



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 34 за 2020 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Попов И.В.](#)

Метод адаптивной
искусственной вязкости для
численного решения
гиперболических уравнений
и систем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости для численного решения гиперболических уравнений и систем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 34. 18 с. <http://doi.org/10.20948/prepr-2020-34>
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-34>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

И. В. Попов

**Метод адаптивной искусственной вязкости
для численного решения
гиперболических уравнений и систем**

Москва — 2020

И. В. Попов

Метод адаптивной искусственной вязкости для численного решения гиперболических уравнений и систем

В рассматриваемой работе приводится обоснование метода адаптивной искусственной вязкости (АИВ) для решения гиперболических уравнений и систем. Подробно описан алгоритм применения метода АИВ на примере системы уравнений газовой динамики. Предложены численные решения для задачи о распаде разрыва в одномерной и двумерной постановке.

Ключевые слова: адаптивная искусственная вязкость, газовая динамика, разностная схема.

I.V. Popov

Adaptive artificial viscosity method for the numerical solution of hyperbolic equations and systems

In this paper, the rationale for the adaptive artificial viscosity method (AAV) for solving hyperbolic equations and systems is given. The algorithm for applying the AIV method is described in detail on the example of a system of equations of gas dynamics. Numerical solutions are carried out for the problem of decay of a discontinuity in a one-dimensional and two-dimensional formulation.

Key words: adaptive artificial viscosity, gas dynamics, finite difference scheme.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 18-07-01292-а, 18-07-00841-а, 18-51-18004-Бол-а).

Оглавление

Введение.....	3
1. Построение метода АИВ для системы уравнений газовой динамики.....	4
2. Выбор искусственной вязкости и определение областей, занятых ударной волной (волной сжатия), волной разряжения, контактным разрывом, осцилляциями.....	8
3. Метод адаптивной искусственной вязкости.....	11
4. Примеры использования метода АИВ.....	13
Заключение.....	16
Список литературы.....	17

Введение

В основу метода АИВ положена идея, высказанная фон Нейманом в работе [1] и опубликованная в научной печати совместно с Рихтмайером в статье [2], состоящая в явном добавлении члена с искусственной вязкостью. Существуют также методы с неявным введением искусственной вязкости, но они не будут являться предметом рассмотрения в данной работе.

Метод АИВ предполагает введение члена с искусственной вязкостью явным образом, но в отличие от схемы фон Неймана и Рихтмайера, он вводится локально в зависимости от полученного решения (например, при появлении численной неустойчивости, связанной с изменением шага пространственной сетки, что может приводить к образованию ложной флуктуации энтропии, плотности и других вычислительных процессов, см. [3]) и от физических процессов (например, выделение областей с ударными волнами).

Важным условием при создании метода АИВ было сохранение консервативной формы записи уравнений, в частности, для уравнений газовой динамики сохранение консервативности величин массы, количества движения и полной энергии, что обеспечивает выполнение соотношений Рэнкина-Гюгонио на скачках. Следующим условием при разработке метода АИВ было получение решения в случае, когда дифференциальные задачи не имеют гладких решений, что приводит к понятию обобщенного решения. Для получения обобщенного решения был использован подход, описанный в книге С.К. Годунова и В.С. Рябенского [4], а именно: при стремлении искусственной вязкости к нулю полученное решение принимается за обобщенное решение. Этот подход, в частности, был реализован автором в работе [5] для нелинейного уравнения переноса.

Уравнения в частных производных в методе АИВ аппроксимировались в одномерном случае и в многомерном на ортогональной сетке конечными разностями. В многомерном случае на неструктурированных сетках использовалась аппроксимация конечно-объемная.

При разработке метода АИВ использовались и другие вычислительные методы и подходы, такие как метод предиктор-корректор, метод Лакса-Вендроффа.

Метод предиктор-корректор применялся в методе АИВ в модифицированном виде. Так, если в классической схеме на «предикторном» шаге находится грубое приближение решения, то на «корректорном» шаге уточняется полученное решение до заданной точности.

В методе АИВ для разностных уравнений и систем этот подход носит несколько иной характер, так как в эту схему добавляется еще один шаг. Опишем модифицированную схему. На первом (предикторном) шаге находится «чистое» решение со всеми особенностями, присущими выбранной разностной схеме.

Далее, на промежуточном шаге, это решение анализируется, выделяются области, в которых требуется корректировка решения. В этих областях

вводится вспомогательный разностный оператор, содержащий искусственную вязкость.

На втором (корректорном) шаге, с использованием результатов, полученных на промежуточном шаге, добавляем к решению, полученному на предикторном шаге, разностный оператор с искусственной вязкостью, тем самым получаем решение с требуемыми свойствами.

В методе АИВ, как отмечалось ранее, использует подход Лакса-Вендроффа для повышения порядка аппроксимации решения по времени.

1. Построение метода АИВ для системы уравнений газовой динамики

Рассмотрим метод АИВ подробнее на примере гиперболической системы уравнений, а именно, на системе уравнений газовой динамики.

Запишем уравнения газовой динамики в матричной форме

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v}B_A) + C_A = 0,$$

$$\text{где } A = \begin{Bmatrix} \rho \\ I_{\alpha}, \alpha = 1, D \\ E \end{Bmatrix}, B_A = \begin{Bmatrix} \rho \\ I_{\alpha}, \alpha = 1, d \\ E + p \end{Bmatrix}, C_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_{\alpha}}, \alpha = 1, d \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Здесь ρ – плотность, d – размерность пространства ($d = 2$ или $d = 3$),

$I_{\alpha}, \alpha = 1, d$ – компоненты импульса, $E = \rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2}$ – полная энергия, p –

давление. Система замыкается уравнением состояния $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, где ε – внутренняя энергия, γ – показатель адиабаты Пуассона.

Используя подход Лакса-Вендроффа, строим разностную схему со вторым порядком аппроксимации относительно шага по времени τ_n . Запишем

$$\frac{\partial A^n}{\partial t} = \frac{A^{n+1} - A^n}{\tau_n} - \frac{\tau_n}{2} \frac{\partial^2 A^n}{\partial t^2}.$$

Здесь $\frac{\partial A^n}{\partial t}$ заменим на $-\left(\operatorname{div}(\bar{v}B_A) + C_A\right)$, а вторые производные по времени с помощью исходных уравнений выразим через производные по

пространственным переменным. С точностью до множителя $\frac{\tau_n}{2}$ получим поправки Лакса-Вендроффа

$$\frac{\partial^2 A^n}{\partial t^2} = \operatorname{div} \vec{Q}_A + F_A.$$

$$\text{Здесь } \vec{Q}_A = \left\{ Q_{A\beta} = \operatorname{div} \left(\vec{v} v_\beta R_A \right) + R_A \frac{\partial p}{\partial x_\beta} + v_\beta G_A, \beta = \overline{1, d} \right\},$$

где $Q_{A\beta}$, $\beta = \overline{1, d}$ – компоненты вектора \vec{Q}_A . Вместо величины B_A введена

$$\text{величина } R_A = \frac{B_A}{\rho},$$

$$G_A = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}, \alpha = \overline{1, d} \\ g \end{array} \right\},$$

$$F_A = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_\alpha}, \alpha = \overline{1, d} \\ 0 \end{array} \right\},$$

и

$$g = (\gamma - 1) p \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{div} (\vec{v} p).$$

Уравнение для давления p имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -g.$$

По аналогии с основными уравнениями уравнение для давления с поправками Лакса-Вендроффа принимает вид, аналогичный предыдущему

$$\frac{\partial p^n}{\partial t} = \frac{p^{n+1} - p^n}{\tau_n} - \frac{\tau_n}{2} \frac{\partial^2 p^n}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 p^n}{\partial t^2} = \operatorname{div} \vec{Q}_p^n + F_p^n.$$

Здесь

$$\vec{Q}_p^n = \left\{ Q_{p\beta} = \operatorname{div} \left(\bar{v} \rho v_{\beta} p \right) + c^2 \frac{\partial p}{\partial x_{\beta}} + (\gamma - 1) p v_{\beta} \operatorname{div} \bar{v}, \beta = \overline{1, d} \right\}$$

$$F_p = (\gamma - 1) \left(g \operatorname{div} \bar{v} + p \operatorname{div} \vec{G} - \frac{(\operatorname{grad} p)^2}{\rho} \right),$$

$$\vec{G} = \left\{ G_{\beta} = \operatorname{div} \left(v_{\beta} \bar{v} \right) - v_{\beta} \operatorname{div} \bar{v}, \beta = \overline{1, d} \right\}, c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \text{ — скорость звука.}$$

Далее необходимо аппроксимировать дифференциальные операторы div , grad и пространственные производные как в исходных уравнениях, так и в поправках Лакса-Вендроффа. На рис. 1 представим основные величины, заданные на сетке.

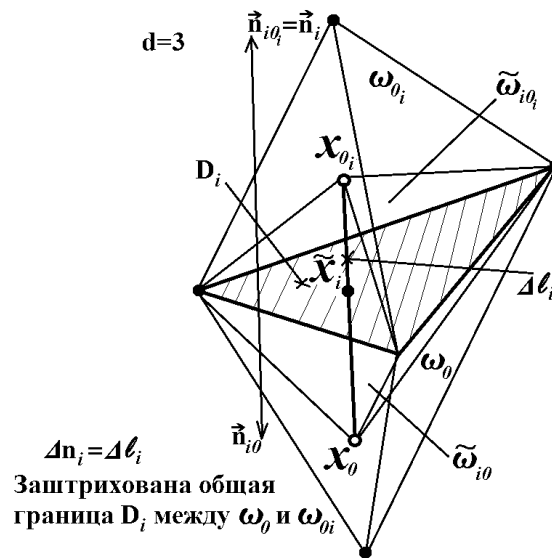


Рис. 1

Пусть \vec{W}_q — вектор потока величин $q = (\rho, I_{\alpha}, E)$ в направлении нормали \vec{n}_i в узле \tilde{x}_i , тогда дивергенцию вектора \vec{W}_q аппроксимируем следующим образом:

$$\operatorname{div}_0^h \vec{W}_q = \frac{1}{\omega_0} \sum_i \left(W_q \right)_i D_i,$$

$$(W_q)_i = \langle \rho v_{n_i} \rangle_i = \begin{cases} \frac{1}{\Delta n_i} \left((\rho v_{n_i})_0 \Delta n_{i0} + (\rho v_{n_i})_{0_i} \Delta n_{i0} \right), & \tilde{x}_i \notin \tilde{\Gamma}_h \\ (\rho v_{n_i})_0, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_h \end{cases}$$

где $\tilde{\Gamma}_h$ – граница расчетной области.

$$\text{grad}_{\alpha 0}^h \bar{p} = \frac{1}{\omega_0} \sum_i D_i \bar{p}_i \cos(n_l, x_\alpha), \quad \alpha = \overline{1, d}.$$

Подробный вывод аппроксимаций операторов и поправок Лакса-Вендроффа можно найти в работе [6].

В итоге исходные уравнения в разностном виде примут вид:

$$\frac{q_0^{n+1} - q_0^n}{\tau_n} + \frac{1}{\omega_0} \sum_i (W_q)_i D_i + \delta_{q I_\alpha} \text{grad}_{\alpha 0}^h \bar{p} = 0, \quad q = (\rho, I_\alpha, E),$$

$$(W_\rho)_i = \langle \rho v_{n_i} \rangle_i, \quad (W_{I_\alpha})_i = \langle \rho v_{n_i} \rangle_i \hat{v}_{\alpha i},$$

$$(W_E)_i = \langle \rho v_{n_i} \rangle_i \left(\sum_{\alpha=1}^D \frac{v_{\alpha 0} v_{\alpha 0_i}}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \left\langle \frac{p}{\rho} \right\rangle_i \right) + \bar{p}_i \langle v_{n_i} \rangle_i,$$

$$p_0 = (\gamma-1) \left(E_0 - \rho \frac{(\bar{v}_0)^2}{2} \right),$$

$$\langle \rho v_{n_i} \rangle_i = \begin{cases} \frac{1}{\Delta n_i} \left(p_0 \Delta n_{i0} + p_{0_i} \Delta n_{i0} \right), & \tilde{x}_i \notin \tilde{\Gamma}_h, \\ p_0, & \tilde{x}_i \in \tilde{\Gamma}_h \end{cases}$$

$$\hat{v}_{\alpha i} = \frac{1}{2} \left(v_{\alpha 0} + v_{\alpha 0_i} \right), \quad \alpha = \overline{1, d}.$$

Следует также аппроксимировать поправки Лакса-Вендроффа.

2. Выбор искусственной вязкости и определение областей, занятых ударной волной (волной сжатия), волной разряжения, контактными разрывами, осцилляциями

Выбор искусственной вязкости обусловлен обеспечением выполнения условия принципа максимума при «замороженных» (см. работу [4]) v_α , μ , геометрических величинах и энтропии, для обеспечения устойчивости и монотонности разностной схемы.

Встает вопрос, как выбрать искусственную вязкость. Для этого рассмотрим случай, когда $\vec{v} = \vec{v}_0$, $p = p_0$, где $\vec{v}_0 = const$ – постоянный вектор, $p_0 = const$ – постоянное давление. В этом случае уравнение неразрывности примет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}_0, \nabla \rho) = 0.$$

А уравнения для импульса и полной энергии можно получить, умножая уравнение неразрывности соответственно на \vec{v}_0 и $\sum_k \frac{(v_k)_0^2}{2}$, поэтому искусственную вязкость μ будем находить из уравнения неразрывности.

Система уравнений в дифференциальной форме с оператором, содержащим искусственную вязкость, записывается в виде:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v} B_A) + C_A = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} A),$$

где μ – искусственная вязкость. В разностном виде систему уравнений можно записать

$$\frac{q_0^{n+1} - q_0^n}{\tau_n} + L_{hq}(\bar{q}_0)^n = \left(\Lambda_h(\mu^{n+1}) q_0^n \right),$$

$$\text{где } L_{hq}(\bar{q}_0)^n = \operatorname{div}_0^h \bar{W}_q^n + \delta_{qI\alpha} \operatorname{grad}_{\alpha 0}^h \bar{p},$$

$$\left(\Lambda_h(\mu^{n+1}) q_0^n \right) = \sum_i D_i \mu_i^{n+1} \frac{q_{0i}^n - q_0^n}{\Delta n_i}.$$

Итак, искусственная вязкость находится из уравнения неразрывности с заменой $\frac{\rho_{0i}^n - \rho_0^n}{\Delta n_i}$ на $c^2 \frac{\rho_{0i}^n - \rho_0^n}{\Delta n_i}$ (т.к. $c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$), тогда уравнение

неразрывности запишем в виде:

$$\rho_0^{n+1} = \left[1 - \frac{\tau}{\omega_0} \sum_i D_i a_i \right] \rho_0^n + \frac{\tau}{\omega_0} \sum_i D_i \left(-\frac{v_{n_i}}{2} + a_i \right) \rho_{0_i}^n,$$

$$\text{где } a_i = \frac{1}{\Delta n_i} \left[\mu + \frac{\tau}{2} \left(c^2 + \left(\sqrt{d} (v_n)_i \right)^2 \right) \right].$$

Принцип максимума имеет место, если множители при ρ_0^n и $\rho_{0_i}^n$ будут положительными, тогда в силу того, что $\sum_i D_i v_{n_i} = 0$, будет иметь место

$$\max_{\Omega_k} \left| \rho_0^{n+1} \right| \leq \max_{\Omega_k} \left| \rho_0^n \right|.$$

Из условий $-\frac{v_{n_i}}{2} + a_i > 0$ и $1 - \frac{\tau}{\omega_0} \sum_i D_i a_i > 0$.

Если представить во втором неравенстве единицу в виде

$$1 = \frac{1}{\omega_0} \sum_i D_i \frac{\Delta n_i}{2d},$$

то получим

$$\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max},$$

$$\text{где } \mu_{\min} = \frac{h}{2} \left| \sqrt{d} v_{n_i} \right| \left(1 - \frac{\tau}{h} \sqrt{\left(\sqrt{d} v_{n_i} \right)^2 + c^2} \right),$$

$$\mu_{\max} = \frac{h}{2} \sqrt{\left(\sqrt{d} v_{n_i} \right)^2 + c^2} \left(1 - \left(\frac{\tau}{h} \sqrt{\left(\sqrt{d} v_{n_i} \right)^2 + c^2} \right)^2 \right), \quad h = \frac{\Delta n}{\sqrt{d}}, \quad d = 2, 3.$$

Искусственную вязкость будем вводить следующим образом:

$$\mu^{n+1} = \begin{cases} \mu_{\max}^n, & x_0 \in OC \\ \mu_{\min}^n, & x_0 \in YB. \\ 0, & x_0 \in KP, BP \end{cases}$$

Здесь OC – численные осцилляции решения, $УВ$ – ударная волна, $КР$ – контактный разрыв, $ВР$ – волна разряжения.

Для определения типа разрыва воспользуемся уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon.$$

Для этого продифференцируем это уравнение по направлению возрастания градиента плотности

$$\vec{\ell} = \frac{\text{grad } \rho}{|\text{grad } \rho|}, \text{ получим } \frac{\partial p}{\partial \vec{\ell}} = (\gamma - 1) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{\ell}} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial \vec{\ell}} \varepsilon \right).$$

На размытом малой вязкостью $КР$ производная $\frac{\partial p}{\partial \vec{\ell}}$ конечна, производные

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{\ell}} \text{ и } \frac{\partial \rho}{\partial \vec{\ell}} \text{ велики. Чтобы равенство было выполнено, производные } \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{\ell}} \text{ и } \frac{\partial \rho}{\partial \vec{\ell}}$$

должны иметь противоположные знаки. Заменим ε на $\frac{p}{(\gamma - 1) \rho}$, получаем,

$$\text{что на } КР \frac{\partial}{\partial \vec{\ell}} \left(\frac{p}{\rho} \right) < 0.$$

На $УВ$ и $ВР$ неравенство имеет противоположный знак. На $УВ$ ($ВС$ – волна сжатия) справедливо также неравенство

$$\frac{\partial v_{\vec{\ell}}}{\partial \vec{\ell}} < 0.$$

На $ВР$ последнее неравенство имеет противоположный знак.

В итоге приведем таблицу 1, где выписаны неравенства для определения областей, занятых $КР$, $ВР$ и $УВ$.

Таблица №1.

	КР	ВР	УВ
1D	$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} < 0$	$\frac{\partial v}{\partial x} > 0$	$\frac{\partial v}{\partial x} < 0$
2D 3D	$\vec{l} = \frac{\nabla \rho}{ \nabla \rho };$ $\frac{\partial}{\partial \vec{l}} \left(\frac{p}{\rho} \right) < 0$	$\frac{\partial v_{\vec{l}}}{\partial \vec{l}} > 0$ $(v_{\vec{l}} < 0)$	$\frac{\partial v_{\vec{l}}}{\partial \vec{l}} < 0$ $(v_{\vec{l}} < 0)$
	На У.В. и В.Р. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0$ (1D) и $\frac{\partial}{\partial \vec{l}} \left(\frac{p}{\rho} \right) > 0$ (2D, 3D)		

3. Метод адаптивной искусственной вязкости

Опишем метод АИВ пошагово.

На первом (предикторном) этапе по значениям

$$q^n = \left\{ \begin{array}{l} \rho^n \\ I_{\alpha}^n = (\rho v_{\alpha})^n, \alpha = \overline{1, d} \\ E^n \\ p^n \end{array} \right\}$$

на момент времени $t = t_n$, находим предикторное решение

$$\tilde{q}^{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}^{n+1} \\ \tilde{I}_{\alpha}^{n+1} = (\tilde{\rho} \tilde{v}_{\alpha})^{n+1}, \alpha = \overline{1, d} \\ \tilde{E}^{n+1} \\ \tilde{p}^{n+1} \end{array} \right\}$$

по разностной схеме без искусственной вязкости $\mu = 0$

$$\frac{\tilde{q}_0^{n+1} - q_0^n}{\tau_n} + L_{hq} \left(\tilde{q}_0 \right)^n = 0,$$

$$\tilde{p}_0^{n+1} = (\gamma - 1) \left(\tilde{E}_0^{n+1} - \frac{\tilde{\rho}_0^{n+1} (\tilde{v}_0^{n+1})^2}{2} \right).$$

Также на этом этапе добавляются граничные условия.

Перед вторым (корректорным) этапом по предикторным значениям находится искусственная вязкость

$$\mu^{n+1} = \mu(\tilde{q}^{n+1})$$

в зависимости от типов разрывов и наличия осцилляций решения.

На втором этапе по предикторным решениям находим корректорное решение с учетом разностного оператора, содержащего искусственную вязкость

$$q^{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \rho^{n+1} \\ I_\alpha^{n+1} = (\rho v_\alpha)^{n+1}, \alpha = \overline{1, d} \\ E^{n+1} \\ p^{n+1} \end{array} \right\},$$

используя разностную схему

$$\frac{q_0^{n+1} - \tilde{q}_0^{n+1}}{\tau_n} = \left(\Lambda_h(\mu^{n+1}) q_0^n \right),$$

$$p_0^{n+1} = (\gamma - 1) \left(E_0^{n+1} - \frac{\rho_0^{n+1} (v_0^{n+1})^2}{2} \right).$$

Таким образом, переход от временного слоя t_n к слою t_{n+1} завершён.

В этом методе шаг по времени определяется заданным числом Куранта Ku , по следующей формуле:

$$Ku = \max_{\Omega_i} \sqrt{\left(\sqrt{d} v_{n_i}^n \right)^2 + \left(c_i^n \right)^2}, \left(c_i^n \right)^2 = \gamma \left| \frac{p_{0_i} + p_0}{\rho_{0_i} + \rho_0} \right|.$$

Число K_i бралось в расчётах $0.3 \div 0.6$. Иногда расчёты проводились и при больших значениях числа Куранта.

4. Примеры использования метода АИВ

Для понимания и наглядности сначала рассмотрим, как работает метод АИВ в одномерном случае. Все параметры задачи о распаде разрыва при большом начальном скачке плотности и давления приведены на рис. 2. На этом рисунке на момент времени $t = 4.5$ представлены следующие результаты.

На первой картинке представлено численное решение задачи по явной разностной схеме с поправками Лакса-Вендроффа без искусственной вязкости на всем протяжении расчета до момента времени $t = 4.5$. На представленном рисунке видно, что развивается численная неустойчивость, которая приводит к ухудшению вида УВ и полной потере КР. При дальнейшем расчете неустойчивость только усиливается и приводит в конечном счете к невозможности дальнейшего расчета.

На последующих картинках $2 \div 5$ представлен полный цикл работы метода АИВ при переходе с t_n слоя по времени на t_{n+1} слой. Рассмотрим подробнее этапы работы метода АИВ для данной задачи.

На второй картинке рис. 2 представлено решение на момент времени t_{n+1} , полученное на предикторном этапе по явной разностной схеме с поправками Лакса-Вендроффа без искусственной вязкости. На этом этапе решение имеет малые осцилляции решения, незаметные на изображении. Далее переходим к промежуточному этапу: определению областей, занятых УВ, КР и ВР, а также определению областей, где возникает численная неустойчивость. На третьей картинке изображен график искусственной вязкости, рассчитанной по плотности на предикторном этапе.

На четвертой картинке представлено значение разностного оператора, содержащего искусственную вязкость.

На пятой картинке приведено численное решение на корректорном этапе с учетом разностного оператора, содержащего искусственную вязкость. На этом этапе все неустойчивости подавлены.

На рис. 3 представлены результаты численного расчета той же задачи, что на рис. 2, но на момент времени $t = 11$. По полученным результатам видно, что по прошествии времени решение остается устойчивым и монотонным.

Из приведенных результатов для искусственной вязкости по этим рисункам становится понятным слово **адаптивная** в названии метода АИВ. Это означает, что искусственная вязкость вводится только в тех случаях, когда требуется подавить численную неустойчивость решения, причем она различна в разные моменты времени.

$RoL = 8$ $RoR = 1$ $X_0 = 50$ $h = 1$ $Ku = 0.3$
 $UL = 0$ $UR = 0$ $L = 100$ $Time = 4.5$
 $EpsL = 60$ $EpsR = 1$ $Gamma = 5/3$

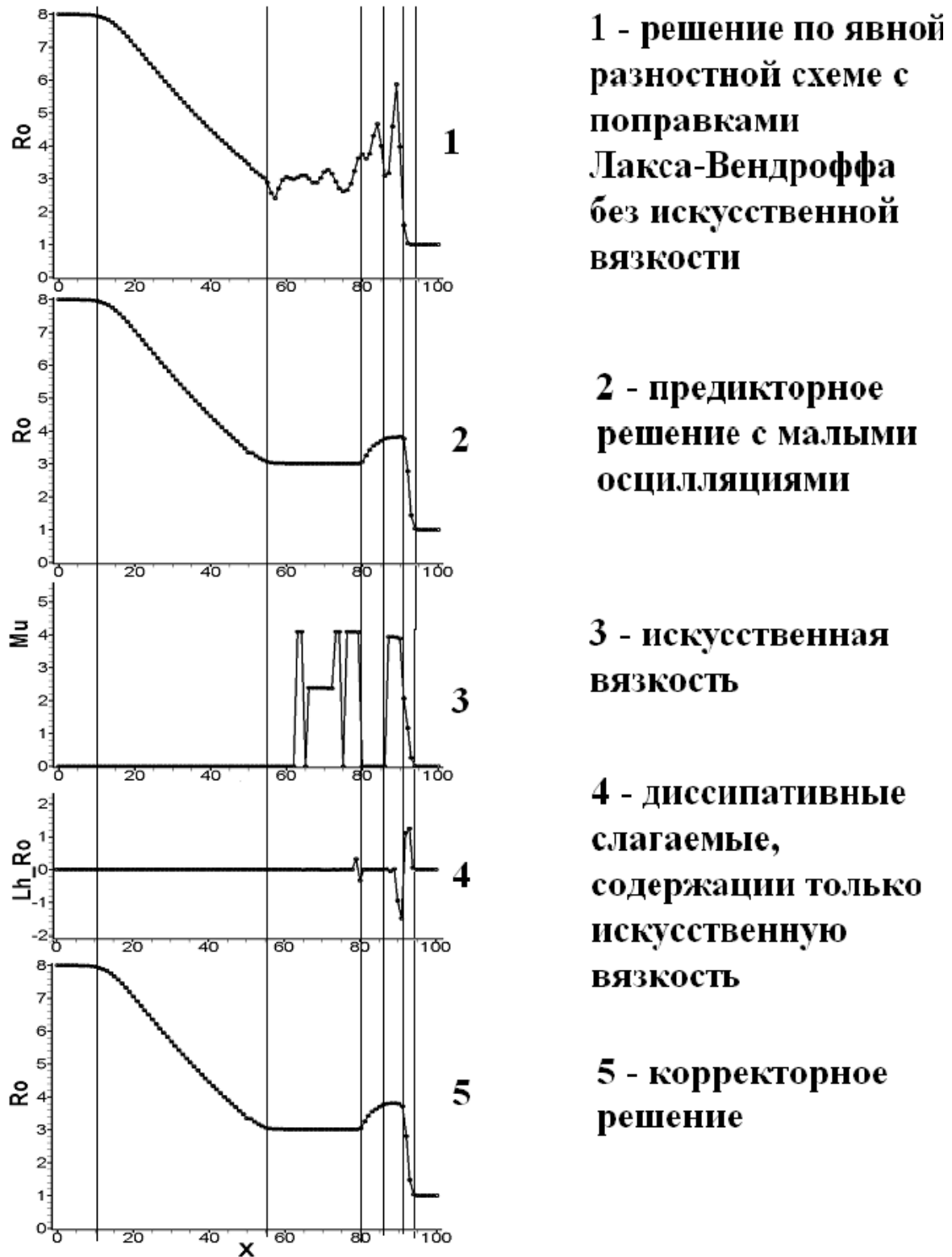


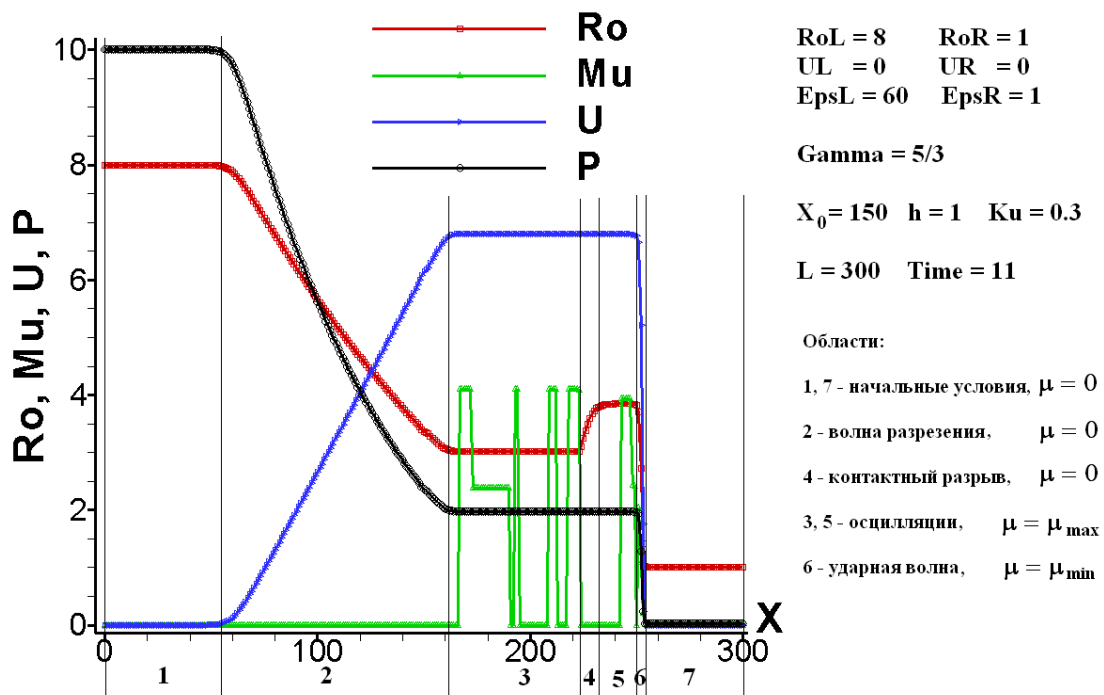
Рис. 2. Задача о распаде разрыва на момент времени $t = 4.5$

Также следует отметить, что предложенный метод АИВ позволяет проводить численные эксперименты для разностных схем, которые изначально были неустойчивы. Такие исследования приводятся в работе [7].

Далее приведем пример работы метода АИВ на неструктурированной треугольной сетке. Рассмотрим задачу о распаде разрыва на два контактных разрыва: на ударную волну и волну разряжения. Число расчетных элементов для этой задачи было 176316 треугольников. В начальный момент времени расчетная область представляет собой единичный квадрат, разбитый на четыре равные части. Параметры каждой части приведем в виде таблицы № 2. В литературе [8] этот тест носит название №15.

Таблица № 2

Тест №	Номер области	ρ	u	v	p	T
15	1	0.5197	-0.6259	-0.3	0.4	0.2
	2	1.0	0.1	-0.3	1.0	
	3	0.8	0.1	-0.3	0.4	
	4	0.5313	0.1	0.4276	0.4	

Рис. 3. Задача о распаде разрыва на момент времени $t = 11$

На рис. 4 приведены результаты расчета этой задачи на момент времени $T = 0.2$, где цветом приводится давление, а изолиниями – плотность.

На рис. 5 приведена картина включения адаптивной искусственной вязкости в зависимости от областей её введения. Маркером с меткой «0» синего цвета обозначены области КР, ВР и области постоянства решения, где нет численной неустойчивости. Маркер с меткой «1» зеленого цвета – это области, где вводится максимальная искусственная вязкость, то есть области численной неустойчивости решения. Маркер с меткой «2» желтого цвета – это области, занятые УВ. В этой области вводится минимальная искусственная вязкость.

Заключение

Описанный метод адаптивной искусственной вязкости показал свою эффективность при решении гиперболических уравнений и систем. Этот метод был реализован в одномерном и многомерном случае. Также был создан модифицированный метод АИВ для параллельных вычислительных систем, опубликованный в работе [9]. Многие научные группы с большим успехом пользуются этим методом и для решения ряда других задач математической физики.

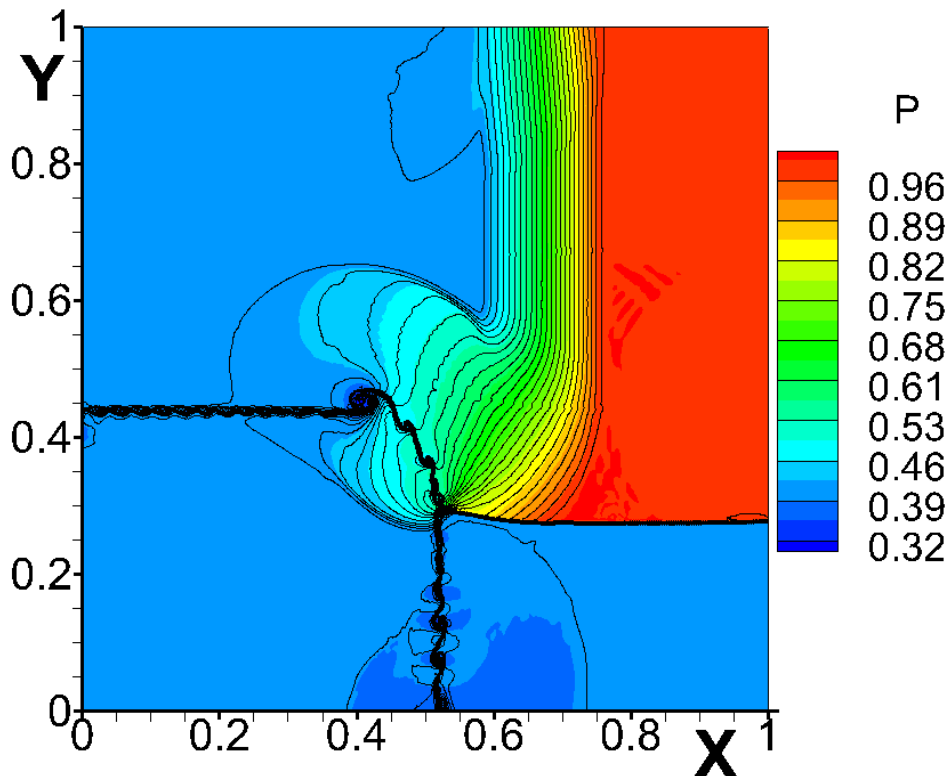


Рис. 4. Результаты расчета теста №15 на момент времени $T = 0.2$

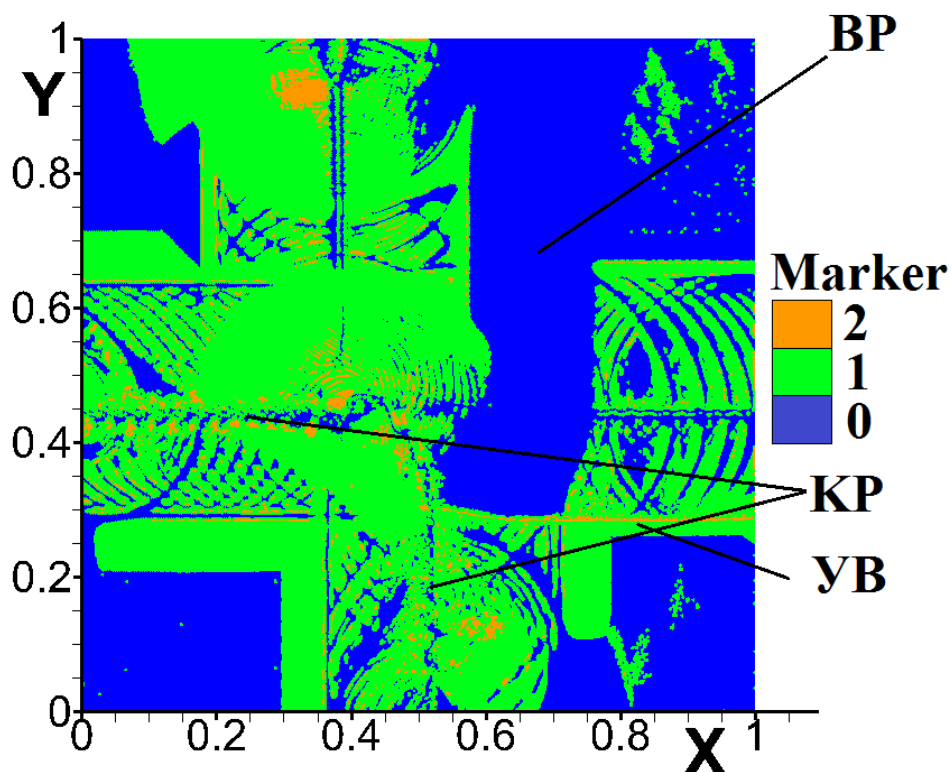


Рис. 5. Изображение введения адаптивной искусственной вязкости

Список литературы

1. John von Neumann. (Джон фон Нейман) Proposal and analysis of a numerical method for the treatment of hydrodynamical shock problems. – Nat. Def. and Res. Com. Rep. AM-551. 1944
2. John von Neumann, R.D. Richtmyer (Джон фон Нейман, Рихтмайер) A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks. – J. App. Phys., 1950, v.21, p 232-257 (перевод: Метод численного расчета гидродинамических скачков. – Механика, 1951, №1 (5), с. 27-30)
3. П. Роуч. Вычислительная гидродинамика. – М., 1980.
4. С.К. Годунов, В.С. Рябенский. Разностные схемы (введение в теорию): учебное пособие. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1977.
5. И.В. Попов. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. № 68, 2017. https://keldysh.ru/papers/2017/2017_prep2017_68.pdf
6. I.V. Popov, I.V. Fryazinov. Method of adaptive artificial viscosity for gas dynamics equations on triangular and tetrahedral grids. – Mathematical models and computer simulations, v. 5, № 1, 2013, p. 50 – 63.
7. И.В. Попов. Конечно-разностный метод стабилизации решения уравнения переноса для неустойчивой схемы // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52.

8. R. Liska, B. Wendroff Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D Test Problems for the Euler Equations // SIAM J. Sci. Comp. 2003. V. 25, No. 3. P. 995A1017; <http://www.math.ntnu.no/conservation>

9. I. Popov, S. Sukov. Modified method of adaptive artificial viscosity for solution of gas dynamics problems on parallel computer systems. / В сборнике: EPJ Web of Conferences 9. Сер. "Mathematical Modeling and Computational Physics 2017, MMCP 2017" 2018. С. 03020.