[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](http://keldysh.ru/) • [Электронная библиотека](http://library.keldysh.ru/)

[Препринты ИПМ](http://library.keldysh.ru/preprints/) • [Препринт № 30 за 2020 г.](http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-30)

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Клюшнев Н.В.](http://keldysh.ru/)

Об использовании конечно-элементной аппроксимации на неструктурированной сетке для анализа устойчивости течений жидкости в каналах постоянного сечения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Клюшнев Н.В. Об использовании конечно-элементной аппроксимации на неструктурированной сетке для анализа устойчивости течений жидкости в каналах постоянного сечения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 30. 20 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-30
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-30

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Российской академии наук

Н. В. Клюшнев

Об использовании конечно-элементной аппроксимации на неструктурированной сетке для анализа устойчивости течений жидкости в каналах постоянного сечения

МОСКВА, 2020 г.

Н. В. Клюшнев

Об использовании конечно-элементной аппроксимации на неструктурированной сетке для анализа устойчивости течений жидкости в каналах постоянного сечения

Аннотация. Ранее была разработана технология численного анализа устойчивости течений вязкой несжимаемой жидкости в каналах постоянного сечения. Эта технология основана на оригинальных быстрых алгоритмах анализа дифференциально-алгебраических систем, возникающих после пространственной аппроксимации уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, линеаризованных относительно исследуемого основного течения. Используемые алгоритмы рассчитаны на работу с матрицами не очень больших порядков. В данной работе предлагается рассмотреть возможность расширения технологии на случай аппроксимаций, приводящих к большим разреженным матрицам. В частности, для решения частичных проблем собственных значений, возникающих при исследовании устойчивости течений, предлагается использовать новый эффективный метод ньютоновского типа. Работоспособность предложенного подхода показана на примере течения Пуазейля в канале круглого сечения и аппроксимации методом конечных элементов.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость, частичная проблема собственных значений, приближенный метод Ньютона, метод конечных элементов, неструктурированная сетка, разреженные матрицы, канал круглого сечения, FEniCS

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-71-20149).

N. V. Klyushnev

On utilizing the finite element method on unstructured meshes for stability analysis of flows in channels of constant cross-section

Abstract. Earlier a technique for numerical analysis of incompressible fluid flows in channels of constant cross section was developed. This technique is based on original effective algorithms of differential-algebraic systems analysis, which arise following the spatial approximation of the equations governing flow of viscid incompressible fluid, linearized around the main flow under investigation. The utilized algorithms are designed for matrices not of large dimensions. It is proposed in this study to look into the possibility of extending the technique to approximations leading to large sparse matrices. In particular, using a new effective Newton-type method is intended for solving partial eigenvalues problems, which arise in flows stability investigation. Performance ability of the proposed approach is demonstrated with the Poiseuille flow in a channel of circular cross-section and the finite element method approximation.

Key words: hydrodynamic stability, partial eigenvalue problem, inexact Newton method, finite element method, unstructured mesh, sparse matrices, channel of circular cross-section, FEniCS

Содержание

1. Введение

В работах [1, 2, 3, 4] была предложена и обоснована технология численного анализа временной и пространственной устойчивости течений вязкой несжимаемой жидкости в каналах постоянного сечения. Эта технология позволяет вычислять все характеристики устойчивости, которые, как принято считать [5], полностью описывают начальную стадию известных сценариев ламинарно-турбулентного перехода для широкого класса практически значимых течений, включая такие характеристики, как критические числа Рейнольдса, максимально возможную амплификацию кинетической энергии возмущений и оптимальные возмущения. Важными особенностями данной технологии являются использование алгебраической и спектральной редукции систем дифференциально-алгебраических уравнений, возникающих после пространственной аппроксимации уравнений движения жидкости, использование известных процедур FZERO и FMIN [6] для вычисления характеристик устойчивости с заданной относительной погрешностью, а также то, что основной объем вычислений приходится на стандартные матричные алгоритмы — это, в частности, упрощает перенос технологии на различные вычислительные конфигурации.

Большинство алгоритмов, используемых в технологии, например, разложение Шура или QR-алгоритм [7], ориентировано на работу с матрицами не очень больших порядков. К таким матрицам приводят, например, спектральные методы аппроксимации [8], в частности — спектральный метод коллокаций, вариации которого используются в данной технологии. Применение спектральных методов широко распространено при численном исследовании устойчивости течений [9, 5], поскольку наиболее неустойчивые возмущения являются, как правило, достаточно гладкими функциями. Такие возмущения спектральные методы позволяют аппроксимировать с высокой точностью (тем большей точностью, чем более гладкими являются возмущения), решая при этом вычислительные задачи с матрицами не очень больших порядков. Однако для устойчивости вычислений к ошибкам округления спектральным методам в большинстве случаев требуется расчетная сетка с узлами, являющимися корнями ортогональных многочленов, что приводит к необходимости строить отображение области определения этих многочленов на расчетную область. В работах, в которых ранее применялась рассматриваемая технология, таким отображением являлось отображение квадрата $[-1, 1] \times [-1, 1]$ в область поперечного сечения исследуемого канала. В случае канала прямоугольного сечения [10, 11] или канала с оребренными стенками [12, 13] отображение строится просто и не имеет особенностей. В некоторых случаях построение отображения требует применения специализированных методов — например, в [14] были использованы конформные отображения для случая, когда граница поперечного сечения канала не может быть задана функцией от координат — так называемое гребенчатое оребрение, представляющее собой бесконечно тонкие разрезы. В случае круглого или эллиптического сечения после перехода в эллиптико-полярные координаты система уравнений Навье-Стокса становится сингулярной, поскольку некоторые коэффициенты обращаются в бесконечность в центре канала. Эта проблема имеет чисто технический характер, поскольку в декартовых координатах сингулярности нет, и существует несколько стандартных путей ее решения. Например, установить в центре канала специальные граничные условия [15] или выбрать расчетную область и построить в ней сетку так, чтобы в центре канала не было границы области и узлов сетки [16, 17]. Тем не менее, эта проблема значительно осложняет [18] слабую постановку задачи, а отсутствие слабой постановки не позволяет в большинстве случаев (например, в спектральном методе коллокаций) сохранить на дискретном уровне некоторые важные свойства исходной непрерывной задачи, такие как симметричность и отрицательная определенность оператора Лапласа и соотношение между градиентом и дивергенцией, что может приводить к возникновению численных артефактов. Например, нефизичные возмущения, замеченные в работе [17], могут быть вызваны отсутствием этих свойств. Таким образом, в случае областей сложной формы естественно рассмотреть возможность использовать другие способы аппроксимации.

В данной работе предлагается расширить эту технологию анализа устойчивости течений на случай локальных пространственных аппроксимаций, приводящих к большим разреженным матрицам. Одной из таких аппроксимаций является метод конечных элементов, который хорошо зарекомендовал себя в задачах вычислительной аэро-гидродинамики (см., например, [19]). Он одинаково легко формулируется для структурированных и неструктурированных сеток, а использование последних позволяет аппроксимировать задачи в областях сложной формы без применения отображений. Также этот метод естественным образом включает в себя слабую постановку задачи, что позволяет сохранить на дискретном уровне важные свойства исходных операторов.

Такая аппроксимация приводит в случае достаточно мелких сеток к большим разреженным матрицам, поэтому возникает необходимость использовать специализированные алгоритмы, поскольку упомянутые выше стандартные требуют слишком много памяти или времени счета, не учитывая особенную структуру матриц — большое количество нулевых элементов.

Одной из основных вычислительных задач в данной технологии является решение проблем собственных значений — к этому сводится расчет нейтральных кривых и вычисление соответствующих критических чисел Рейнольдса. В случае больших разреженных матриц вместо полных решают частичные проблемы собственных значений, что предлагается делать с помощью нового эффективного метода ньютоновского типа, предложенного в [20, 21]. В сравнении с другими методами, широко используемыми для решения таких задач (Якоби-Давидсона, Арнольди и несимметричный метод Ланцоша), новый метод логически более прост и более надежен, а также требует значительно меньше оперативной памяти. Таким образом, предложенное в данной работе расширение технологии позволит, в частности, использовать аппроксимацию методом конечных элементов вместе с новым методом ньютоновского типа для построения нейтральных кривых и вычисления соответствующих критических чисел Рейнольдса для течений в каналах со сложной формой поперечного сечения.

В разделе 2 данной работы дана постановка задачи, в разделе 3 описаны элементы технологии исследования устойчивости течений и используемые нормировки, в разделе 4 кратко описана пространственная аппроксимация методом конечных элементов, а также спектральным методом коллокаций, который будет использоваться для верификации результатов. В разделе 5 приводятся результаты численных экспериментов для выбранной тестовой задачи — течения Пуазейля в канале круглого сечения. В последнем разделе подводится итог работы.

2. Постановка задачи

В декартовой системе координат с продольным направлением x, вертикальным направлением y и поперечным z рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в трехмерном бесконечном в продольном направлении канале

$$\{(x, y, z) : \ -\infty < x < \infty, \ y^2 + z^2 < R^2\} \tag{1}$$

постоянного круглого сечения

$$\Omega = \{(y, z) : y^2 + z^2 < R^2\},$$

где $R > 0$ — радиус сечения канала. Обозначим компоненты скорости вдоль этих направлений, давление, коэффициент кинематический вязкости и плотность среды через u, v, w, p, ν и ρ соответственно. Движение жидкости в этом канале определяется следующими трехмерными уравнениями Навье-

Стокса и уравнением неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\nu\triangle u=0,\\ \frac{Dv}{Dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\nu\triangle v=0,\\ \frac{Dw}{Dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\nu\triangle w=0,\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\frac{Df}{Dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+w\frac{\partial f}{\partial z}$$

означает полную производную по времени функции f, а $\triangle$ – оператор Лапласа,

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Одним из решений уравнений (2) с условием прилипания на стенках канала (1) является стационарное течение $u=U$, $v=0$, $w=0$, $p=-\tau x$, с заданным постоянным $\tau>0$, называемое течением Пуазейля, где $U=U(y,z)$ – профиль течения, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-\frac{\tau}{\nu\rho}$$

в области Ω с нулевыми граничными условиями. Нас будет интересовать устойчивость этого решения к малым возмущениям.

Записывая произвольное решение системы (2), близкое к течению Пуазейля, в виде

$$u=U+\delta u'+\mathcal{O}(\delta^2),\ v=\delta v'+\mathcal{O}(\delta^2),\ w=\delta w'+\mathcal{O}(\delta^2),$$

$$p=-\tau x+\delta p'+\mathcal{O}(\delta^2), \tag{3}$$

где δ — малый параметр, а u', v', w', p' — некоторые функции, не зависящие от δ, подставим его в (2). Потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли (2) при всех значениях δ в окрестности 0, и, отбросив нелинейные по δ члены, получим следующую систему линейных уравнений относительно u', v', w'

и p':

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t}+U\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}v'+\frac{\partial U}{\partial z}w'+\frac{\partial p'}{\partial x}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle u' &= 0,\\
\frac{\partial v'}{\partial t}+U\frac{\partial v'}{\partial x}+\frac{\partial p'}{\partial y}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle v' &= 0,\\
\frac{\partial w'}{\partial t}+U\frac{\partial w'}{\partial x}+\frac{\partial p'}{\partial z}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle w' &= 0,\\
\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z} &= 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

с нулевыми граничными условиями для u', v', w' на стенке канала. Здесь мы определили число Рейнольдса как $\mathrm{Re}=U(0,0)R/\nu$, где $U(0,0)$ — это максимальная скорость течения Пуазейля, то есть скорость в середине канала, и кроме того произвели нормировку, сохранив за переменными старые обозначения: скорость мы нормировали на $U(0,0)$, пространственные координаты на R, время на $R/U(0,0)$, давление на $\rho U^2(0,0)$ и τ на $\rho U^2(0,0)/R$. Полученная линеаризованная система будет описывать эволюцию малых возмущений в канале

$$\{(x,y,z):\ -\infty<x<\infty,\ y^2+z^2<1\} \tag{5}$$

постоянного круглого сечения

$$\Sigma=\{(y,z):y^2+z^2<1\}.$$

3. Исследование линейной устойчивости течения

Изучение линейной устойчивости течения Пуазейля сводится [9, 22, 5] к изучению устойчивости нулевого решения системы (4) к возмущениям вида:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}'(x,y,z,t) &= \mathbf{u}''(y,z)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\alpha x-\omega t)},\\
p'(x,y,z,t) &= p''(y,z)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\alpha x-\omega t)},
\end{aligned} \tag{6}$$

где i — мнимая единица, α — фиксированное вещественное продольное волновое число, ω — комплексная частота, $\mathbf{u}''=u''\mathbf{e}_x+v''\mathbf{e}_y+w''\mathbf{e}_z$, где вектора $\mathbf{e}$ — это единичные орты по направлениям осей. При $\alpha=\omega=0$ возмущения (6) являются действительными функциями, в противном случае — комплексными, однако самостоятельный физический смысл имеют их действительные и мнимые части, которые также удовлетворяют системе (4).

Подставляя (6) в (4), получим следующую проблему собственных значений

$$-\mathrm{i}\omega \mathbf{u}'' = J\mathbf{u}'' + \frac{1}{\mathrm{Re}} L\mathbf{u}'' + Gp'', \quad F\mathbf{u}'' = 0, \tag{7}$$

относительно спектрального параметра ω и функций $(\mathbf{u}, p)$, где

$$J = -\begin{bmatrix} \mathrm{i}\alpha U & \partial U/\partial y & \partial U/\partial z \\ 0 & \mathrm{i}\alpha U & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i}\alpha U \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}\alpha \\ -\partial/\partial y \\ -\partial/\partial z \end{bmatrix},$$

$$F = [\mathrm{i}\alpha, \partial/\partial y, \partial/\partial z]\,, \; L = -\alpha^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2,$$

рассматриваемую в области Σ с нулевыми граничными условиями.

В этом разделе мы будем предполагать, что проблема (7) была аппроксимирована некоторым образом по пространственным переменным, и в результате аппроксимации мы получили следующую обобщенную алгебраическую проблему собственных значений:

$$-\mathrm{i}\omega M\mathbf{u} = J_\alpha \mathbf{u} + \frac{1}{\mathrm{Re}} L_\alpha \mathbf{u} + G_\alpha p, \quad F_\alpha \mathbf{u} = 0, \tag{8}$$

где $\mathbf{u}$ и p — векторы коэффициентов разложения компонент скорости и давления по некоторым выбранным базисным функциям соответственно, M — квадратная матрица, а J_α, L_α, G_α, F_α — дискретные аналоги операторов в (7), представляющие собой числовые матрицы. В разделе 4 мы опишем два используемых в этой работе способа аппроксимации, приводящие к дискретной проблеме собственных значений вида (8).

Предположим, что матрица M невырожденная и при $\alpha > 0$ прямоугольные матрицы G_α и F_α имеют полный ранг, и кроме того выполняется условие

$$\mathrm{rank} G_\alpha = \mathrm{rank} F_\alpha = \mathrm{rank} F_\alpha M^{-1} G_\alpha. \tag{9}$$

В таком случае к проблеме (8) может быть применена алгебраическая редукция, предложенная и обоснованная в [1, 23], которая состоит в проектировании на подпространство соленоидальных функций. Такая редукция сводит обобщенную проблему (8) к обыкновенной проблеме собственных значений с матрицей существенно меньшего порядка: после редукции порядок сокращается на $2n_p$, где n_p — размерность дискретного пространства для поиска давления. Для этого сначала вычислим QR-разложения [7] матриц F_α^* и G_α:

$$F_\alpha^* = [Q_F, \tilde{Q}_F] \begin{bmatrix} R_F \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad G_\alpha = [Q_G, \tilde{Q}_G] \begin{bmatrix} R_G \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где Q_F и Q_G — унитарные прямоугольные матрицы, дополняющие матрицы $\tilde{Q}_F$ и $\tilde{Q}_G$ до квадратных унитарных, а R_F и R_G — квадратные невырожденные верхние треугольные матрицы. Произвольный вектор $\mathbf{u}$, удовлетворяющий второму уравнению в (8), однозначно представим в виде $\mathbf{u} = \tilde{Q}_F\tilde{\mathbf{u}}$. Подставим это представление в первое уравнение в (8) и умножим полученное уравнение слева на $\tilde{Q}_G^*$. Учитывая, что $\tilde{Q}_G^* G_\alpha = 0$, и разделив уравнение слева на матрицу из левой части, получим следующую обыкновенную проблему собственных значений:

$$-\mathrm{i}\omega\tilde{\mathbf{u}} = H\tilde{\mathbf{u}}, \tag{11}$$

где $H = (\tilde{Q}_G^* M \tilde{Q}_F)^{-1}(\tilde{Q}_G^*(J_\alpha + L_\alpha/\mathrm{Re})\tilde{Q}_F)$.

4. Пространственная аппроксимация

В данной работе проблема собственных значений (7) аппроксимировалась двумя способами. Первый способ — это метод Галеркина с использованием треугольных конечных элементов Тейлора-Худа [24, 19, 25], то есть линейных непрерывных базисных функций для аппроксимации давления и квадратичных непрерывных базисных функций для аппроксимации компонент скорости. На рис. 1 изображены такие базисные функции для одномерного случая. Эта пара конечных элементов удовлетворяет [19] условиям inf-sup (условиям Ладыженской-Бабушки-Брецци), что необходимо для устойчивой аппроксимации уравнений Навье-Стокса. При такой аппроксимации матрица M в (8) — это матрица масс, а дискретные аналоги операторов удовлетворяют (9) и обладают также следующими свойствами, унаследованными от непрерывных операторов:

$$G_\alpha = F_\alpha^*, \quad L_\alpha = L_\alpha^* < 0.$$

Кроме того, все матрицы в (8) являются разреженными. Эти матрицы вычислялись с помощью открытого программного пакета FEniCS [25], позволяющего записать слабую постановку, используя специальный высокоуровневый язык UFL, и автоматизировать дискретизацию задачи на некой заданной сетке.

Для построения неструктурированной треугольной расчетной сетки в круге Σ использовался открытый программный пакет Salome [26]. На рис. 2 изображена сетка, состоящая из 2866 элементов, использованная в одном из расчетов, описанных в следующем разделе. Все сетки для конечноэлементных расчетов в данной работе сгущались к границе, поскольку производная профиля течения Пуазейля растет при удалении от центра канала. Для построения двумерной сетки внутри области использовался алгоритм Netgen

2D, а для разбиения окружности на отрезки — алгоритм Wire Discretisation. При измельчении сетки изменялись четыре основных параметра этих алгоритмов: максимальный и минимальный линейные размеры двумерных элементов ($s_{\max}$ и $s_{\min}$), скорость роста размера двумерных элементов (g) и максимальная длина отрезка на окружности ($l_{\max}$). Параметр g, равный, например, 0.2, означает, что размеры соседних элементов не могут отличаться больше, чем на 20%. Изображенная на рис. 2 сетка была построена при $s_{\max} = 0.06$, $s_{\min} = l_{\max} = 0.03$ и $g = 0.2$ при нормировке на радиус окружности.

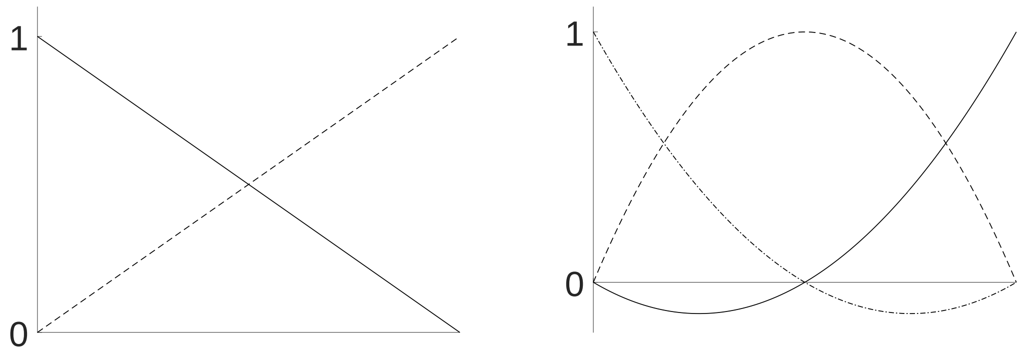

Рис. 1: Конечноэлементные базисные функции в одномерном случае: линейные (слева) и квадратичные (справа).

После применения редукции матрица H в (11) является плотной независимо от того, были ли плотными матрицы в (8), поэтому при аппроксимации методом конечных элементов мы применяли редукцию только для достаточно грубых сеток, когда порядок результирующих матриц позволял решить полную проблему собственных значений (11) на доступных компьютерах за приемлемое время. В случае мелких сеток мы решали частичную проблему собственных значений (8), используя специальный метод ньютоновского типа для матричных пучков с большими разреженными матрицами, предложенный и подробно описанный в [20, 21]. Этот метод предназначен для вычисления понижающих подпространств [7], отвечающих изолированным подмножествам конечных собственных значений регулярных матричных пучков вблизи заданной точки комплексной плоскости. Для получения хорошего начального приближения для метода ньютоновского типа используется приближенный метод обратных итераций с тюнингом. Основная часть вычислительных затрат обоих методов связана с решением систем линейных уравнений. Для этого в данной работе использовался метод обобщенных минимальных невязок (GMRES) с правым предобусловливанием, которое строилось на основе неполного LU-разложения.

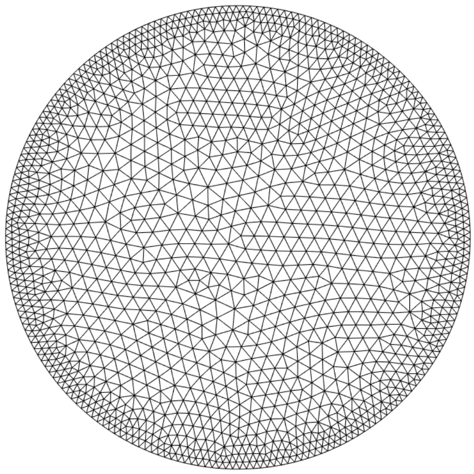

Рис. 2: Конечноэлементная сетка в области Σ, состоящая из 2866 треугольных элементов.

Второй способ аппроксимации проблемы собственных значений (7) — это спектральный метод коллокаций на основе многочленов Лежандра. Подробно такая аппроксимация описана в [17] для более общего случая канала эллиптического сечения. Для построения сетки мы использовали полярные координаты — область поперечного сечения канала отображалась в прямоугольник $[-\pi, \pi] \times [-1, 1]$ в координатах (θ, r), в котором строилась расчетная сетка. В качестве базисных функций по θ использовались тригонометрические интерполяционные полиномы, а в качестве базисных функций по r — интерполяционные полиномы Лагранжа. Расчетная сетка по направлению θ строилась равномерной, а по направлению r узлами являлись корни производной многочлена Лежандра. Такая сетка позволяет добиться большой устойчивости к ошибкам округления при полиномиальной интерполяции. Корни производной многочлена Лежандра сгущаются к границе отрезков, что обеспечивает также и сгущение сетки в области Σ к границе круга.

Поскольку в полярных координатах коэффициенты в системе Навье-Стокса зависят от угла только посредством $\sin 2\theta$ и $\cos 2\theta$, поиск решений системы можно свести к поиску решений, обладающих одной из четырех симметрий (две из которых совпадают в случае круглого сечения), состоящих в комбинации симметричности или антисимметричности компонент решения относительно осей области (см., например, [27] для более общего случая канала эллиптического сечения, в котором все четыре симметрии различны).

В результате аппроксимации этим методом матрица M в (8) является единичной, а дискретные аналоги операторов являются плотными матрицами не очень большого порядка, удовлетворяющими (9). Поскольку этот метод обладает высоким порядком аппроксимации, а также благодаря использованию описанной алгебраической редукции и учету симметрий задачи, спектр проблемы (11) удалось вычислять с высокой точностью, решая при этом полную проблему собственных значений на доступных персональных компьютерах.

5. Численные эксперименты

В этом разделе мы опишем результаты численных экспериментов. Сначала мы покажем, что спектр проблемы (11), полученный на основе аппроксимации методом коллокаций, сходится по шагу сетки, а также сравним его с расчетами из других работ. Далее мы будем сравнивать с ним спектр, вычисленный на основе аппроксимации методом конечных элементов. Сначала мы сравним полные спектры проблемы (11), затем подробнее покажем сходимость ведущих собственных значений обобщенной проблемы (8) на последовательности более мелких конечноэлементных сеток, решая частичную проблему собственных значений.

Во всех расчетах были выбраны следующие параметры: $\mathrm{Re} = 3000$ и $\alpha = 1$. Отметим, что течение Пуазейля в канале круглого сечения линейно устойчиво при любом числе Рейнольдса [22].

На рис. 3 приведен спектр проблемы (11), рассчитанный на основе метода коллокаций на двух сетках с количествами узлов $n_\theta \times n_r$, равными 30×20 и 60×40. Слева изображен практически полный спектр, за исключением некоторого количества собственных значений, далеко отстоящих от ведущей части. Это исключение было сделано для того, чтобы сделать рисунок более информативным. Справа изображена ведущая часть спектра. Из этого рисунка видно, что ведущие части спектров, рассчитанные на разных сетках, достаточно точно совпадают (4-5 значащих цифр в мнимой и действительной частях). Из рисунка слева видно, что чем дальше собственные значения находятся от ведущей части, тем хуже сходимость — это объясняется нарастающей ошибкой аппроксимации. Отметим, что этот факт не влияет на вычисление критических чисел Рейнольдса, поскольку они определяются ведущим собственным значением.

В таблице 1 сравниваются ведущие собственные значения, полученные на основе метода коллокаций на сетке 60×40, с собственными значениями, рассчитанными в работе [15] для канала круглого сечения и тех же параметров Re и α. Видно, что значения совпадают вплоть до всех знаков, приведенных в работе [15]. Далее мы будем считать спектр задачи (11), вычисленный на основе метода коллокаций, эталонным и будем сравнивать с ним собственные значения, полученные на основе метода конечных элементов.

Таблица 1: Три ведущих собственных значения проблемы (11): приведенные в работе [15] и рассчитанные на основе метода коллокаций.

	ω_1		ω_2		ω_3	
	Real	Imag	Real	Imag	Real	Imag
Работа [15]	0.91146557	−0.04127564	0.948360198	−0.051973123	0.888297659	−0.06028569
Метод коллокаций	0.911465567	−0.041275644	0.9483601984	−0.0519731232	0.8882976587	−0.060285689

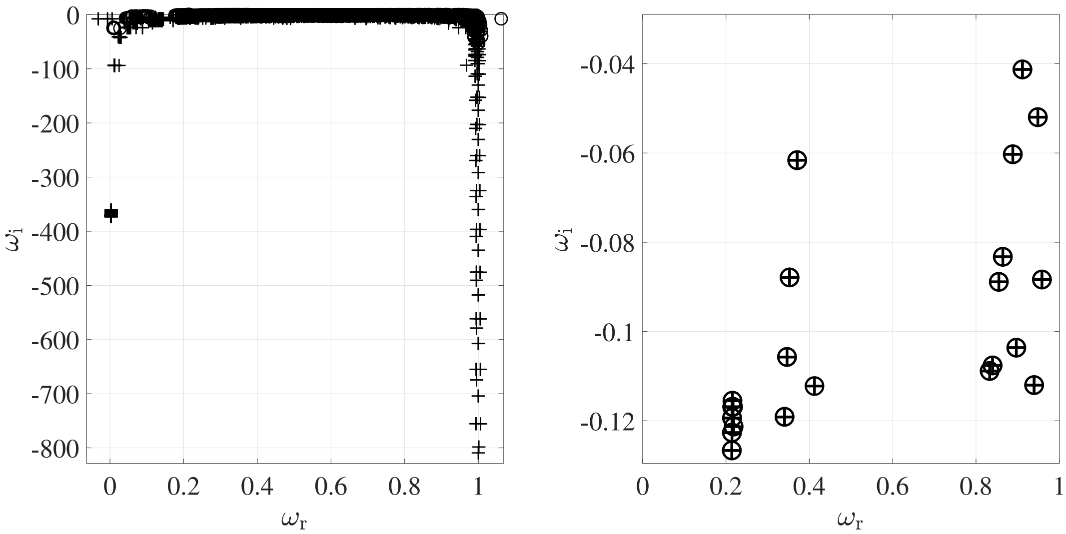

Рис. 3: Спектр проблемы (11), рассчитанный на основе метода коллокаций на двух сетках с количествами узлов $n_\theta \times n_r$, равными 30×20 ($\circ$) и $60 \times 40 (+)$.

На рис. 4 изображен спектр проблемы (11), рассчитанный на основе метода коллокаций на сетке 60×40 узлов, а также рассчитанный на основе метода конечных элементов на трех сетках с различным количеством элементов: 395, 758 и 2866. Во всех четырех случаях решалась полная проблема собственных значений. В первом случае после алгебраической редукции, а также учета симметрий решение проблемы собственных значений было сведено к решению четырех проблем порядка 1200. В остальных трех случаях порядок матрицы после редукции был равен 1954, 3856 и 15030 соответственно.

Из этого рисунка видно, что на двух грубых сетках метод конечных элементов дает далекие от эталонных ведущие собственные значения, однако с увеличением количества элементов еще в четыре раза они приближаются к эталонным.

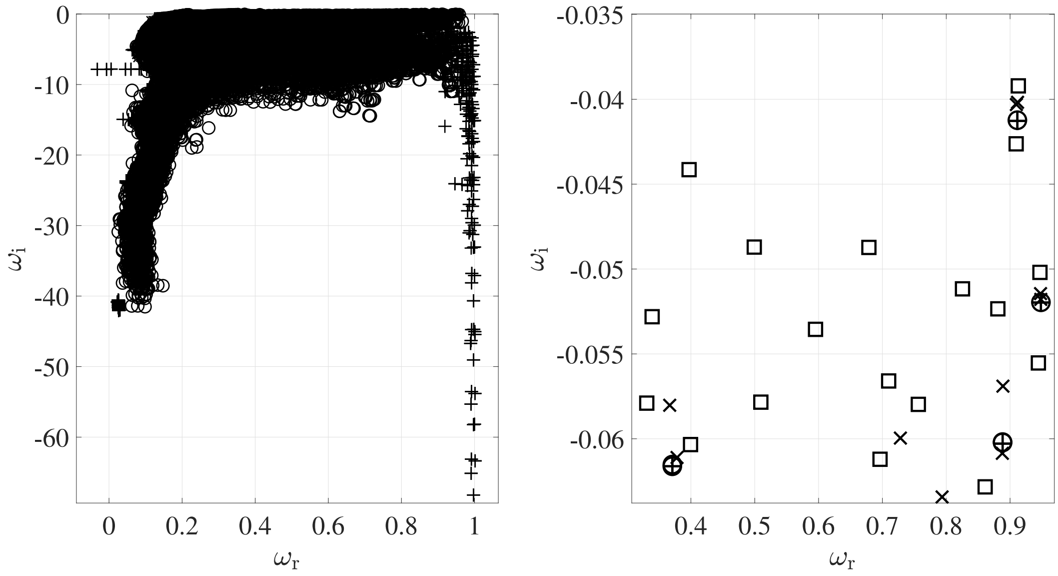

Рис. 4: Спектр проблемы (11), рассчитанный на основе метода коллокаций на сетке 60×40 узлов (+), а также рассчитанный на основе метода конечных элементов на сетках со следующим количеством элементов: 395 (□), 758 (×) и 2866 (○). Слева изображен практически полный спектр, справа — ведущая часть спектра.

На рис. 5 изображено ведущее собственное значение проблемы (11), рассчитанное на основе метода коллокаций на сетке 60×40 узлов, а также ведущее собственное значение обобщенной проблемы (8) рассчитанное на основе метода конечных элементов на сетках со следующим количеством элементов: 9673, 24593, 64880 и 109939. Порядок матриц проблемы (8) в этих случаях был равен: 62091, 158286, 419479 и 711465. Частичная проблема собственных значений для этих матриц решалась с помощью метода ньютоновского типа [20, 21], кратко описанного в предыдущем разделе. Отметим, что ведущие собственные значения этой задачи кратные, и на рисунке видно, как с измельчением сетки равенство двух вычисленных собственных значений удовлетворяется все точнее.

Видно, что с измельчением сетки ведущие собственные значения, вычисленные методом конечных элементов, сходятся к эталонным ведущим собственным значениям.

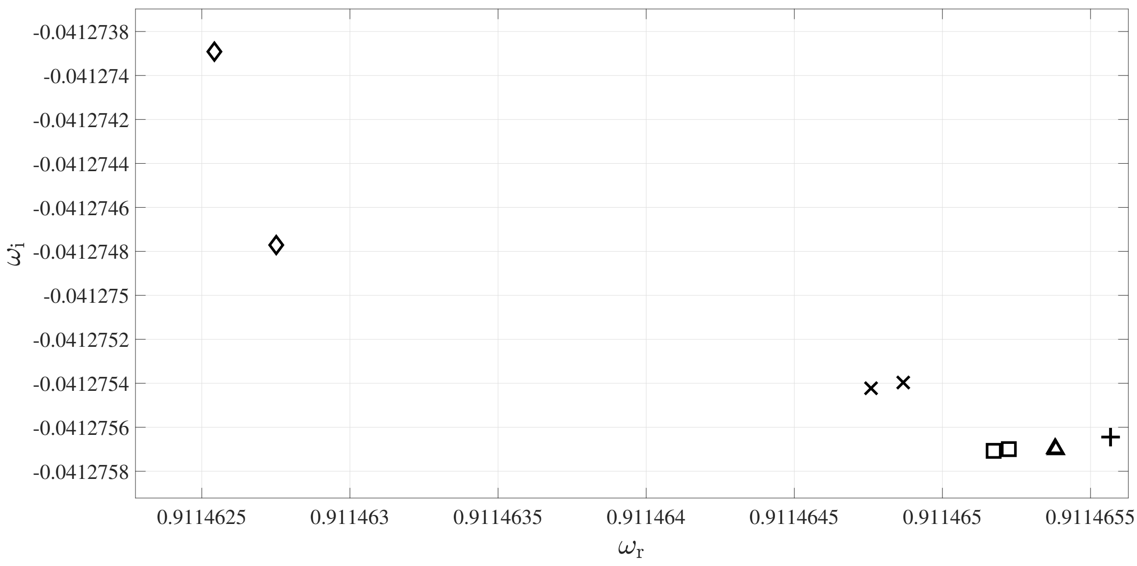

Рис. 5: Ведущее собственное значение проблемы (11), рассчитанное на основе метода коллокаций на сетке 60×40 узлов ($+$), а также ведущее собственное значение проблемы (8), рассчитанное на основе метода конечных элементов на сетках со следующим количеством элементов: 9673 ($\diamond$), 24593 ($\times$), 64880 ($\square$) и 109939 ($\triangle$).

6. Заключение

В работе продемонстрирована возможность расширить технологию исследования устойчивости течений вязкой несжимаемой жидкости [1, 2, 3, 4] на случай пространственных аппроксимаций, приводящих к большим разреженным матрицам, с помощью нового эффективного метода ньютоновского типа [20, 21] для решения частичных проблем собственных значений с такими матрицами. Работоспособность данного подхода показана на примере канала круглого сечения и аппроксимации методом конечных элементов. Показано совпадение полученных результатов с результатами, полученными другими методами, а также сходимость ведущих собственных значений по шагу сетки. Использованная аппроксимация на неструктурированной сетке не требует применения отображения области поперечного сечения канала для дискретизации задачи, а также дает возможность рассматривать каналы с поперечным сечением сложной формы.

Автор выражает благодарность Демьянко Кириллу Вячеславовичу (к.ф.-м.н., Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН) за плодотворные обсуждения и множество ценных советов.

Список литературы

[1] *Boiko A.V., Nechepurenko Yu.M.* Numerical spectral analysis of temporal stability of laminar flows in ducts of constant cross-sections // J. Comput. Math. Math. Phys. 2008. 48. 1731–1747.

[2] *Boiko A.V., Nechepurenko Yu.M.* Numerical study of stability and transient phenomena of Poiseuille flows in ducts of square cross-sections // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2009. 24(3). 193–205.

[3] *Boiko A.V., Nechepurenko Yu.M.* A technique for the numerical analysis of the riblet effect on the temporal stability of plane flows // J. Comput. Math. Math. Phys. 2010. 50(6). 1109–1125.

[4] Numerical analysis of spatial hydrodynamic stability of shear flows in ducts of constant cross section // J. Comput. Math. Math. Phys. 2018. 58(5). 700–713.

[5] *Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V.* Physics of transitional shear flows. Berlin: Springer, 2012.

[6] *Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler M.A.* Computer Methods for Mathematical Computations. N.Y.: Prentice-Hall, 1976.

[7] *Golub G.H., van Loan C.F.* Matrix computations. Third edt. London: The John Hopkins University Press, 1996.

[8] *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A.* Spectral methods. Fundamentals in single domains. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.

[9] *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and transition in shear flows. Berlin: Springer–Verlag, 2000.

[10] *Demyanko K.V., Nechepurenko Y.M.* Dependence of the linear stability of Poiseuille flows in a rectangular duct on the cross-sectional aspect ratio // Dokl. Phys. 2011. 56. 531–533.

[11] *Demyanko K.V., Nechepurenko Y.M.* Linear stability analysis of Poiseuille flow in a rectangular duct // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2013. 28(2). 125–148.

[12] *Boiko A.V., Klyushnev N.V., Nechepurenko Yu.M.* On stability of Poiseuille flow in grooved channels // Europhys. Lett. 2015. 111(1). 14001.p1–14001.p6.

[13] *Бойко А.В., Клюшнев Н.В., Нечепуренко Ю.М.* Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью. Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 123 с.

[14] *Grigoriev O.A., Klyushnev N.V.* Stability of the Poiseuille Flow in a Channel with Comb Grooves // J. Comput. Math. Math. Phys. 2018. 58. 581–592.

[15] *Schmid P.J., Henningson D.S.* Optimal energy density growth in Hagen-Poiseuille flow // J.Fluid Mech. 1994. 227. 197–225.

[16] *Fornberg B.* A pseudospectral approach for polar and spherical geometries // SIAM J. Sci. Comp. 1995. 16. 1071–1081.

[17] *Demyanko K.V.* Numerical model for the investigation of hydrodynamic stability of shear flows in pipes of elliptic cross-section // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling 2019. 34(6). 301–316.

[18] *Shen J.* Efficient Spectral-Galerkin Methods III: Polar and Cylindrical Geometries // SIAM J. Sci. Comput. 1997. 18(6). 1583–1604.

[19] *Gunzburger M.D.* Finite element methods for viscous incompressible flows. London: Academic Press, 1989.

[20] *Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M., Sadkane M.* A Newton-like method for computing deflating subspaces // J. Numer. Math. 2015. 23. 289-301.

[21] *Demyanko K.V., Kaporin I.E., Nechepurenko Yu.M.* Inexact Newton method for the solution of eigenproblems arising in hydrodynamic temporal stability analysis // Journal of Numerical Mathematics. 2019. In press.

[22] *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic stability, 2nd ed. Cambridge: University Press, 2004.

[23] *Nechepurenko Yu.M.* On the dimension reduction of linear diferential-algebraic control systems // Dokl. Math. 2012. 86. 457–459.

[24] *Taylor C., Hood P.* A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique // Computers & Fluids. 1973. 1(1). 73–100.

[25] *Logg A., Mardal K.-A., Wells G.N.* Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. Berlin Heidelberg: Springer–Verlag, 2012.

[26] *Ribes A., Caremoli C.* Salome platform component model for numerical simulation // COMPSAC 07: Proceeding of the 31st Annual International Computer Software and Applications Conference. Washington, DC, USA, IEEE Computer Society. 2007. P. 553-564.

[27] *Kerswell R.R., Davey A.* On the linear instability of elliptic pipe flow // J. Fluid. Mech. 1996. 316. 307–324.