ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 22 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Голубев Ю. Ф., Яскевич А.В.

Оптимизация вычислений в процедурах расчета динамики систем твердых тел

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Голубев Ю. Ф., Яскевич А.В. Оптимизация вычислений в процедурах расчета динамики систем твердых тел // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 22. 44 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-22
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-22

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В.

Оптимизация вычислений в процедурах расчета динамики систем твердых тел

Москва — 2020

Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В.

Оптимизация вычислений в процедурах расчета динамики систем твердых тел

В работе рассматривается состоящая из нескольких взаимосвязанных таблиц модель данных для компьютерного представления в символьном виде матриц и скалярных математических выражений. Она позволяет использовать произвольный состав переменных для программирования рекуррентных алгоритмов расчета динамики систем твердых тел. Рассматриваются также средства символьной реализации алгебраических операций и исключения избыточных вычислений.

Ключевые слова: системы твердых тел, уравнения динамики, символьные преобразования

Golubev Yu.F., Yaskevich A.V.

Computation optimization in procedures of rigid body system dynamics calculation

This paper describes a multi table data model for computer symbolic representation of matrix and scalar mathematical expressions. It allows to use an arbitrary set of variables for programming of recursive algorithms of rigid body system dynamic calculation. Means of symbolic realization of algebraic operations and elimination of redundant computations are also considered.

Key words: rigid body systems, dynamic equations, symbolic manipulation

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ: 19-01-00123)

Оглавление

Введение

Алгоритмы моделирования кинематики и динамики механических систем твердых тел в основном выводятся и используются в виде векторно-матричных соотношений. Основными математическими объектами в них являются векторы положений, скоростей и ускорений, тензоры инерции тел, выраженные в декартовых системах координат, матрицы преобразования между этими системами. Структура связей механических систем в виде простой кинематической цепи обычно учитывается неявно с помощью индексируемых рекуррентных соотношений. Для описания древовидной структуры связей используются различные матрицы специального вида. Типы шарниров, соединяющих тела, могут быть учтены неявно, описаны вспомогательными векторами или определены с использованием условных операторов. Таким образом, алгоритмы моделирования, записанные в векторно-матричной форме, определяют метод расчета кинематики и динамики движения некоторого класса механических систем. Подстановка в векторы и матрицы заданных численных значений геометрических и инерционных параметров тел, учет шарниров заданного типа, превращают их в кинематические соотношения или уравнения динамики конкретной механической системы. Такая подстановка осуществляется при моделировании динамики на каждом шаге интегрирования. Платой за относительную универсальность матричных алгоритмов является их вычислительная избыточность. Она обусловлена тем, что последовательность векторно-матричных операций эквивалентна некоторому множеству определяющих элементы матриц скалярных математических выражений, в которых при численной реализации:

- не учитываются значения операндов, равные 0 или 1;
- при каждом расчете повторно вычисляются константы;
- для учета типа шарниров, структуры механической системы используются дополнительные операции со вспомогательными, избыточными переменными;
- не вынесены общие множители и не исключены повторяющиеся вычисления;
- не учитывается тригонометрическое тождество $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$;
- не исключены выражения, которые в последующих операциях умножаются на 0 и поэтому не влияют на окончательный результат вычислений.

Несмотря на высокую производительность современных компьютеров, проблема сокращения избыточных вычислений является актуальной в различных приложениях, в частности при статистическом моделировании и при моделировании в реальном времени процессов стыковки и причаливания космических аппаратов. Вычислительная эффективность численного моделирования конкретной механической системы может быть увеличена посредством перехода от общей матричной записи алгоритма к эквивалентной совокупности скалярных математических выражений, в которых отсутствуют избыточные операции, обусловленные перечисленными выше причинами.

Частичное исключение избыточных операций возможно также и в матричных алгоритмах в тех случаях, когда в произведениях два из трех сомножителей являются одинаковыми. Такие произведения можно получить по формулам, которые непосредственно определяют элементы результирующих вектора или матрицы и далее называются оптимизирующими.

Более глубокая оптимизация вычислений может быть осуществлена с учетом свойств операндов символьных скалярных выражений, то есть состава и значений элементов конкретных векторов и матриц. Ее можно выполнять как «вручную», так и при использовании систем символьных преобразований. В последнем случае правила упрощения, то есть исключения избыточных вычислений, основаны на используемой в такой системе модели данных, учитывающей общие свойства некоторого класса скалярных математических выражений.

Компьютерные технологии выполнения в символьном виде математических операций активно развивались со второй половины прошлого века. Обзоры многочисленных работ в данной области исследований приведены в [1-6]. Прежние [7-9] и новые [10] универсальные системы, ориентированные на выполнение разнообразных символьных математических операций, представляют формулы в виде списков – упорядоченных многоуровневых наборов данных [11]. На любом уровне список содержит тройку элементов: указатель на скалярную математическую операцию и два указателя на аргументы – символы или подсписки. Произвольное скалярное математическое выражение вследствие коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности операций сложения и умножения может быть представлено множеством различных древовидных списковых структур. Оптимизация вычислений в этом случае трудно реализуема, так как требует применения очень большого набора правил упрощения. Кроме того, универсальные системы предоставляют ограниченные возможности программирования, что затрудняет реализацию сложных матричных алгоритмов и моделей данных, необходимых для описания свойств механических систем и управления последовательностью символьных преобразований.

Известные [12-19] специализированные системы для символьного формирования уравнений динамики систем тел ориентированы прежде всего на уменьшение объема вычислений и выполняют в символьном виде только простейшие математические операции – сложение, вычитание, умножение, иногда деление. Поэтому далее для краткости они называются системами символьных преобразований. Большинство из них основано на использовании векторно-матричных алгоритмов, полученных из уравнений аналитической механики или принципа Даламбера. В таких алгоритмах все величины определяются в общей, базовой системе координат и для каждого отдельного тела векторы и матрицы выражаются в явном виде через относительные перемещения и скорости во всех предшествующих шарнирах. В этом случае эквивалентные скалярные выражения являются алгебраическими полиномами. Их компьютерное представление возможно с помощью таблиц (простое табличное кодирование), в которых постоянное число столбцов соответствует постоянному составу переменных – элементам q_j вектора $\mathbf{q}$ шарнирных, обобщенных координат и их производных $\dot{q}_j$ по времени, а строки описывают отдельные слагаемые. Такой способ кодирования позволяет упростить выражения за счет выполнения операций с численными константами, в том числе с 0 и 1, и за счет учета тригонометрического тождества $\sin^2 q_j + \cos^2 q_j \equiv 1$. Но из-за постоянного состава переменных повторяющиеся вычисления исключаются лишь частично только на этапе формирования в символьном виде текста процедуры.

Так, например, по значению кодов символьных переменных могут быть упорядочены структуры списков, представляющих математические выражения [12, 13]. Однако большее упрощение просмотра скалярных выражений-полиномов на всю глубину обеспечивает их кодирование с использованием различных массивов [14] или структурной (полиномиальной) таблицы, каждая строка которой имеет фиксированную длину и является результатом кодирования одного произведения-слагаемого. Сумма слагаемых представляется совокупностью таких строк [15 – 19]. Указанный способ кодирования предполагает фиксированный состав переменных, которыми являются обобщенные координаты, скорости и тригонометрические функции углов поворота в шарнирах. Частичное исключение повторяющихся вычислений путем их замены дополнительными переменными осуществляется после выполнения всех операций, перед генерацией исходного кода вычислительной процедуры. Простое табличное кодирование скалярных математических выражений при фиксированном составе переменных не позволяет:

- вводить новые переменные в процессе выполнения матричных операций для обозначения и тем самым исключения в последующих выражениях повторяющихся вычислений;
- использовать оптимизирующие формулы;
- формировать и использовать решения уравнений связей для декомпозиции уравнений динамики механической системы с кинематическими контурами.

В данной работе предлагается новый табличный способ кодирования символьных выражений с произвольным составом переменных, позволяющий реализовать все упомянутые выше способы оптимизации вычислений, а также алгоритмы выполнения математических операций и исключения всех математических выражений, не влияющих на результат из-за последующего их умножения на ноль. Способ кодирования основан на вычислительных свойствах векторно-матричных соотношений алгоритма составного тела [20, 21] (CRBA – Composite Rigid Body Algorithm) и алгоритма присоединенного тела [22-24] (ABA – Articulated Body Algorithm), алгоритма редукции уравнений динамики в результате решения уравнений контурных связей [25]. В итоговых соотношениях, записанных отдельно для поступательных и угловых движений тел [26, 27], исключены операции с нулевыми матрицами и учтена специфика конкретных векторно-матричных операций. Этим создается основа для перехода к эквивалентному набору оптимизированных скалярных математических выражений.

1. Вычислительные свойства применяемых алгоритмов расчета динамики систем твердых тел

Описываемая ниже технология формирования в символьном виде процедур расчета динамики механических систем твердых тел ориентирована на следующие их особенности.

- Механическая система может иметь кинематические контуры. При наличии кинематических контуров описание системы преобразуется: шарниры, соединяющие зависимые ветви с единственной независимой ветвью, замещаются уравнениями связей. Структура преобразованной системы становится древовидной с одной независимой и несколькими зависимыми ветвями.
- Единственная независимая ветвь может иметь структуру дерева. Все зависимые ветви имеют структуру простой кинематической цепи.
- Все шарниры имеют одну степень подвижности, более сложные сводятся к ним с использованием фиктивных тел с нулевыми размерами и инерцией.

Расчет динамики механической системы в виде отдельной ветви со структурой простой кинематической цепи или дерева может быть полностью выполнен одним рекуррентным алгоритмом составного или присоединенного тела.

Преобразованная многоконтурная механическая система состоит из нескольких ветвей, и при моделировании ее динамики на каждом шаге интегрирования выполняются различные алгоритмы, которые обеспечивают:

1. расчет кинематики части независимой ветви (тела) для формирования и решения уравнений контурных связей (относительно координат скоростей и ускорений);
2. решение уравнений связей для шарнирных координат зависимых ветвей (аналитическое или численное, итерационное);
3. расчет коэффициентов уравнений связей для шарнирных скоростей и ускорений зависимых ветвей, расчет зависимых скоростей;
4. расчет коэффициентов уравнений динамики отдельных зависимых ветвей и их редукция, приведение к независимой ветви;
5. расчет независимых шарнирных ускорений в независимой ветви;
6. расчет зависимых ускорений, сил и моментов, действующих на основание (в направляющих кинематических цепях платформенных механизмов).

Вычислительные свойства применяемых алгоритмов определяют требования к модели данных, на основе которой выполняются символьные преобразования. С учетом того, что векторы в компьютере представляются в виде матриц-столбцов, далее для краткости часто будет использоваться только один термин – «матрица».

Для расчета динамики отдельных ветвей механической системы применяются вычислительно наиболее эффективные рекуррентные алгоритмы составного тела и присоединенного тела. В первом из них допускаются только простейшие поступательные и вращательные шарниры с одной степенью подвижности. Поэтому они используются также при записи алгоритмов присоединенного тела и рекуррентного расчета матриц и векторов в уравнениях контурных связей. При символьных вычислениях замещение сложных шарниров кинематическими цепями с фиктивными телами, имеющими нулевые размеры и инерцию и соединенными простейшими шарнирами, не приводит к заметному увеличению числа операций, так как в этом случае матрицы-операнды содержат максимальное число нулевых элементов.

Рекуррентные вычисления в упомянутых алгоритмах организованы в виде определенных последовательностей прямых (от первого тела к последнему) и обратных (от последнего тела к первому) циклов. Внутри этих циклов большинство матричных соотношений являются суммами произведений двух операндов. В них отсутствуют общие множители, а повторяющиеся вычисления априорно исключены введением промежуточных переменных. Они выполняются в виде последовательности элементарных (с двумя операндами) матричных операций, операнды которых не имеют одинаковых элементов в своих отдельных строках и столбцах. Для таких соотношений скалярные выражения, определяющие элементы результирующих матриц, являются суммами слагаемых, состоящими из двух сомножителей, и не содержат общих множителей. Число слагаемых определяется размерностью матриц.

Однако отдельные слагаемые в рекуррентных соотношениях являются произведением трех матричных сомножителей. Если два из них одинаковы и имеют априорно известную структуру с нулевыми элементами, то возможно упрощение скалярных выражений, определяющих элементы результирующей матрицы. Так, во всех применяемых алгоритмах в выражения для расчета ускорений тел, а также инерционных моментов в качестве слагаемых входят произведения с двумя одинаковыми векторными сомножителями $\boldsymbol{\omega}_j$, которые могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_{j,j+1}) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \mathbf{r}_{j,j+1}) = (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j) \mathbf{r}_{j,j+1} = \boldsymbol{\Omega}_j \mathbf{r}_{j,j+1}, \\ \mathbf{m}_{\omega,j} = \boldsymbol{\omega}_j \times (\mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_j) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j (\mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_j),\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}_{j,j+1}$ – вектор из центра входного шарнира j – го тела в центр его выходного шарнира; $\boldsymbol{\omega}_j = [\omega_{j,1}, \omega_{j,2}, \omega_{j,3}]^T$ – вектор угловой скорости; $\mathbf{I}_j$ – тензор инерции j – го тела с центральными IX_j, IY_j, IZ_j и центробежными IXY_j, IXZ_j, IYZ_j моментами инерции; $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, $\tilde{\mathbf{a}}$ – кососимметрическая матрица.

Элементы результирующих матрицы $\boldsymbol{\Omega}_j$ и вектора $\mathbf{m}_{\omega,j}$ могут быть вычислены по скалярным соотношениям, в которых повторяющиеся произведения заменены промежуточными переменными $v_1, ..., v_6$ и определены однократно вычисляемые константы $cI1_j, ..., cI3_j$

$$v_1 = \omega_{j,1}\omega_{j,1}, \quad v_2 = \omega_{j,2}\omega_{j,2}, \quad v_3 = \omega_{j,3}\omega_{j,3},$$

$$v_4 = \omega_{j,1}\omega_{j,2}, \quad v_5 = \omega_{j,1}\omega_{j,3}, \quad v_6 = \omega_{j,2}\omega_{j,3},$$

$$\mathbf{\Omega}_j = \begin{bmatrix} -v_3 - v_2 & v_4 & v_5 \\ v_4 & -v_3 - v_1 & v_6 \\ v_5 & v_6 & -v_2 - v_1 \end{bmatrix},$$

$$cI1_j = IZ_j - IY_j, \; cI2_j = IX_j - IZ_j, \; cI3_j = IY_j - IX_j,$$

$$\mathbf{m}_{\omega,j} = \begin{bmatrix} v_6\, cI1_j + (v_3 - v_2)\, IYZ_j + v_5\, IXY_j - v_4 IXZ_j \\ v_5\, cI2_j + (v_1 - v_3)\, IXZ_j - v_6 IXY_j + v_4 IYZ_j \\ v_4\, cI3_j + (v_2 - v_1)\, IXY_j + v_6 IXZ_j - v_5 IYZ_j \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

В алгоритме присоединенного тела, в обратном цикле приведения инерции, сил и моментов последующих тел к предшествующим, имеется несколько матричных соотношений со слагаемыми в виде произведений трех сомножителей, два из которых одинаковы.

Во-первых, это выражения, определяющие матрицы инерции очередного $j-$го тела (с учетом всех последующих тел), спроецированные на оси реакций шарнира, соединяющего его с предшествующим телом. Они имеют вид [27]

$$\mathbf{D}_{t,j} = \mathbf{T}_j^{rel} m_j^{*-1} \mathbf{T}_j^{rel\,T}, \quad \mathbf{N}_{tt,j} = \mathbf{M}_{tt,j}^{\Sigma} - \mathbf{M}_{tt,j}^{\Sigma} \mathbf{D}_{t,j} \mathbf{M}_{tt,j}^{\Sigma},$$

$$\mathbf{N}_{tr,j} = \mathbf{M}_{tr,j}^{\Sigma} - \mathbf{M}_{tt,j}^{\Sigma} \mathbf{D}_{t,j} \mathbf{M}_{tr,j}^{\Sigma}, \quad \mathbf{N}_{rr,j} = \mathbf{M}_{rr,j}^{\Sigma} - \mathbf{M}_{tr,j}^{\Sigma T} \mathbf{D}_{t,j} \mathbf{M}_{tr,j}^{\Sigma},$$

если этот шарнир поступательный, и

$$\mathbf{D}_{r,j} = \mathbf{R}_j^{rel} I_j^{*-1} \mathbf{R}_j^{rel\,T}, \quad \mathbf{N}_{tt,j} = \mathbf{M}_{tt,j}^{\Sigma} - \mathbf{M}_{tr,j}^{\Sigma} \mathbf{D}_{r,j} \mathbf{M}_{tr,j}^{\Sigma T},$$

$$\mathbf{N}_{tr,j} = \mathbf{M}_{tr,j}^{\Sigma} - \mathbf{M}_{tr,j}^{\Sigma} \mathbf{D}_{r,j} \mathbf{M}_{rr,j}^{\Sigma}, \quad \mathbf{N}_{rr,j} = \mathbf{M}_{rr,j}^{\Sigma} - \mathbf{M}_{rr,j}^{\Sigma T} \mathbf{D}_{r,j} \mathbf{M}_{rr,j}^{\Sigma},$$

если он вращательный. В $(3\times1)-$матрицах $\mathbf{T}_j^{rel}$ или $\mathbf{R}_j^{rel}$ имеется только один ненулевой элемент, равный 1. Соответственно во вспомогательных $(3\times3)-$матрицах $\mathbf{D}_{t,j}$ или $\mathbf{D}_{r,j}$ только один элемент не равен нулю.

Структура одинаковых сомножителей – матриц $\mathbf{M}_{tt,j}^{\Sigma}$, $\mathbf{M}_{tr,j}^{\Sigma}$, $\mathbf{M}_{rr,j}^{\Sigma}$, известна заранее только для последнего $n-$го тела кинематической цепи: $\mathbf{M}_{tt,n}^{\Sigma} = m_n \mathbf{1}_3$, $\mathbf{M}_{tr,n}^{\Sigma} = \tilde{\mathbf{c}}_n^T$, $\mathbf{M}_{rr,n}^{\Sigma} = \mathbf{I}_n$, где m_n и $\mathbf{I}_n$ – масса и тензор инерции;

$\mathbf{c}_n = m_n \mathbf{d}_n$; $\mathbf{d}_n$ – вектор, определяющий положение центра масс; $\mathbf{1}_3$ – единичная (3×3) – матрица. При этом ненулевой элемент в $\mathbf{D}_{t,n}$ равен m_n^{-1}, а в $\mathbf{D}_{r,n}$ ненулевой элемент равен обратной величине момента инерции I_n^{-1} относительно оси вращения в n – м шарнире. Для $j < n$ значения элементов таких матриц априорно неизвестны, они определяются параметрами последующих тел и структурой механической системы. Поэтому оптимизирующие формулы для расчета приведенных выше произведений можно было бы применить только для последнего тела.

Анализ скалярных выражений, определяющих результирующие матрицы в приведенных выше соотношениях, показывает, что их равноценное упрощение обеспечивается при выполнении следующих условий:

- для поступательного шарнира сначала вычисляется произведение $\mathbf{M}_{tt,j}^{\Sigma} \mathbf{D}_{t,j}$, а для вращательного – произведение $\mathbf{D}_{r,j} \mathbf{M}_{rr,j}^{\Sigma}$;
- при выполнении скалярных операций умножения учитывается возможность равенства одного из сомножителей знаменателю в выражении обратной величины (например, m_j^{*-1} или I_j^{*-1}) второго сомножителя.

Индекс j в записи матричных произведений указывает на то, что данные условия упрощения могут выполняться в частности и не для последнего тела, что является преимуществом по сравнению с оптимизирующей формулой.

Вторую группу произведений трех матричных сомножителей, два из которых одинаковы, в алгоритме присоединенного тела [27] составляют выражения для преобразования выше рассмотренных матриц $\mathbf{N}_{tt,j}$, $\mathbf{N}_{tr,j}$, $\mathbf{N}_{rr,j}$ в систему координат предшествующего тела

$$\mathbf{N}_{tt,j}^{(p(j))} = \boldsymbol{\beta}_j^T \mathbf{N}_{tt,j} \boldsymbol{\beta}_j, \quad \mathbf{N}_{tr,j}^{(p(j))} = \boldsymbol{\beta}_j^T \mathbf{N}_{tr,j} \boldsymbol{\beta}_j, \quad \mathbf{N}_{rr,j}^{(p(j))} = \boldsymbol{\beta}_j^T \mathbf{N}_{rr,j} \boldsymbol{\beta}_j, \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{\alpha}_j \boldsymbol{\gamma}_{p(j),j}$; $\boldsymbol{\gamma}_{p(j),j}$ – определяемая геометрией предшествующего $p(j)$ – го тела постоянная матрица преобразования координат, элементы которой равны, как правило, 0 и 1, иногда другим вещественным числам; $\boldsymbol{\alpha}_j$ – матрица преобразования поворота на угол q_j, ее вид определяется осью локальной системы координат j – го шарнира, относительно которой осуществляется вращение

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}_j^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cq_j & sq_j \\ 0 & -sq_j & cq_j \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}_j^y = \begin{bmatrix} cq_j & 0 & -sq_j \\ 0 & 1 & 0 \\ sq_j & 0 & cq_j \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_j = \boldsymbol{\alpha}_j^z = \begin{bmatrix} cq_j & sq_j & 0 \\ -sq_j & cq_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$sq_j = \sin q_j$, $cq_j = \cos q_j$.

Произведения вида (1.3) можно представить как $\mathbf{A}_j^{(p(j))} = \boldsymbol{\gamma}_j^T(\boldsymbol{\alpha}_j^T \mathbf{A}_j \boldsymbol{\alpha}_j)\boldsymbol{\gamma}_j$, где $\mathbf{A}_j = [a_{i,j}],\ i, j \in \overline{1,3}$ – произвольная матрица. Так как возможные варианты значений элементов заранее известны только для матриц $\boldsymbol{\alpha}_j$, то априорно можно упростить вычисление лишь произведения $\boldsymbol{\alpha}_j^T \mathbf{A}_j \boldsymbol{\alpha}_j$. При его последующем символьном умножении на численные матрицы $\boldsymbol{\gamma}_j^T$ слева и на $\boldsymbol{\gamma}_j$ справа избыточные операции исключаются вследствие умножений на 0 и 1, сложений с 0 или однократного вычисления констант.

При записи скалярных выражений для расчета элементов результирующей $(3\times 3)-$матрицы $\mathbf{R} = \boldsymbol{\alpha}_j^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}_j$ предполагается, что поворот на угол q_j в *j*-м вращательном шарнире осуществляется относительно $k-$й оси ($k \in \overline{1,3}$). Если следующее за k значение из набора {1,2,3} обозначить как $k \oplus 1$, то номера двух оставшихся осей равны $m = k \oplus 1$ и $n = m \oplus 1 = (k \oplus 1) \oplus 1$. В частности, $m=1,\ n=2$ при $k=3$; $m=3,\ n=1$ при $k=2$ и $m=2,\ n=3$ при $k=1$. Вычисление матрицы $\mathbf{R}$ с помощью минимального числа операций определяет следующая последовательность скалярных выражений:

$$v_{T,1} = cq_j cq_j,\quad v_{T,2} = sq_j sq_j,\quad v_{T,3} = sq_j cq_j,$$
$$v_{A,1} = a_{m,n} + a_{n,m},\ v_{A,2} = a_{m,m} - a_{n,n},\ v_{A,3} = v_{T,3} v_{A,1},\ v_{A,3} = v_{T,3} v_{A,1},$$
$$r_{k,k} = a_{k,k},\ r_{k,m} = cq_j a_{k,m} - sq_j a_{k,n},\ r_{k,n} = cq_j a_{k,n} + sq_j a_{k,m},$$
$$r_{m,m} = \begin{cases} v_{T,1} a_{m,m} + v_{T,2} a_{n,n} - v_{A,3}, & \text{если } a_{m,m} \ne a_{n,n} \\ a_{m,m} - v_{A3}, & \text{если } a_{m,m} = a_{n,n} \end{cases},$$
$$r_{m,n} = \begin{cases} v_{T,1} a_{m,n} - v_{T,2} a_{n,m} + v_{A,4}, & \text{если } a_{m,n} \ne a_{n,m} \\ (v_{T,1} - v_{T,2}) a_{m,n} + v_{A4}, & \text{если } a_{m,n} = a_{n,m} \end{cases},$$
$$r_{n,n} = \begin{cases} v_{T,1} a_{n,n} + v_{T,2} a_{m,m} + v_{A,3}, & \text{если } a_{m,m} \ne a_{n,n} \\ a_{m,m} + v_{A,3}, & \text{если } a_{m,m} = a_{n,n} \end{cases}. \tag{1.4}$$

Если матрица $\mathbf{A}$ симметричная, то $r_{m,k} = r_{k,m}$, $r_{n,k} = r_{k.n}$, $r_{n,m} = r_{m,n}$, в противном случае

$$r_{m.k} = cq_j a_{m,k} - sq_j a_{n,k},\ r_{n,k} = cq_j a_{n,k} + sq_j a_{m,k}, \tag{1.5}$$
$$r_{n,m} = v_{T,1} a_{n,m} - v_{T,2} a_{m,n} + v_{A,4}.$$

Переменные $v_{T,k}, v_{A,l}$, $k = \overline{1,3}$; $l \in \overline{1,4}$ обозначают соответственно тригонометрические и арифметические выражения.

В (1.4) и (1.5) вынесены общие множители и исключено повторение произведений $cq_j sq_j$, $sq_j sq_j$, $cq_j cq_j$. Упрощение выражений, основанное на тригонометрическом тождестве $\sin^2 q_j + \cos^2 q_j \equiv 1$, реализуется в (1.4) при условии $a_{m,m} = a_{n,n}$.

В других тригонометрических тождествах, определяющих значение функций sin и cos для сумм или разностей углов, необходимо вместо выполнения всего двух умножений и одного сложения вычислять значение этих функций для нового значения угла. Поэтому их применение для упрощения упомянутых выше алгебраических полиномов нецелесообразно даже при наличии такой возможности. В используемых алгоритмах с короткими рекуррентными соотношениями условия применения этих тождеств отсутствуют.

Соотношения (1.2), (1.4) и (1.5), основанные на априорно известной информации о структуре не полностью заполненных матриц $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j$ и $\boldsymbol{\alpha}_j$, далее для краткости называются оптимизирующими формулами. При их использовании скалярные выражения, определяющие элементы всех результирующих матриц в применяемых рекуррентных алгоритмах, являются суммами произведений двух сомножителей и не содержат общих множителей.

Несмотря на это, избыточные вычисления при численной реализации этих алгоритмов не исключаются окончательно. Они обусловлены выполнением скалярных операций сложения с 0 и умножения на 1, операций с константами, а также наличием повторяющихся скалярных вычислений, которые возникают, например, в следующих случаях.

- Если два тела соединены поступательным шарниром, то их угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_{j-1}$ и $\boldsymbol{\omega}_j$ равны и скалярные выражения, вычисляющие элементы матриц $\boldsymbol{\Omega}_{j-1}$ и $\boldsymbol{\Omega}_j$ по оптимизирующей формуле (1.2), являются одинаковыми.
- Оптимизирующие формулы (1.4) и (1.5), преобразующие различные матрицы в (1.3), содержат одинаковые произведения тригонометрических функций.
- Если $(j-1)-$е тело в $k-$й направляющей кинематической цепи механизма с параллельной структурой является основанием (телом 0), то в рекуррентном алгоритме [26] расчета матриц и векторов в уравнениях контурных связей имеем $\boldsymbol{\theta}^J_{j-1,k} = \boldsymbol{\gamma}^J_{j-1,k}$ и, соответственно, элементы различных матриц $\boldsymbol{\beta}_{j,k} = \boldsymbol{\alpha}_{j,k}\boldsymbol{\gamma}^J_{j-1,j,k}$ и $\boldsymbol{\tau}_{j,k} = \boldsymbol{\alpha}_{j,k}\boldsymbol{\theta}^J_{j,k}$ определяются одинаковыми выражениями.

Перечисленные выше условия, при которых возникают повторяющиеся вычисления, можно непосредственно учесть в записи соответствующих рекуррентных векторно-матричных алгоритмов. Но более предпочтительным представляется сравнение очередного полученного скалярного выражения со всеми предшествующими. Это упрощает запись и символьную реализацию алгоритмов, позволяет расширять их состав и гарантирует исключение всех повторяющихся операций.

В применяемых рекуррентных алгоритмах промежуточные переменные не связаны с обобщенными координатами, их степенями или их тригонометрическими функциями как при простом табличном кодировании тригонометрических полиномов [15-19]. Они, прежде всего, позволяют использовать в последующих вычислениях результаты уже выполненных операций и могут быть обозначены различными идентификаторами, в назначении которых существует определенная свобода выбора. Поэтому, несмотря на фиксированный состав векторно-матричных выражений в каждом алгоритме, можно говорить о произвольном составе применяемых в нем промежуточных переменных.

Вообще говоря, каждая скалярная переменная, обозначающая некоторый промежуточный или окончательный результат вычислений, может быть обозначена уникальным идентификатором. Однако при таком подходе прежде всего затрудняется понимание получаемых символьных выражений. Поэтому в алгоритмах используются различные типы матричных операндов, которые могут быть исходными, вре́менными, вспомогательными, индексируемыми и целевыми.

Исходные постоянные матрицы определяют геометрические и инерционные свойства тел, вид и оси относительных перемещений в шарнирах. Их элементы-константы – это параметры механической системы (характерные размеры, массы, тензоры инерции тел). Исходные переменные матрицы, например, вектор (матрица-столбец) состояния механической системы и его первая производная по времени, вычисляемые при интегрировании уравнений динамики, являются внешними по отношению к процедуре, формируемой с помощью символьных преобразований.

Вре́менные матрицы есть результат выполнения операции сложения или умножения в пределах отдельного выражения, за пределами которого они могут использоваться повторно. Их элементы могут не входить в заключительные оптимизированные скалярные выражения.

Вспомогательные матрицы представляют собой результат, являющийся операндом в последующих выражениях при текущем значении параметра цикла. При различных значениях этого параметра они могут использоваться многократно.

Индексируемые матрицы характеризуют движение конкретного тела механической системы и поэтому содержат его индекс, равный значению параметра цикла, при котором впервые было определено их значение. Они могут входить в последующие вычисления, соответствующие любому значению параметра цикла, а также в вычисления в других циклах.

Целевые матрицы – это результат работы алгоритма, например, матрица обобщенной инерции, вектор обобщенных сил, вектор обобщенных ускорений, матрицы, определяющие уравнения связей и их решения. Например, в алгоритме составного тела [26] $(n \times 1) -$ вектор $\mathbf{b}$ (матрица-столбец) обобщенных сил в правой части системы уравнений динамики есть результат последовательного выполнения прямого и обратного циклов, в которых $j -$ параметр цикла (номер тела) изменяется соответственно как $j=\overline{1,n}$ и $j=\overline{n,1}$, где $n-$число тел. При этом наряду с другими в прямом цикле вычисляются соотношения

$$\boldsymbol{\omega}_{j-1}^{(j)}=\boldsymbol{\beta}_j\boldsymbol{\omega}_{j-1},\ \ \boldsymbol{\omega}_j=\boldsymbol{\omega}_{j-1}^{(j)}+\boldsymbol{\omega}_j^{rel},\ \ \boldsymbol{\varepsilon}_j=(\boldsymbol{\beta}_j\boldsymbol{\varepsilon}_{j-1})+(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1}^{(j)}\boldsymbol{\omega}_j^{rel}),$$
$$\mathbf{m}_j^{I,n}=(-(\mathbf{I}_j\boldsymbol{\varepsilon}_j)-(\tilde{\mathbf{c}}_j\mathbf{w}_j))-(\mathbf{m}_{\omega,j}+\mathbf{m}_j^E),$$

а в обратном цикле – соотношения

$$\mathbf{b}(j)=\begin{cases}(\mathbf{T}_j^{rel\ T}\mathbf{f}_j^{I\ n})+f_j^J, & r_j^J=0\\ (\mathbf{R}_j^{rel\ T}\mathbf{m}_j^{I,n})+m_j^J, & r_j^J=1\end{cases}, \tag{1.6}$$
$$\mathbf{f}_j^{I,n(j-1)}=\boldsymbol{\beta}_j^T\mathbf{f}_j^{I,n},\quad \mathbf{m}_{j-1}^{I,n}=\mathbf{m}_{j-1}^{I,n}+((\boldsymbol{\beta}_j^T\mathbf{m}_j^{I,n})+(\tilde{\mathbf{r}}_{j-1,j}\mathbf{f}_j^{I,n(j-1)})).$$

Пояснения к ним приведены в [26], а вектор $\mathbf{m}_{\omega,j}$ определен в (1.2).

Значения переменных векторов $\mathbf{m}_j^E$ внешних моментов, активных сил f_j^J или моментов m_j^J, действующих вдоль оси относительного перемещения $j-$го шарнира, определяются вне данного алгоритма, и по отношению к нему являются исходными внешними переменными.

Исходные постоянные $(3\times1)-$ матрицы $\mathbf{T}_j^{rel}$ или $\mathbf{R}_j^{rel}$ соответствуют единичным векторам осей поступательного или вращательного относительного движения в $j-$м шарнире и содержат только 0 и 1. Параметры тела – масса m_j, вектор $\mathbf{d}_j$, определяющий положение центра масс, тензор инерции $\mathbf{I}_j$ – это исходные постоянные величины, а постоянный вектор $\mathbf{c}_j=m_j\mathbf{d}_j$ есть результат их умножения.

Выражения в круглых скобках, задающие последовательность вычислений, для последующего использования в качестве операндов считаются вре́менными переменными. Вспомогательные векторы (матрицы-столбцы) $\boldsymbol{\omega}_{j-1}^{(j)}$, $\boldsymbol{\omega}_j^{rel}$, $\mathbf{m}_{\omega,j}$, $\mathbf{f}_j^{I,n(j-1)}$ используются при очередном значении параметра j прямого или обратного циклов. Векторы $\boldsymbol{\omega}_j$, $\boldsymbol{\varepsilon}_j$, $\mathbf{w}_j$, $\mathbf{f}_j^{I,n}$, $\mathbf{m}_j^n$ и матрицы $\boldsymbol{\beta}_j$ – это индексируемые переменные. Они формируются при конкретном значении индекса j и используются в прямом и обратном циклах. Матрица-столбец $\mathbf{b}$ обобщенных сил является целевой.

Ненулевые элементы целевых матриц позволяют определить состав всех скалярных символьных выражений, которые были использованы для их вычисления, и тем самым исключить неиспользуемые операции.

Вычислительные особенности математических выражений в рекуррентных векторно-матричных алгоритмах определяют требования к модели данных, то есть к структуре данных и операциям ее обработки, предназначенных для выполнения символьных преобразований. Такая модель должна обеспечивать:

- хранение и обработку матриц произвольного размера и скалярных выражений в виде сумм с произвольным числом слагаемых, каждое из которых может быть произведением не более чем двух сомножителей;
- табличное кодирование матричных и скалярных переменных, обеспечивающее быстрый доступ к описанию любого математического объекта, хранящегося в некоторой строке соответствующей таблицы;
- учет в скалярных операциях множителей, равных 0 или 1, и нулевых слагаемых;
- упрощение операций умножения при равенстве одного из сомножителей знаменателю в выражении обратной величины, определяющем другой сомножитель;
- исключение повторных вычислений, в том числе выражений с постоянным результатом;
- определение кратности использования выражений и исключение вычислений, не влияющих на значения целевых векторов и матриц;
- многократное использование произвольных идентификаторов для матриц и скалярных величин;
- замену однократно используемых вре́менных переменных скалярными выражениями, которые они обозначают, для ускорения вычислений за счет лучшего использования стека компьютерного процессора и уменьшения числа обращений к оперативной памяти.

2. Табличное кодирование матриц и скалярных выражений

Описываемая ниже табличная структура данных представляет собой набор таблиц, связанных между собой посредством ссылок, когда элементы строк одной таблицы могут иметь значения, равные номерам строк других таблиц. Она обеспечивает кодирование скалярных и матричных операндов, использование произвольных идентификаторов. На ее основе выполняются в символьном виде алгебраические операции, исключаются избыточные вычисления и формируется исходный код вычислительной процедуры.

В описываемой модели данных используются только численные константы. Они определяют геометрические и инерционные параметры тел механической системы. При изменении их значений вычислительные процедуры необходимо формировать в символьном виде заново, но при автоматизации этого процесса данный недостаток является несущественным. Вместе с этим при отказе от символьных констант отпадает необходимость формировать в символьном виде дополнительные однократно выполняемые процедуры, вычисляющие значения новых, производных констант, что упрощает программную реализацию. Наконец, при использовании численных констант параметры тел механической системы задаются в таблицах, которые доступны для программ, реализующих как численные векторно-матричные алгоритмы, так и их аналоги, сформированные в символьном виде, что значительно упрощает верификацию последних.

Кроме численных констант операндами скалярных математических операций могут быть вещественные индексируемые или неиндексируемые, внешние или внутренние переменные. Если вместо их символьных идентификаторов используются целочисленные коды, то алгоритмы символьных преобразований значительно упрощаются. Таблица IDT (Identifier Description Table) описания идентификаторов обеспечивает такое кодирование. Каждая ее строка имеет структуру

$$< n_{IDT}, \mathbf{S}_{IDT}, D_{IDT}, T_{IDT}, E_{IDT} >,$$

где n_{IDT} – число символов, образующих идентификатор; $\mathbf{S}_{IDT}$ – массив символов для хранения идентификатора; D_{IDT} – длина одномерного массива, определяемого идентификатором; T_{IDT} – тип переменной, обозначаемой идентификатором, он представляет собой целое число (0 – исходная матрица, 1 – массив вре́менных скалярных переменных, 2 – вспомогательная матрица, 3 – индексируемая матрица, 4 – целевая матрица); $E_{IDT} = 0$ для внутренних переменных формируемой процедуры, $E_{IDT} = 1$ для внешних данных, передаваемых через общие области памяти.

Значение $D_{IDT} = 0$ является признаком скалярной переменной величины. Значение $D_{IDT} = -1$ указывает на то, что данный идентификатор не будет входить в блок описания данных. Строка со значением $T_{IDT} = 1$ описывает массив временных скалярных переменных, она должна быть единственной в таблице. Выполнение этого условия контролируется.

Кодом идентификатора символьной переменной является номер строки в таблице IDT, содержащей его параметры. При занесении очередного описания просматриваются все уже существующие. Если такое в таблице уже имеется, то запись не производится, а номер строки, содержащей аналог, возвращается в качестве кода. В противном случае описание нового идентификатора заносится в первую свободную строку таблицы, номер которой становится его кодом.

Скалярные выражения являются суммами, слагаемые которых могут быть произведениями не более двух сомножителей и не содержат общих множителей. То есть они могут быть представлены последовательностями элементарных выражений, содержащих только одну бинарную операцию (сложение, вычитание, умножение и деление). Для определения кратности использования этих выражений каждое из них при выполнении символьных операций обозначается одной временной скалярной, но индексируемой переменной, то есть элементом массива временных переменных. Значение его индекса равно номеру строки таблицы, в которой содержится описание выполняемой математической операции. Такая сквозная, глобальная нумерация позволяет после завершения всех символьных преобразований исключить строки, то есть выражения, не влияющие на вычисление целевых переменных.

Строки таблицы SET (Scalar Expression Table) скалярных выражений имеют следующую структуру

$$< N_E, C_{1,E}, I_{1,E}, O_E, C_{2,E}, I_{2,E}, U_{SET},\ C_{RM}, I_{RM}, C_S, n_{ESS,B}, n_{ESS,E} >$$

Параметры $N_E, C_{1,E}, I_{1,E}, O_E, C_{2,E}, I_{2,E}$ являются закодированным представлением бинарной математической операции, результат которой обозначается временной скалярной переменной – элементом массива с кодом идентификатора C_{TSV}, равным номеру строки с параметром $T_{IDT} = 1$ в таблице IDT, и индексом, равным номеру данной строки таблицы SET. Целые числа $C_{1,E}, C_{2,E}$ и $I_{1,E}, I_{2,E}$ – это коды идентификаторов и индексы символьных операндов; O_E – символ, обозначающий бинарную алгебраическую операцию (“+”, “-“, “*”, “/”) или признак вычисления значения тригонометрической функции cos (“c”) или sin (“s”). Если $C_{1,E} = 0$, то вещественное число $N_E \neq 0$ есть результат выполнения операций с численными операндами в предшествующей цепочке вычислений текущей вре́менной переменной. Целое число $U_{SET} \geq 0$ равно кратности использования вре́менной переменной, обозначающей данную операцию, в качестве операнда в последующих выражениях. Код идентификатора C_{RM} и индекс I_{RM} указывают на элемент вспомогательной, индексируемой или целевой матрицы, который заместит эту вре́менную переменную после выполнения всех символьных операций. Параметры $C_S, n_{ESS,B}, n_{ESS,E}$ предназначены для формирования символьной последовательности текущего математического выражения в исходном коде формируемой процедуры и будут рассмотрены далее.

Для исключения повторяющихся скалярных математических выражений необходимо иметь возможность их сравнения. Операндами каждой скалярной операции могут быть только численные константы, не более одной скалярной внешней переменной и индексируемые временные переменные. Поэтому, несмотря на коммутативные свойства операций сложения и умножения, однозначность записи выражений в строках таблицы SET обеспечивается упорядочением операндов по возрастанию значений индексов. Она позволяет проводить сравнение строк и исключать их повторение, то есть устранять повторяющиеся вычисления. При таком представлении возможность сравнения и выявления повторяющихся произведений-слагаемых очевидна. Возможность выявления повторяющихся бинарных сумм определяется тем, что они могут возникнуть при реализации одних и тех же последовательностей вычислений, выполняемых при различных значениях параметра цикла, то есть для различных тел механической системы.

Параметры всех матриц, в том числе матриц-столбцов, хранятся в таблице MPT (Matrix Parameter Table), строки которой имеют следующую структуру

$$< C_{MPT}, T_{MPT}, I_{MPT}^{\max}, J_{MPT}^{\max}, n_{MET,B}, n_{MET,E} >$$

где C_{MPT} – код идентификатора матрицы, равный номеру описывающей его строки в таблице IDT; T_{MPT} – тип матрицы (0 – исходная, 1 – вре́менная, 2 – вспомогательная, 3 – индексируемая, 4 – целевая); $I_{MPT}^{\max}, J_{MPT}^{\max}$ – максимальные значения индексов, определяющие размерность матрицы; $n_{MET,B}, n_{MET,E}$ – номера начальной и конечной строк в таблице описания элементов матриц.

Каждая матрица однозначно определяется своим номером, то есть индексом строки таблицы MPT, в которой находятся ее параметры. Очередное описание заносится в первую свободную строку таблицы. Идентификаторы всех матриц имеют параметр $D_{IDT} = -1$. На этапе окончательной оптимизации формируемого исходного кода они используются для образования идентификаторов ненулевых символьных элементов как скалярных величин.

Постоянные исходные матрицы содержат только численные элементы и не имеют идентификаторов. Элементы внешних исходных матриц являются скалярными символьными переменными, идентификаторы которых образуются из идентификатора матрицы добавлением индекса. Их описания заносятся в таблицу IDT с параметром $D_{IDT} = 0$. Элементами всех вычисляемых матриц (временных, вспомогательных, индексируемых и целевых) могут быть числа, исходные и временные скалярные переменные.

Обозначение скалярных выражений только одной индексируемой вре́менной переменной усложняет последующую верификацию сформированного в символьном виде исходного кода вычислительной процедуры. Поэтому после выполнения в символьном виде всех алгебраических операций и исключения неиспользуемых скалярных выражений часть из оставшихся вре́менных переменных может быть заменена идентификаторами элементов вспомогательных, индексируемых или целевых матриц. Так как вре́менные переменные образуют одномерный массив, то и заменяющие их элементы матриц также должны иметь один индекс. Для элемента i – й строки и j – го столбца матрицы такой индекс l вычисляется как $l = (j-1)\,I_{MPT}^{\max} + i$.

Описания элементов матриц хранятся в таблице MET (Matrix Elements Table). Ее строки имеют следующую структуру

$$< L_{MET}, N_{MET}, C_{MET}, I_{MET} >$$

где L_{MET} – индекс элемента матрицы, представленной в виде одномерного массива, его значение l вычисляется по приведенной выше формуле; N_{MET} – вещественное число; C_{MET}, I_{MET} – код идентификатора и индекс переменной, являющейся символьным значением элемента матрицы, целые числа.

При $C_{MET} = 0$ элемент матрицы является вещественным числом, равным N_{MET}. Ненулевой код C_{MET} не совпадает с кодом C_{MPT} идентификатора матрицы. Знак кода C_{MET} есть знак символьного элемента.

В таблице МЕТ хранятся все элементы матриц, в том числе нулевые. Это дает возможность использовать для каждой целевой матрицы одно и то же ее описание, в которое ненулевые элементы добавляются по мере выполнения циклов рекуррентного алгоритма. Кроме того, при хранении нулевых элементов упрощаются реализация матричных операций, понимание структуры матриц и, соответственно, верификация формируемого исходного кода

Упрощенная схема (рис. 1) взаимосвязи описанных выше таблиц демонстрируется на примере кодирования соотношений для угловых скоростей двух тел. Тело 1 связано с неподвижным основанием своим шарниром вращения относительно оси Z своей входной локальной системы координат (СК), а с телом 2 – шарниром вращения относительно оси Y своей выходной локальной СК. Оси этих систем параллельны, то есть $\boldsymbol{\gamma}_1 = \mathbf{1}_3$ – единичная (3×3) – матрица преобразования одной из них в другую. Вектор $\boldsymbol{\omega}_2$ (индексируемая матрица-столбец) абсолютной угловой скорости тела 2 в его входной локальной СК равен сумме двух вспомогательных векторов (матриц-столбцов) $\boldsymbol{\omega}_P$ и $\boldsymbol{\omega}_R$

$$\boldsymbol{\omega}_P = \boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sq_2\dot{q}_1 \\ 0 \\ cq_2\dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -vv_3\dot{q}_1 \\ 0 \\ vv_4\dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -vv_{129} \\ 0 \\ vv_{130} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1^{(2)} + \boldsymbol{\omega}_2^{rel} = \boldsymbol{\omega}_P + \boldsymbol{\omega}_R,$$

где $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_1^{rel} = [0,\ 0,\ \dot{q}_1]^T$, $\boldsymbol{\omega}_R = \boldsymbol{\omega}_2^{rel} = [0, \dot{q}_2, 0]^T$ – относительные скорости вращения тел 1 и 2 в своих шарнирах; $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2$ – матрица преобразования входной СК тела 1 во входную СК тела 2; а $vv_3 = sq_2$, $vv_4 = cq_2$ и $vv_{129} = -sq_2\dot{q}_1$, $vv_{130} = cq_2\dot{q}_1$ – временные скалярные переменные.

В приведенной упрощенной схеме в таблицах IDT, MPT, MET и SET отражены описания элементов входной внешней матрицы-столбца обобщенных скоростей с идентификатором “dQ” и скалярными элементами (их индексы входят в идентификаторы), вспомогательных матриц с идентификаторами “OmR”, “OmP” и индексируемой матрицы с идентификатором “Om2” (ее индекс входит в идентификатор). Для компактности не показаны матрицы $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ и $\boldsymbol{\beta}_2$, отдельные элементы заголовков таблиц и ссылки в виде стрелок. Для облегчения понимания схемы таблицы и ссылки на их строки выделены различными цветами.

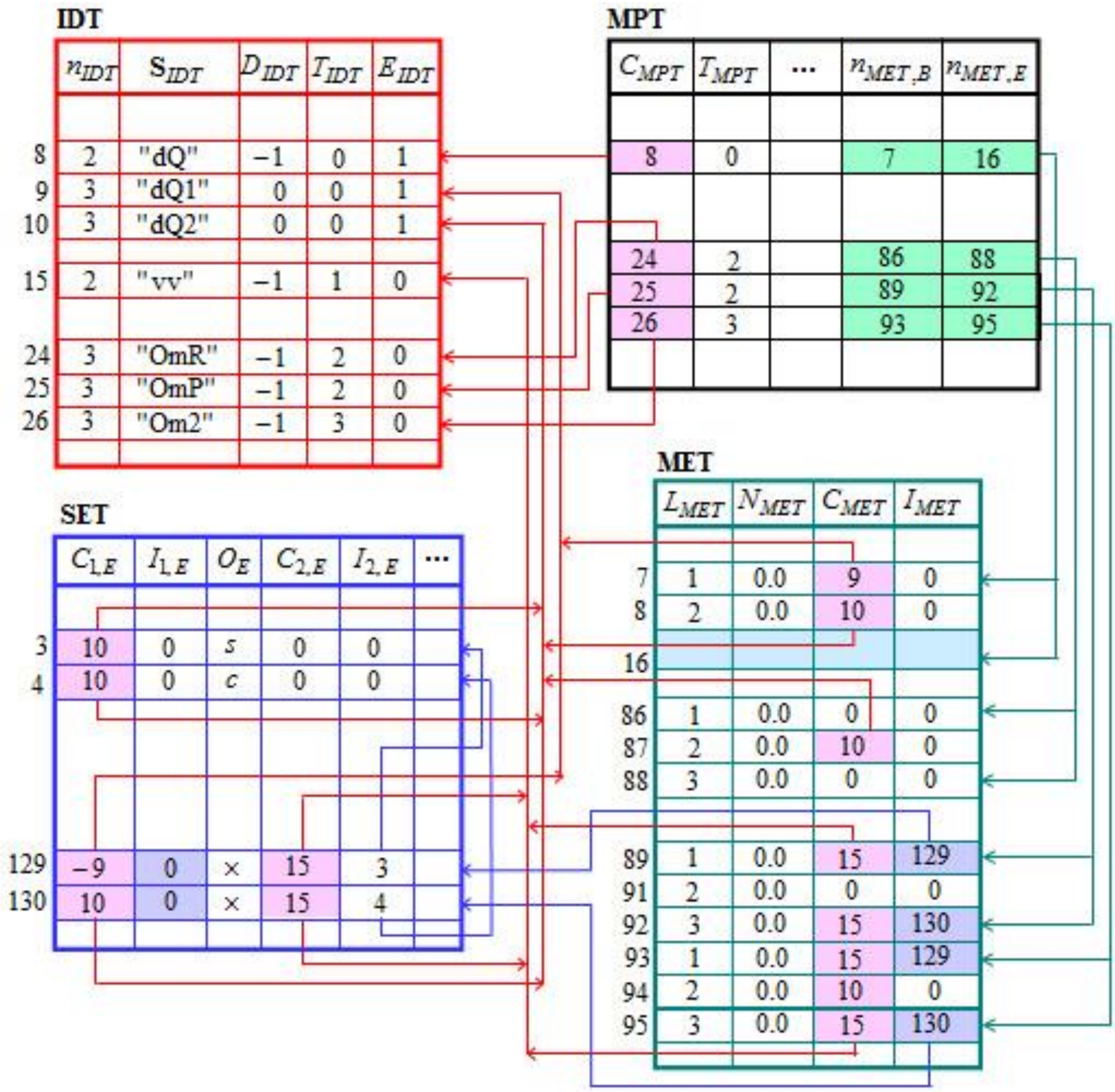

Рис. 1. Упрощенная схема взаимосвязи таблиц для кодирования матриц и скалярных математических выражений

3. Скалярные символьные преобразования

Символьные алгебраические операции выполняются с закодированными представлениями скалярных величин, векторов и матриц. Описания их операндов и результата хранятся в строках ранее описанных таблиц. Скалярные символьные операции сложения, вычитания, умножения и деления выполняет программно реализованный скалярный символьный процессор. Он представляет собой набор функций, которые используют закодированное представление операндов. Если промежуточным результатом операции является не отдельное число или символьная переменная, а скалярное выражение, то для получения окончательного результата используется таблица SET. С помощью функций скалярного процессора программируется выполнение в символьном виде операций с векторами и матрицами, а также оптимизирующих формул. При этом описания скалярных операндов должны быть предварительно получены из описаний элементов матриц.

Скалярный символьный процессор преобразует строки

$$< N_{O,1}, C_{O,1}, I_{O,1} >, \quad < N_{O,2}, C_{O,2}, I_{O,2} >$$

двух символьных операндов в строку результата

$$< N_R, C_R, I_R >.$$

Здесь, как и ранее, $N_{O,1}, N_{O,1}, N_R$ – это вещественные числа; $C_{O,1}, C_{O,2}, C_R$ – коды идентификаторов операндов и результата; $I_{O,1}, I_{O,2}$, I_R – их индексы. Параметры i – го операнда определяют его как численную константу ($C_{O,i} = 0$), символьную переменную ($C_{O,i} \neq 0$) – скалярную ($I_{O,i} = 0$), элемент матрицы или массива ($I_{O,i} > 0$).

В функции, выполняющей операцию скалярного сложения, параметры строки-результата определяются непосредственно параметрами операндов только при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned}
&N_R = N_{O,1} + N_{O,2},\ C_R = 0,\ I_R = 0\ ,\ \textit{если}\ C_{O,1} = 0,\ C_{O,2} = 0\ ,\\
&N_R = 0.0,\ C_R = C_{O,2},\ I_R = I_{O,2}\ ,\quad \textit{если}\ N_{O,1} = 0.0,\ C_{O,1} = 0, C_{O,2} \neq 0\ ,\\
&N_R = 0.0,\ C_R = C_{O,1},\ I_R = I_{O,1}\ ,\quad \textit{если}\ N_{O,2} = 0.0, C_{O,1} \neq 0, C_{O,2} = 0\ .
\end{aligned}$$

Во всех остальных случаях промежуточным результатом сложения является закодированное скалярное выражение, представленное параметрами $N_C, C_{1,C}, I_{1,C}, O_C, C_{2,C}, I_{2,C}$, которые аналогичны параметрам $N_E, C_{1,E}, I_{1,E}, O_E$, $C_{2,E}, I_{2,E}$ строк таблицы SET. Их значения определяются следующими условиями.

$$\left.\begin{array}{l}
N_R = 0.0,\ N_C = N_{O,1},\\
C_{C,1} = 0,\ I_{C,1} = 0,\ I_{C,2} = I_{O,2}\\
\left.\begin{array}{l} O_C = '+',\\ C_{C,2} = C_{O,2} \end{array}\right\} \textit{если}\ C_{O,2} > 0\\
\left.\begin{array}{l} O_C = '-',\\ C_{C,2} = -C_{O,2} \end{array}\right\} \textit{если}\ C_{O,2} < 0
\end{array}\right\} \textit{если}\ N_{O,1} \neq 0,\ C_{O,1} = 0, C_{O,2} \neq 0\ ,$$

$$\left.\begin{array}{l} N_R = 0.0,\ N_C = N_{O,2}, \\ C_{C,1} = 0,\ I_{C,1} = 0,\ I_{C,2} = I_{O,1} \\ \left.\begin{array}{l} O_C = '+', \\ C_{C,2} = C_{O,1} \end{array}\right\} \text{\it если } C_{O,1} > 0 \\ \left.\begin{array}{l} O_C = '-', \\ C_{C,2} = -C_{O,1} \end{array}\right\} \text{\it если } C_{O,1} < 0 \end{array}\right\} \ \text{\it если } N_{O,2} \neq 0, C_{O,1} \neq 0, C_{O,2} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} N_R = 0.0,\ N_C = 0.0, \\ O_C = '+', \\ \left.\begin{array}{l} C_{C,1} = C_{O,1},\ I_{C,1} = I_{O,1}, \\ C_{C,2} = |\,C_{O,2}\,|, I_{C,2} = I_{O,2} \\ O_C\,'-',\ \text{\it если } C_{O,2} < 0 \end{array}\right\} \text{\it если } I_{O,2} > I_{O,1} \\ \left.\begin{array}{l} C_{C,1} = C_{O,2},\ I_{C,1} = I_{O,2}, \\ C_{C,2} = |\,C_{O,1}\,|, I_{C,2} = I_{O,1} \\ O_C\,'-',\ \text{\it если } C_{O,1} < 0 \end{array}\right\} \text{\it если } I_{O,2} < I_{O,1} \end{array}\right\} \ \text{\it если } C_{O,1} \neq 0, C_{O,2} \neq 0.$$

Этот промежуточный результат будет обозначаться вре́менной скалярной переменной – элементом массива с кодом идентификатора C_{TSV}, то есть $C_R = C_{TSV}$. Для определения индекса этого элемента промежуточный результат $N_C, C_{1,C}, I_{1,C}, O_C, C_{2,C}, I_{2,C}$ необходимо сравнить с параметрами $N_E, C_{1,E}, I_{1,E}, O_E$, $C_{2,E}, I_{2,E}$ всех строк, ранее записанных в таблицу SET. При наличии строки-аналога ее номер присваивается индексу I_R результата операции. В противном случае параметры $N_C, C_{1,C}, I_{1,C}, O_C, C_{2,C}, I_{2,C}$ записываются в первую свободную строку таблицы SET, номер которой становится индексом I_R результата.

Функция, выполняющая операцию скалярного вычитания, инвертирует знак второго численного или символьного операнда

$$N_{O,2} = -1.0 * N_{O,2},\ C_{O,2} = -1 * C_{O,2}$$

и обращается к функции сложения.

Функция вычисления обратной величины единственного, первого операнда позволяет замещать умножениями на нее последующие многократные операции деления. Она применяется в соотношениях алгоритма присоединенного тела и при символьном обращении $(3\times3)-$ и $(4\times4)-$матриц с помощью вычисления алгебраических дополнений и определителей для получения решения уравнений контурных связей.

Параметры результата этой операции для численного операнда равны

$$N_R = 1.0 / N_{O,1},\ \ C_R = 0,\ \ I_R = 0,\ \ если\ \ C_{O,1} = 0.$$

При этом контролируется приводящее к ошибке значение $N_R = 0.0$. Если операнд символьный, то формируется промежуточный результат операции

$$\left.\begin{array}{l} N_{C,1} = \ \ 1.0,\ если\ C_{O,1} > 0 \\ N_{C,1} = -1.0,\ если\ C_{O,1} < 0 \\ C_{C,1} = 0,\ I_{C,1} = 0, \\ O_C = '/', \\ C_{C,2} = |\,C_{O,1}\,|,\ I_{C,2} = I_{O,1} \end{array}\right\}\ если\ C_{O,1} \neq 0,$$

который будет обозначаться вре́менной скалярной переменной – элементом массива с кодом идентификатора C_{TSV}, то есть $C_R = C_{TSV}$. Индекс этого элемен та определится так же, как и в операции сложения при записи в таблицу SET.

В функции, выполняющей операцию скалярного умножения, параметры строки-результата определяются непосредственно параметрами операндов, если они оба численные или один из них равен 0 или по модулю 1. Если оба операнда численные, то

$$N_R = N_{O,1} * N_{O,2},\ C_R = 0,\ I_R = 0,\ если\ C_{O,1} = 0,\ C_{O,2} = 0.$$

При этом учитывается возможность того, что один из них может быть обратной величиной другого. В этом случае для упрощения математического выражения с учетом компьютерного представления вещественных чисел используется дополнительное контролирующее условие

$$N_R = 1.0,\ если\ ||\,N_R\,| - 1.0| \leq 10^{-10}.$$

Численный результат, точно равный 1.0, может быть использован при упрощении последующих выражений.

Если один из операндов равен нулю, то есть $N_{O,1} = 0.0$ и $C_{O,1} = 0$ или $N_{O,2} = 0.0$ и $C_{O,2} = 0$, то параметры $N_R = 0.0$, $C_R = 0$, $I_R = 0$ определяют нулевой результат.

Если один из сомножителей равен по модулю 1, то параметры результата определяются соотношениями

$$\left.\begin{array}{ll} N_R = 0.0 & \\ C_R = C_{O,2}, & если\ N_{O,1} = \ \ 1.0 \\ C_R = -C_{O,2}, & если\ N_{O,1} = -1.0 \\ I_R = I_{O,2} & \end{array}\right\}\ если\ C_{O,1} = 0, C_{O,2} \neq 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&N_R = 0\\
&C_R = C_{O,1}, \quad \text{если } N_{O,2} = \ \ 1.0\\
&C_R = -C_{O,1}, \ \text{если } N_{O,2} = -1.0\\
&I_R = I_{O,1}
\end{aligned}\right\} \text{если } C_{O,1} \neq 0, C_{O,2} = 0.$$

Если первый сомножитель является временной переменной, описываемой в таблице SET строкой с индексом $I_{O,1}$ и определяющей обратную величину

$$N_E(I_{O,1}) = \pm 1.0,\ C_{1,E}(I_{O,1}) = 0,\ I_{1,E}(I_{O,1}) = 0,\ O_E(I_{O,1}) = '/',\ C_{2,E}(I_{O,1}),\ I_{2,E}(I_{O,1}),$$

знаменатель которой равен по модулю второму сомножителю $|C_{O,2}| = C_{2,E}(I_{O,1})$, $I_{O,2} = I_{2,E}(I_{O,1})$, то параметры результата умножения равны

$$N_R = 1.0 * sign(N_E(I_{O,1}) * C_{O,2}),\ \ C_R = 0,\ \ I_R = 0.$$

Если второй сомножитель является временной переменной, описываемой в таблице SET строкой с индексом $I_{O,2}$ и определяющей обратную величину

$$N_E(I_{O,2}) = \pm 1.0,\ \ C_{1,E}(I_{O,2}) = 0,\ \ I_{1,E}(I_{O,2}) = 0,$$
$$O_E(I_{O,2}) = '/',\ \ C_{2,E}(I_{O,2}),\ \ I_{2,E}(I_{O,2}),$$

знаменатель которой равен по модулю первому сомножителю $|C_{O,1}| = C_{2,E}(I_{O,2})$, $I_{O,1} = I_{2,E}(I_{O,2})$, то параметры результата умножения равны

$$N_R = 1.0 * sign(N_E(I_{O,2}) * C_{O,1}),\ \ C_R = 0,\ \ I_R = 0.$$

Во всех остальных случаях промежуточным результатом операции является скалярное выражение с параметрами $N_C, C_{1,C}, I_{1,C}, O_C, C_{2,C}, I_{2,C}$, значения которых определяются следующими условиями.

$$\left.\begin{aligned}
&N_R = 0,\ N_C = 0,\\
&\left.\begin{aligned}
&C_{C,1} = |C_{O,1}|, \quad \text{если } C_{O,1} * C_{O,2} > 0\\
&C_{C,1} = -|C_{O,1}|, \text{если } C_{O,1} * C_{O,2} > 0\\
&I_{C,1} = I_{O,1},\ C_{C,2} = |C_{O,2}|, I_{C,2} = I_{O,2}
\end{aligned}\right\} \text{если } I_{O,2} > I_{O,1}\\
&O_C = '*',\\
&\left.\begin{aligned}
&C_{C,1} = |C_{O,2}|, \quad \text{если } C_{O,1} * C_{O,2} > 0\\
&C_{C,1} = -|C_{O,2}|, \text{если } C_{O,1} * C_{O,2} > 0\\
&I_{C,1} = I_{O,2},\ C_{C,2} = |C_{O,1}|, I_{C,2} = I_{O,1}
\end{aligned}\right\} \text{если } \ I_{O,2} < I_{O,1}
\end{aligned}\right\} C_{O,1} \neq 0, C_{O,2} \neq 0$$

Сравнение этого промежуточного результата со строками таблицы SET для получения строки $< N_R, C_R, I_R >$ осуществляется так же, как и в операции сложения.

Сложность соотношений, определяющих результат всех скалярных операций, невелика и приблизительно одинакова, в отличие от кодирования выражений полиномиальными таблицами [15-19].

Перед выполнением очередной элементарной матричной операции в таблицах MPT и MET формируется описание матрицы-результата. Ее элементам присваиваются начальные нулевые значения, а ненулевые определяются в результате выполнения операции. Далее для краткости такая матрица называется «очередной». Ее номер в MPT равен n_{MPT}, а код идентификатора равен $C_{MPT}(n_{MPT})$.

Результат скалярной операции, непосредственно определяющий какой-либо ненулевой элемент с индексом L_{MET} «очередной» матрицы, записывается в строку таблицы MET, номер которой вычисляется по значениям параметров $n_{MET,B}$, $n_{MET,E}$ в строке n_{MPT} описания матрицы в таблице MPT. Если этот результат есть вре́менная переменная с кодом $C_R = C_{TSV}$ и индексом I_R, то на этапе окончательной оптимизации вычислений она может быть заменена элементом вспомогательной, индексируемой или целевой матрицы. Код идентификатора такой матрицы и индекс элемента присваиваются параметрам C_{RM} и I_{RM} в строке описания этой вре́менной переменной.

Из-за умножений на 1 или сложений с 0 в некоторой цепочке операций элементы матрицы-результата могут быть равны элементам других, ранее полученных матриц. Поэтому необходимо учитывать, что эта вре́менная переменная с индексом I_R уже определена как элемент другой, ранее сформированной матрицы, вид которой задан параметром T_{IDT} в строке с номером $C_{RM}(I_R)$ таблицы IDT. Поэтому в зависимости от типа T_{MPT} «очередной» матрицы значение кода $C_{RM}(I_R)$ и индекса I_{RM} в строке I_R таблицы SET определяются следующим образом.

- Если «очередная» матрица является вре́менной ($T_{MPT} = 1$), то в строке I_R таблицы SET значения кода $C_{RM}(I_R)$ и индекса $I_{RM}(I_R)$ не изменяются.
- Если «очередная» матрица не является вре́менной ($T_{MPT} > 1$), а в строке I_R таблицы SET $C_{RM}(I_R) = 0$, то $C_{RM}(I_R) = C_{MPT}(n_{MPT})$ и $I_{RM}(I_R) = L_{MET}$.
- Если «очередная» матрица является вспомогательной, а в строке I_R таблицы SET $C_{RM}(I_R) > 0$ является кодом другой вспомогательной матрицы ($T_{IDT}(C_{RM}(I_R)) = 2$), то замена кода идентификатора C_{RM} и индекса L_{MET} в строке I_R таблицы SET не производится. Это позволяет в последующем исключить повторяющиеся вычисления. Значение параметра $T_{IDT}(C_{RM}(I_R)) \neq 2$ является признаком ошибки.

- Если «очередная» матрица является индексируемой ($T_{MPT}=3$), а в строке I_R таблицы SET $C_{RM}(I_R)>0$ является кодом вспомогательной матрицы ($T_{IDT}(C_{RM}(I_R))=2$), то $C_{RM}(I_R)=C_{MPT}$ и $I_{RM}=L_{MET}$.
- Если «очередная» матрица является индексируемой ($T_{MPT}=3$), а в строке I_R таблицы SET $C_{RM}(I_R)>0$ является кодом другой индексируемой матрицы ($T_{IDT}(C_{RM}(I_R))=3$), то замена кода идентификатора C_{RM} и индекса L_{MET} в строке I_R таблицы SET не производится. Это позволяет в последующем исключить повторяющиеся вычисления. Значение параметра $T_{IDT}(C_{RM}(I_R))>3$ является признаком ошибки.
- Если «очередная» матрица является целевой ($T_{MPT}=4$), а в строке I_R таблицы SET $C_{RM}(I_R)>0$ является кодом вспомогательной или индексируемой матрицы ($T_{IDT}(C_{RM}(I_R))<4$), то $C_{RM}(I_R)=C_{MPT}$ и $I_{RM}=L_{MET}$, где C_{MPT} – код идентификатора целевой матрицы, L_{MET} – индекса ее элемента. Значение параметра $T_{IDT}(C_{RM}(I_R))<4$ является признаком ошибки.

Программирование отдельных оптимизирующих формул и элементарных матричных операций с использованием функций скалярного символьного процессора не вызывает трудностей и далее не обсуждается.

4. Управление выполнением матричных операций

Все известные численные векторно-матричные алгоритмы расчета динамики механической системы основаны на использовании регулярных структур данных – массивов, в которые объединяются скалярные величины, векторы и матрицы, описывающие параметры и движение тел. За идентификатором каждого такого массива резервируется область памяти, и доступ к его элементам осуществляется с помощью индексов тел, параметров циклов.

Такой метод становится невозможным при любом способе кодирования символьных матриц (и определяющих их элементы скалярных выражений), так как в этом случае их идентификаторы не резервируют области памяти компьютера для хранения численных величин, сами являются объектом обработки. В частности, в структуре данных для кодирования матриц и скалярных выражений, описанной в разделах 2, 3:

- номер матрицы в таблице MPT определяется порядком ее формирования и лишь частично ее назначением, он не связан с идентификатором матрицы и не соответствует номеру тела;
- при обновлении значений элементов матрицы вследствие циклических символьных преобразований в таблицах MPT и MET создается ее новая копия с прежним идентификатором, но новым номером, ее элементы определяются новыми скалярными выражениями.

При реализации векторно-матричных алгоритмов в символьном виде регулярность данных и соответственно цикличность их обработки может быть обеспечена использованием дополнительных таблиц, описывающих структуру механической системы, состав применяемых в алгоритмах векторов и матриц, текущее состояние символьных преобразований. Ниже коротко рассматривается табличная структура данных, позволяющая организовать процесс выполнения в символьном виде векторно-матричных операций при формировании процедур расчета динамики механической системы твердых тел, особенности которых определены в разделе 1.

При описании структуры связей таких механических систем их ветви нумеруются: нулевой номер имеет независимая ветвь, а положительный – зависимые. Для сокращения числа заведомо нулевых элементов в матрицах, а также для упрощения верификации формируемого исходного кода в каждой ветви используется локальная, непрерывно возрастающая нумерация тел, шарниров и шарнирных переменных.

Структура и параметры конкретной механической системы определяются исходными данными, которые заносятся в таблицу ветвей BDT (Branch Description Table) механической системы. Каждая ее строка описывает пару связанных одним шарниром тел – очередное и непосредственно ему предшествующее, и содержит следующие параметры:

- номер ветви;
- относительный номер в ветви предшествующего тела;
- относительный номер в ветви очередного, последующего тела;
- для предшествующего тела:
  - численные значения трех элементов вектора, направленного из начала системы координат его входного в начало системы координат его выходного шарнира;
  - численные значения трех углов ориентации системы координат выходного шарнира относительно системы координат входного шарнира;
- для шарнира, номер которого равен номеру очередного тела:
  - номер оси относительного движения;
  - тип относительного движения – вращательное или поступательное;
- для очередного тела:
  - численные значения трех элементов вектора, определяющего положение центра масс относительно системы координат его входного шарнира;
  - численное значение массы;
  - численные значения шести моментов инерции (центральных и центробежных).

Для формирования и решения уравнений контурных связей в исходных данных задаются условия замыкания контуров, каждое из которых записывается в строку таблицы описания контуров LDT (Loop Description Table) и содержит следующие параметры:

- номер тела в независимой ветви;
- номер зависимой ветви (и кинематического контура);

- относительный номер тела в зависимой ветви;
- для тела независимой ветви:
  - численные значения трех элементов вектора, направленного из начала системы координат его входного в начало системы координат его замещаемого шарнира;
  - численные значения трех углов ориентации системы координат замещаемого шарнира относительно системы координат входного;
- вид замещаемого вращательного шарнира (универсальный или сферический);
- для тела зависимой ветви:
  - численные значения трех элементов вектора, направленного из начала системы координат его входного в начало системы координат его замещаемого шарнира;
  - численные значения трех углов ориентации системы координат замещаемого шарнира относительно системы координат входного.

Эти две таблицы обеспечивают регулярное представление исходных данных, описывающих структуру связей тел, их геометрические и инерционные свойства, особенности относительного движения в шарнирах.

Каждый из применяемых рекуррентных алгоритмов выполняет расчет своих целевых матриц, характеризующих определенную ветвь механической системы, с помощью нескольких групп циклических вычислений. Внутри каждого цикла задаются последовательности векторно-матричных соотношений для двух смежных тел ветви. Значения параметров циклов – это индексы очередных тел, а также векторов и матриц, описывающих их движение.

В циклах рекуррентных алгоритмов вычисляются в том числе элементы целевых матриц, как, например, в соотношении (1.6). Эти матрицы не соотносятся с отдельными телами и являются внешними для алгоритмов. Такими же внешними являются исходные матрицы, которые определяют свойства всей ветви, например, матрицы-столбцы шарнирных переменных, их тригонометрических функций и производных по времени. Размерность внешних матриц, исходных и целевых, определяется числом степеней подвижности в шарнирах ветви.

Матрицы, описывающие параметры и движение отдельных тел, полностью вычисляются внутри циклов конкретного рекуррентного алгоритма и являются для него внутренними – исходными, вре́менными, вспомогательными и индексируемыми. Исходные постоянные матрицы описывают геометрические и инерционные свойства тел и содержат только численные элементы, а исходные переменные описывают относительные перемещения и скорости в шарнирах. Все векторно-матричные соотношения внутри каждого цикла могут быть представлены последовательностями элементарных матричных операций, содержащих не более двух операндов.

Формирование всех исходных и целевых матриц, выполнение в символьном виде всех элементарных матричных операций во всех применяемых рекуррентных алгоритмах реализуется отдельными функциями программно реализованного символьного матричного процессора. Эти функции имеют сквозную, абсолютную нумерацию.

Индексируемый способ доступа к описаниям внутренних матричных операндов, то есть возможность программирования рекуррентных соотношений при их символьной реализации, обеспечивается использованием следующих двух таблиц. Все внутренние матрицы конкретного рекуррентного алгоритма, являющиеся результатом выполнения элементарных матричных операций, получают локальные последовательно возрастающие номера. Их параметры заносятся в регулярную структуру данных – таблицу AMT (Algorithm Matrix Table). Каждая ее строка, номер которой равен локальному номеру матрицы, имеет вид

$$< c_{AMT},\ f_{AMT},\ n_{AMT}, \mathbf{S}_{AMT}, I_{AMT}^{\max}, J_{AMT}^{\max}, T_{AMT} >,$$

где c_{AMT} – номер цикла, в тело которого входит очередная элементарная матричная операция; f_{AMT} – номер программной функции, реализующей эту операцию; n_{AMT} – число символов, образующих идентификатор внутренней матрицы; $\mathbf{S}_{AMT}$ – массив символов для хранения этого идентификатора; $I_{AMT}^{\max}, J_{AMT}^{\max}$ – число строк и столбцов; T_{AMT} – тип внутренней матрицы (0 – исходная, 1 – вре́менная, 2 – вспомогательная, 3 – индексируемая).

Независимая ветвь механической системы может иметь древовидную структуру. Номер предшествующего тела в такой ветви не связан напрямую со значением параметра цикла – номером очередного тела. В матрице MPT хранятся описания не только внутренних, но и внешних матриц алгоритма. При расчете матрицы обобщенной инерции в алгоритме составного тела один цикл входит в тело другого и входящие в них элементарные матричные операции выполняются не при всех значениях параметров этих циклов. Все эти факторы затрудняют вычисление номеров матриц, записанных в MPT, по номерам строк таблицы AMT и по значению параметра цикла.

Регулярной структурой данных для хранения номеров описаний внутренних матриц-операндов в таблице MPT является матрица состояния символьных преобразований SAS (Symbolic Algorithm Status matrix). Индексы ее строк равны номерам внутренних матриц алгоритма, то есть индексам строк в таблице AMT. Индексы ее столбцов соответствуют номерам тел и шарниров в ветви механической системы. Значения ее элементов равны номерам описаний внутренних матриц в таблице MPT. Эта матрица также дает возможность не хранить в таблицах MPT и MET нулевые постоянные векторы и матрицы, описывающие геометрию и инерционные свойства фиктивных тел, которые используются при замене вращательных шарниров с несколькими степенями подвижности набором простейших шарниров. Для этого элементы SAS, соответствующие еще не сформированным матрицам, получают отрицательное значение, равное, например, -1, а элементы, соответствующие постоянным нулевым матрицам, становятся равными 0.

Векторно-матричные алгоритмы для ветви механической системы реализуются в символьном виде в следующей последовательности.

- В очередном прямом (или обратном) цикле с номером c_{AMT} по значению его параметра j (номера тела или шарнира) в таблице BDT определяется индекс j_c очередного и предшествующего j_p (или последующего j_s) тела ветви.
- С помощью другого, внутреннего, цикла с параметром i последовательно выбираются строки таблицы AMT. В очередной $i-$строке производится обращение к программной функции с номером $f_{AMT}(i)$. В каждой такой функции зафиксированы номера матриц-операндов в таблице AMT, например, $i_{O,1}$ и $i_{O,2}$. Так что ей необходимо передавать только их индексы, зависящие от текущего значения параметра цикла j, например, $j_{O,1}$ и $j_{O,2}$. Номера этих матриц-операндов в таблице MPT хранятся в элементах $(i_{O,1}, j_{O,1})$ и $(i_{O,2}, j_{O,2})$ матрицы SAS.
- Описание идентификатора очередной внутренней матрицы алгоритма записывается в таблицу IDT. Если матрица индексируемая, то к нему добавляется номер тела – значение параметра цикла.
- В таблицах MPT и MET формируется описание матрицы-результата (первоначально с нулевыми значениями параметров, кроме индекса L_{MET}). Номер этой матрицы присваивается элементу (i, j) матрицы SAS.
- Программная функция с заданным номером $f_{AMT}(i)$ с помощью операторов цикла и функций скалярного символьного процессора выполняет элементарную матричную операцию, определяющую значения всех элементов матрицы-результата по элементам матриц-операндов.
- Программные функции, формирующие исходные матрицы, используют только индекс j.

Таким образом, рекуррентные векторно-матричные алгоритмы при их символьной реализации программируются на регулярной основе, с использованием операторов цикла, номеров функций и индексов их операндов. Такой способ их записи является инвариантным относительно идентификаторов матриц, которые используются только при формировании в символьном виде исходного кода вычислительной процедуры.

Заполнение матрицы SAS при реализации различных рекуррентных алгоритмов иллюстрирует рис. 2, в котором использованы следующие обозначения: $c-$номер цикла, $m-$число внутренних вычисляемых матриц в рекуррентном алгоритме; $n-$число тел в ветви. Серым тоном выделены элементы матрицы, в которых записываются номера матриц в MPT.

Рекуррентный алгоритм присоединенного тела [22-24] состоит из трех последовательно выполняемых циклов. В первом из них (прямом) вычисляется кинематика тел цепи, во втором (обратном) инерционные характеристики, активные силы и моменты последующих тел приводятся к инерционным характеристикам, активным силам и моментам предшествующих, в третьем (прямом) вычисляются относительные ускорения в шарнирах.

В алгоритме составного тела [20, 21] для расчета вектора обобщенных сил также используются три последовательно выполняемых цикла. Первые два (прямые) выполняют расчет кинематики тел и действующих на них суммарных векторов инерционных и активных сил и моментов. В третьем (обратном) осуществляется приведение этих векторов ко всем предшествующим шарнирам. В обоих этих случаях циклы выполняются один за другим, их параметры последовательно увеличиваются или уменьшаются в диапазоне между 1 и максимальным номером n_B тела в ветви механической системы. Соответственно все элементы соответствующих матриц SAS получают свои значения (рис. 2.а и 2.б). При расчете матриц и векторов в уравнениях контурных связей рекуррентные кинематические соотношения выполняются в теле только одного, прямого цикла.

При вычислении матрицы обобщенной инерции в алгоритме составного тела первый, прямой, цикл расчета элементов ее столбцов, содержит два внутренних цикла – второй прямой и третий обратный. При символьной реализации этого алгоритма матрица SAS используется заново для каждого столбца. Степень ее заполнения зависит от значения параметра первого внешнего цикла. Рис. 2.в соответствует значению этого параметра, равному 1, а рис. 2.г – значению, равному j.

При символьной реализации рекуррентного векторно-матричного алгоритма параметры строки в таблице AMT используются для формирования описаний конкретных матриц в таблицах IDT и MPT. При этом в конец идентификатора индексируемой матрицы, хранящегося в массиве символов $\mathbf{S}_{AMT}$, добавляется символьное значение индекса – номера тела. Описание этого нового идентификатора, определяемого для каждой очередной индексируемой матрицы, записывается в первую свободную строку таблицы IDT.

Вспомогательные матрицы с одним и тем же идентификатором могут являться результатом различных элементарных матричных операций при текущем значении параметра цикла. Им будут соответствовать различные матрицы, записанные в таблицы MPT и MET.

Индексируемые матрицы с одними и теми же идентификаторами могут быть результатом элементарных матричных операций только в разных циклах. Им также будут соответствовать различные описания в указанных таблицах.

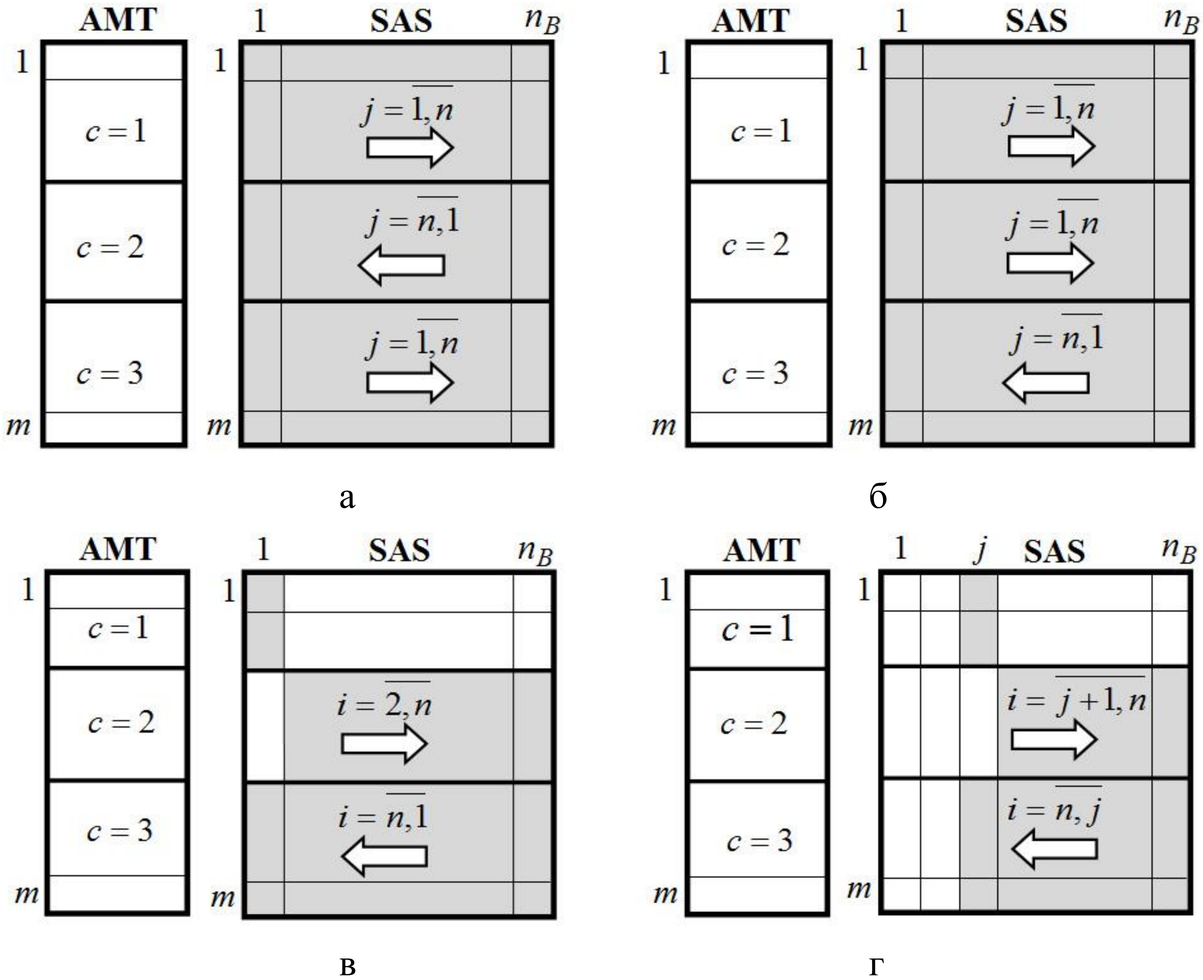

Рис. 2. а) Структура заполнения матрицы SAS при реализации алгоритма присоединенного тела; б) при формировании последовательности вычислений для вектора обобщенных сил в алгоритме составного тела; в) для первого столбца матрицы обобщенной инерции; г) для j – го столбца этой матрицы в алгоритме составного тела

На рис. 3 показан пример формирования описания матриц при символьной реализации первых двух циклов рекуррентного алгоритма. В нем таблица AMT содержит описания: в строке 3 – вре́менной матрицы, в строке 25 – вспомогательной, в строке 33 – индексируемой. Строка 18 таблицы IDT описывает параметры идентификатора вспомогательной матрицы, а строка 42 – параметры идентификатора индексируемой матрицы для тела 1. Параметры матриц-операндов записаны в таблице MPT, в строках 9 и 59 – вре́менных, в строках 25 и 75 – вспомогательных, в строке 33 – параметры индексируемой матрицы для тела 1. Их номера в MPT присвоены значениям элементов матрицы SAS.

Идентификаторы вспомогательных и индексируемых матриц, хранящиеся в строках таблицы AMT и внешних матриц, описанные в таблице MMT, выбираются такими же, как и в соответствующем численном алгоритме или максимально близкими к ним. Это облегчает последующую верификацию сформированного исходного кода.

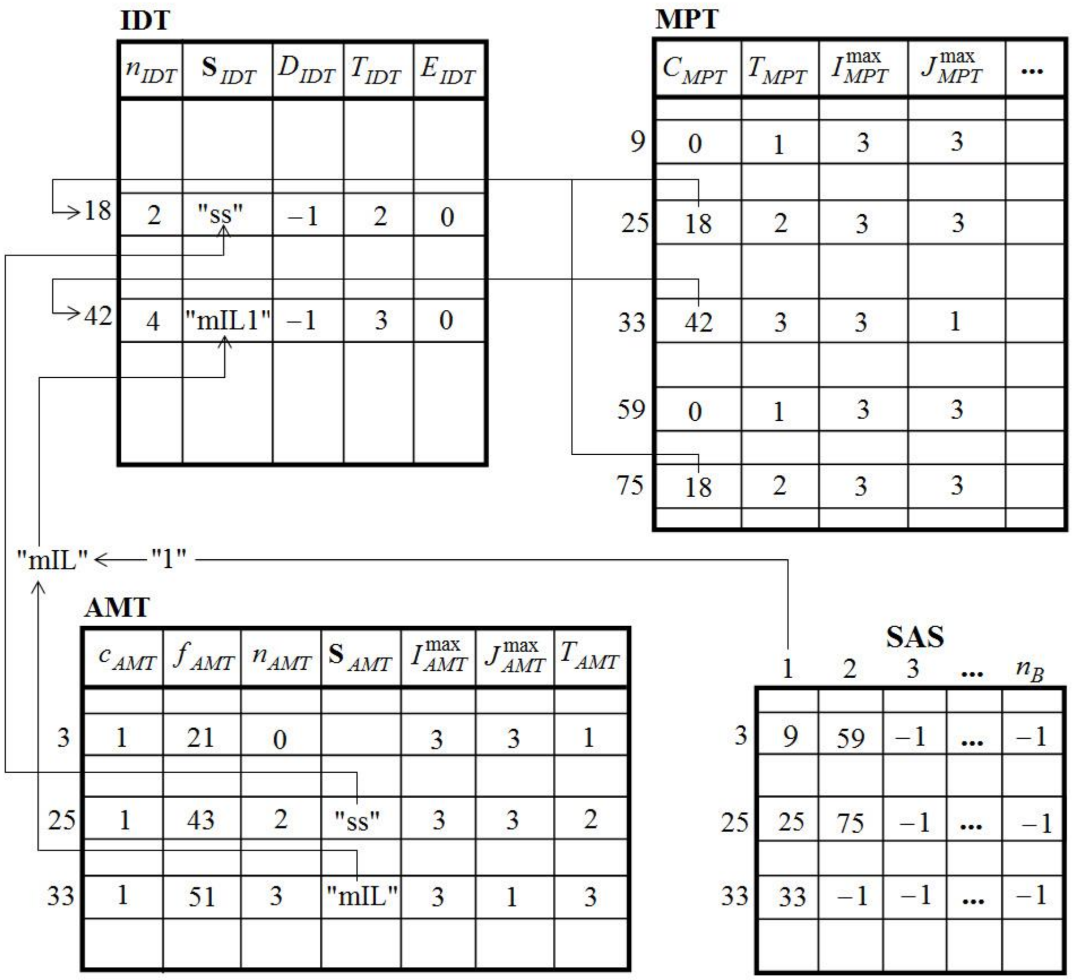

Рис. 3. Пример формирования описаний исходных, вспомогательных и индексируемых матриц при символьной реализации рекуррентного алгоритма

Идентификаторы вспомогательных и индексируемых матриц, хранящиеся в строках таблицы АМТ и внешних матриц, описанные в таблице ММТ, выбираются такими же, как и в соответствующем численном алгоритме, или максимально близкими к ним. Это облегчает последующую верификацию сформированного исходного кода.

Перед выполнением символьных преобразований возможно перераспределение состава вре́менных и вспомогательных матриц в зависимости от требований к процедуре, формируемой в символьном виде. Уменьшение числа вре́менных матриц увеличивает длину получаемых скалярных выражений и скорость вычислений компьютерным процессором за счет лучшего использования его стека и уменьшения числа обращений к оперативной памяти. Однако при этом уменьшаются возможности верификации исходного кода.

Для удобства верификации формируемых в символьном виде процедур желательно, чтобы в каждой из них был реализован какой-то один из алгоритмов, перечисленных в разделе 1. Тогда расчет динамики выполняется в несколько этапов, с помощью отдельных процедур. В ветвях преобразованной многоконтурной механической системы тела и шарнирные переменные имеют локальную нумерацию. Поэтому для каждой ветви формируется несколько процедур, в которых упомянутые алгоритмы используют свои таблицы IDT, MPT, MET, SET, AMT и свои матрицы SAS. Эти таблицы записываются в отдельные файлы, доступные для последующих этапов.

В каждой формируемой процедуре используются свои исходные и вычисляются свои целевые матрицы, которые для возможности передачи их значений должны находиться в общей области памяти, то есть быть внешними. В начале каждого этапа на основе описания в таблицах BDT и LDT свойств механической системы в таблицах IDT, MPT, MET с помощью программных функций формируются описания внешних исходных и целевых матриц. Если внешней исходной является ранее полученная целевая матрица, то ее описание считывается из таблиц IDT, MPT и MET предшествующего этапа в такие же таблицы очередного.

Сохранение номеров внешних матриц в таблицах MPT каждого этапа обеспечивает таблица MMT (Model Matrix Table) матриц системы. Каждая ее строка содержит номер ветви, символьные идентификаторы и номера в таблице MPT всех возможных внешних матриц, как исходных, полученных с предшествующего этапа, так и целевых, предназначенных для последующих этапов. Такие внешние матрицы описывают векторы шарнирных переменных и их производных по времени, векторы вычисленных значений тригонометрических функций синус и косинус шарнирных переменных, матрицы обобщенной инерции и векторы обобщенных сил, матрицы и векторы для решений уравнений контурных связей, редуцированные матрицы обобщенной инерции и редуцированные векторы обобщенных сил. Номера функций, формирующих внешние матрицы, также записываются в строки таблицы MMT. Если значения этих номеров в очередной строке равны нулю, то для указанной в ней ветви соответствующие матрицы не формируются. Набор применяемых функций зависит от описания структуры механической системы в таблицах BDT и LDT. Для конкретной механической системы таблица MMT может быть избыточной, но это не влияет на вычислительную эффективность формируемых в символьном виде процедур.

Целевыми при расчете кинематики отдельной ветви механической системы являются матрицы столбцы значений функций sin и cos для элементов внешней матрицы-столбца шарнирных переменных. Если ветвь независимая, то вектор шарнирных переменных имеет идентификатор “Q”, а целевые матрицы значений тригонометрических функций – соответственно идентификаторы “sq” и “cq”.

Для того чтобы вычисление функций было внесено в текст формируемой в символьном виде процедуры, закодированные представления соответствующих выражений для углов поворота во вращательных шарнирах записываются в строки таблицы SET. В каждой такой строке значение $O_E = "c"$ или $O_E = "s"$ указывает на вычисление функции синус или косинус, код $C_{1,E}$ равен номеру строки в таблице IDT описания скалярной переменной, обозначающей угол поворота – элемент вектора “Q”, поэтому индекс $I_{1,E} = 0$. Второй операнд отсутствует ($C_{2,E} = 0$, $I_{2,E} = 0$). Код C_{RM} равен номеру строки в таблице IDT, описывающей параметры идентификатора “sq” или “cq” целевой матрицы, а индекс I_{RM} в этой строке определяет ее элемент, который заместит временную переменную на этапе окончательной оптимизации вычислений. Индекс этой строки таблицы SET и код C_{TSV} вре́менной переменной заносятся в описание элемента I_{RM} целевой матрицы в таблице MET. Если очередной шарнир поступательный, то в формируемой целевой матрице описание этого элемента имеет нулевое значение.

Отдельные элементы других целевых матриц (с параметром $T_{MPT} = 4$), например, матриц инерции, могут быть численными константами (иметь нулевые значения кодов идентификаторов). Для передачи значений таких элементов в процедуры последующей обработки они должны быть занесены в общую область памяти. Для этого описание каждого такого численного элемента должно быть занесено в таблицу SET с параметрами $N_E = N_{MET}$, $C_{1,E} = 0$, $I_{1,E} = 0$, $O_E =' '$, $C_{2,E} = 0$, $I_{2,E} = 0$, $U_{SET} = 1$, $C_{RM} = C_{MPT}$, $I_{RM} = L_{MET}$, где N_{MET} – численное значение, L_{MET} – индекс такого элемента в целевой матрице, имеющей код идентификатора C_{MPT}.

5. Окончательная оптимизация вычислений

Применяемые векторно-матричные алгоритмы расчета динамики механической системы не содержат избыточных векторно-матричных операций. Оптимизирующие формулы исключают избыточные скалярные вычисления при наличии двух одинаковых матричных операндов. При символьной реализации алгоритмов и оптимизирующих формул в скалярных операциях учитывается наличие двух численных аргументов, сложение с 0 и умножение на 0 или 1, исключаются повторяющихся скалярные выражения. На этапе окончательной оптимизации вычислений производится:

- исключение неиспользуемых вре́менных переменных и обозначаемых ими скалярных выражений;
- замена используемых вре́менных переменных элементами вспомогательных, индексируемых или целевых матриц в описаниях операндов всех последующих скалярных выражений для сокращения общего числа переменных и облегчения верификации исходного кода;
- преобразование индексируемых элементов матриц в скалярные переменные;
- замена однократно используемых вре́менных переменных скалярными выражениями, которые они обозначают.

Для выявления вычислений в строках таблицы SET, определяющих в конечном итоге элементы всех целевых матриц, устанавливается значение признака $U_{SET} = 1$, которое означает, что описанные в этих строках выражения войдут в исходный код формируемой процедуры.

При определении кратности использования вре́менных переменных и обозначаемых ими выражений таблица SET просматривается в обратной последовательности, начиная с последней строки. Если в очередной строке признак $U_{SET} = 0$, то она пропускается. В противном случае анализируются описания каждого из операндов. Если код $C_{1,E}$ или $C_{2,E}$ идентификатора операнда равен коду C_{TSV} вре́менной переменной, то в строке таблицы SET с номером $I_{1,E}$ или $I_{2,E}$ значение признака использования увеличивается на 1, то есть $U_{SET} = U_{SET} + 1$. После завершения просмотра всей таблицы в каждой ее строке значение признака U_{SET} равно кратности использования вре́менной переменной и обозначаемого ей скалярного выражения. Строки, в которых $U_{SET} = 0$, исключаются из дальнейшего рассмотрения.

При замене вре́менных переменных элементами вспомогательных, индексируемых и целевых матриц таблица SET просматривается в прямой последовательности, начиная с первой строки. Если в очередной ее строке с номером I_{SET} имеются значения $C_{RM} > 0$ и $I_{RM} > 0$, то во всех последующих строках описание каждого операнда с кодом идентификатора, равным по абсолютной величине коду C_{TSV}, и индексом, равным I_{SET}, заменяется на код C_{RM} (с учетом знака) и индекс I_{RM}. Если очередная строка таблицы SET с номером I_{SET} соответствует многократно используемой вре́менной переменной, то есть $U_{SET} > 1$, а $C_{RM} = 0$, $I_{RM} = 0$, то осуществляется замена $C_{RM} = C_{TSV}$, $I_{RM} = I_{SET}$. При этом описания операндов в последующих скалярных выражений не изменяются. Таким образом, многократно используемая вре́менная переменная войдет в исходный код формируемой процедуры.

Отказ от использования индексируемых переменных ускоряет выполнение операций компьютерным процессором за счет лучшего использования его стека и уменьшения числа обращений к оперативной памяти. После описанной выше замены вре́менных переменных исключаются индексы в идентификаторах, обозначающих элементы вспомогательных, индексируемых, целевых матриц и многократно используемые вре́менные переменные. Для этого таблица SET просматривается в прямой последовательности. Если в ее текущей строке с номером I_{SET} параметры $C_{RM} > 0$ и $I_{RM} > 0$, то формируется описание нового идентификатора соответствующего элемента матрицы или массива как скалярной переменной. Символьная последовательность этого идентификатора получается из последовательности символов, содержащихся в массиве $\mathbf{S}_{IDT}$ в строке с номером C_{RM} таблицы IDT, добавлением в ее конец символов, описывающих индекс элемента матрицы или временной переменной.

В таблице MPT может быть несколько строк с одинаковым кодом идентификатора, равным коду C_{RM}. Все они будут иметь одинаковые значения параметров $I_{MPT}^{\max}$ и $J_{MPT}^{\max}$. Если такие строки описывают внутренний $(3\times1)-$вектор ($I_{MPT}^{\max}=3,\ J_{MPT}^{\max}=1\quad E_{IDT}(C_{RM})=0$), то в конец символьной последовательности его идентификатора вместо значений 1, 2 или 3 индекса I_{RM} добавляются соответственно символы “x”, “y” или “z”. Это облегчает распознавание элементов векторов в формируемом исходном коде. Для матриц и целевых векторов символы индекса получаются преобразованием в этот формат целого числа I_{RM}.

Для идентификатора элемента устанавливается признак $D_{IDT}=0$ скалярной величины, а параметры T_{IDT} и E_{IDT} принимаются такими же, как и в строке с номером C_{RM} для матрицы. Сформированное таким образом описание идентификатора элемента заносится в таблицу IDT, в ее строку с номером I_{IDT}, который присваивается коду идентификатора элемента $C_S=I_{IDT}$ в текущей строке с номером I_{SET} таблицы SET.

После этого во всех последующих строках таблицы SET код и индекс любого операнда, равные соответственно C_{RM} и I_{RM}, заменяются на код C_S и индекс, равный нулю. При этом знаки кодов идентификаторов первых операндов сохраняются.

После исключения индексов в идентификаторах элементов многократно используемых и целевых матриц необходимо заменить однократно используемые вре́менные переменные во всех последующих за ними выражениях последовательностями вычислений, которые они обозначают. В свою очередь, последующие выражения могут обозначаться временными переменными, которые также используются однократно. В связи с тем, что число замен таких переменных заранее не определено, последовательности символов, описывающие операнды и математические операции в правых частях скалярных математических выражений, могут иметь различную длину. Для накопления в компактном виде символьных строк переменной длины используется одномерный массив символов $\mathbf{S}_{ESS}$ (Expression Symbolic Sequence). Номера первого и последнего символов в этом массиве для каждой используемой строки таблицы SET присваиваются параметрам $n_{ESS,B}$ и $n_{ESS,E}$. Символьные коды правых частей всех используемых скалярных выражений формируются при просмотре строк таблицы SET в прямой последовательности – от первой строки к последней. При этом для текущей строки реализуется следующая последовательность действий.

- Если $C_{1,E}=0$, то первый операнд есть вещественное число со знаком. В этом случае оно преобразуется в последовательность символов, которая записывается в массив $\mathbf{S}_{ESS}$.
- Если $C_{1,E}<0$, то в этом случае в массив $\mathbf{S}_{ESS}$ записывается символ «-».

- Если параметр $I_{1,E}=0$, то первый операнд является скалярной величиной. В этом случае последовательность символов из массива $\mathbf{S}_{IDT}$ строки с номером $|C_{1,E}|$ таблицы IDT переписывается в массив символов $\mathbf{S}_{ESS}$.
- Если код $|C_{1,E}|$ определяет номер строки таблицы IDT, в которой параметр $P_{IDT}=1$, а в строке с номером $I_{1,E}$ таблицы SET параметр $C_S=0$, то первый операнд является однократно используемой вре́менной скалярной переменной. В этом случае последовательность символов, сгенерированная в массиве $\mathbf{S}_{ESS}$ для строки с номером $I_{1,E}$ таблицы SET, переписывается этот же массив, но на место, соответствующее текущей строке SET. При этом если $C_{1,E}<0$, а также в случае если операция O_E равна «*» или «/», то эта переписываемая последовательность символов заключается в скобки.
- В массив $\mathbf{S}_{ESS}$ записывается символ операции, равный значению параметра O_E текущей строки таблицы SET.
- В массив $\mathbf{S}_{ESS}$ переписывается описание 2-го операнда, аналогично первому, но без учета знака кода его идентификатора.
- После этого в массив $\mathbf{S}_{ESS}$ записывается символ «;».
- Номера первого и последнего символов, записанных в массив $\mathbf{S}_{ESS}$ для текущей строки таблицы SET, присваиваются ее параметрам $n_{ESS,B}$ и $n_{ESS,E}$.

В результате во всех строках таблицы SET, в которых $C_S>0$, идентификаторы с этим кодом обозначают скалярные выражения, описанные последовательностями символов, которые содержатся в элементах массива $\mathbf{S}_{ESS}$ с номерами от $n_{ESS,B}$ и $n_{ESS,E}$.

Процесс замены однократно используемых вре́менных переменных скалярными выражениями, которые они обозначают, упрощенно иллюстрируется схемой (рис. 4), в которой для компактности вместо их закодированного представления используются математические индексируемые величины. Также для упрощения не показано замещение вре́менных переменных элементами вспомогательных, индексируемых или целевых матриц. Цифрой 1 обозначены группы скалярных выражений, в которых и операнды, и результат являются индексируемыми вре́менными переменными. Для каждого выражения указано значение параметра U_{SET} – кратности его использования в последующих вычислениях.

Сначала для многократно используемых переменных ($U_{SET}>1$) формируются символьные идентификаторы. Их коды $C_S>0$ указывают на номера строк их описаний в таблице IDT. На схеме символьные последовательности этих идентификаторов обозначены цифрой 2 и заключены в красные прямоугольники. После этого при последовательном просмотре скалярных выражений для их правых частей формируются обозначенные цифрой 3 последовательности символов, соответствующие их операндам и алгебраическим операциям.

Символьные последовательности, сформированные для однократно используемых вре́менных переменных s_{112} и s_{113}, s_{115} и s_{116}, s_{201} и s_{202}, s_{203} и

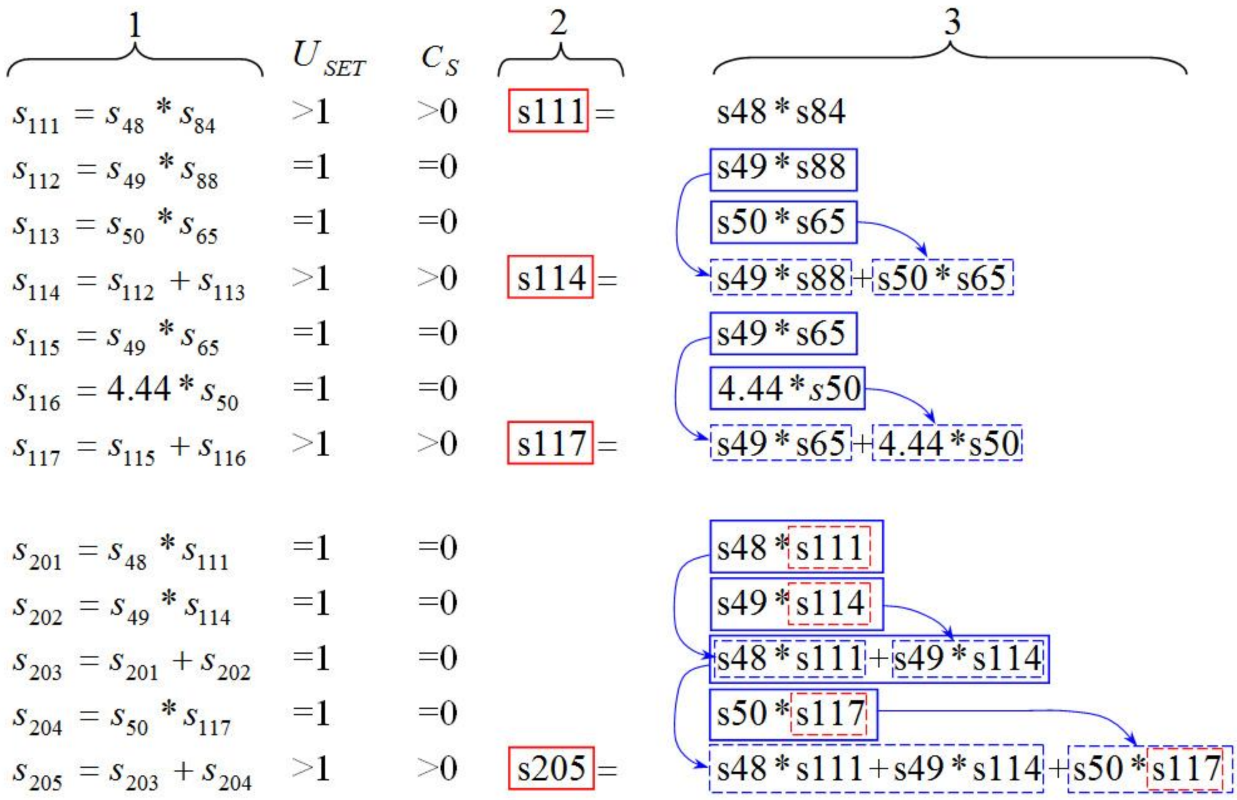

Рис. 4. Замена однократно используемых временных переменных скалярными выражениями, которые они обозначают

s_{204}, отмечены синими прямоугольниками. Они заменяют эти переменные в последующих скалярных выражениях, определяющих многократно используемые идентификаторы s_{114}, s_{117}, s_{203} и s_{205}. Последовательность, полученная объединением символов для s_{201} и s_{202} для однократно используемой переменной s_{203}, вновь подставляется в строку для s_{205}. Все произведенные подстановки отмечены стрелками. В результате многократно используемые идентификаторы могут обозначать символьные строки различной длины.

Необходимо отметить, что процедура замещения однократно используемых вре́менных переменных математическими выражениями, которые они обозначают, проще и имеет однозначное решение, в отличие от выделения повторяющихся вычислений в длинных алгебраических полиномах с использованием для их кодирования структурных таблиц [15-19].

Для формирования символьного исходного кода, описывающего последовательность вычислений, производится прямой просмотр таблицы SET от первой строки к последней. Для каждой из них, в которой $C_S > 0$, $n_{ESS,B} > 0$ и

$n_{ESS,E} > 0$, исходный код начинается в новой строке с последовательности символов $n_{ESS,E} > 0$, исходный код начинается в новой строке с последовательности символов из массива $\mathbf{S}_{IDT}$ идентификатора с номером C_S в таблице IDT. В конец этой последовательности добавляется знак “=”, а после него – символы с номерами от $n_{ESS,B}$ до $n_{ESS,E}$ из массива $\mathbf{S}_{ESS}$. В варианте, предназначенном для верификации формируемого исходного кода, после этого добавляется еще одна строка. В нее в символьном виде вставляется оператор печати в текстовый файл значения переменной, имеющей идентификатор с номером C_S.

При формировании описания переменных формируемой процедуры таблица IDT просматривается в прямой последовательности. Рассматриваются только строки, в которых $D_{IDT} = 0$, то есть определяющие скалярные величины. Если при этом $E_{IDT} = 0$, то соответствующий идентификатор входит в блок внутренних переменных, являющийся частью исходного кода процедуры, а если $E_{IDT} = 1$, – то в блок описания общих данных, формируемый как отдельный текстовый файл.

Матрицы, являющиеся целевыми на текущем этапе, имеют идентификаторы с параметрами $D_{IDT} = -1$ и $E_{IDT} = 1$. После завершения символьных преобразований очередного этапа идентификаторы их скалярных символьных элементов получают значения параметров $D_{IDT} = 0$ и $E_{IDT} = 1$. Эти же целевые матрицы на последующих этапах могут стать исходными. Тогда их ненулевые символьные элементы заносятся в таблицы IDT последующих этапов с параметрами $D_{IDT} = -1$ и $E_{IDT} = 1$, чтобы не вносить их повторно в общую область памяти. При первом использовании внешних исходных векторов шарнирных переменных и их производных по времени для отдельной ветви механической системы идентификаторам их элементов при записи в таблицу IDT присваиваются значения $D_{IDT} = 0$ и $E_{IDT} = 1$.

Каждая модель механической системы, для расчета динамики которой формируются процедуры, получает свой идентификатор. Каждый отдельный этап такого расчета также может иметь свой номер. Все описанные выше таблицы, матрицы, массив символов для каждого этапа обработки создаются и сохраняются в виде файлов. Формируемые в символьном виде исходные коды формируемых процедур также записываются в виде текстовых файлов. Название каждого файла составляется из идентификатора модели механической системы добавлением в его конец номера этапа обработки. Расширением файла является аббревиатура (из трех букв) названия размещаемой в нем таблицы, матрицы или массива. В результате все таблицы, матрицы и массивы очередного этапа доступны для всех последующих. Их содержимое также может просматриваться автономно с помощью сервисных программ. Каждая вычислительная процедура получает название такое же, как и у файлов, на основе которых она формируется в символьном виде.

В алгоритме составного тела допускаются шарниры только с одной степенью подвижности, и соответствующие векторно-матричные выражения не имеют альтернативных форм записи. Поэтому для данного алгоритма предлагаемая технология обеспечивает формирование процедур, использующих минимальное число математических операций. В алгоритме присоединенного тела существует возможность реализации альтернативных вычислений. В частности, его векторно-матричные выражения позволяют описывать движение в шарнирах с несколькими степенями свободы. Сравнение эффективности альтернативных вариантов математических выражений не используется по следующим причинам:

- упрощается векторно-матричная запись алгоритма;
- упрощается структура и алгоритмы системы символьных преобразований, а также способ верификации формируемого исходного кода;
- увеличение объема вычислений из-за безальтернативной их реализации не превышает нескольких операций сложения или умножения в расчете на одно тело механической системы, что несущественно при использовании современных компьютеров.

Преобразование механической системы с кинематическими контурами осуществляется посредством замещения универсальных или сферических шарниров уравнениями контурных связей. Соответственно, для получения решения уравнений контурных связей относительно скоростей и ускорений необходимо обращать матрицы размерности (3×3) или (4×4). Эта операция выполняется в символьном виде с помощью вычисления алгебраических дополнений и определителей. В результате исключается необходимость обращения к процедурам численного решения, то есть упрощается программная реализация и не тратится время компьютера на организацию обращения к другой функции.

Верификация сформированного в символьном виде исходного кода каждой процедуры может быть выполнена путем сравнения результатов вычислений, выполненных ею и соответствующим численным алгоритмом. При этом в обоих вариантах используется описание структуры, численных значений конструктивных параметров тел и шарниров механической системы, содержащееся в таблицах BDT и LDT, а также одинаковые наборы численных значений шарнирных переменных и их производных по времени. Программа, реализующая численный алгоритм, при выполнении в режиме тестирования обеспечивает выдачу в свой текстовый файл значений элементов всех матриц. Вычислительная процедура, сформированная в символьном виде для выполнения верификации, содержит операторы выдачи в текстовый файл численных значений переменных, обозначающих скалярные выражения. Численные элементы внутренних символьных матриц не являются переменными, и их значения при тестировании не будут выведены в текстовый файл. Кроме этого, вследствие выполнения операций сложения с 0 или умножения на 1 отдельные элементы внутренних матриц могут быть равными элементам других матриц, то есть они не будут обозначать свои собственные скалярные выражения и их значения также не будут выведены в текстовый файл. В обоих этих случаях значения таких элементов могут быть определены с помощью описаний матриц в таблицах MPT и MET.

Формирование в символьном виде процедур расчета динамики механической системы начинается с занесения описания ее структуры, параметров тел и видов шарниров, условий замыкания кинематических контуров из файла исходных данных в таблицы BDT и LDT. При наличии в системе кинематических контуров формируется несколько расчетных процедур – для каждой отдельной ветви и для каждого применяемого алгоритма в соответствии с последовательностью, изложенной в разделе 1. Все они «вручную» встраиваются в программные комплексы, моделирующие конкретные динамические процессы, в частности стыковки космических аппаратов. В настоящее время автоматизация сборки таких программ отсутствует, прежде всего по причине уникальности каждой задачи, разнообразия моделей контактного взаимодействия, устройств демпфирования, приводов и цепей передачи движения с учетом их деформаций, алгоритмов функционирования блоков управления.

Вычислительные процедуры, сформированные в символьном виде по описанной выше технологии в соответствии с рекуррентными алгоритмами, описанными в [26], обеспечивают расчет динамики 6-степенной платформы стыковочного механизма [28], выполняя 4686 умножений, 3155 сложений, 13 делений и вычисляя 42 тригонометрические функции (без учета аналитического решения уравнений контурных связей для координат). При этом приблизительно 75% от общего числа этих операций приходится на расчет коэффициентов и решение уравнений контурных связей, редукцию уравнений динамики. Это обусловлено тем, что применяемые в этом случае соотношения определены в общей базовой системе координат механизма и поэтому входящие в них векторы и матрицы имеют меньшее число ненулевых элементов.

Число математических операций, необходимых для расчета модели [28], примерно в 1.5 раза больше, чем в сформированной также в символьном виде модели 6-ногого шагающего робота [29], у которого отсутствуют кинематические контуры. Так как число параллельных кинематических цепей в обоих случаях одинаково, то это косвенно может указывать на то, что вычислительная эффективность процедур расчета динамики механической системы без контуров, сформированных в символьном виде с помощью новой многотабличной модели данных, выше примерно в 2,5 раза.

При использовании аналогичных численных алгоритмов расчета динамики механизма [28] необходимо было бы выполнить 19190 умножений и 15904 сложения. То есть формирование модели в символьном виде обеспечивает относительно небольшой, примерно в 4,5 раза, выигрыш в числе выполняемых математических операций, что объясняется наличием шести кинематических контуров и соответственно уравнений связей. Но важным дополнительным достоинством предлагаемого подхода является использование в сформированных в символьном виде процедурах только скалярных, то есть неиндексируемых переменных. Вычислительные эксперименты, проведенные ранее с отдельными моделями процессов стыковки, показали, что при неизменном на уровне алгоритмов числе математических операций скорость вычислений при отказе от индексов увеличивается примерно в 5-10 раз в зависимости от структуры уравнений и типа компьютера. Поэтому численные векторно-матричные алгоритмы расчета динамики систем твердых тел применяются только для верификации сформированных в символьном виде вычислительных процедур.

Заключение

На основе использования эффективных рекуррентных алгоритмов расчета динамики систем твердых тел и учета их вычислительных свойств разработана новая многотабличная модель данных для кодирования математических выражений и выполнения символьных преобразований. В отличие от существующих методов компьютерного представления математических формул, она сформирована в виде набора таблиц, связанных между собой посредством ссылок. Такая многотабличная модель данных позволяет реализовать простые алгоритмы символьных преобразований и использовать состав переменных, не зависящий от структуры математических выражений. Эти переменные заменяют повторяющиеся вычисления в последующих соотношениях и обеспечивают возможность программирования рекуррентных алгоритмов. Скалярные операции сложения, вычитания, умножения и получения обратной величины для закодированных описаний символьных выражений выполняются по формулам, имеющим одинаковую невысокую сложность. При этом реализуются все возможные способы упрощения математических выражений: в них отсутствуют общие множители, учитываются операнды, равные 0 или 1, при наличии условий применяется основное тригонометрическое тождество, операции с постоянным результатом заменяются вычисленными константами, а повторяющиеся скалярные выражения – промежуточными переменными. На этапе окончательной оптимизации исключаются неиспользуемые вычисления, сокращается состав идентификаторов, индексируемые величины заменяются скалярными. Программы, разработанные на основе предлагаемой многотабличной модели данных, позволяют сформировать в символьном виде процедуры расчета динамики механических систем твердых тел, обладающие высокой вычислительной эффективностью.

Библиографический список

1. Грошева М.В., Климов Д.М. Опыт использования аналитических преобразований на ЭВМ в задачах механики. - М., 1987. - 40 с. (Препринт ИПМ АН СССР, №296).

2. Грошева М.В., Ефимов Г.Б. О системах аналитических вычислений на ЭВМ // Пакеты прикладных программ: Аналитические преобразования. - М.: Наука, 1988. - С.5-38.
3. Методы компьютерного конструирования моделей классической и небесной механики. Теория и практика компьютерного конструирования моделей механики многозвенных технических систем: Материалы Всесоюзного совещания. - Ленинград, 1989 г. - 83с. (Препринт ЛФ ИМАШ им. А.А. Благонравова АН СССР, №32).
4. Климов Д.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики / Д.М. Климов, В.М. Руденко; Отв. ред. А.Ю. Ишлинский; АН СССР, Институт проблем механики. - М.: Наука, 1989. – 213 С. ISBN 5-02-007169-2.
5. Грошева М.В., Ефимов Г.Б., Самсонов В.А. История использования аналитических вычислений в задачах механики. – Москва: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2005 г. – 87 с.
6. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems
7. Martin W.A. Fateman R.J. The MACSYMA system //Proc. of the 2nd Symp. on Symbolic and Algebraic Manipulation. - Los Angeles, 1971. - P. 59-75.
8. Hearn A.C. REDUCE User's Manual: Version 3.2. - Santa Monica: Ren Corporation, 1985. - 188 p.
9. Берман В.С., Климов Д.М. Система mu-MATH-muSIMP для символьных вычислений на персональном компьютере. М., 1987. - 32 с. (Препринт ИПМ АН СССР, №298).
10. https://www.syssoft.ru/Maplesoft/Maple/
11. Ахо А.В., Ульман Д.Д., Хопкрофт Д.Э. «Структуры данных и алгоритмы».: Пер. с англ. – СПб.: ООО «Диалектика», 2019. – 400 с.
12. Проворов Л.В., Штаркман В.С. АЛЬКОР - система аналитических вычислений: Часть 2. - М., 1982. - 38с. (Препринт ИПМ АН СССР, № 166).
13. Городецкий О.М. Специализированная система MMANG для проведения аналитических выкладок в механике сложных систем твердых тел // Пакеты прикладных программ: Аналитические преобразования. - М.: Наука, 1988. - С.115-128.
14. Пакет символьных вычислений "МЕХАНИК": Задачи и структура / А.В. Банщиков, Л.А. Бурлакова, Г.И. Иванова, С.А. Симонов // Пакеты прикладных программ. Итоги и применения. - Новосибирск: Наука, 1986. - С. 96-105.
15. Почтаренко М.В. Комплекс программ по анализу стационарных движений механических систем // Пакеты прикладных программ: Методы и разработки. - Новосибирск: Наука, 1981. - С. 82-92.
16. Kircanski N., Vukobratovic M., Kircanski M. General-purpose software system for computer-aided generation of real-time robot dynamics //The Theory of machines and mechanisms: Proc. of the 7th World Congress. - Sevilla, 1987. - V.2. - P.1249-1252.

17. Вукобратович М. Общая структура новой системы разработки программного обеспечения // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. - 1987. - №3. - С.135-146.
18. Вукобратович М., Стокич Д., Кирчански Н. Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 376 с.
19. Погорелов Д.Ю. О кодировании символьных выражений при синтезе уравнений движения систем твердых тел // Известия РАН. Техническая кибернетика, 1993, № 6. – С. 209-213.
20. Степаненко Ю.А. Алгоритм анализа динамики пространственных механизмов с разомкнутой кинематической цепью. – «Механика машин», М.: Наука, 1974, вып. 44, стр. 77-88.
21. Walker M.W., Orin D.E. Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms. // Trans. ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1982. – Vol. 104. – P. 205—211.
22. Верещагин А.Ф. Метод моделирования на ЦВМ динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. 1974. – № 6. – С. 89-94.
23. Armstrong W.W. Recursive solution to the equation of motion of an n-link manipulator. // Proc. of 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, (Montreal, July, 1979). – 1979. – P. 1343-1346.
24. Featherstone R. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias. // Int. Journal of Robotic Research. – 1983. Vol. 2, no. 1. – P. 13-30.
25. Wehage R.A., Haug J.E. Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of dynamical systems // Journal of Mechanical Design – 1982. № 104. – P. 247-255.
26. Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В. Уравнения динамики периферийных стыковочных механизмов как параллельных манипуляторов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 59. 32 с. doi:10.20948/prepr-2019-59 URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-59
27. Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В. Компьютерное моделирование динамики стыковочных механизмов центрального типа для космических аппаратов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 89. 40 с. doi:10.20948/prepr-2019-89. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-89
28. Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В. Компьютерное моделирование динамики упруго-адаптивного стыковочного механизма космических аппаратов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 76. 35 с. doi:10.20948/prepr-2019-76.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-76
29. Голубев Ю.Ф., Погорелов Д.Ю. Компьютерное моделирование шагающих роботов // Фундаментальная и прикладная математика, 1998, том.4, вып. 2, с. 525-534.