теорема 3.2 ([Bruno, 2020]). *Каноническое преобразование*

$$\begin{gathered} x_j = u_j \exp(-\mathrm{i}\alpha_j \varphi), \quad y_j = v_j \exp(\mathrm{i}\alpha_j \varphi), \quad j = 1, \ldots, n, \\ r = s - \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im} \lambda_j u_j v_j \end{gathered} \tag{3.8}$$

приводит нормальную форму гамильтониана (3.5) *к автономному степенному ряду*

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}, s) = s + \sum h_{\mathbf{pq}lm} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}} s^l, \tag{3.9}$$

соответствующему второй сумме в (3.5).

Заметим, что возвращение от переменных $\mathbf{u}, \mathbf{v}, s$ к исходным переменным даётся формальными степенными рядами по $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \rho$ с квазипериодическими по ψ коэффициентами. Гамильтониан (3.9) назовём *приведённой нормальной формой*.

Переменная s теперь является формальным интегралом для системы

$$\dot{u}_j = \frac{\partial h}{\partial v_j}, \quad \dot{v}_j = -\frac{\partial h}{\partial u_j}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.10}$$

Теперь задача об орбитальной устойчивости периодического решения $\mathcal{M}$ свелась к задаче об устойчивости неподвижной точки $\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0$, $s = 0$ в системе (3.10).

Следствие 3.2. *Если выполнено условие B_4^n, то согласно* (3.7) *и* (3.8) *приведённая нормальная форма* (3.9) *имеет вид*

$$\begin{aligned} h =& s + \sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} r_j r_k + (s - \mathrm{i} \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r} \rangle) \langle \boldsymbol{\delta}, \mathbf{r} \rangle + \varepsilon (s - \mathrm{i} \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r} \rangle)^2 + \tilde{h}^{(5)} = \\ =& s + \varepsilon s^2 + s \langle \boldsymbol{\delta}, \mathbf{r} \rangle - \varepsilon s 2\mathrm{i} \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r} \rangle + \sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} r_j r_k - \mathrm{i} \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r} \rangle \langle \boldsymbol{\delta}, \mathbf{r} \rangle - \\ &- \varepsilon \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{r} \rangle^2 + \tilde{h}^{(5)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.3. Вещественный случай. Если исходный гамильтониан γ вещественный при вещественных переменных $\boldsymbol{\xi}$,ψ,$\boldsymbol{\eta}$,ρ, то в теореме 3.1 переменные $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — комплексные, а переменные ψ, ρ и φ, r — вещественные.

Если выполнено условие B_2^n, то согласно гл. I и II книги Брюно [1990] комплексные переменные $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ связаны с вещественными переменными $\mathbf{X}$,$\mathbf{Y}$ формулами

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\left(\mathrm{i}X_j - Y_j\right), y_j = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}}}\left(\mathrm{i}X_j + Y_j\right), j = 1,\ldots,n. \tag{3.12}$$

Комплексные переменные x_j,y_j и их сопряжённые переменные $\overline{x}_j$, $\overline{y}_j$ связаны соотношениями

$$\overline{x}_j = -\mathrm{i}y_j, \quad \overline{y}_j = -\mathrm{i}x_j, \quad j = 1,\ldots,n, \quad \overline{\varphi} = \varphi, \quad \overline{r} = r. \tag{3.13}$$

При комплексном сопряжении гамильтониан (3.5) сохраняется:

$$\overline{g}(\mathbf{x},\varphi,\mathbf{y},r) = g(\mathbf{x},\varphi,\mathbf{y},r).$$

Действительно, $\overline{\mathrm{i}\alpha_j x_j y_j} = \bar{\mathrm{i}}\alpha_j \overline{x}_j \overline{y}_j = \mathrm{i}\alpha_j x_j y_j$, и можно показать, что

$$\overline{g}_{\mathbf{pq}lm}(-\mathrm{i})^{||\mathbf{p}+\mathbf{q}||} = g_{\mathbf{qp}l(-m)}. \tag{3.14}$$

Заметим, что согласно (3.13)

$$\overline{\mathrm{i}r_j} = -\mathrm{i}\overline{x}_j\overline{y}_j = (-\mathrm{i})^3 x_j y_j = \mathrm{i}x_j y_j = \mathrm{i}r_j, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Поэтому в (3.7) все μ_{jk} и ε — вещественные, а все δ_j — чисто мнимые. Положим $\boldsymbol{\delta} = 2\mathrm{i}\boldsymbol{\Delta}$.

Согласно (3.12)

$$r_j = x_j y_j = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(X_j^2 + Y_j^2\right) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{i}}{2} R_j, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Теперь (3.11) принимает вид

$$h = s + \varepsilon s^2 - s\left\langle \boldsymbol{\Delta},\mathbf{R}\right\rangle + \varepsilon s\left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle - \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{n}\mu_{jk}R_jR_k - \\ - \frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle\left\langle \boldsymbol{\Delta},\mathbf{R}\right\rangle + \frac{1}{4}\varepsilon\left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle^2 + \tilde{h}^{(5)}. \tag{3.15}$$

Здесь все величины вещественные.

Все целочисленные векторы $\mathbf{q}$, удовлетворяющие сравнению $\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{q}\rangle \equiv 0 \pmod 1$, образуют в $\mathbb{R}^n$ решётку L. Пусть M — её линейная оболочка и $Q = \{\mathbf{q} \geqslant 0,\mathbf{q} \neq 0\}$ — неотрицательный ортант в $\mathbb{R}^n$ без начала координат.

Теорема 3.3. *Если при* $\rho = 0$ *исходная вещественная система с гамильтонианом* $\gamma(\boldsymbol{\xi},\psi,\boldsymbol{\eta},\rho)$ *удовлетворяет условию* B_4^n *и в записи* (3.15)

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} q_j q_k + 2\left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{q}\right\rangle \left\langle \boldsymbol{\Delta},\mathbf{q}\right\rangle - \varepsilon \left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{q}\right\rangle^2 \neq 0 \text{ для всех } \mathbf{q} \in M \cap Q, \tag{3.16}$$

то периодическое решение (3.1) *формально орбитально устойчиво.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы в статье Брюно [1967]. Приведённая нормальная форма (3.9) содержит только резонансные члены, удовлетворяющие уравнению (3.6). А при условии B_4^n она имеет вид (3.15). Поэтому она имеет три типа вещественных формальных интегралов:

1) $\langle \mathbf{q},\mathbf{R}\rangle$, где вектор **q** ортогонален линейному подпространству M;
2)

$$\begin{aligned} H =& h - s - \varepsilon s^2 = \varepsilon s \left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle + \frac{1}{4}\varepsilon \left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle^2 - \\ &- s\left\langle \boldsymbol{\Delta},\mathbf{R}\right\rangle - \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} R_j R_k - \frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle \left\langle \boldsymbol{\Delta},\mathbf{R}\right\rangle + \tilde{h}^{(5)}; \end{aligned}$$

3) s.

По условию (3.16) при $\mathbf{R} \in M$ сумма

$$\sum_{j,k} \mu_{jk} R_j R_k + 2\left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle \left\langle \boldsymbol{\Delta},\mathbf{R}\right\rangle - \varepsilon \left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle^2$$

сохраняет знак и не обращается в нуль. Пусть для $\mathbf{R} \in M$

$$\begin{aligned} \mu_* &= \min \left| \frac{\sum \mu_{jk} R_j R_k + 2\left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle \left\langle \boldsymbol{\Delta},\mathbf{R}\right\rangle - \varepsilon \left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle^2}{\left\langle \mathbf{R},\mathbf{R}\right\rangle} \right|, \\ \mu^* &= \max \left| \frac{\left\langle \boldsymbol{\Delta},\mathbf{R}\right\rangle - \varepsilon \left\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\right\rangle}{\sqrt{\left\langle \mathbf{R},\mathbf{R}\right\rangle}} \right|. \end{aligned}$$

Согласно условию (3.16) имеем $\mu_* > 0$. Поскольку s и $\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{R}\rangle$ — интегралы, то сумма $H + As^2$ с любой константой A также интеграл.

Рассмотрим трёхчлен

$$-\frac{1}{4}\mu_* \lambda^2 - \mu^* \lambda s + As^2. \tag{3.17}$$

Его дискриминант $D = (\mu^*)^2 + \mu_* A$. Если

$$\mu_* A < 0 \text{ и } |\mu_* A| > (\mu^*)^2, \tag{3.18}$$

то трёхчлен (3.17) не имеет вещественных корней, кроме $\lambda = s = 0$.

Пусть $L_1, \ldots, L_m$ — базис ортогонального дополнения к линейному подпространству M в $\mathbb{R}^n$. Сумма

$$F = \sum_{j=1}^{m} \langle L_j, \mathbf{R} \rangle^4 + \left(H + As^2\right)^2 = F_8 + \ldots$$

является формальным интегралом, как полином от формальных интегралов. Покажем, что при числе A со свойством (3.18) следует положительная определённость формы

$$F_8 = \sum_{j=1}^{m} \langle L_j, \mathbf{R} \rangle^4 + \left(\frac{1}{4}\varepsilon \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R} \rangle^2 - \frac{1}{4} \sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} R_j R_k - \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R} \rangle \langle \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{R} \rangle + \right.$$
$$\left. + s\varepsilon \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R} \rangle - s \langle \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{R} \rangle + As^2 \right)^2 .$$

Здесь в правой части равенства все слагаемые больше или равны нулю, ибо $R_j \geqslant 0$ для действительных X_j и Y_j и

$$\sum_{j=1}^{m} \langle L_j, \mathbf{R} \rangle^4 = 0$$

только при $\mathbf{R} \in M$. Но для таких $\mathbf{R}$ при $\mathbf{R} \neq 0$ или $s \neq 0$ по доказанному

$$\left(-\frac{1}{4} \sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} R_j R_k - s \langle \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{R} \rangle - \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R} \rangle \langle \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{R} \rangle + As^2\right)^2 > 0.$$

Итак, F — формальный интеграл исходной системы, если в нём $\mathbf{X}, \varphi, \mathbf{Y}, s$ выразить через старые координаты $\boldsymbol{\xi}, \psi, \boldsymbol{\eta}, \rho$. Согласно определению 3.1 исходная система формально орбитально устойчива. Доказательство окончено.

3.4. Случаи $n = 1$ и $n = 2$. При условии B_4^n нормальная форма гамильтониана (3.7) в вещественных координатах имеет вид

$$g = r - \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R} \rangle - \frac{1}{4} \sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} R_j R_k - r \langle \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{R} \rangle + \varepsilon r^2 + \cdots$$

Здесь имеются линейная и квадратичная части по $\mathbf{R}$,r, и ситуация как бы похожа на нормальную форму гамильтониана с $n+1$ степенью свободы в окрестности неподвижной точки. Поэтому Маркеев в [2002] и [2006] для $n=1$ и $n=2$ соответственно сформулировал без доказательств условия формальной устойчивости аналогичные условию Маркеева 2 из раздела 2.2. А именно:

Условие Маркеева 3. Система двух уравнений

$$q_0 - \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{q}\rangle = 0,$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{j,k}^{n} \mu_{jk} q_j q_k - q_0 \langle \boldsymbol{\Delta},\mathbf{q}\rangle + \varepsilon q_0^2 = 0$$

не имеет решения $\mathbf{q} \geqslant 0$, $|q_0| + ||\mathbf{q}|| \neq 0$, т. е. уравнение

$$\sum_{j,k=1}^{n} \mu_{jk} q_j q_k + 2\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{q}\rangle \langle \boldsymbol{\Delta},\mathbf{q}\rangle - \varepsilon \langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{q}\rangle^2 = 0,$$

не имеет решения $\mathbf{q} \geqslant 0$.

Оно отличается от условия (3.16) теоремы 3.3 и легче для проверки.

3.5. Порядок разбегания решений.

Определение 3.2. Пусть решение

$$\boldsymbol{\xi}(t), \varphi(t), \boldsymbol{\eta}(t), \rho(t) \tag{3.20}$$

стремится к периодическому решению (3.1) при $t \to -\infty$. На решении (3.20) *порядок разбегания*

$$\Delta = \min\left\{\delta\left(||\boldsymbol{\xi}||\right), \delta\left(||\boldsymbol{\eta}||\right), \delta\left(\sqrt{|\rho|}\right)\right\}.$$

Определение 3.3. *Порядок разбегания решений* системы (3.3) от её периодического решения (3.1) $\widetilde{\Delta}$ — это нижняя грань порядков разбегания Δ по всем решениям (3.20), которые стремятся к периодическому решению (3.1) при $t \to -\infty$.

Здесь, как в разделе 2.5, оценим порядок разбегания решений от периодического решения при отсутствии формальной устойчивости.

Гипотеза 3.1. *Пусть выполнено условие B_2^n и $\varkappa = \min ||\mathbf{p}+\mathbf{q}|| > 2$ по целочисленным решениям $\mathbf{p} \geqslant 0$, $\mathbf{q} \geqslant 0$, m уравнения*

$$\langle \boldsymbol{\alpha},\mathbf{p}-\mathbf{q}\rangle + m = 0,$$

тогда порядок разбегания решений системы (3.3) *от периодического решения, обозначенный $\widetilde{\Delta} \geqslant 1/(2-\varkappa)$.*

Пример, аналогичный примеру 2.4 и использующий равенства (3.14), рекомендуем построить читателю.

Автор благодарит А.Б. Батхина за большую помощь при подготовке этой работы.

Список литературы

Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18, № 6. С. 91—192.

Арнольд В. И. Письмо в редакцию // УМН. 1968. Т. 23, № 6. С. 216.

Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 325—330.

Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений (II) // Тр. ММО. 1972. Т. 26. С. 199—239.

Брюно А. Д. Об устойчивости в системе Гамильтона // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 385—392.

Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 296 с.

Брюно А. Д., *Батхин А. Б.* Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Программирование. 2012. № 2. С. 12—30.

Зигель К., *Мозер Ю.* Лекции по небесной механике. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.

Маркеев А. П. Исследование устойчивости движения в некоторых задачах небесной механики. М.: Отчёт Института прикладной математики, 1970. 164 с.

Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Гл. ред. физ.-мат. литер. изд-ва «Наука», 1978. 352 с.

Маркеев А. П. Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задачах об орбитальной устойчивости периодических движений // ПММ. 2002. Т. 66, № 6. С. 929—938.

Маркеев А. П. Об устойчивости плоских вращений спутника на круговой орбите // МТТ. 2006. № 4. С. 63—85.

Bruno A. D. Normalization of the periodic Hamiltonian system // Programming and Computer Software. 2020. Vol. 46, no. 2. P. 76–83. DOI: `10.1134/S0361768820020048`.

Dirichlet P. G. L. Ueber die Stabilität des Gleichgewichts // G. Lejeune Dirichlet’s Werke. Bd. 2 / hrsg. von L. Kronecker. Cambridge University Press, 2012. S. 3–8. (Cambridge Library Collection - Mathematics). DOI: 10.1017/CBO9781139237345.002.

Moser J. New aspects in the theory of stability in Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11, no. 1. P. 81–114.

Moser J. Lectures on Hamiltonian systems // Memoires Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 81. P. 87.

Содержание