



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Гавриков М.Б., Таюрский А.А.](#)

Исследование влияния
неоднородности плазмы на
нелинейное поглощение
альфвеновской волны
диссипативной плазмой при
учёте
фоторекомбинационного
излучения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Исследование влияния неоднородности плазмы на нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой при учёте фоторекомбинационного излучения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 37. 16 с. <http://doi.org/10.20948/prepr-2020-37>
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-37>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.Б.Гавриков, А.А.Таюрский

**Исследование влияния неоднородности
плазмы на нелинейное поглощение
альфвеновской волны диссипативной
плазмой при учёте фоторекомбинационного
излучения**

Москва — 2020

Гавриков М.Б., Таюрский А.А.

Исследование влияния неоднородности плазмы на нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой при учёте фоторекомбинационного излучения

В работе исследовано нелинейное поглощение альфвеновской волны в неоднородной несжимаемой диссипативной плазме. Показано, что учёт тормозного и фоторекомбинационного излучений приводит к конечности глубины проникновения альфвеновской волны в диссипативную плазму и появлению установившегося квазистационарного режима поглощения. Учёт синхротронного излучения практически не оказывает влияния. Рассмотрены неоднородности по плотности, распределённые по гауссову закону, двух типов – вершины и впадины. Получены зависимости глубины проникновения альфвеновской волны и максимальных температур электронов и ионов от величины вершины.

Ключевые слова: классическая МГД, электромагнитная гидродинамика (ЭМГД), альфвеновская волна, тормозное излучение, фоторекомбинационное излучение, синхротронное излучение

Mikhail Borisovich Gavrikov, Aleksei Aleksandrovich Taiurskii

Research of influence of plasma inhomogeneity on Alfvén wave nonlinear absorption by dissipative plasma when considering photorecombination radiation

The nonlinear absorption of Alfvén wave in an inhomogeneous incompressible dissipative plasma is investigated. It is shown that accounting for bremsstrahlung and photorecombination radiation leads to the finiteness of the penetration depth of the Alfvén wave into a dissipative plasma and to the appearance of a steady quasistationary absorption regime. Accounting for synchrotron radiation has practically no effect. Density distributed over a Gaussian law of two types-the hump and hollows-are considered. Dependences of the depth of penetration of the Alfvén wave and the maximum values of the temperatures of electrons and ions on the value of the hump are obtained.

Key words: classical MHD, electromagnetic hydrodynamics (EMHD), Alfvén wave, bremsstrahlung, photorecombination radiation, synchrotron radiation

1. Введение

Как известно [1], в магнитогидродинамической плазме допускаются поперечные синусоидальные колебания, которые распространяются вдоль магнитного поля, при этом термодинамические параметры и продольные компоненты векторных величин остаются невозмущёнными. Такие волны впервые были обнаружены Х. Альфвенем [2] в 1942 г. и получили название альфвеновских.

К настоящему исследованию привело предположение [3] о том, что за разогрев солнечной короны до нескольких миллионов градусов ответственно затухание альфвеновских волн, образующихся в нижних значительно более холодных солнечных слоях с температурой порядка нескольких тысяч градусов.

Данная работа является продолжением цикла исследований затухания альфвеновской волны в диссипативной плазме [4–12] вследствие диссипативных факторов: гидродинамические вязкости и теплопроводности электронов и ионов, магнитная вязкость, теплообмен между плазменными компонентами, а также тормозное, синхротронное и фоторекомбинационное излучение. Плазма предполагается полностью ионизованной, квазинейтральной, состоящей из электронов и ионов. Исследование динамики электронов и ионов проводилось при помощи уравнений электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) плазмы [13].

Дополнительно учитывалась неоднородность плазмы по плотности, что и составляло суть исследования. Как влияет неоднородность плазмы по плотности на процесс поглощения альфвеновской волны диссипативной плазмой с дополнительным учётом фоторекомбинационного излучения?

Ранее было исследовано влияние неоднородности при учёте только тормозного излучения [10,11]. Теперь же с тормозным дополнительно учитывается фоторекомбинационное излучение, которые связаны соотношением [12,14]

$$\frac{P_{\text{фр}}}{P_{\text{т}}} = \frac{3.33 \cdot 10^3 Z^2}{T_{\text{т}}(\text{град})}. \quad (1)$$

В данной работе рассматривались температуры в несколько тысяч градусов, поэтому, как показано в [12], для связи фоторекомбинационного и тормозного излучений используется соотношение (1). Также в работе [12] показано, что синхротронным излучением можно пренебречь.

Ниже неоднородность определяется гауссовым распределением $\rho(x)/\rho_0 = 1 + A \exp[-(x - x_0)^2 / D]$, $D > 0$, $x_0 > 0$. Для $A > 0$ функция $\rho(x)$ задаёт неоднородность типа вершины, а для $0 > A > -1$ – типа впадины. Все остальные возможные неоднородности, как показано в [10, 11], являются комбинацией всевозможных указанных гауссовых распределений.

2. Основные уравнения

Для исследования динамики электронов и ионов используются уравнения несжимаемой электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) [13]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho = 0, \quad \frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{Div} \Pi = \operatorname{Div} P, \\ \mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi \rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} W, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тензоры плотности потока импульса Π , вязких напряжений P и “холловских слагаемых” W имеют вид:

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c, \quad P = \Pi_*^{(c)} + \Pi^{(U)}, \\ W = (\lambda_- - \lambda_+) (\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) I_3 + \lambda_+ \lambda_- (\mathbf{j} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{j}) - \Pi_*^{(U)} - \Pi^{(c)}, \\ \Pi^h = \rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p_\Sigma I_3, \quad \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi} I_3 - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^c = \lambda_+ \lambda_- \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{\rho}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее индексы \pm относятся к параметрам ионов и электронов $\lambda_\pm = m_\pm / e_\pm$, $\lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$, $p_\Sigma = p_+ + p_-$, $m_\Sigma = m_+ + m_-$, $\rho = \rho_+ + \rho_-$, $\mathbf{U} = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-) / \rho$, I_3 – единичный трёхмерный тензор, σ – проводимость плазмы. Тензоры вязких напряжений с учётом несжимаемости плазмы равны:

$$\begin{aligned} \Pi^{(U)} = 2\mu_\Sigma D^U, \quad \Pi_*^{(U)} = 2\mu_* D^U, \quad \Pi^{(c)} = 2\mu^* D^c - \frac{2}{3} \mu^* \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) I_3, \\ \Pi_*^{(c)} = 2\mu_* D^c - \frac{2}{3} \mu_* \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) I_3, \quad \Pi_\pm = 2\mu_\pm D_\pm \mp \frac{2}{3} \mu_\pm \lambda_\pm \mathbf{j} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) I_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где $D^U = \operatorname{def} \mathbf{U}$, $D^c = \operatorname{def} (\mathbf{j} / \rho)$, $D_\pm = \operatorname{def} \mathbf{v}_\pm$ – тензоры деформаций, $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$, $\mu_* = \lambda_- \mu_+ - \lambda_+ \mu_-$, $\mu^* = \lambda_-^2 \mu_+ + \lambda_+^2 \mu_-$, μ_\pm – гидродинамические вязкости электронов и ионов. При этом вторые вязкости электронов и ионов считаются

равными нулю. Для плоских течений, которые рассматриваются ниже, $\mathbf{j} \cdot \nabla(1/\rho) = 0$ и выражения (4) сильно упрощаются. Учитывая зависимость (см. ниже) проводимости плазмы σ , гидродинамических вязкостей μ_{\pm} и других коэффициентов переноса от температур электронов и ионов T_{\pm} , систему (2)–(4) необходимо дополнить уравнениями для температур [15]

$$\rho_{\pm} c_p^{\pm} \left[\frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} T_{\pm} \right] = \text{div}(\chi_{\pm} \nabla T_{\pm}) + \text{tr}(\Pi_{\pm} \mathbf{D}_{\pm}) + \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{j^2}{\sigma} \pm b(T_{-} - T_{+}) - p^{\pm}, \quad (5)$$

где $p^{\pm} = p_T^{\pm} + p_{\text{фр}}^{\pm} + p_c^{\pm}$, $c_p = T(\partial S / \partial T)_p$ – теплоёмкость при постоянном давлении, χ_{\pm} – теплопроводности электронов и ионов, $\pm b(T_{-} - T_{+})$ – тепло, передаваемое компонентами плазмы друг другу при упругих столкновениях, p_T^{\pm} – потери на тормозное излучение, $p_{\text{фр}}^{\pm}$ – потери на фоторекомбинационное излучение, p_c^{\pm} – потери на синхротронное излучение электронов и ионов. Для идеального политропного газа с общим показателем адиабаты γ имеем $c_p = \frac{k_B}{(\gamma - 1)m} = \text{const}$, где k_B – постоянная Больцмана, m – масса частицы газа.

Именно этим случаем мы ниже ограничимся, считая $c_p^{\pm} = k_B / ((\gamma - 1)m_{\pm})$.

При этом надо учесть выражения гидродинамических параметров электронов и ионов через ρ , U , \mathbf{j} :

$$\mathbf{v}_{\pm} = U \pm \frac{\lambda_{\mp}}{\rho} \mathbf{j}, \quad \rho_{\pm} = \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\Sigma}} \rho. \quad (6)$$

С учётом зависимостей σ , μ_{\pm} , χ_{\pm} , b , p_T^{\pm} от остальных параметров плазмы, прежде всего температур T_{\pm} , приводимых ниже, уравнения (2)–(5) образуют замкнутую определённую систему уравнений относительно ρ , p_{\pm} , T_{\pm} , U , \mathbf{H} , \mathbf{E} .

Коэффициенты переноса μ_{\pm} , χ_{\pm} , σ , b получаются приближённым решением кинетических уравнений [16] и для $Z = 1$ считаются равными [15-21]

$$\mu_{+} = 3.44 \cdot 10^{-18} \left(\frac{m_{+}}{m_{-}} \right)^{1/2} T_{+}^{5/2}, \quad \mu_{-} = 1.857 \cdot 10^{-18} T_{-}^{5/2}, \quad \sigma = 0.906 \cdot 10^7 T_{-}^{3/2},$$

$$b = 1.353 \cdot 10^{40} \left(\frac{m_{-}}{m_{+}} \right)^3 \frac{\rho^2}{T_{-}^{3/2}},$$

$$\chi_- = 0.244 \cdot 10^{-5} T_-^{5/2}, \quad \chi_+ = 0.429 \cdot 10^{-5} \left(\frac{m_-}{m_+} \right)^{1/2} T_+^{5/2},$$

$$p_T^- = 6.777 \cdot 10^{-21} n_+ n_- T_-^{1/2}, \quad p_c^- = \frac{4 k_B e^4}{3 m_-^3 c^5} H^2 T_- n_- \Phi,$$

где $p_T^+ = p_{\phi p}^+ = p_c^+ = 0$, T_{\pm} вычисляются в кельвинах, p_T^- , p_c^- – в эрг / (с · см³), Φ – “форм-фактор” [12], а $p_{\phi p}^- / p_T^-$ вычисляется по формулам (1).

Отметим также, что в представленных ниже результатах считалось $\mu_- = 0$, поскольку теоретическое значение электронной вязкости, приведённое в данном пункте, оказалось как минимум на 2-3 порядка завышенным. Поглощение альфвеновской волны для реального значения электронной вязкости μ_- требует дополнительных исследований.

Более подробные формулы для диссипативных коэффициентов см. в [13].

3. Альфвеновские волны в ЭМГД

В бездиссипативном случае и плоской геометрии ЭМГД-уравнения имеют точные решения вида [4]

$$U_{\perp} = u(t)e^{ikx}, \quad H_{\perp} = h(t)e^{ikx}, \quad E_{\perp} = e(t)e^{ikx}, \quad T_{\pm} = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \quad U_x = 0, \quad (7)$$

которые называются *плоскими альфвеновскими волнами*. В (7) $\kappa > 0$ – произвольное и использованы комплексные обозначения $U_{\perp} = U_y + iU_z$, $H_{\perp} = H_y + iH_z$, $E_{\perp} = E_y + iE_z$. При этом $H_x = \text{const}$, а $e(t)$ выражается в явном виде через $u(t)$ и $h(t)$:

$$e(t) = \left(\frac{iH_x}{c} u(t) + \frac{i\kappa \Lambda v_A}{\omega_p} h(t) \right) (1+r^2)^{-1}, \quad r = \frac{\kappa c}{\omega_p}, \quad \Lambda = \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} - \sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}, \quad v_A = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (8)$$

Функции $u(t)$, $h(t)$ имеют вид:

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t}, \quad h(t) = \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{\kappa v_A} \{ C_1 \omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2 \omega_- e^{i\omega_- t} \}. \quad (9)$$

Здесь $\omega_p = (4\pi\rho)^{1/2} (\lambda_+ \lambda_-)^{-1/2}$ – плазменная частота, C_1 , C_2 – произвольные комплексные константы. Поперечная компонента плотности тока $j_{\perp} = j_y + ij_z$ также изменяется по закону $j_{\perp} = j(t)e^{ikx}$, а $j_x = 0$, где $j(t) = -\frac{\kappa c}{4\pi} h(t)$. Наконец,

$$\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(\kappa) = \frac{\kappa v_A}{2} \left\{ \frac{r\Lambda}{1+r^2} \pm \left[\frac{r^2\Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (10)$$

Обратная к формуле (10):

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{\omega_p}{c} \cdot \left| \omega \left(\frac{v_A^2 \omega_p^2}{c^2} + \frac{\omega_p v_A}{c} \Lambda \omega - \omega^2 \right)^{-1/2} \right|, \quad (11)$$

где $-\omega_c^+ < \omega < \omega_c^-$ для $H_x > 0$ и $-\omega_c^- < \omega < \omega_c^+$ для $H_x < 0$.

4. Постановка задачи о пространственном поглощении

Пусть плоская альфвеновская волна, бегущая слева направо в области $x < 0$, набегаёт на границу $x = 0$ диссипативной плазмы, заполняющей полупространство $x > 0$. Дальнейшее распространение альфвеновской волны в области $x > 0$ сопряжено с её поглощением, которое и является предметом изучения. Из результатов предыдущего пункта следует, что если продольное магнитное поле $H_x < 0$, то частота набегающей альфвеновской волны ω

меняется в диапазоне $-\omega_c^- = \frac{H_x}{\lambda_- c} < \omega < 0$, а если $H_x > 0$ – то в диапазоне

$-\omega_c^+ = -\frac{H_x}{\lambda_+ c} < \omega < 0$. Ниже рассматривается первый случай. Плазма в области

$x \geq 0$ считается замагниченной покоящейся изотермической с заданным распределением плотности $\rho(x)$. Таким образом, в начальный момент времени в области $x > 0$ имеем:

$$U_{\perp}|_{t=0} = 0, \quad U_x|_{t=0} = 0, \quad T_{\pm}|_{t=0} = T^0, \quad \rho|_{t=0} = \rho(x), \quad H_{\perp}|_{t=0} = 0, \quad (12)$$

где распределение плотности $\rho(x)$ имеет при $x \rightarrow +\infty$ конечный предел $\rho > 0$, причём константа ρ и продольное магнитное поле $H_x = \text{const}$ такие же, как и в области $x \leq 0$, откуда набегаёт альфвеновская волна.

Значения параметров диссипативной плазмы на границе $x = 0$ совпадают со значениями на границе $x = 0$ параметров альфвеновской волны, которые, согласно формулам (7)–(11), равны:

$$U_{\perp}|_{x=0} = U_0 e^{i\omega t}, \quad H_{\perp}|_{x=0} = U_0 \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{\kappa v_A} \omega e^{i\omega t}, \quad (13)$$

$$E_{\perp}|_{x=0} = \frac{iU_0}{1 + (\kappa c / \omega_p)^2} \left(\frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega \right) e^{i\omega t}, \quad j_{\perp}|_{x=0} = -U_0 \frac{\omega c \rho}{H_x} e^{i\omega t}.$$

На бесконечности параметры диссипативной плазмы совпадают с параметрами невозмущённой плазмы:

$$U_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad H_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad T_{\pm}|_{x=+\infty} = T^0, \quad E_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad j_{\perp}|_{x=+\infty} = 0. \quad (14)$$

Запишем систему (2)–(5) в безразмерном виде в случае плоской симметрии ($\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$), используя обозначения $U = U_{\perp} = U_y + iU_z$, $H = H_{\perp} = H_y + iH_z$, $E = E_{\perp} = E_y + iE_z$, $j = j_{\perp} = j_y + ij_z$

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H_x H - \mu_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu_* \frac{\partial j}{\partial x} \rho \right) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + i \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad j = i \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$E - \frac{\xi^2}{\rho} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \xi \zeta \frac{j}{\sigma} + i H_x U + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Lambda H_x H - \mu_* \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu_* \frac{\partial j}{\partial x} \rho \right], \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} = & \frac{2Z_{\pm}(\gamma-1)}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_{\pm} \frac{\partial T_{\pm}}{\partial x} \right) + \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{\xi \zeta}{\sigma} |j|^2 + \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_{\mp} - T_{\pm}}{T_{-}^{3/2}} + \right. \\ & \left. + \frac{T_{\pm}^{5/2}}{R_{\pm}} \left[\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \frac{\xi^2}{\rho^2} \left| \frac{\partial j}{\partial x} \right|^2 \pm 2 \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \overline{\frac{\partial j}{\partial x}} \right) \right] \right\} - \\ & - \frac{(1 \mp 1)}{4} \frac{\xi_T}{\xi} (\gamma-1) Z_{\mp}^2 \rho T_{-}^{1/2} \left(1 + \frac{k_r}{T_{-}} \right), \end{aligned}$$

где $Z_{+} = Z$, $Z_{-} = 1$, $k_r = 3.33$, $\mu_{\Sigma} = \mu_{+} + \mu_{-}$, $\mu_* = (\lambda_{-} / \lambda_{+})^{1/2} \mu_{+} - (\lambda_{+} / \lambda_{-})^{1/2} \mu_{-}$, $\mu^* = (\lambda_{-} / \lambda_{+}) \mu_{+} + (\lambda_{+} / \lambda_{-}) \mu_{-}$, $\mu_{\pm} = T_{\pm}^{5/2} / R_{\pm}$, $\sigma = \sigma_0 T_{-}^{3/2}$, $\chi_{\pm} = C_{\pm} (\xi / \zeta) T_{\pm}^{5/2}$, а значения σ_0 , C_0 , R_{\pm} , C_{\pm} равны:

$$\sigma_0 = 2.59, \quad C_0 = \frac{m_e}{m_i}, \quad R_{+} = 1.108 \cdot \frac{\zeta}{\xi} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}, \quad R_{-} = 2.053 \cdot \frac{\zeta}{\xi},$$

$$C_{-} = 2.11 \frac{m_i}{m_e}, \quad C_{+} = 3.7 \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2}.$$

Наконец, ξ , ζ , ξ_T – числа подобия, равные

$$\xi = \frac{\ell_c}{L_0} = \frac{c \sqrt{\lambda_{+} \lambda_{-}}}{\sqrt{4\pi \rho_0} L_0}, \quad \zeta = \frac{(4\pi \rho_0)^{5/2}}{H_0^4} \cdot \frac{c e^3}{m_{+}^2} L Z^3 \left(1 + Z \frac{m_{-}}{m_{+}} \right)^{-3/2},$$

$$\xi_T = \frac{\rho_0^{3/2}}{H_0^2} \frac{10^7 e^5}{c^2 \hbar m_+ m_-} \frac{64\sqrt{\pi}}{3^{3/2}} \left(1 + Z \frac{m_-}{m_+}\right)^{-3/2},$$

где $\ell_c = c / \omega_p$ – скиновская длина, L_0 , ρ_0 , H_0 и т.д. – характерные масштабы длины плотности, напряжённости магнитного поля и т.д. При обезразмеривании считалось $t_0 = L_0 / v_0$, $v_0 = v_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$, $E_0 = v_0 H_0 / c$, $j_0 = c H_0 / (4\pi L_0)$, $T_0 = v_A^2 \lambda_{\Sigma} e / (2k_B)$.

Итак, требуется решить начально-краевую задачу для системы (15) на полупрямой $x \geq 0$: найти функции $H(t, x)$, $E(t, x)$, $U(t, x)$, $T_{\pm}(t, x)$, удовлетворяющие для $x \geq 0$, $t \geq 0$ уравнениям системы (15), при $t=0$ – безразмерным начальным условиям

$$U|_{t=0} = 0, \quad H|_{t=0} = 0, \quad E|_{t=0} = 0, \quad T_{\pm}|_{t=0} = T^0, \quad x \geq 0, \quad (16)$$

а при $x=0$ и $x=+\infty$ – безразмерным краевым условиям:

$$U|_{x=0} = U_0 e^{i\omega t}, \quad H|_{x=0} = \frac{\rho U_0 \omega}{\kappa H_x} e^{i\omega t}, \quad j|_{x=0} = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega t},$$

$$E|_{x=0} = \frac{iU_0}{1 + \kappa^2 \xi^2} (H_x + \xi \Lambda \omega) e^{i\omega t} = \frac{iU_0}{H_x} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2) e^{i\omega t}, \quad (17)$$

$$U|_{x=+\infty} = 0, \quad H|_{x=+\infty} = 0, \quad E|_{x=+\infty} = 0, \quad j|_{x=+\infty} = 0, \quad T_{\pm}|_{x=+\infty} = T^0,$$

причём при $H_x > 0$ имеем $-H_x (\lambda_- / \lambda_+)^{1/2} < \omega \xi < 0$, при $H_x < 0$ имеем $H_x (\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega \xi < 0$. Здесь $\omega, \rho, H_x \in \mathbb{R}$, $U_0 \in \mathbb{C}$ – безразмерные параметры задачи и в безразмерном виде

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{|\omega| \sqrt{\rho}}{\sqrt{H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2}}.$$

5. Численный метод решения задачи о пространственном поглощении

Рассмотрим неявную разностную схему численного решения задачи (15)–(17). Счётная область – отрезок $[0, L]$ с достаточно большим L , в котором выбраны две сетки узлов $x_{\kappa} = \kappa h$, $0 \leq \kappa \leq N$, $x_{\kappa+1/2} = (\kappa + 1/2)h$, $0 \leq \kappa < N$, $h = L/N$. В целых узлах аппроксимируются величины j , U , E , в дробных – H , T_{\pm} . Переход с нижнего на верхний временной слой $T_{\pm}^0, U^0, H^0 \rightarrow T_{\pm}^1, U^1, H^1$ за время τ , $t \rightarrow t + \tau$, реализуется неявной разностной схемой, где для простоты считаем $Z = 1$

$$1) \rho_\kappa \frac{U_\kappa^1 - U_\kappa^0}{\tau} - \frac{1}{h} \left[\mu_{\Sigma, \kappa+1/2}^0 \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_\kappa^1}{h} - \mu_{\Sigma, \kappa-1/2}^0 \frac{U_\kappa^1 - U_{\kappa-1}^1}{h} \right] -$$

$$- H_x \frac{H_{\kappa+1/2}^0 - H_{\kappa-1/2}^0}{h} - \frac{\xi}{\rho_\kappa} \frac{1}{h} \left(\mu_{*, \kappa+1/2}^0 \frac{j_{\kappa+1}^0 - j_\kappa^0}{h} - \mu_{*, \kappa-1/2}^0 \frac{j_\kappa^0 - j_{\kappa-1}^0}{h} \right) = 0,$$

$$0 < \kappa < N,$$

$$U_N^1 = 0, \quad U_0^1 = U_0 e^{i\omega(t+\tau)}, \quad j_N^0 = 0, \quad j_0^0 = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega t},$$

$$j_k^0 = i \frac{H_{k+1/2}^0 - H_{k-1/2}^0}{h}, \quad 0 < k < N.$$

$$2) \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa+1/2}^0}{\tau} + i \frac{E_{\kappa+1} - E_\kappa}{h} = 0, \quad 0 \leq \kappa < N,$$

$$E_\kappa - \frac{\xi^2}{\rho_\kappa} \frac{E_{\kappa+1} - 2E_\kappa + E_{\kappa-1}}{h^2} = \frac{i\xi\xi}{\sigma_0(T_{-, \kappa}^0)^{3/2}} \cdot \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1}{h} + iH_x U_\kappa^1 +$$

$$+ \frac{\xi \Lambda H_x}{\rho_\kappa} \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1}{h} - \frac{\xi}{\rho_\kappa} \frac{1}{h} \left[\mu_{*, \kappa+1/2}^0 \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_\kappa^1}{h} - \mu_{*, \kappa-1/2}^0 \frac{U_\kappa^1 - U_{\kappa-1}^1}{h} \right] -$$

$$- \frac{\xi^2}{\rho_\kappa^2} \frac{1}{h} \left[\mu_{\kappa+1/2}^{*0} \frac{j_{\kappa+1}^0 - j_\kappa^0}{h} - \mu_{\kappa-1/2}^{*0} \frac{j_\kappa^0 - j_{\kappa-1}^0}{h} \right],$$

$$0 < \kappa < N, \quad E_N = 0, \quad E_0 = \frac{iU_0}{H_x} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2) e^{i\omega(t+\tau/2)},$$

$$3) \frac{T_{\pm, \kappa+1/2}^1 - T_{\pm, \kappa+1/2}^0}{\tau} = \frac{2(\gamma-1)}{\rho_\kappa} \left\{ \frac{1}{h} \left[\chi_{\kappa+1}^\pm \frac{T_{\pm, \kappa+3/2}^1 - T_{\pm, \kappa+1/2}^1}{h} - \right. \right.$$

$$\left. - \chi_\kappa^\pm \frac{T_{\pm, \kappa+1/2}^1 - T_{\pm, \kappa-1/2}^1}{h} \right] + \frac{m_\mp}{m_\Sigma} \frac{\xi\xi}{\sigma_0(T_{-, \kappa+1/2}^0)^{3/2}} \left| \frac{j_\kappa^1 + j_{\kappa+1}^1}{2} \right|^2 \pm$$

$$\pm \frac{\xi}{\xi} C_0 \rho_\kappa^2 \frac{T_{-, \kappa+1/2}^0 - T_{+, \kappa+1/2}^0}{(T_{-, \kappa+1/2}^0)^{3/2}} + \frac{(T_{\pm, \kappa+1/2}^0)^{5/2}}{R_\pm} \left[\left| \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_\kappa^1}{h} \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_\mp}{\lambda_\pm} \frac{\xi^2}{\rho_\kappa^2} \left| \frac{j_{\kappa+1}^1 - j_\kappa^1}{h} \right|^2 \pm 2 \frac{\xi}{\rho_\kappa^2} \sqrt{\frac{\lambda_\mp}{\lambda_\pm}} \operatorname{Re} \left(\frac{U_{\kappa+1}^1 - U_\kappa^1}{h} \cdot \frac{\overline{j_{\kappa+1}^1 - j_\kappa^1}}{h} \right) \right] \left. \right\} - p_{\kappa+1/2}^\pm,$$

$$p_{\kappa+1/2}^+ = 0, \quad p_{\kappa+1/2}^- = \frac{\xi_T}{\xi} (\gamma-1) \rho_\kappa (T_{-, \kappa+1/2}^0)^{1/2} (1 + k_r / T_{-, \kappa+1/2}^0),$$

$$0 \leq k < N, \quad T_{\pm, 1/2}^1 = T^0, \quad T_{\pm, N+1/2}^1 = T^0.$$

Шаг τ выбирается из условия устойчивости

$$\tau = kh / U_{эф}, \quad U_{эф} = \max_{0 \leq \kappa < N} \left(|H_{\kappa+1/2}^0|^2 / \rho_\kappa + T_{+, \kappa+1/2}^0 + T_{-, \kappa+1/2}^0 \right)^{1/2},$$

где $0 < k < 1$ – коэффициент запаса, подбираемый экспериментально. Порядок вычислений по схеме 1)–3) следующий. Сначала из 1) прогонкой определяется величина U_κ^1 , $0 \leq \kappa \leq N$. После этого по формулам 2) находятся значения $H_{\kappa+1/2}^1$, $0 \leq \kappa < N$, E_κ , $0 \leq \kappa \leq N$. Для этого посредством первого равенства 2) исключается из числа неизвестных $H_{\kappa+1/2}^1 = H_{\kappa+1/2}^0 - \frac{i\tau}{h}(E_{\kappa+1} - E_\kappa)$, $0 \leq \kappa < N$, и полученные выражения подставляются во второе равенство 2), после чего величины E_κ , $0 \leq \kappa \leq N$, ищутся прогонкой и по найденным значениям восстанавливаются $H_{\kappa+1/2}^1$, $0 \leq \kappa < N$. На завершающем этапе прогонками ищутся $T_{\mp, \kappa+1/2}^1$, $0 \leq \kappa < N$. При этом j_κ^1 вычисляются по очевидным формулам $j_\kappa^1 = i(H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1)/h$, $0 < \kappa < N$, $j_N^1 = 0$, $j_0^1 = -\rho U_0 \omega H_x^{-1} e^{i\omega(t+\tau)}$. Значения χ_κ^\pm получаются интерполяцией $\chi_\kappa^\pm = (\chi_{\kappa+1/2}^\pm + \chi_{\kappa-1/2}^\pm) / 2$, $0 < \kappa < N$, $\chi_0^\pm = \chi_{1/2}^\pm$, $\chi_N^\pm = \chi_{N-1/2}^\pm$, при этом $\chi_{\kappa+1/2}^\pm$, $0 \leq \kappa < N$ берутся на нулевом слое.

6. Анализ результатов расчётов

Рассмотрим решение задачи нелинейного поглощения альфвеновской волны с учётом тормозного и фоторекомбинационного излучений и дополнительным учётом неоднородности по плотности применительно к параметрам солнечной короны $\rho_0 = 10^{-12} \text{ г / см}^3$, $H_0 = 1 \text{ гс}$, $Z = 1$, тогда, согласно п. 4, $\zeta = 3 \cdot 10^3$, $\xi_T = 3$, а скин-длина $\ell_c = c / \omega_p \approx 1 \text{ см}$. Желая учесть мелкомасштабные ($\sim \ell_c$) процессы при поглощении альфвеновской волны, положим $L_0 = \ell_c$, тогда $\xi = 1$. Учитываем оценку толщины плазменной части солнечной короны [8] $\approx 300 - 400 \text{ км}$, тем самым действительно будет учтена мелкомасштабная динамика плазмы. Для указанных параметров фоновой диссипативной плазмы альфвеновская скорость $v_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0} = 2.8 \cdot 10^5 \text{ см / с}$, $t_0 = L_0 / v_A = c\sqrt{\lambda_+ \lambda_-} / H_0 = 3.45 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, $T_0 \approx 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$, $k_r = 3.33$. Дебаевский радиус $r_D = (kT_0)^{1/2} / (2\pi^{1/2} \rho_0 n_0^{1/2}) \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ см} \ll L_0$ и много меньше шагов использованной разностной сетки, поэтому условие квазинейтральности выполнено с высокой точностью. Здесь и ниже $n_0 = \rho_0 / m_+$, $m_+ = 2m_p$.

Кроме того, рассматривается фиксированная амплитуда падающей альфвеновской волны $|U_0|=0.1$ и считается $H_x=-1$. Частота волны ω изменяется в диапазоне $-61 \cong -(\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega < 0$. Вариант однородной плазмы $\rho(x) \equiv 1$ с тормозным и фоторекомбинационным излучениями был проанализирован в работе [12].

Пусть теперь распределение плотности диссипативной плазмы в области $x \geq 0$ имеет вершину, $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - x_0)^2 / D]$, $x_0 = 8$, $D = 1$, $A = 5$, $\omega = -30$. Как видно из представленных графиков (рис. 1, 2), во-первых, альфвеновская волна, как и в случае с однородной плазмой [12], проникает в диссипативную плазму на конечную глубину. Во-вторых, параметры альфвеновской волны выходят с течением времени на квазистационарный режим. В частности, происходит стабилизация со временем профилей температур электронов и ионов.

Выделим ещё один момент, что увеличивается скорость процесса установления профиля температуры электронов. В случае тормозного и фоторекомбинационного излучений с учётом неоднородности по плотности на процесс стабилизации затрачено в 40 раз больше времени, чем в случае учёта только тормозного излучения и неоднородности по плотности.

Далее проведём анализ зависимости профилей температур электронов и ионов в зависимости от амплитуды A . Как видно из рис. 3а),б), в случае вершины ($A = 5$) наблюдается уменьшение глубины прогрева плазмы и максимальной температуры ионов по сравнению с $A = 0$, как и в случае поглощения альфвеновской волны, в котором учитывается неоднородность плазмы и только тормозное излучение [10, 11]. Максимальная температура электронов же теперь возрастает. В случае впадины ($A = -0.8$, рис. 3а),б)) происходит также увеличение глубины прогрева, но уменьшение максимальных температур электронов и ионов в по сравнению с поглощением альфвеновской волны, где учитывается неоднородность плазмы и только тормозное излучение. Ещё одно отличие – это снижение примерно на 10% глубины проникания и максимальных значений температур электронов и ионов.

Проведённый анализ позволяет сделать вывод, что с уменьшением высоты вершины A глубина проникания d альфвеновской волны будет возрастать, а максимальные температуры ионов – увеличиваться, максимальные температуры же электронов – уменьшаться. Этот вывод подтверждается результатами, полученными численно для неоднородности вида $\rho(x) = 1 + A \exp[-(x - 8)^2 / D]$ с различными A и приведёнными в Таблице 1.

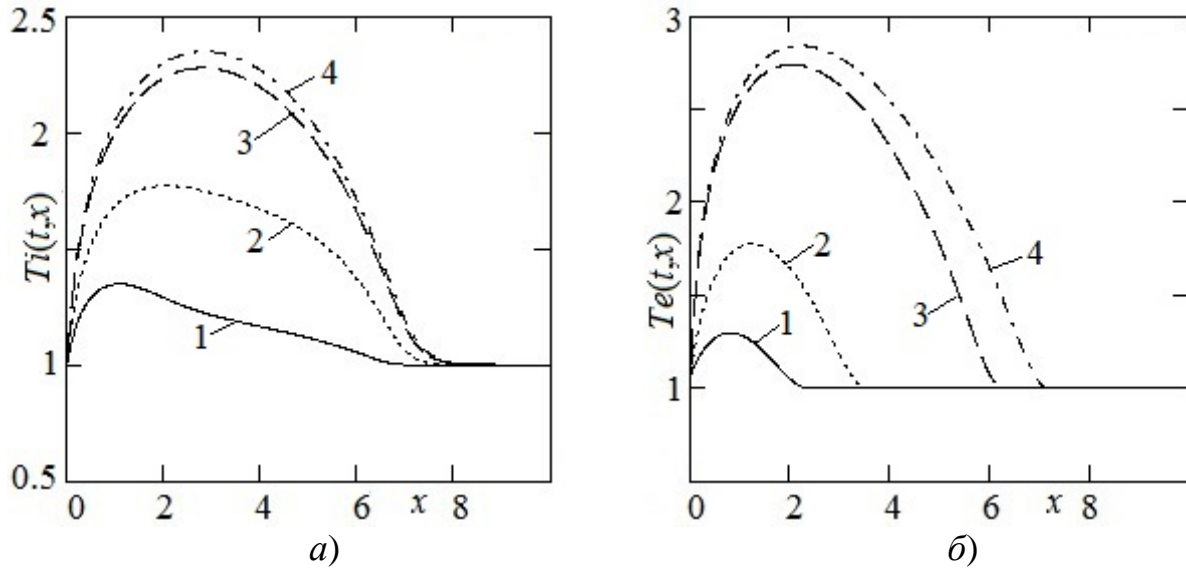


Рис. 1. Установление температур с течением времени для однородной плазмы $\rho(x)=1$, $\omega=-30$ ионов а): 1- $t=8$, 2- $t=11$, 3- $t=20$, 4- $t=36$ и электронов б): 1- $t=6.4$, 2- $t=7$, 3- $t=7.6$, 4- $t=36$

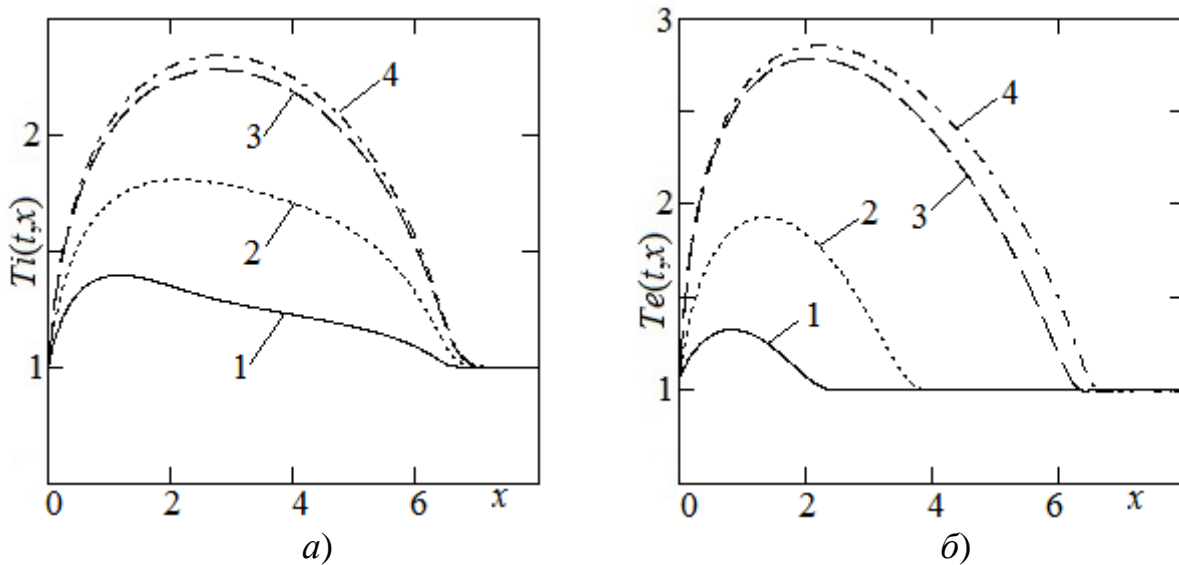


Рис. 2. Установление температур с течением времени для неоднородности плотности типа вершины $\rho(x)=1+5\exp\left[-(x-8)^2\right]$, $\omega=-30$ ионов а): 1- $t=8$, 2- $t=11$, 3- $t=20$, 4- $t=36$ и электронов б): 1- $t=6.2$, 2- $t=6.8$, 3- $t=7.4$, 4- $t=36$

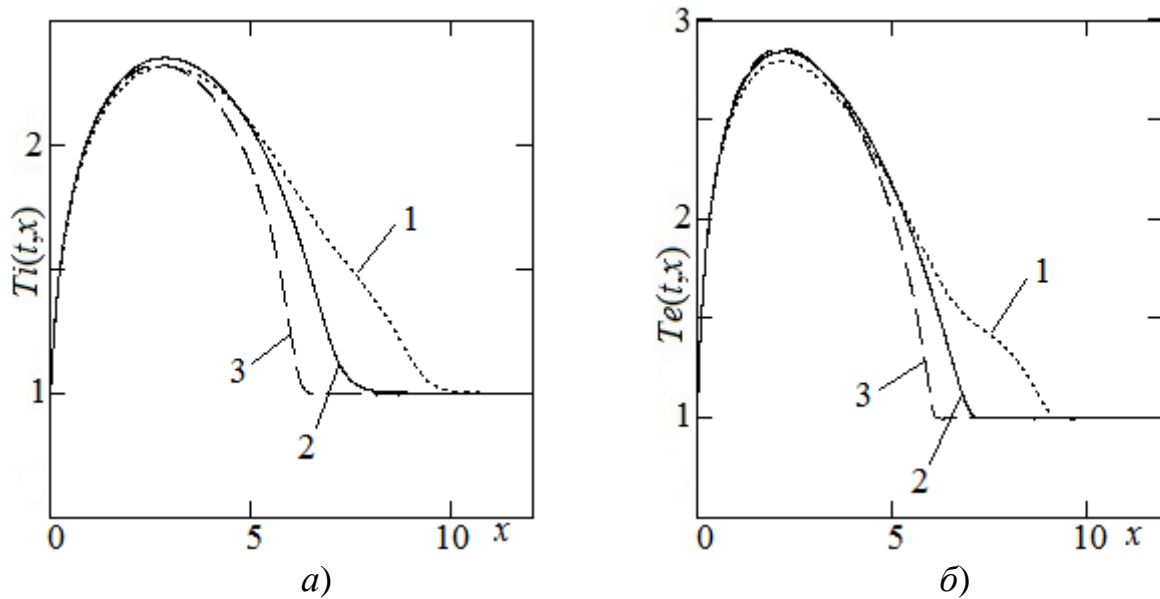


Рис. 3. Зависимость установившихся температур ионов *a)* и электронов *б)* в зависимости от A для неоднородности плотности $\rho(x) = 1 + A \exp[(x-8)^2]$, $\omega = -30$: 1 – $A = -0.8$ (впадина), 2 – $A = 0$, 3 – $A = 50$ (вершина)

Таблица 1

Глубина проникания и максимальные температуры электронов и ионов в зависимости от вершины

A	100	50	25	10	5	2	1	0
d	6.1	6.3	6.5	6.7	6.9	7.1	7.4	7.9
T_+	2.31	2.32	2.33	2.33	2.34	2.34	2.34	2.35
T_-	2.86	2.86	2.86	2.85	2.85	2.85	2.84	2.84

7. Заключение

Плазменные неоднородности плотности и тормозное и фоторекомбинационное излучения существенно влияют на глубину проникания альфвеновской волны и степень прогрева электронов и ионов диссипативной плазмы. Точнее, неоднородности плотности типа вершины тормозят прохождение альфвеновской волны, уменьшая глубину проникания волны и степень прогрева ионов диссипативной плазмой, степень прогрева электронов увеличивается. А неоднородность типа впадины увеличивает глубину проникания волны. Степень прогрева электронов и ионов уменьшается.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
2. Альфвен Х. Космическая электродинамика. – М.: ИЛ, 1952.
3. Scott W. McIntosh, Bart Pe Pontien, Marts Carlsson, Viggo Hansteen, Paul Boerner & Marsel Goossens. Alfvénic waves with sufficient energy to power the quiet solar corona and fast solar wind // *Nature*. 2011. v.475. p. 478–480.
4. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное затухание альфвеновских волн в диссипативной плазме // *Математическое моделирование*. 2013. т.25. №8. С. 65-79.
5. Taiurskii A.A. and Gavrikov M.B. Nonlinear absorption of Alfvén wave in dissipative plasma. *AIP Conference Proceedings*. V. 1684, 070009, 2015, 13 p. doi: 10.1063/1.4934310.
6. Taiurskii A.A., Gavrikov M.B. Spatial Nonlinear Absorption of Alfvén Waves by Dissipative Plasma Taking Account Bremsstrahlung. *AIP Conference Proceedings*. V. 1773, 090003, 2016, 14 p. doi: 10.1063/1.4964994.
7. M.B. Gavrikov and A.A. Taiurskii Alfvén wave absorption in dissipative plasma. *Journal of Physics: Conf. Series* **788**, 012015, 2017. doi: 10.1088/1742-6596/788/1/012015.
8. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2017. № 2. С. 40–59. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-40-59.
9. Gavrikov M.B., Taiurskii A.A. Nonlinear Spatial Absorption of Alfvén Waves by Dissipative Plasma // *Journal of Physics: Conference Series*. **927**, 012020, 2017. doi: 10.1088/1742-6596/927/1/012020.
10. Gavrikov M.B., Taiurskii A.A. The Influence of Plasma Inhomogeneity and Incident Wave Frequency on the Nonlinear Spatial Absorption of Alfvén Waves In Dissipative Plasma // *Journal of Physics: Conference Series*. **937** 012014, 2017. doi: 10.1088/1742-6596/937/1/012014.
11. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Влияние плазменной неоднородности и частоты альфвеновской волны на её нелинейное пространственное поглощение диссипативной плазмой // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2018. № 3. С. 82–96. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-82-96.
12. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Влияние синхротронного и фоторекомбинационного излучений на поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой // *Математическое моделирование*, 2019. Т. 31. № 12. С. 71–85. doi: 10.1134/S0234087919120062.
13. Гавриков М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика. М.: КРАСАНД. 2018. 584 с.
14. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 576 с.

15. Чукбар К.В. Лекции по явлениям переноса в плазме. Долгопрудный: Издательский дом "Интеллект". 2008. 256с.
16. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А. Леонтовича. – М.: Госатомиздат. 1963. Вып. 1. С. 183-272.
17. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. – М.: Мир, 1965, 212с.
18. Чэпмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. – М.: ИЛ, 1960.
19. Имшенник В.С. // Астрономический журнал, 1961, 38, С. 652.
20. Ландау Л.Д. // ЖЭТФ, 1937, №7, с.203.
21. Грим Г. Процессы излучения в плазме / В сб. Основы физики плазмы. Т.1 – М.: Энергоатомиздат, 1983, 641 с.

Оглавление

1. Введение	3
2. Основные уравнения	4
3. Альфвеновские волны в ЭМГД	6
4. Постановка задачи о пространственном поглощении	7
5. Численный метод решения задачи о пространственном поглощении	9
6. Анализ результатов расчётов	11
7. Заключение.....	14
Список литературы.....	15