

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

П.А. Бахвалов

Численное вычисление
решений задач о распаде
гауссового импульса и
дифракции на углу $2\pi/n$

Статья доступна по лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International



Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П.А. Численное вычисление решений задач о распаде гауссового импульса и дифракции на углу $2\pi/n$ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 3. 36 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-3>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-3>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

П. А. Бахвалов

**Численное вычисление решений задач
о распаде гауссового импульса
и дифракции на углу $2\pi/n$**

Москва — 2020

Бахвалов П. А.

Численное вычисление решений задач о распаде гауссового импульса и дифракции на углу $2\pi/n$

В статье рассматриваются две задачи для двумерного волнового уравнения, используемые для верификации численных методов: 1) о распространении волны в свободном пространстве от начального импульса в форме гауссиана и 2) о дифракции плоской волны с гауссовым профилем на углу $2\pi/n$. Решение обеих задач выражается в интегральном виде. Предлагается способ быстрого вычисления интегралов, входящих в эти решения.

Ключевые слова: численное интегрирование, квадратура, равенство Парсеваля, дифракция

Pavel Alexeevich Bakhvalov

Evaluation of the solutions of Gaussian impulse propagation and diffraction around a corner $2\pi/n$

We consider two solutions of the 2D wave equation, which can be used for verification of numerical methods. The first problem is wave propagation from Gaussian pulse. The second one is planar wave diffraction around a corner with the angle of $2\pi/n$. The solutions of both problems have integral representations. We offer a new method to calculate them.

Key words: numerical integration, Parseval's identity, diffraction

Оглавление

1	Введение	3
2	Что такое легко вычисляемый интеграл?	4
3	Задача о волне от гауссового импульса в 2D	7
4	Дифракция плоской волны на углу $2\pi/n$	12
5	Заключение	22
Приложения		23
A	Оценка старших производных от $f(x^2/2)$	23
B	Составные квадратурные формулы	24
C	Иные преобразования решения в задаче о гауссовом импульсе в 2D	30
D	К выводу решения задачи дифракции	32
E	Задача о волне от гауссового импульса в 3D	33
Список литературы		35

1. Введение

Для верификации высокоточных численных методов, предназначенных для решения задач газовой динамики, часто используются решения линеаризованных уравнений Эйлера, представляющиеся в явном или интегральном виде. Один из популярных тестов был предложен К. Тамом [1] и включает в себя распространение волны в двумерном пространстве от импульса в форме гауссиана. Эта подзадача является осесимметричной; её решение для пульсации давления и радиальной компоненты скорости записывается в виде

$$\begin{aligned} p'(t, r) &= \int_0^{\infty} \omega \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) J_0(r\omega) \cos(\omega t) d\omega, \\ u'_r(t, r) &= \int_0^{\infty} \omega \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) J_1(r\omega) \sin(\omega t) d\omega. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь и далее t и r – безразмерные время и расстояние от центра импульса, а J_0 и J_1 – функции Бесселя индексов 0 и 1 соответственно. В качестве единицы длины выбрано расстояние от центра импульса, на котором его величина равна $1/\sqrt{e}$ от максимальной, а в качестве единицы времени – единица длины, делённая на скорость звука. Чёткая постановка задачи и вывод решения (1.1) будут приведены ниже.

При больших значениях r подынтегральные выражения в (1.1) являются быстроосциллирующими функциями с нерегулярными осцилляциями. Эффективных численных методов для вычисления такого рода интегралов общего вида не существует. А для вычисления этих интегралов по обычным квадратурным формулам требуется число узлов квадратуры прямо пропорционально r ; эта линейная зависимость имеет место для квадратурных формул любого порядка. Альтернативным методом решения этой задачи является вычисление свёртки формы начального возмущения с решением для точечного начального импульса; этот подход не имеет проблем при больших r , однако подразумевает вычисление двумерного интеграла.

В настоящей работе предлагается для вычисления решения (1.1) при больших r воспользоваться тем, что образы Фурье от гауссиана и функции Бесселя выражаются явно, и преобразовать формулы (1.1) с использованием равенства Парсеваля:

Утверждение 1. Для любых $f \in S(\mathbb{R})$ и $g \in S'(\mathbb{R})$ справедливо $(f, g) = (F, G)$, где F и G – преобразования Фурье f и g соответственно.

Это утверждение является не чем иным, как определением преобразования Фурье для обобщённых функций. Аналогично, используя равенство Парсе-

валя для преобразования Бесселя – Фурье, можно получить выражение, удобное для вычисления при больших t . Таким образом будут построены квадратурные формулы, позволяющие с заданной точностью $0 < \varepsilon \ll 1$ вычислить значения выражений (1.1) за $c(\ln(1/\varepsilon))^{3/2}$ операций (вычисление значения цилиндрической функции принимается за одну операцию), где c не зависит от r и t . Далее этот же подход будет применён для вычисления решения задачи о дифракции плоской волны с гауссовым профилем на полупрямой или углу с мерой $2\pi/n$, $n \in \mathbb{N}$. Её решение вычисляется за $c(\ln(1/\varepsilon))^2$ операций.

2. Что такое легко вычисляемый интеграл?

Настоящая работа посвящена преобразованию интегральных формул к такому виду, чтобы их значения легко было вычислить по квадратурным формулам. Поясним, что понимается под словом “легко”.

Все вычисляемые в настоящей работе интегралы могут быть приведены к виду

$$I = \int_0^B \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2}\right) (x-x_0)^k g(x) x^\gamma dx, \quad (2.1)$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \{0, -1/2\}$, $k \in \{0, 1\}$, $B \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, а g – бесконечно гладкая функция, $\sup |g(x)| \leq 1$. Поскольку гауссиан быстро убывает по мере удаления от своего максимума, размер области интегрирования может быть ограничен числом, зависящим только от требуемой точности, но не от b или x_0 . Не препятствует вычислению интеграла и возможная коренная особенность, поскольку множитель $1/\sqrt{x}$ можно выбрать в качестве веса и использовать квадратурные формулы Гаусса – Якоби (в оригинале выписывающиеся для интегралов вида $\int_{-1}^1 f(x)/\sqrt{x+1} dx$). Таким образом, сложность вычисления интеграла вида (2.1) определяется только величинами производных от функции $g(x)$. Интеграл вида (2.1) легко вычисляется по квадратурным формулам Гаусса, если $g^{(m)}(x)$ растут не слишком быстро с ростом m .

Для формализации этого условия введём специальный класс функций. Будем говорить, что $f \in F_{(a,b)}(q, c_m)$, где c_m – неубывающая последовательность, если

$$\sup_{a < x < b} |f^{(m)}(x)| \leq c_m q^m m!, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где c_m растёт не быстрее, чем степенным образом. Такие функции являются аналитическими на интервале (a, b) , причём в каждой точке радиус сходимости их степенного ряда не менее $1/q$. На практике будем опускать параметр c_m , предполагая, что для m , равного числу узлов квадратурных формул, выполняется $c_{2m} \ll 1/\varepsilon$, где ε – точность интегрирования.

Примерами функций из этого класса являются алгебраические функции, гауссиан и функции Бесселя. При $0 < \alpha \leq -1$ имеем

$$\left| \frac{d^m}{dx^m} x^\alpha \right| = |\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - m + 1)x^{-\alpha-m}| \leq m! |x|^{-\alpha-m},$$

откуда при любом $a > 0$ имеем

$$x^\alpha \in F_{(a,\infty)}(1/a, a^{-\alpha}). \quad (2.2)$$

Для гауссиана из оценки производных

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} \exp(-x^2/2) \right| \leq \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \sqrt{k!},$$

доказанной в [2], получаем

$$\exp(-x^2/2) \in F_{(-\infty,\infty)}(1, 1). \quad (2.3)$$

Для функций Бесселя 1-го рода и экспоненциально масштабированных модифицированных функций Бесселя при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ исходя из интегральных представлений

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x \sin \phi) d\phi, \quad e^{-x} I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(x(\cos(\phi) - 1)) \cos(n\phi) d\phi$$

получаем $|(J_n(x))^{(k)}| \leq 1$ и $|(e^{-x} I_n(x))^{(k)}| \leq 2^k$. Пользуясь неравенством $2^k \leq k!$, получаем

$$J_n(x) \in F_{(0,\infty)}(1, 1), \quad e^{-x} I_n(x) \in F_{(0,\infty)}(1, 1). \quad (2.4)$$

Над функциями из рассматриваемого класса можно выполнять операции, оставаясь в этом классе.

Утверждение 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Пусть $f \in F_{(a,b)}(p, c_m)$ и $g \in F_{(a,b)}(q, \tilde{c}_m)$. Тогда верно $fg \in F_{(a,b)}(\max\{p, q\}, (m+1)c_m\tilde{c}_m)$.
2. Пусть $f \in F_{(a,b)}(q, c_m)$. Тогда для $g(x) = f(\alpha x)$ справедливо $g \in F_{(a/\alpha, b/\alpha)}(\alpha q, c_m)$.
3. Пусть $f \in F_{(0, H^2/2)}(q, c_m)$. Тогда для функции $g(x) = f(x^2/2)$ справедливо $g \in F_{(-H, H)}(Hq + \sqrt{q}, c_m)$.

Докажем первое утверждение.

$$\begin{aligned} |(fg)^{(m)}| &\leq \left| \sum_{j=0}^m C_m^j f^{(j)} g^{(m-j)} \right| \leq c_m \tilde{c}_m \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m-j)!} p^j j! q^{m-j} (m-j)! = \\ &= c_m \tilde{c}_m m! \sum_{j=0}^m p^j q^{m-j} \leq (m+1) c_m \tilde{c}_m m! \max\{p, q\}^m. \end{aligned}$$

Второе утверждение очевидно. Доказательство третьего перенесено в приложение А.

Для квадратурных формул Гаусса – Лежандра с m узлами на отрезке $[a, b]$ известно представление для остаточного члена [3]

$$R(f) = f^{(2m)}(\zeta) \frac{2^{2m+1}}{2m+1} \frac{(m!)^4}{(2m!)^3} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{2m+1},$$

где ζ – некоторая точка на $[a, b]$. Оценивая производную через её максимум на отрезке и приближая факториалы по формуле Стирлинга, для $f \in F_{(a,b)}(q, c_m)$ получаем

$$|R(f)| \leq \frac{3\pi c_{2m}}{q} \left(\frac{q(b-a)}{4} \right)^{2m+1}. \quad (2.5)$$

Если произведение q на длину отрезка интегрирования больше 4, то оценка, стоящая в правой части, стремится к бесконечности ростом m и, следовательно, бесполезна. Квадратурная формула Гаусса – Лежандра при этом, конечно, сходится к точному решению, поскольку все её коэффициенты неотрицательны. Например, при вычислении $\int_1^5 dx/x$ оценка (2.5) даёт $|R(f)| \leq 3\pi$, тогда как численные эксперименты показывают $|R(f)| \approx 2 \exp(-1.92m)$. Вопросы более точных оценок погрешности квадратурных формул Гаусса рассматривались в большом числе публикаций [4–6], но эти оценки либо предполагают условие $q(b-a) \lesssim 1$ (и поэтому не снимают проблемы), либо содержат трудно проверяемые условия.

В настоящей работе мы будем исходить из оценки (2.5) и использовать составные квадратурные формулы Гаусса. При разбиении отрезка $[a, b]$ на $\approx eq(b-a)/4$ равных частей основание степени в (2.5) становится равным $\approx 1/e$, что позволяет оценить число узлов квадратурной формулы исходя только из желаемой точности интегрирования. Общее число узлов получается пропорциональным $q(b-a)$.

В интеграле (2.1) верхний предел B может быть сколь угодно большим. Однако гауссиан быстро затухает по мере удаления от своего максимума, и поэтому при численном вычислении (2.1) интегрирование можно проводить по конечному отрезку. Его длина оценивается величиной

$2H(\varepsilon) \lesssim 2\sqrt{2 \ln(\sup |g(x)|/\varepsilon)}$, где ε – желаемая точность интегрирования (более точная оценка дана в приложении).

Интеграл

$$I = \alpha^{-k-\gamma-1} \int_0^{\hat{b}} \exp\left(-\frac{\alpha^2(\xi - \xi_0)^2}{2}\right) (\xi - \xi_0)^k h(\xi) \xi^\gamma d\xi \quad (2.6)$$

сводится к (2.1) заменой переменных $\xi = x/\alpha$ и введением $\xi_0 = x_0/\alpha$, $b = \hat{b}\alpha$ и $g(x) = h(x/\alpha)$. Пусть требуется вычислить его с точностью ε . Пусть $h \in F_{(0, \hat{b}) \cap (\xi_0 - H(\varepsilon), \xi_0 + H(\varepsilon))}(q, c_m)$. Тогда можно показать, что для вычисления интеграла (2.6) с точностью ε достаточным является число узлов

$$N = \lceil q/\alpha \rceil \left\lceil \sqrt{\ln(c/\varepsilon)} + 1 \right\rceil^3, \quad (2.7)$$

где c – некоторая константа, зависящая от последовательности c_m . Детали реализации составных квадратурных формул и более точная оценка числа узлов приведена в приложении В.

3. Задача о волне от гауссового импульса в 2D

3.1. Постановка задачи. Общее решение уравнений Эйлера, линеаризованных на постоянном фоновом поле, в системе координат, связанных с фоновым потоком, представляется в виде суммы трёх компонент: энтропийной, вихревой и акустической (см., например, [7]). Первые две переносятся потоком без искажений, и точное решение для них при заданных начальных данных тривиально. Акустическая компонента в связанной с потоком системе координат выражается формулами

$$\frac{1}{\bar{\rho}} p'(t, \mathbf{r}) = \frac{\bar{c}^2}{\bar{\rho}} \rho'(t, \mathbf{r}) = -\frac{\partial W(t, \mathbf{r})}{\partial t}, \quad \mathbf{u}'(t, \mathbf{r}) = \nabla W(t, \mathbf{r}), \quad (3.1)$$

где ρ' , \mathbf{u}' , p' – пульсации плотности, скорости и давления, $\bar{\rho}$ и \bar{c} – плотность и скорость звука в фоновом потоке, а волновой потенциал $W(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \bar{c}^2 \Delta W = 0. \quad (3.2)$$

Далее будем считать, что $\bar{\rho} = \bar{c} = 1$.

Рассматривается двумерное волновое уравнение (3.2) в области $t > 0$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ с осесимметричными начальными условиями

$$W|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=0} = -p_0(r) = -\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right). \quad (3.3)$$

Требуется вычислить пульсации физических переменных по формулам (3.1).

3.2. Решение. Очевидно, что решение задачи (3.2), (3.3) осесимметричное. Методом разделения переменных легко установить, что осесимметричное решение волнового уравнения, такое что $W(0, r) = 0$, записывается в общем виде

$$W(t, r) = \int_0^{\infty} C(\omega) J_0(r\omega) \sin(\omega t) d\omega, \quad (3.4)$$

где J_0 – функция Бесселя 1-го рода индекса 0. Дифференцируя по t и подставляя $t = 0$, получаем равенство

$$\int_0^{\infty} \omega C(\omega) J_0(r\omega) d\omega = -p_0(r).$$

Этому равенству удовлетворяет $C(\omega) = -\exp(-\omega^2/2)$. Таким образом,

$$W(t, r) = -\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) J_0(r\omega) \sin(\omega t) d\omega. \quad (3.5)$$

Отсюда по формулам (3.1) получаем выражения для пульсаций физических переменных (1.1).

Оценка числа узлов квадратуры. Для оценки числа узлов квадратуры нужно установить принадлежность подынтегральных функции классу $F_{(0,\infty)}(q)$ и определить q . В силу (2.3) и (2.4) гауссиан и функция Бесселя лежат в $F_{(0,\infty)}(1)$; принадлежность этому классу синуса очевидна. Поэтому в силу утверждения 2 имеем $q = \max\{1, t, r\}$. По формуле (2.7) получаем

$$N = \lceil \max\{1, t, r\} \rceil \left[\sqrt{\ln(c/\varepsilon)} + 1 \right]^3.$$

3.3. Преобразование Фурье. Получим другое выражение для решения этой задачи, удобное при $r \gg 1$. Представим

$$W(t, r) = -\text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) (J_0(r\omega) \exp(i\omega t) \Theta(\omega)) d\omega,$$

где Θ – функция Хевисайда. Воспользуемся утверждением 1, для чего приведём образы Фурье от множителей в подынтегральной функции. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) \exp(ik\omega) d\omega = \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right);$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} J_0(r\omega) \exp(i\omega(t+k)) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{r^2 - (t+k)^2}}. \quad (3.6)$$

Последнее равенство как поточечное при $|r| \neq |t+k|$ приведено в [8], §6.67, однако оно верно и в смысле обобщённых функций, если левую часть рассматривать как преобразование Фурье от $J_0(r\omega) \exp(i\omega t) \Theta(\omega)$. Значение первого интеграла действительное, а второго – либо действительное, либо чисто мнимое (во втором случае выбирается ветвь корня с отрицательной мнимой частью, если $t+k > 0$, и с положительной мнимой частью, если $t+k < 0$). Поскольку нас интересует мнимая часть произведения этих функций, получаем

$$W(t, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-t-r} - \int_{-t+r}^{\infty} \right) \frac{1}{\sqrt{(k+t)^2 - r^2}} \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right) dk.$$

Теперь интегрирование ведётся по области, где подкоренное выражение неотрицательное. Заменой $k = \xi r - (t+r)$ в первом интеграле и $k = \xi r + (r-t)$ во втором получаем

$$W(t, r) = -\tilde{W}(t, r) + \tilde{W}(-t, r),$$

$$\tilde{W}(t, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi} \sqrt{\xi+2}} \exp\left(-\frac{(r-t+\xi r)^2}{2}\right) d\xi. \quad (3.7)$$

Дифференцируя, получим пульсации физических переменных:

$$p(t, r) = -\frac{\partial W}{\partial t}(t, r) = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t}(t, r) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t}(-t, r),$$

$$u_r(t, r) = \frac{\partial W}{\partial r}(t, r) = -\frac{\partial \tilde{W}}{\partial r}(t, r) + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r}(-t, r), \quad (3.8)$$

где

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial t} \\ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-(r-t+r\xi)^2/2)}{\sqrt{\xi(\xi+2)}} (r-t+r\xi) \left(\begin{array}{c} 1 \\ -(1+\xi) \end{array} \right) d\xi. \quad (3.9)$$

Оценка числа узлов квадратуры. В силу (2.2) и (2.3) имеем

$$(x + 2)^{-1/2} \in F_{(0,\infty)}(1/2, 1/\sqrt{2}),$$

$$\exp(-(r - t + rx)^2/2) \in F_{(-\infty,\infty)}(r, 1).$$

Домножение на $(r - t + rx)$ и $(1 + x)$ не меняет параметра q в классе функций. Отсюда, обозначая подынтегральную функцию в (3.9) через $f(\xi)/\sqrt{\xi}$, получаем

$$f \in F_{(0,\infty)}(\max\{1/2, r\}).$$

По формуле (2.7) получаем

$$N = \lceil \max\{1, 1/(2r)\} \rceil \left[\sqrt{\ln(c/\varepsilon)} + 1 \right]^3 = \lceil 1/(2r) \rceil \left[\sqrt{\ln(c/\varepsilon)} + 1 \right]^3.$$

3.4. Преобразование Бесселя – Фурье. Непосредственная аппроксимация интегрального представления (1.1) позволяет быстро вычислить решение при малых t и r , а аппроксимация (3.8),(3.9) – при больших r . Остаётся рассмотреть случай малых r и больших t . В этом случае (1.1) могут рассматриваться как интегралы вида $\int f(x) \cos(\Omega x) dx$ при $\Omega \gg 1$. Вычисление таких интегралов обычно проводится путём аппроксимации функции $f(x)$ кусочно-полиномиальной функцией с последующим явным вычислением полученного выражения. Однако при больших степенях многочлена возникает большая чувствительность к ошибкам округления. В [9, 10] и др. предложены методы преодоления этих трудностей, но это достигается за счёт усложнения метода и увеличения числа операций.

Оказывается, что для конкретной задачи, рассматриваемой в настоящей работе, при больших t и малых r при помощи равенства Парсевала решение можно преобразовать к другому интегральному виду, в котором интегралы будут легко вычисляемыми. Вместо разложения по комплексным экспонентам для этого нужно использовать разложение по функциям Бесселя (преобразование Бесселя – Фурье).

Перепишем (3.5) в виде

$$W(t, r) = - \int_0^{\infty} \omega \left(\exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) J_0(r\omega) \right) \left(\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right) d\omega.$$

Введём $\tilde{I}_j(z) = e^{-z} I_j(z)$, где $I_j(z)$ – модифицированная функция Бесселя индек-

са j . Преобразование Бесселя – Фурье от первой скобки даёт (см. [8], §6.633(2))

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \omega \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) J_0(\omega r) J_0(\omega x) d\omega = \\ & = \exp\left(-\frac{r^2 + x^2}{2}\right) I_0\left(\frac{2rx}{2}\right) = \exp\left(-\frac{(r-x)^2}{2}\right) \tilde{I}_0(rx). \end{aligned}$$

Преобразование Бесселя – Фурье от второй скобки даёт

$$\int_0^{\infty} \sin(\omega t) J_0(\omega x) d\omega = \frac{1}{\sqrt{(t^2 - x^2)_+}},$$

что является частным случаем (3.6). Таким образом, получаем

$$W(t, r) = - \int_0^t x \exp\left(-\frac{(r-x)^2}{2}\right) \tilde{I}_0(rx) \frac{1}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx. \quad (3.10)$$

Введём обозначение

$$J_{j,n}(t, r) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{(r-t+t\xi)^2}{2}\right) \tilde{I}_j(rt(1-\xi)) \frac{(1-\xi)^n}{\sqrt{\xi}\sqrt{2-\xi}} d\xi. \quad (3.11)$$

Тогда заменой переменных $x = t(1-\xi)$ в (3.10) получаем $W(t, r) = -tJ_{0,1}(t, r)$. В силу $dI_0(x)/dx = I_1(x)$ выполняется $d\tilde{I}_0(x)/dx = \tilde{I}_1(x) - \tilde{I}_0(x)$, поэтому для физических переменных получаем выражения

$$\begin{aligned} p'(t, r) &= -\frac{\partial W}{\partial t}(t, r) = J_{0,1}(t, r) - t^2 J_{0,3}(t, r) + rt J_{1,2}(t, r); \\ u'_r(t, r) &= \frac{\partial W}{\partial r}(t, r) = -t^2 J_{1,2}(t, r) + rt J_{0,1}(t, r). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Оценка числа узлов квадратуры. В силу (2.2), (2.3), (2.4) имеем

$$\begin{aligned} (2-x)^{-1/2} &\in F_{(0,1)}(1, m+1), \\ \exp(-(r-t+tx)^2/2) &\in F_{(-\infty, \infty)}(t, 1), \\ \tilde{I}_j(rt(1-x)) &\in F_{(0,1)}(rt, 1). \end{aligned}$$

Домножение на $(1 - \xi)^n$ не меняет параметра q в классе функций. Отсюда, обозначая подынтегральную функцию в (3.11) через $f(\xi)/\sqrt{\xi}$, получаем

$$f \in F_{(0,1)}(q), \quad q = \max\{1, t, tr\}.$$

По формуле (2.7) получаем

$$N = \lceil \max\{1/t, 1, r\} \rceil \left[\sqrt{\ln(c/\varepsilon)} + 1 \right]^3.$$

3.5. Итог. Сопоставляя полученные оценки, можно построить следующий алгоритм.

- При $r \geq 1$ используется представление (3.8), (3.9), полученное с использованием преобразования Фурье.
- При $r < 1, t \geq 1$ используется представление (3.11), (3.12), полученное с использованием преобразования Бесселя – Фурье.
- При $r < 1, t < 1$ используется представление (1.1).

Интегралы вычисляются по составным квадратурным формулам Гаусса, описанным в приложении В. Суммарное число узлов квадратурной формулы, требуемое для вычисления интеграла с точностью ε , не превосходит $\approx (\ln(c/\varepsilon))^{3/2}$, где c не зависит от t и r .

4. Дифракция плоской волны на углу $2\pi/n$

4.1. Постановка задачи. Рассматривается двумерное волновое уравнение (3.2) при $t > 0$ в секторе $G \subset \mathbb{R}^2$, задаваемом в полярных координатах неравенствами $r > 0, \quad 0 < \phi < 2\pi/n$, где $n \in \mathbb{N}$ – параметр задачи. В частности, если $n = 1$, то областью определения уравнения является плоскость с разрезом в форме полупрямой: $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0, x > 0\}$. На границе ставится условие 2-го рода: $\nabla W \cdot \mathbf{n} = 0$, что соответствует условию непротекания $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} = 0$ для линеаризованных уравнений Эйлера.

Остаётся указать начальные данные. Пусть $f(x)$ – бесконечно гладкая функция, равная нулю при $|x| > H$, где $H > 0$ – некоторое число, такая что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right| < \varepsilon; \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Величина ε полагается достаточно малой, чтобы замена $f(x)$ на гауссиан вносила в решение ошибку, не превосходящую точность, с которой его требуется вычислить. Начальные данные задаются в виде волны с профилем $f(x)$, центр

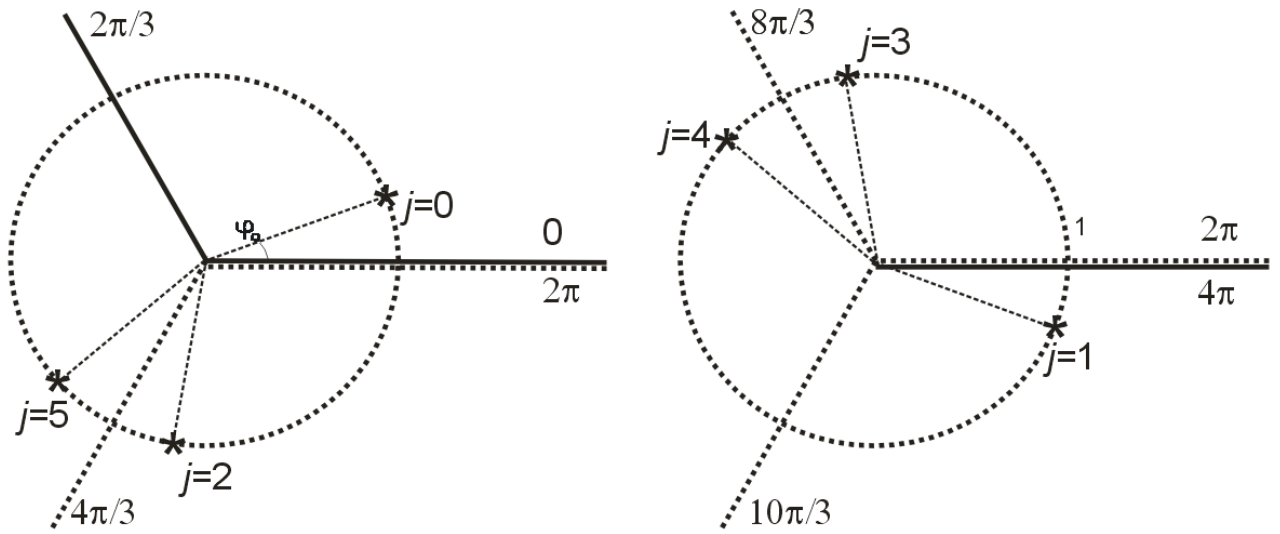


Рис. 1. Направления распространения отражённых волн в секторе $2\pi/3$

которой находится на расстоянии $d > H$ от начала координат, падающей под углом $0 < \phi_0 < 2\pi/n$ к оси абсцисс, и её отражений от границ сектора:

$$W(0, r, \phi) = - \sum_{j=0}^{2n-1} g(\phi - \phi_j) F(r \cos(\phi - \phi_j) - d),$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}(0, r, \phi) = - \sum_{j=0}^{2n-1} g(\phi - \phi_j) f(r \cos(\phi - \phi_j) - d),$$
(4.1)

где $r > 0$, $0 < \phi < 2\pi/n$,

$$g(\psi) = \begin{cases} 1, & -\pi < \psi < \pi \pmod{4\pi}, \\ 0, & -3\pi < \psi < -\pi \pmod{4\pi}, \end{cases}$$
(4.2)

а ϕ_j при $j > 0$ выражаются через ϕ_0 формулами

$$\phi_{2k} = \phi_0 + 4\pi k/n, \quad \phi_{2k+1} = -\phi_{2k}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$
(4.3)

Для случая $n = 3$ и $\phi_0 < \pi/3$ направления распространения отражённых волн изображены на рис. 1. В этой конфигурации начальных данных присутствуют волны с $j = 0$ и $j = 1$ (углы падения $\pm\phi_0$); в случае $n = 3$ и $\phi_0 > \pi/3$ присутствовали бы волны с $j = 0$ и $j = 5$ (углы падения ϕ_0 и $(4\pi/3 - \phi_0)$ соответственно).

4.2. Решение. Решением поставленной задачи является функция

$$W(t, r, \phi) = - \sum_{j=0}^{2n-1} H(t - d, r, \phi - \phi_j(\phi_0)), \quad (4.4)$$

где

$$H(t, r, \psi) = g(\psi)F(t + r \cos \psi - d) + \frac{1 - 2g(\psi)}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r} f(\tau) \arccos \xi(t - \tau, r, \psi) d\tau, \quad (4.5)$$

$$\xi(t, r, \psi) = \frac{2r - t + r \cos \psi}{t + r \cos \psi}. \quad (4.6)$$

Проверим выполнение начальных условий. При $t < -H$, то есть пока возмущения не доходят до начала координат, второе слагаемое в (4.5) зануляется, поэтому при $t < d - H$ решение этой задачи представляется в виде сумм плоских волн:

$$W(t, r, \phi) = - \sum_{j=0}^{2n-1} g(\phi - \phi_j)F(t + r \cos(\phi - \phi_j) - d). \quad (4.7)$$

Отсюда непосредственно вытекает (4.1).

Проверим выполнение условия $\nabla W \cdot \mathbf{n} = \pm r \partial W / \partial \phi = 0$ на границе сектора. Имеем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial W}{\partial \phi} \right|_{\phi=0} &= \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{\partial H}{\partial \psi}(t, r, -\phi_j(\phi_0)) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{\partial H}{\partial \psi}(t, r, -\phi_{2k}(\phi_0)) + \frac{\partial H}{\partial \psi}(t, r, \phi_{2k}(\phi_0)) \right] = 0 \end{aligned}$$

в силу чётности H по ψ . Аналогично (опуская для краткости аргументы t и r у $H(\dots)$),

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial W}{\partial \phi} \right|_{\phi=2\pi/n} &= \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{\partial H}{\partial \psi}(2\pi/n - \phi_j) = \\ &= \left[\frac{\partial H}{\partial \psi}(2\pi/n - \phi_0) + \frac{\partial H}{\partial \psi}(2\pi/n - \phi_{2n-1}) \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial H}{\partial \psi}(2\pi/n - \phi_{2k}) + \frac{\partial H}{\partial \psi}(2\pi/n - \phi_{2k-1}) \right] = \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\partial H}{\partial \psi} (2\pi/n - \phi_0) + \frac{\partial H}{\partial \psi} (\phi_0 - 2\pi/n) \right] + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{\partial H}{\partial \psi} (2\pi/n - \phi_{2k}) + \frac{\partial H}{\partial \psi} (\phi_{2k} - 2\pi/n) \right] = 0.$$

Остаётся убедиться, что $W(t, r, \psi)$, заданное (4.4), удовлетворяет волновому уравнению. Для этого достаточно убедиться в том, что $H(t, r, \psi)$ является 4π -периодическим решением волнового уравнения в полярных координатах

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) H(t, r, \psi) = 0. \quad (4.8)$$

Ниже мы вычислим первые производные от H и покажем их непрерывность кроме точки $r = 0$, после чего вычислим вторые производные и убедимся в том, что они удовлетворяют (4.8).

Отметим, что при чётных n (то есть для углов π/\tilde{n} , $\tilde{n} \in \mathbb{N}$) решение этой задачи получается из плоской волны с профилем $f(x)$ методом отражения и имеет вид

$$W(t, r, \phi) = - \sum_{j=0}^{n-1} F(t + r \cos(\phi - \phi_j) - d), \quad (4.9)$$

где ϕ_j задаются формулами

$$\phi_{2k} = \phi_0 + 2\pi k/n, \quad \phi_{2k+1} = -\phi_{2k}, \quad k = 0, \dots, \tilde{n} - 1.$$

4.3. Пульсации физических переменных. Получим выражения для производных от $H(t, r, \psi)$, необходимые для вычисления пульсаций физических переменных. Для начала вычислим производные от $\xi(t, r, \psi)$. Для удобства дифференцирования перепишем формулу (4.6) в виде

$$\xi(t, r, \psi) = 1 - \frac{2(t-r)}{t+r\cos\psi} = 2r \frac{1+\cos\psi}{t+r\cos\psi} - 1 = \frac{2+\cos\psi}{\cos\psi} - \frac{2t}{t+r\cos\psi} \frac{1+\cos\psi}{\cos\psi}.$$

Введём обозначение $\delta = |\cos(\psi/2)|$, тогда $1 + \cos\psi = 2\delta^2$. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2(t, r, \psi)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi(t, r, \psi)} \sqrt{1 + \xi(t, r, \psi)}} = \\ = \frac{t + r \cos \psi}{\sqrt{2(t-r)} \sqrt{4r\delta^2}} = \frac{t - r + 2r\delta^2}{2\sqrt{2}\delta\sqrt{r}\sqrt{t-r}};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi(t, r, \psi)}{\partial t} &= \frac{-4r\delta^2}{(t - r + 2r\delta^2)^2}; \\ \frac{\partial \xi(t, r, \psi)}{\partial r} &= \frac{4t\delta^2}{(t - r + 2r\delta^2)^2}; \\ \frac{\partial \xi(t, r, \psi)}{\partial \psi} &= \frac{2(t - r)r}{(t - r + 2r\delta^2)^2}(-\sin \psi).\end{aligned}$$

Для краткости записи введём $V = (t, r, \psi)$ и

$$R(t, r, \psi) = (-2r\delta^2, 2t\delta^2, -(t - r)r \sin \psi).$$

Отметим, что $\xi(r, r, \psi) \equiv 1$, поэтому подынтегральная функция в (4.5) обращается в ноль на границе области интегрирования. Тогда дифференцированием (4.5) получаем

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{H}}{dV}(t, r, \psi) &= g(\psi)f(t + r \cos \psi) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \psi \\ -r \sin \psi \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1 - 2g(\psi)}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r} f(\tau) \frac{2R(t - \tau, r, \psi)}{2\sqrt{2}\delta\sqrt{r}\sqrt{t - \tau - r}(t - \tau - r + 2r\delta^2)} d\tau.\end{aligned}$$

Заменой $\tau = t - r - 2r\delta^2\eta$ получаем равенство

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{H}}{dV}(t, r, \psi) &= g(\psi)f(t + r \cos \psi) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \psi \\ -r \sin \psi \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1 - 2g(\psi)}{2\pi} \int_0^{\infty} f(t - r - 2r\delta^2\eta) \frac{2R(r + 2r\delta^2\eta, r, \psi)}{2\sqrt{2}\delta\sqrt{r}\sqrt{2r\delta^2\eta}(2r\delta^2\eta + 2r\delta^2)} 2r\delta^2 d\eta = \\ &= g(\psi)f(t + r \cos \psi) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \psi \\ -r \sin \psi \end{pmatrix} - \\ &- \frac{1 - 2g(\psi)}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(t - r - 2r\delta^2\eta)}{\sqrt{\eta}(\eta + 1)} \frac{R(r + 2r\delta^2\eta, r, \psi)}{2\delta^2 r} d\eta.\end{aligned}$$

Вычислим значение последней дроби в последней формуле:

$$\frac{R(r + 2r\delta^2\eta, r, \psi)}{2\delta^2 r} = \frac{1}{2\delta^2 r} \begin{pmatrix} -2r\delta^2 \\ 2(r + 2r\delta^2\eta)\delta^2 \\ -(2r\delta^2\eta)r \sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 + 2\delta^2\eta \\ -\eta r \sin \psi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -\cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix} + (\eta + 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \cos \psi \\ -r \sin \psi \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{H}}{dV}(t, r, \psi) &= \left[g(\psi) f(t + r \cos \psi) + \left(\frac{1}{2} - g(\psi) \right) J_0(t, r, \psi) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \psi \\ -r \sin \psi \end{pmatrix} - \\ &- \left(\frac{1}{2} - g(\psi) \right) J_1(t, r, \psi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \cos \psi \\ -r \sin \psi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_0(t, r, \psi) &= \int_0^\infty f((t - r) - \eta r(1 + \cos \psi)) \frac{1}{\pi \sqrt{\eta}(\eta + 1)} d\eta, \\ J_1(t, r, \psi) &= \int_0^\infty f((t - r) - \eta r(1 + \cos \psi)) \frac{1}{\pi \sqrt{\eta}} d\eta. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Подставим $f(x) = \exp(-x^2/2)$. Тогда $J_0(t, r, \psi) = \tilde{J}_0(r(1 + \cos \psi), t - r)$,

где

$$\tilde{J}_0(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\exp(-(\alpha\eta - \beta)^2/2)}{\pi \sqrt{\eta}(\eta + 1)} d\eta, \quad (4.11)$$

и $J_1(t, r, \psi) = E(t - r)/(\pi\sqrt{2r}|\cos(\psi/2)|)$, где

$$E(\delta) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{(x - \delta)^2}{2}\right) dx. \quad (4.12)$$

Искомое выражение для производных принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{H}}{dV}(t, r, \psi) &= g(\psi) \exp\left(-\frac{(t + r \cos \psi)^2}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \psi \\ -r \sin \psi \end{pmatrix} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} - g(\psi) \right) \tilde{J}_0(r(1 + \cos \psi), t - r) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \psi \\ -r \sin \psi \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{\pi\sqrt{2r}} E(t - r) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\psi/2) \\ -r \sin(\psi/2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Отметим, что в точке $\psi = \pm\pi$, где функция $g(\psi)$ имеет скачок, выполняется

$$J_0(t, r, \pm\pi) = \tilde{J}_0(0, t - r) = \int_0^\infty \frac{\exp(-(t - r)^2/2)}{\pi\sqrt{\eta}(\eta + 1)} d\eta = \exp(-(t - r)^2/2),$$

в результате чего первое слагаемое в (4.13) непрерывно при $\psi = \pm\pi$; второе слагаемое также непрерывно.

При $n = 1$ (в случае дифракции на полупрямой), как видно из (4.13), в выражении для скоростей присутствует особенность порядка $1/\sqrt{r}$ при $r \rightarrow 0$. Однако при $n > 1$ при суммировании по j в (4.4) последнее слагаемое в (4.13) зануляется. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2n-1} \cos\left(\frac{\phi - \phi_j(\phi_0)}{2}\right) &= \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\phi - \phi_0}{2} - \frac{2\pi j}{n}\right) + \cos\left(\frac{\phi + \phi_0}{2} + \frac{2\pi j}{n}\right) = \\ &= \operatorname{Re} \exp\left(i\frac{\phi - \phi_0}{2}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \left[\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right]^j + \operatorname{Re} \exp\left(i\frac{\phi + \phi_0}{2}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \left[\exp\left(-\frac{2\pi i}{n}\right)\right]^j, \end{aligned}$$

и остаётся воспользоваться формулой для частичной суммы ряда геометрической прогрессии. При $n = 1$ показатель геометрической прогрессии равен 1 и особенность в решении действительно присутствует.

4.4. Проверка решения. Вычислим теперь вторые производные и убедимся, что их подстановка в (4.8) обращает это равенство в тождество. Поскольку выше была показана непрерывность при $\psi = \pm\pi$, достаточно вычислять производные в классическом смысле при $\psi \neq \pm\pi$.

Будем подставлять в уравнение (4.8) последовательно три слагаемых из (4.13). Первое слагаемое описывает плоскую волну и поэтому удовлетворяет (4.8) в отдельности. Рассмотрим второе слагаемое. Опуская для краткости аргументы $J_0(t, r, \psi)$, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - g(\psi)\right) \left[-(J_0)_t + \cos\psi(J_0)_r + \cos\psi\frac{1}{r}J_0 - \sin\psi\frac{1}{r}(J_0)_\psi - \cos\psi\frac{1}{r}J_0 \right] &= \\ = \left(\frac{1}{2} - g(\psi)\right) \int_0^\infty \frac{[-(f(\dots))_t + \cos\psi(f(\dots))_r - \sin\psi\frac{1}{r}(f(\dots))_\psi]}{\pi\sqrt{\eta}(\eta + 1)} d\eta &= \\ = \left(\frac{1}{2} - g(\psi)\right) \int_0^\infty \frac{[-1 - \cos\psi((1 + \cos\psi)\eta + 1) - \eta\sin^2\psi] f'(\dots)}{\pi\sqrt{\eta}(\eta + 1)} d\eta &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left(\frac{1}{2} - g(\psi) \right) (1 + \cos \psi) \int_0^{\infty} \frac{f'(\dots)}{\pi \sqrt{\eta}} d\eta = \\
 &= - \left(\frac{1}{2} - g(\psi) \right) (1 + \cos \psi) \frac{\partial J_1}{\partial t}(t, r\psi) = \\
 &= - \left(\frac{1}{2} - g(\psi) \right) 2 \cos^2(\psi/2) \frac{E'(t-r)}{\pi \sqrt{2r} |\cos(\psi/2)|} = \cos(\psi/2) \frac{E'(t-r)}{\pi \sqrt{2r}}.
 \end{aligned}$$

Для третьего слагаемого получаем

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\pi \sqrt{2r}} \left[-\cos(\psi/2) E'(t-r) + \frac{1}{r} \cos(\psi/2) E(t-r) - \frac{1}{2} \cos(\psi/2) \frac{1}{r} E(t-r) \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{\pi \sqrt{2r^3}} \cos(\psi/2) E(t-r) = -\frac{1}{\pi \sqrt{2r}} \cos(\psi/2) E'(t-r).
 \end{aligned}$$

Складывая действие дифференциального оператора на второе и третье слагаемые, получаем ноль. Это доказывает, что формулы (4.4), (4.5), (4.6) действительно задают решение задачи о дифракции плоской волны на углу $2\pi/n$.

4.5. Вычисление интегралов. Вычисление решения задачи о дифракции плоской волны на полупрямой сводится к вычислению интегралов $E(\delta)$, определенного (4.12), и $J_0(\alpha, \beta)$, определённого (4.11), при $\alpha > 0$. Интеграл $E(\delta)$ с точностью до множителя является частным случаем (2.6), причём $h \in F_{(0, \infty)}(q, c_m)$ при любом $q > 0$. Следовательно, $E(\delta)$ может быть вычислен по составной квадратурной формуле с использованием $\approx (\ln(c/\varepsilon))^{3/2}$ узлов (см. (2.7)). Остаётся рассмотреть $J_0(\alpha, \beta)$.

Вначале проанализируем непосредственное применение составных квадратурных формул к этому интегралу. Длина области, на которой гауссиан больше ε , равна $2H/\alpha$, где $H = \sqrt{2 \ln(1/\varepsilon)}$; интеграл по оставшейся области не превосходит $\varepsilon \int_0^{\infty} (\pi \sqrt{\eta}(\eta+1))^{-1} d\eta = \varepsilon$. Следовательно, интегрирование можно проводить от η_{\min} до η_{\max} , где $\eta_{\min} = \max\{0, (\beta - H)/\alpha\}$, $\eta_{\max} = (\beta + H)/\alpha$ (если $\eta_{\max} \leq \eta_{\min}$, интеграл полагается равным нулю). Имеем

$$\frac{\exp(-(\alpha\eta - \beta)^2/2)}{\pi(\eta + 1)} \in F_{(\eta_{\min}, \infty)}(\max\{1/(1 + \eta_{\min}), \alpha\}).$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
 q(b-a) &\leq \max \left\{ 2H, \frac{2H/\alpha}{1 + \max\{0, (\beta - H)/\alpha\}} \right\} \leq \\
 &\leq 2H \max \left\{ 1, \min \left\{ \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha + \beta - H} \right\} \right\}.
 \end{aligned}$$

При $\alpha \geq 1$ минимум можно оценить через его первый аргумент, и $q(b-a) \leq 2H$. При $\alpha + \beta \geq H + 1$ его можно оценить через второй аргумент, и снова $q(b-a) \leq 2H$. Таким образом, если хотя бы одно из этих условий выполняется, интеграл $\tilde{J}_0(\alpha, \beta)$ легко вычисляется по составным квадратурным формулам Гаусса, причём достаточное число узлов задаётся формулой (2.7) и равно

$$N = \left[2\sqrt{2 \ln(1/\varepsilon)} \right] \left[\sqrt{\ln(c/\varepsilon)} + 1 \right]^3 \sim 2\sqrt{2}(\ln(c/\varepsilon))^2. \quad (4.14)$$

Если $\beta < -H$, интеграл положим равным нулю. При $0 < \alpha < 1$, $\beta > -H$ и $\alpha + \beta < H + 1$ преобразуем интеграл с использованием равенства Парсеваля. Образ Фурье для левого сомножителя в (4.11) имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\alpha\eta - \beta)^2}{2}\right) e^{i\omega\eta} d\eta = \frac{1}{\alpha} \exp\left(i\omega\frac{\beta}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}\right).$$

Займёмся вычислением образа второго сомножителя. Обозначим

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\eta(\eta+1)}} e^{i\omega\eta} d\eta.$$

Для любого $\delta > 0$ в области $\omega > \delta$ формально продифференцированный по ω интеграл сходится равномерно, поэтому имеем

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} + iA(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{i}{\sqrt{\eta}} e^{i\omega\eta} d\eta = \frac{i}{\sqrt{\omega}} \int_0^{\infty} \exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right) dt = -\frac{1-i}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega}}.$$

Левая часть этого равенства переписывается в виде $e^{-i\omega} d(A(\omega)e^{i\omega})/d\omega$, поэтому с учётом $A(0) = \sqrt{\pi/2}$ получаем

$$\begin{aligned} A(\omega) &= e^{-i\omega} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1-i}{2} \int_0^{\omega} \frac{e^{i\omega'}}{\sqrt{\omega'}} d\omega' \right] = \\ &= e^{-i\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 - (1-i)F\left(\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\right) \right], \end{aligned}$$

где $F(x) = C(x) + iS(x)$, а $C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2) dt$ и $S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2) dt$ – интегралы Френеля. Значения $A(\omega)$ при $\omega < 0$ получаются из равенства

$A(\omega) = \overline{A(-\omega)}$. Таким образом, сразу заменяя ω на $\alpha\omega$, получаем

$$\tilde{J}_0(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{i\omega(\alpha+\beta)} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) \left(1 - (1+i)\bar{F}(\sqrt{2\alpha\omega/\pi})\right) d\omega,$$

где $\bar{F}(x) = C(x) - iS(x)$. Множитель 2 и взятие действительной части возникли из замены $\omega := -\omega$ в интеграле от $-\infty$ до 0. Далее введём функцию $\tilde{\tilde{F}}(x) = \bar{F}(x)/x$. Функция $\tilde{\tilde{F}}(\sqrt{x})$ является гладкой в нуле. Тогда

$$\tilde{J}_0(\alpha, \beta) = \exp\left(-\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}\right) - \frac{2\sqrt{\alpha}}{\pi} \operatorname{Re}(1+i) \int_0^{\infty} \frac{\phi(\omega, \alpha, \beta)}{\sqrt{\omega}} d\omega, \quad (4.15)$$

где

$$\phi(\omega, \alpha, \beta) = \omega e^{i\omega(\alpha+\beta)} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) \tilde{\tilde{F}}(\sqrt{2\omega\alpha/\pi}). \quad (4.16)$$

Оценим сложность вычисления полученного интеграла в (4.15). Для гауссиана получаем $q = 1$, для комплексной экспоненты $q = |\alpha + \beta|$. Далее, имеем

$$\tilde{\tilde{F}}(\sqrt{2\omega\alpha/\pi}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega\alpha/\pi}} \int_0^{\sqrt{2\omega\alpha/\pi}} \exp\left(i\frac{\pi}{2}t^2\right) dt = \int_0^1 \exp(i\omega\alpha x^2) dx.$$

Поскольку выполняется $f(x) = \int_0^1 \exp(ixt^2) dt \in F_{(0,\infty)}(1, 1)$, для любого $X > 0$ имеем $f(x) = \int_0^1 \exp(ix^2t^2/2) dt \in F_{(0,X)}(X+1, c_m)$. Отсюда в силу утверждения 2 получаем $\tilde{\tilde{F}}(\sqrt{2\omega\alpha/\pi}) \in F_{(0,H)}(\sqrt{2}\alpha H+1, c_m)$ и $\phi(\cdot, \alpha, \beta) \in F_{(0,H)}(q, c_m)$, где $q = \max\{1, |\alpha + \beta|, \sqrt{2}\alpha H + 1\}$. Вычисление выражения (4.15) требуется при одновременном выполнении условий $0 < \alpha < 1$, $\beta > -H$ и $\alpha + \beta < H + 1$; в этом случае $q \leq \sqrt{2}H + 1$. Полагая $H = \sqrt{2 \ln(1/\varepsilon)}$, по формуле (2.7) получаем, что требуемое число узлов равно

$$N = \left(\lceil 2\sqrt{\ln(1/\varepsilon)} \rceil + 1\right) \left[\sqrt{\ln(c/\varepsilon)} + 1\right]^3 \sim 2(\ln(c/\varepsilon))^2. \quad (4.17)$$

Таким образом, построен следующий алгоритм вычисления интеграла (4.11) с точностью ε при $\alpha > 0$. Если $\beta < -H$, интеграл полагается равным нулю. Если выполняется хотя бы одно из условий $\alpha \geq 1$ и $\alpha + \beta \geq H + 1$, то вычисление интеграла проводится по составной квадратурной формуле; в противном случае составная квадратурная формула применяется к его превращённой форме (4.15), (4.16). Требуемое количество узлов составной квадратурной формулы Гаусса даётся формулами (4.14), (4.17).

5. Заключение

В работе были рассмотрены две задачи для волнового уравнения: о распространении волны от импульса в форме гауссиана и о дифракции плоской волны на углу $2\pi/n$. Решение обеих задач представляется в интегральном виде, причём в определённом диапазоне значений параметров подынтегральные функции являются быстроосциллирующими. Для этих задач были предложены альтернативные интегральные представления решений. Диапазоны значений параметров, при которых хотя бы одно из интегральных представлений позволяет достаточно быстро вычислить значение интеграла по составным квадратным формулам Гаусса, покрывают всё допустимое множество значений.

Использование составных квадратурных формул Гаусса для интегралов вида (2.6) позволило оценить число требуемое число узлов. На практике при этом же числе узлов удовлетворительный результат дают и обычные формулы Гаусса (Гаусса – Лежандра или Гаусса – Якоби, в зависимости от наличия особенности). Кроме того, оценка числа узлов, требуемого для достижения заданной точности, на практике оказывается завышенной в несколько раз.

Описанный подход программно реализован в библиотеке точных решений ColESo [11].

Автор благодарит М. Д. Сурначёва за внимание к настоящей работе и многочисленные замечания, позволившие существенно улучшить первоначальный текст.

Приложения

А. Оценка старших производных от $f(x^2/2)$

Утверждение 3. Пусть для функции f при некотором $H > 0$ для $m = 0, \dots, M$ справедлива оценка

$$\max_{|x| < H^2/2} |f^{(m)}(x)| \leq cq^m m!.$$

Тогда для функции $g(x) = f(x^2/2)$ при $m = 0, \dots, M$ справедливо

$$\max_{|x| < H} |g^{(m)}(x)| \leq c\hat{q}^m m!,$$

где $\hat{q} = Hq + \sqrt{q}$.

Докажем это утверждение по индукции. Для $M = 0$ утверждение очевидно. Для $M = 1$ получаем $g'(x) = x f'(x^2/2)$, откуда при $|x| < H$ имеем $|g'(x)| \leq Hcq \leq c\hat{q}$. Предположим, что утверждение выполнено для всех достаточно гладких функций f при некотором M и покажем его для $M + 1$. При $m \leq M$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1}g(x)}{dx^{m+1}} &= \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \left(f \left(\frac{x^2}{2} \right) \right) = \frac{d^m}{dx^m} \left(x f' \left(\frac{x^2}{2} \right) \right) = \\ &= x \frac{d^m}{dx^m} \left(f' \left(\frac{x^2}{2} \right) \right) + m \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left(f' \left(\frac{x^2}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Поскольку $f'(x)$ для $m = 0, \dots, M$ удовлетворяет оценке

$$\max_{|x| < H^2/2} |(f')^{(m)}(x)| \leq cq^{m+1}(m+1)! \leq (cq(M+1))q^m m!,$$

то для неё выполняется предположение индукции. Следовательно,

$$\begin{aligned} \max_{|x| < H} |g^{(M+1)}(x)| &\leq H (cq(M+1)\hat{q}^M M!) + M (cq(M+1)\hat{q}^{M-1}(M-1)!) = \\ &= c\hat{q}^{M+1}(M+1)! \frac{q(H\hat{q}+1)}{\hat{q}^2}. \end{aligned}$$

Остаётся показать, что дробь в последней формуле не превосходит 1. Действительно,

$$qH\hat{q} + q = qH(qH + \sqrt{q}) + q \leq (qH)^2 + 2qH\sqrt{q} + q = \hat{q}^2. \quad \square$$

В. Составные квадратурные формулы

В.1. Остаточный член квадратурных формул Гаусса – Якоби. Квадратурной формулой Гаусса – Якоби называется квадратурная формула Гаусса на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$, где $\alpha, \beta > -1$. Получим формулу для погрешности этой квадратурной формулы в случае $\alpha = 0$ (для общего случая вывод проводится аналогично).

Для квадратурной формулы Гаусса с произвольным неотрицательным весом $p(x)$ и m узлами известно представление для погрешности [3]

$$R(f) = f^{(2m)}(\zeta) \int_{-1}^1 \frac{\psi_m^2(x)}{(2m)!} p(x) dx,$$

где ζ – некоторая точка на $(-1, 1)$, а $\psi_m(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{m-1})$, где x_j – нули соответствующего ортогонального многочлена. В нашем случае этим многочленом является многочлен Якоби $P_m^{(0, \beta)}(x)$, и функция $\psi_m(x)$ равна многочлену Якоби, делённому на его старший коэффициент [12], с. 581:

$$\psi_m(x) = m! 2^m \frac{\Gamma(m + \beta + 1)}{\Gamma(2m + \beta + 1)} P_m^{(0, \beta)}(x),$$

где Γ – гамма-функция Эйлера. Пользуясь соотношением [12]

$$\int_{-1}^1 (1 + x)^\beta \left(P_m^{(0, \beta)}(x) \right)^2 dx = \frac{2^{1+\beta}}{2m + \beta + 1},$$

получаем

$$R(f) = \frac{f^{(2m)}(\zeta)}{(2m)!} \frac{2^{1+\beta}}{2m + \beta + 1} \left(m! 2^m \frac{\Gamma(m + \beta + 1)}{\Gamma(2m + \beta + 1)} \right)^2. \quad (\text{B.1})$$

При $\beta = 0$ формула вырождается в хорошо известное представление для формул Гаусса – Лежандра

$$R(f) = f^{(2m)}(\zeta) \frac{2^{2m+1}}{2m + 1} \frac{(m!)^4}{((2m)!)^3}.$$

С использованием формул Стирлинга

$$m! \leq \sqrt{2\pi m} (m/e)^m \exp(1/(12m)), \quad \Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x} e^{\Theta(x)/(12x)},$$

где $0 < \Theta(x) < 1$, оценим выражение в больших скобках в (В.1):

$$\begin{aligned} m!2^m \frac{\Gamma(m + \beta + 1)}{\Gamma(2m + \beta + 1)} &\leq \sqrt{2\pi m} \frac{m^m}{e^m} 2^m \frac{(m + \beta + 1)^{m+\beta+1/2} e^{-(m+\beta+1)}}{(2m + \beta + 1)^{2m+\beta+1/2} e^{-(2m+\beta+1)}} e^{1/(6m)} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi m}}{2^{m+\beta}} \frac{(1 + (\beta + 1)/m)^{m+\beta+1/2}}{(1 + (\beta + 1)/(2m))^{2m+\beta+1/2}} e^{1/(6m)} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi m}}{2^{m+\beta}} \frac{(1 + (\beta + 1)/m)^m}{(1 + (\beta + 1)/(2m))^{2m}} \left(\frac{1 + (\beta + 1)/m}{1 + (\beta + 1)/(2m)} \right)^{\beta+1/2} e^{1/(6m)}. \end{aligned}$$

Последовательность $(1 + (\beta + 1)/m)^m$ является неубывающей с ростом m , поэтому вторая дробь в правой части не превосходит 1. Таким образом, при $-1/2 \leq \beta \leq 0$ имеем

$$m!2^m \frac{\Gamma(m + \beta + 1)}{\Gamma(2m + \beta + 1)} \leq \frac{\sqrt{\pi m}}{2^{m+\beta}} \sqrt{2} e^{1/(6m)} < 6 \frac{\sqrt{m}}{2^{m+1/2}},$$

откуда

$$R(f) \leq R_m \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(2m)}(x)| \frac{1}{(2m)!} \frac{1}{2^{2m+1}},$$

где $R_m \leq 36$ и $R_m \rightarrow 2^{1-\beta}\pi$ при $m \rightarrow \infty$. Для функций на отрезке $[a, b]$, соответственно, получаем

$$R(f) \leq R_m \sup_{a \leq x \leq b} |f^{(2m)}(x)| \frac{1}{(2m)!} \left(\frac{b-a}{4} \right)^{2m+1}. \quad (\text{В.2})$$

В.2. Составные квадратуры Гаусса. Основным инструментом для вычисления интегралов, рассматриваемых в настоящей работе, являются квадратурные формулы Гаусса – Лежандра. Погрешность квадратурной формулы с m узлами при интегрировании функции $f \in F_{(a,b)}(q, c_m)$ на отрезке $[a, b]$ имеет оценку (В.2):

$$R(f) \lesssim \frac{\pi}{2} (b-a) c_{2m} \left(\frac{b-a}{4} q \right)^{2m}. \quad (\text{В.3})$$

Хотя обычно увеличение числа узлов интерполяции в рамках формулы Гаусса даёт лучшую точность по сравнению с использованием составной формулы Гаусса при том же числе узлов, будем исходить из оценки (В.3). Тогда для составной формулы Гаусса с разбиением на $k = n/m$ отрезков при m узлах на отрезке получаем

$$R(f) \lesssim \frac{\pi}{2} (b-a) c_{2m} \left(\frac{b-a}{4k} q \right)^{2m}.$$

Найдём минимум этого выражения по k при фиксированном общем числе узлов $n = km$ в предположении, что $c_m = const$. Взяв логарифм и отбросив аддитивные константы, получаем

$$\frac{2n}{k} \ln \left(\frac{b-a}{4k} q \right) \rightarrow \min.$$

Минимум выражения $x \ln x$ достигается при $x = 1/e$, поэтому получаем оптимальное число делений $k_{opt} = (b-a)qe/4$. Так как оно может быть только натуральным числом, положим

$$k = \left\lceil (b-a)q \frac{e}{4} \right\rceil. \quad (\text{B.4})$$

Тогда $(b-a)q/(4k) \leq e$, и справедлива оценка ошибки

$$R(f) \lesssim \frac{\pi}{2} (b-a) c_{2m} \exp(-2m).$$

Чтобы достичь точности ε , нужно использовать

$$m \geq \left\lceil \frac{1}{2} (\ln(b-a) + \ln c_{2m} + \ln(1/\varepsilon)) \right\rceil \quad (\text{B.5})$$

узлов квадратурной формулы Гаусса – Лежандра на каждом подотрезке. Поскольку квадратурные формулы Гаусса требуют некоторых затрат на определение узлов и весов самой квадратурной формулы, удобно заранее определить максимальный требуемый порядок квадратурной формулы. Чтобы не заниматься оценкой величин c_{2m} , с запасом было выбрано $m = 32$ для двойной точности, $m = 64$ для четверной точности и т. д.

В.3. Вычисление интегралов с коренной особенностью. Рассмотрим теперь вопрос о вычислении интеграла вида

$$I = \int_0^b \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx, \quad (\text{B.6})$$

где $f(x) \in F_{(0,b)}(q, c_m)$. Будем пользоваться составной квадратурной формулой с числом частей, определяемым (B.4), причём длину левого отрезка положим равным $\min\{4/(eq), b\}$, а оставшуюся часть разобьём на $k-1$ частей равномерно.

Для левого отрезка будем использовать квадратуру Гаусса – Якоби с весом $1/\sqrt{x}$. Её оценка точности отличается от аналогичной оценки для формул

Гаусса – Лежандра только на множитель $1/\sqrt{2}$ (см. (В.2)), поэтому интеграл по этой части вычисляется с заданной точностью. Для остальных частей в силу (2.2) имеем $1/\sqrt{x} \in F_{(a,b)}(1/a, 1/\sqrt{a})$. Подставляя $a \geq 4/(eq)$ и пользуясь утверждением 2, получаем

$$f(x)/\sqrt{x} \in F_{(a,b)}(\max\{1/a, q\}, mc_m/\sqrt{a}) = F_{(a,b)}(q, mc_m\sqrt{eq}/2).$$

Таким образом, деление на \sqrt{x} не ухудшает параметр q в классе подынтегральной функции, и интегрирование по составной формуле Гаусса с k и m , определяемыми (В.4) и (В.5) соответственно (с подстановкой $mc_m\sqrt{eq}/2$ вместо c_m), позволяет вычислить интеграл (В.6) с требуемой точностью.

Отметим, что вместо использования квадратурных формул Гаусса – Якоби для вычисления интеграла по первой части отрезка можно использовать замену переменных $x = y^2/2$ и затем пользоваться квадратурными формулами Гаусса – Лежандра. Действительно, для первого отрезка запишем

$$I = \int_0^z \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\sqrt{2z}} f(y^2/2) dy, \quad (\text{В.7})$$

где $z \leq 4/(eq_f)$. По утверждению 3 при $y \leq \sqrt{2z}$ получаем

$$\left| (f(y^2/2))^{(m)} \right| \leq c_f m! (\sqrt{2z}q_f + \sqrt{q_f})^m \leq c_f m! q_f^{m/2} (\sqrt{8/e} + 1)^m.$$

Таким образом, для функции $g(y) = f(y^2/2)$ имеем $g \in F_{(0,\sqrt{2z})}(q)$ при $q \leq \sqrt{q_f}(\sqrt{8/e} + 1)$. Отсюда $q\sqrt{2z}e/4 \leq \sqrt{e/4} + \sqrt{2} \approx 2.25 < 3$, поэтому в силу (В.4) интеграл (В.7) может быть посчитан с точностью ε составной формулой Гаусса с разбиением на три части.

В.4. Обрезание гауссана. Рассмотрим интеграл вида (2.6). Для простоты ограничимся случаем $\gamma = -1/2$, полученные оценки остаются справедливыми и при $\gamma = 0$. Сделав замену переменных $x = \alpha(\xi - \xi_0)$, получаем

$$I = \alpha^{1/2-k} \int_{-\alpha\xi_0}^{\alpha(b-\xi_0)} \frac{h(x/\alpha + \xi_0)}{\sqrt{x/\alpha + \xi_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) x^k dx.$$

Сведём эту задачу к вычислению интеграла по конечному отрезку длиной не более чем порядка единицы. Для этого обрежем область интегрирования таким образом, чтобы отбрасываемый интеграл не превосходил $\varepsilon/2$. Положим область интегрирования равной (x_-, x_+) , где

$$x_- = \max\{-\alpha\xi_0 - H\}, \quad x_+ = \min\{\alpha(b - \xi_0), H\}, \quad (\text{В.8})$$

и оценим отбрасываемые интегралы. Для остатка справа имеем

$$I_+ \leq \alpha^{1/2-k} \int_H^\infty \frac{|h(x/\alpha + \xi_0)|}{\sqrt{x/\alpha + \xi_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) x^k dx \leq \frac{M\alpha^{-k}}{\sqrt{H}} \int_H^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) x^k dx,$$

где $M = \sup |h(\xi)|$. Поскольку при $H \geq 1$ имеем

$$\int_H^\infty x \exp(-x^2/2) dx = \exp(-H^2/2),$$

$$\int_H^\infty \exp(-x^2/2) dx \leq \int_H^\infty \frac{x}{H} \exp(-x^2/2) dx \leq \exp(-H^2/2),$$

достаточно положить $H \geq \max\{(2 \ln(2M\alpha^{-k}/\varepsilon))^{1/2}, 1\}$.

Для оценки остатка слева оценим

$$1/\sqrt{x/\alpha + \xi_0} \leq 1 + \Omega(x/\alpha + \xi_0)/\sqrt{x/\alpha + \xi_0},$$

где $\Omega(\xi) = 1$ при $0 < \xi < 1$ и 0 иначе. Тогда $I_- \leq I_-^{(1)} + I_-^{(2)}$, где

$$I_-^{(1)} = M\alpha^{1/2-k} \int_{-\alpha\xi_0}^{x_-} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) x^k dx,$$

$$I_-^{(2)} = M\alpha^{1/2-k} \int_{-\alpha\xi_0}^{x_-} \frac{\Omega(x/\alpha + \xi_0)}{\sqrt{x/\alpha + \xi_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) x^k dx.$$

Будем требовать, чтобы $|I_-^{(1)}| \leq \varepsilon/4$, $|I_-^{(2)}| \leq \varepsilon/4$. Интеграл $I_-^{(1)}$ оценивается аналогично правому остатку и даёт неравенство $H \geq \max\{(2 \ln(8M\alpha^{-k}/\varepsilon))^{1/2}, 1\}$.

В выражении для $I_-^{(2)}$ дробь проинтегрируем, а у остальных множителей возьмём максимум по области, в которой она отлична от нуля. Получим $|I_-^{(2)}| \leq 2M\alpha^{-k} \exp(-H^2/2) H^k$. Таким образом, нужно, чтобы выполнялось

$$\exp(-H^2/2) \max\{1, H\} < \frac{\varepsilon}{8M\alpha^{-k}}. \quad (\text{B.9})$$

Положим $H = \sqrt{2} \max\{1, \beta + \ln \beta/\beta\}$, где $\beta = \sqrt{\ln(8\sqrt{2}M\alpha^{-k}/\varepsilon)}$, и покажем, что (B.9) выполняется. Действительно, если $H > \sqrt{2}$, то

$$\begin{aligned} \exp(-H^2/2) \max\{1, H\} &\leq \exp(-(\beta + \ln \beta/\beta)^2) H \leq \\ &\leq \exp(-\beta^2) \beta^{-2} H \leq \frac{\varepsilon}{8\sqrt{2}M\alpha^{-k}} \beta^{-2} \sqrt{2} (\beta + \ln \beta/\beta) \leq \frac{\varepsilon}{8M\alpha^{-k}}, \end{aligned}$$

поскольку $\beta + \ln \beta / \beta \leq \beta^2$ при любых $\beta > 0$. Если же $H \leq \sqrt{2}$, то $\beta + \ln \beta / \beta \leq 1$, откуда $\beta \leq 1$, а значит, $\varepsilon / (8M\alpha^{-k}) > \sqrt{2}/e$. Левая часть неравенства при $H \geq \sqrt{2}$ монотонно убывает с H и, следовательно, не превосходит $\sqrt{2}/e$, поэтому неравенство выполняется.

Подытоживая, для вычисления интеграла с точностью ε мы можем положить

$$H = \sqrt{2} \max\{1, \beta, \beta + \ln(\beta)/\beta\}, \quad \beta = \sqrt{\ln(8\sqrt{2}M\alpha^{-k}/\varepsilon)}. \quad (\text{B.10})$$

При достаточно малых ε можно считать, что $H \approx \sqrt{2 \ln(c/\varepsilon)}$, где c зависит от M и α .

В.5. Вычисление интегралов с корнем и гауссианом. Сопоставим полученные результаты для построения алгоритма вычисления интегралов вида (2.6), то есть

$$I = \alpha^{-k-\gamma-1} \int_0^b \exp\left(-\frac{\alpha^2(\xi - \xi_0)^2}{2}\right) (\xi - \xi_0)^k h(\xi) \xi^\gamma d\xi, \quad (\text{B.11})$$

где $k \in \{0, 1\}$, $\gamma \in \{0, -1/2\}$, $b \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, а $g(x)$ – функция, лежащая в $F_{(0,b)}(q, c_m)$, причём $\sup |g(x)| \leq M$.

Вначале вычислим H по формуле (B.10) и положим границы области интегрирования равными $x_- = \max\{0, x_0 - H/\alpha\}$, $x_+ = \min\{b, x_0 + H/\alpha\}$. Вычисление интеграла по этой области будем проводить либо при помощи составных квадратур Гаусса, либо заменяя её на левом отрезке на квадратурную формулу Гаусса – Якоби. Последнее возможно только в том случае, если левая граница области интегрирования равна нулю. Если же левая граница близка к нулю, но не равна ему, то вторая формула неприменима, а первая сталкивается с трудностью. Поэтому если оказывается так, что $x_- = x_0 - H/\alpha < 4/(e \max\{q, \alpha\})$, то левая граница полагается равной нулю; количество отрезков интегрирования из-за этого увеличивается не больше, чем на единицу. Если после этой операции оказывается $x_- = 0$, то вычисление интегралов проводится методом, описанным в разделе В.5, в противном случае используются составные формулы Гаусса – Лежандра. По формуле (B.4) определяем число отрезков

$$k = \left\lceil \frac{e}{4} \max\{q, \alpha\} \frac{2H}{\alpha} \right\rceil + 1.$$

Дополнительная единица написана с учётом возможного смещения левой границы. Полагая $H = \sqrt{2 \ln(c/\varepsilon)}$ и пользуясь $e < 2\sqrt{2}$, получаем

$$k = \left\lceil 2 \max\left\{\frac{q}{\alpha}, 1\right\} \sqrt{\ln(c/\varepsilon)} \right\rceil + 1.$$

Остаётся умножить это число отрезков на число узлов квадратуры на каждом отрезке, заданное формулой (B.5). Тогда общее число узлов составной квадратурной формулы будет равно

$$\begin{aligned} N &= \left\lceil \frac{1}{2} (\ln(b-a) + \ln c_{2m} + \ln(1/\varepsilon)) \right\rceil \left(\left\lceil 2 \max \left\{ \frac{q}{\alpha}, 1 \right\} \sqrt{\ln(c/\varepsilon)} \right\rceil + 1 \right) \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \ln(\tilde{c}/(e\varepsilon)) + 1 \right) \left\lceil \max \left\{ \frac{q}{\alpha}, 1 \right\} \right\rceil \left(2\sqrt{\ln(\tilde{c}/\varepsilon)} + 2 \right) = \\ &= \left\lceil \frac{q}{\alpha} \right\rceil (\ln(\tilde{c}/\varepsilon) + 1) \left(\sqrt{\ln(\tilde{c}/\varepsilon)} + 1 \right), \end{aligned}$$

где $\tilde{c} = \max\{c, ec_{2m}(b-a)\}$. Отсюда получаем формулу (2.7).

С. Иные преобразования решения

в задаче о гауссовом импульсе в 2D

С.1. Сведение к уравнению теплопроводности. Получим (3.7) другим способом. Введём параметр α , характеризующий квадрат ширины импульса; нам нужно вычислить решение при $\alpha = 1/2$. Сделаем замену переменных $W = 4\pi\alpha u$. Тогда для задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi\alpha} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{4\alpha}\right), \end{aligned}$$

имеем решение

$$u(t, \mathbf{r}, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \exp(-\alpha\omega^2) J_0(\omega|\mathbf{r}|) \sin(\omega t) d\omega. \quad (\text{C.1})$$

Дифференцированием (C.1) по α и t получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad r > 0, \quad t > 0, \quad \alpha > 0.$$

Поскольку L_1 -норма функции $\exp(-|\mathbf{r}|^2/(4\alpha))/(4\pi\alpha)$ как функции на \mathbb{R}^2 равна 1, выполняется $\exp(-|\mathbf{r}|^2/(4\alpha))/(4\pi\alpha) \rightarrow \delta(\mathbf{r})$ в смысле $D'(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, при $\alpha = 0$ интеграл (C.1) является решением уравнения $\partial^2 u/\partial t^2 - \Delta u = 0$ с начальными данными $u(0) = 0$, $\partial u/\partial t(0) = \delta(\mathbf{r})$, что эквивалентно задаче с $\delta(\mathbf{r})\delta(t)$ в правой части. Таким образом, можно записать

$$u(t, r, 0) = \frac{1}{2\pi} (t^2 - r^2)_+^{-1/2},$$

где плюс означает, что выражение принимается равным нулю, если аргумент отрицательный. При $t = 0$ нужно задать граничные условия $u(0, r, \alpha) = 0$. Уравнение теплопроводности в области $t > 0, \alpha > 0$ с этими граничными условиями сводится к уравнению в области $\alpha > 0, t \in \mathbb{R}$, если доопределить начальные условия нечётным образом:

$$u(t, r, 0) = \text{sign}(t) \frac{1}{2\pi} (t^2 - r^2)_+^{-1/2}.$$

Решая уравнение теплопроводности, получаем

$$u(t, r, \alpha) = \tilde{u}(t, r, \alpha) - \tilde{u}(-t, r, \alpha),$$

$$\tilde{u}(t, r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha}} \int_r^\infty \exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{4\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} d\tau.$$

Полагая $\tau = r(\xi + 1)$, получаем

$$\tilde{u}(t, r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(t - r(\xi + 1))^2}{4\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{\xi(\xi + 2)}} d\xi.$$

Несложно заметить, что при $\alpha = 1/2$ выражение $4\pi\alpha u(t, r, \alpha) = 2\pi u(t, r, 1/2)$ совпадает с (3.7).

С.2. Свёртка с фундаментальным решением. Рассмотрим волновое уравнение (3.2) в области $t > 0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ с начальными условиями (3.3). Его решение можно получить свёрткой функции Грина с начальными данными:

$$\begin{aligned} W(t, \mathbf{r}) &= - \iint_{|\mathbf{x}| < t} \frac{\exp(-(\mathbf{x} + \mathbf{r})^2/2)}{2\pi\sqrt{t^2 - \mathbf{x}^2}} d\mathbf{x} = \\ &= - \int_0^t \frac{\exp(-(x^2 + r^2)/2)}{\sqrt{t^2 - x^2}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-xr \cos \phi) d\phi \right) x dx. \end{aligned}$$

Выражение в круглых скобках является не чем иным, как интегральным представлением модифицированной функции Бесселя. Таким образом,

$$W(t, \mathbf{r}) = - \int_0^t \frac{e^{-(x^2+r^2)/2}}{\sqrt{t^2 - x^2}} I_0(xr) x dx = - \int_0^t \frac{\exp(-(x-r)^2/2)}{\sqrt{t^2 - x^2}} e^{-xr} I_0(xr) x dx,$$

что совпадает с (3.10).

Д. К выводу решения задачи дифракции

Функция $H(t, r, \psi)$, заданная (4.5), является свёрткой функции

$$\hat{H}(t, r, \psi) = g(\psi)\Theta(t + r \cos \psi) + \frac{1 - 2g(\psi)}{2\pi}\Theta(t - r) \arccos \xi(t, r, \psi)d\tau, \quad (\text{D.1})$$

с функцией $F(x)$, являющейся первообразной от профиля волны. Выражение (D.1), (4.6) получается путём предельного перехода в функции Грина для дифракции на полупрямой (см. [13]) при удалении точки начального импульса на бесконечность и последующей свёртки с функцией $x_+^{-1/2}$. Приведём соответствующие выкладки.

Решение для задачи с точечным начальным возмущением задаётся формулами

$$W(t, r, \phi) = - \sum_{j=0}^{2n-1} H(t, r, \phi - \phi_j(\phi_0), r_0),$$

$$H(t, r, \psi, a) = \frac{1}{2\pi}(t^2 - (r \cos \psi - a)^2 - (r \sin \psi)^2)_+^{-1/2} g(t, r, \psi, a), \quad (\text{D.2})$$

где ϕ_j определены (4.3), а

$$g(t, r, \psi, a) = \begin{cases} 1/2, & t > r + a; \\ 1, & t < r + a, \quad -\pi < \psi < \pi \bmod 4\pi; \\ 0, & t < r + a, \quad -3\pi < \psi < -\pi \bmod 4\pi. \end{cases}$$

Рассмотрим 4π -периодическое по углу решение волнового уравнения (4.8) с точечным источником, действовавшим в точке $(a, 0)$ в момент времени $-a$, где $a > 0$. Это решение с точностью до множителя выражается формулой (D.2) с подстановкой $t + a$ вместо t :

$$\begin{aligned} H(t, r, \psi, a) &= \frac{g(t, r, \psi, a)}{2\pi} ((a + t)^2 - (r \cos \psi - a)^2 - (r \sin \psi)^2)_+^{-1/2} = \\ &= \frac{g(t, r, \psi, a)}{2\pi} (t^2 + 2at - r^2 + 2ra \cos \psi)_+^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{g(t, r, \psi, a)}{2\pi} (t + r \cos \psi)_+^{-1/2} \left(1 + \frac{t^2 - r^2}{2a(t + r \cos \psi)} \right)_+^{-1/2}. \end{aligned}$$

Домножая на $2\sqrt{2a}$ и устремляя $a \rightarrow \infty$, получим выражение для волны от бесконечно удалённого источника:

$$\begin{aligned}
 H(t, r, \psi) &= \frac{1}{\pi} (t + r \cos \psi)_+^{-1/2} \times \begin{cases} 1/2, & t > r, \\ 1, & t < r, \quad -\pi < \psi < \pi \bmod{4\pi}, \\ 0, & t < r, \quad -3\pi < \psi < -\pi \bmod{4\pi} \end{cases} = \\
 &= g(\psi) \frac{1}{\pi} (t + r \cos \psi)_+^{-1/2} + \frac{1 - 2g(\psi)}{2} \frac{1}{\pi} (t + r \cos \psi)_+^{-1/2} \Theta(t - r).
 \end{aligned}$$

Полученное выше решение в области, где полупрямая не влияет на решение, является плоской волной с профилем $t_+^{-1/2}$. Выполним такую свёртку, чтобы профиль решения в этой области стал функцией Хевисайда. Воспользуемся легко проверяемым равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_+^{-1/2} (t - y)_+^{-1/2} dy = \pi \Theta(t)$$

и вычислим свёртку полученного выше решения с функцией $t_+^{-1/2}$. Имеем

$$\hat{H}(t, r, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - y)_+^{-1/2} H(y, r, \psi) dy = g(\psi) \Theta(t + r \cos \psi) + \frac{1 - 2g(\psi)}{2} J(t, r, \psi),$$

где

$$J(t, r, \psi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (t - y)_+^{-1/2} (y + r \cos \psi)_+^{-1/2} \Theta(y - r) dy.$$

При $t < r$ рассеянная волна отсутствует и $J(t, r, \psi) = 0$. При $t > r$ имеем

$$J(t, r, \psi) = \frac{1}{\pi} \int_r^t (t - y)^{-1/2} (y + r \cos \psi)^{-1/2} dy = \frac{1}{\pi} \arccos \xi(t, r, \psi),$$

где $\xi(t, r, \psi)$ определено (4.6). Таким образом, получаем формулу (4.5).

Е. Задача о волне от гауссового импульса в 3D

Рассмотрим задачу для трёхмерного волнового уравнения (3.2) с начальными данными (3.3). В отличие от двумерного случая, решение этой задачи выражается в явном виде. С учётом сферической симметрии волновое уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) W = 0, \quad r > 0, \quad t > 0$$

и дополняется условием ограниченности при $r = 0$. Сделаем замену переменных $W(t, r) = v(t, r)/r$. Тогда граничное условие при $r = 0$ перепишется в виде $v(0) = 0$, а уравнение для новой функции v примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0, \quad r > 0, \quad t > 0,$$

с начальным условием $v(0, r) = 0$, $v_t(0, r) = -rp_0(r)$. Чтобы избавиться от граничного условия при $r = 0$, доопределим начальные условия на полупрямой $r < 0$ нечётным образом. Таким образом, приходим к задаче

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0, \quad r \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

с начальным условием $v(0, r) = 0$, $v_t(0, r) = -rp_0(r)$. Решение этой задачи выражается формулой Даламбера:

$$v(t, r) = -\frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} xp_0(x) dx = -\frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} x \exp(-x^2/2) dx.$$

Вычисляя этот интеграл и восстанавливая $W(t, r) = v(t, r)/r$, получаем

$$\begin{aligned} W(t, r) &= \frac{1}{2r} [\exp(-(r+t)^2/2) - \exp(-(r-t)^2/2)] = \\ &= -\frac{1}{r} \operatorname{sh}(tr) \exp(-(t^2 + r^2)/2). \end{aligned} \tag{E.1}$$

Для получения пульсации физических переменных продифференцируем волновой потенциал:

$$\begin{aligned} p'(t, r) &= \left[\operatorname{ch}(tr) - t^2 \frac{\operatorname{sh}(tr)}{tr} \right] \exp(-(t^2 + r^2)/2). \\ u'_r(t, r) &= \left[\operatorname{sh}(tr) + t^2 \frac{\operatorname{sh}(tr) - tr \operatorname{ch}(tr)}{(tr)^2} \right] \exp(-(t^2 + r^2)/2). \end{aligned}$$

Если $\delta = tr$ мало, то выражения вида $\operatorname{sh}(\delta)/\delta$ и $(\operatorname{sh}(\delta) - \delta \operatorname{ch}(\delta))/\delta^2$ вычисляются суммированием ряда Тейлора в окрестности $\delta = 0$. Тогда при вычислении этих выражений ошибки округления не накапливаются. Однако $\operatorname{sh}(tr)$ и $\operatorname{ch}(tr)$ могут выпасть за пределы диапазона чисел, представимых в стандартной машинной арифметике. Поэтому при $tr > 50$ используются выражения, полученные дифференцированием промежуточного выражения в (E.1):

$$\begin{aligned} p'(t, r) &= \frac{1}{2r} [(t+r) \exp(-(r+t)^2/2) - (t-r) \exp(-(r-t)^2/2)], \\ u'_r(t, r) &= -\frac{1}{2r} [(t+r) \exp(-(r+t)^2/2) + (t-r) \exp(-(r-t)^2/2)] - \frac{W(t, r)}{r}. \end{aligned}$$

Деление на r при $r \ll 1$ не приводит к накоплению ошибок округления, потому что $p'(t,0) = e^{-t^2/2}(1 - t^2)$ и пренебрежимо мало при $t \gg tr > 50$.

Иначе решение этой же задачи можно было бы получить, напрямую применив формулу Пуассона – Кирхгоффа [14]:

$$W(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi t} \iint_{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|=t} \exp(-|\boldsymbol{\xi}|^2/2) dS_{\boldsymbol{\xi}}.$$

Перейдём в сферическую систему координат с центром в точке измерения \mathbf{r} и направим одну из осей на центр источника. Обозначим через θ угол между $\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}$ и этой осью. Тогда

$$|\boldsymbol{\xi}|^2 = (t \cos \theta - r)^2 + (t \sin \theta)^2 = t^2 + r^2 - 2tr \cos \theta.$$

Интеграл по сфере $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| = t$ с учётом того, что решение на поверхности зависит только от θ , сводится к интегралу по θ с якобианом $2\pi t^2 \sin \theta$. Таким образом,

$$\begin{aligned} W(t, \mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi t} \iint_{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|=t} \exp(-|\boldsymbol{\xi}|^2/2) dS_{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= \frac{1}{4\pi t} 2\pi \int_0^\pi \exp(-(t^2 + r^2 - 2tr \cos \theta)/2) t^2 \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Проводя замену $\cos \theta = y$,

$$W(t, \mathbf{r}) = -\frac{t}{2} \exp(-(t^2 + r^2)/2) \int_{-1}^1 \exp(try) dy = -\exp(-(t^2 + r^2)/2) \frac{1}{r} \operatorname{sh}(tr).$$

Полученное выражение совпадает с (E.1).

Список литературы

1. Hardin, J. C., Ristorcelli J. R., Tam, C. K. W. ICASE/LaRC Workshop on Benchmark Problems in Computational Aeroacoustics: Tech. Rep.: : National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, Hampton, Virginia 23681-0001, 1995.
2. Indritz J. An inequality for Hermite polynomials // Proceedings of the American Mathematical Society. 1961. Vol. 12. P. 981–983.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987. с. 600.

4. Stenger F. Bounds on the error of Gauss-type quadratures // *Numerische Mathematik*. 1966. Т. 8. С. 150–160.
5. Hunter D. B. Some error expansions for Gaussian quadrature // *BIT Numerical Mathematics*. 1995. С. 64–82.
6. Milovanovic Gradimir, Cvetkovic Aleksandar. Convergence of Gaussian quadrature rules for approximation of certain series // *East J. Approx.* 2004. Т. 10. С. 171–187.
7. Tam C. K. W., Webb J. C. Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics // *J. Comput. Phys.* 1993. Vol. 107. P. 262–281.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963. с. 1108.
9. Бахвалов Н. С., Васильева Л. Г. Вычисление интегралов от осциллирующих функций при помощи интерполяции по узлам квадратур Гаусса // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1968. Т. 8, № 1. С. 175–181.
10. Piessens R., Poleunis F. A numerical method for the integration of oscillatory functions // *BIT Numerical Mathematics*. 1971. Vol. 11. P. 317–327.
11. Collection of exact solutions (ColESo). URL: <http://caa.imamod.ru/index.php/research/coleso>.
12. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. с. 832.
13. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М.: Наука, 1966. с. 455.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. с. 736.