ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 39 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колесниченко А.В.

Применение гетерогенной механики для моделирования газопылевого протопланетного диска: I. Ламинарная стадия образования субдиска

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Применение гетерогенной механики для моделирования газопылевого протопланетного диска: I. Ламинарная стадия образования субдиска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 39. 44 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-39
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-39

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

Применение гетерогенной механики для моделирования газопылевого протопланетного диска. I. Ламинарная стадия образования субдиска

Москва — 2020

Колесниченко А.В.

Применение гетерогенной механики для моделирования газопылевого протопланетного диска. I. Ламинарная стадия образования субдиска

Аннотация. В представленной работе применительно к проблеме реконструирования эволюции допланетного газопылевого облака разработана модель турбулентной гетерогенной среды, на основе которой возможно конструирование нового класса численных моделей космических газопылевых сред, учитывающих влияние на характер и развитие турбулентности инерционных свойств полидисперсной пылевой смеси, процессов тепло- и массопереноса, коагуляции, фазовых переходов, химических реакций и излучения. Это позволяет значительно расширить возможности численного моделирования разнообразных физическо-химических явлений в таких сложных космических средах, какими являются аккреционные газопылевые диски, образующиеся у звёзд различных классов при их дифференциальном вращении вокруг центра тяжести, в частности, исследовать их структуру, физико-химические и гидродинамические свойства и временную эволюцию.

Ключевые слова: космогония, аккреционный газопылевой диск, гетерогенная механика, турбулентность.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

The use of heterogeneous mechanics for modeling a gas-dust protoplanetary disk: 1. The laminar stage of subdisk formation.

Annotation. In the present work, in relation to the problem of reconstructing the evolution of a pre-planetary gas-dust cloud, a model of a turbulent heterogeneous medium is developed, on the basis of which it is possible to construct a new class of numerical models of space gas-dust media, taking into account the influence on the nature and development of turbulence of the inertial properties of the polydisperse dust mixture, heat and mass transfer, and coagulation, phase transitions, chemical reactions and radiation. This allows you to significantly expand the possibilities of numerical modeling of various physical and chemical phenomena in such complex space media as accretion gas-dust disks formed in stars of various classes during their differential rotation around the center of gravity, in particular, to study their structure, physicochemical and hydrodynamic properties and temporary evolution.

Key words: cosmogony, accretion gas-dust disk, heterogeneous mechanics, turbulence.

ВВЕДЕНИЕ

Вещество протопланетного газопылевого облака представляет собой сложную многофазную среду с областями разной плотности, температуры и степени ионизации. Это вещество, являющееся в общем случае пылевой плазмой, находится в состоянии сильной турбулизации. Понимание эволюции протопланетного облака является необходимой предпосылкой для решения вопроса об образовании Земли и планет – вопроса, глубинно связанного с основополагающей проблемой космогонии, решение которой является на сегодняшний день крупнейшей задачей науки. В нашей стране эта концепция получила наиболее полное развитие в работах О.Ю. Шмидта и его школы [1,2], что позволило более строго сформулировать модель образования зародышей планет из холодного вещества протосолнечной туманности, приобретающей форму диска вблизи экваториальной плоскости Солнца, и получить в рамках данной модели ряд количественных оценок.

К сожалению, как в этих, так и в ряде современных аналогичных моделей отечественных и зарубежных исследователей некоторые физические процессы, сопровождающие эволюцию аккреционного диска, учитываются весьма приближённо или не учитываются вовсе. Это относится, в первую очередь, к гидродинамической турбулентности в газопылевой среде, являющейся одним из важнейших физических процессов, определяющих структуру и динамику протопланетного диска. Актуальность этой проблемы становится ещё более очевидной, если принять во внимание, что турбулентное вещество диска представляет собой неоднородную дисперсную среду, состоящую из газа (в общем случае многокомпонентного) и пылевых частиц различных размеров. При этом роль пылевых частиц в турбулизации дисковой среды, включая динамику их дрейфа в радиальном и ортогональном (к экваториальной плоскости Солнца) направлениях, а также фазовые переходы при испарении и/или конденсации частиц с учётом температурной стратификации в диске, оказывается нередко определяющей.

По современным представлениям планеты формируются после потери гравитационной устойчивости пылевым субдиском, образованным в результате дифференциального вращения турбулентного протопланетного вещества по орбите вокруг солнечноподобной звезды и процессов аккреции при оседании пылевой составляющей к экваториальной (центральной) плоскости диска, перпендикулярной оси вращения [1,3-8]. Сплющивание вращающегося допланетного облака является следствием противоборства двух основных динамических сил – гравитационной и центробежной. В условиях равновесия этих сил существенными для эволюции облака становятся более слабые факторы, такие как тепловые и вязкостные процессы, самогравитация диска и электромагнитные явления. Дисковое космическое вещество вследствие воздействия сил вязкого трения (возникающего в результате относительного сдвига элементов газовзвеси при орбитальном движении) дрейфует к прото-Солнцу по очень пологой спиральной траектории по мере того, как его момент количества движения передаётся наружу – из внутренних областей диска во внешние. Именно из газопылевого вещества субдиска, как теперь стало ясно, и образовалась Солнечная планетная система путём возникновения дискретных центров уплотнения и последующего их роста (см., например, [1,9]).

Одной из ключевых в астрофизике точек зрения относительно происхождения и структуры околозвёздных газопылевых аккреционных дисков любого рода является их турбулентная природа [10-15]. Допланетные аккреционные диски обладают значительной вязкостью, что приводит, в сочетании с дифференциальным вращением вещества, к наличию постоянного «собственного» источника тепловой энергии в них. Наиболее вероятными причинами вязкости дифференциально вращающихся дисков являются сдвиговая турбулентность [16,17], а также хаотические магнитные поля (см. [18]), причём энергия последних часто сравнима с энергией гидродинамической турбулентности. При увеличивающейся массе протозвезды и росте плотности вещества диска важную роль начинают играть приливные взаимодействия, оказывающие, в частности, влияние на формирование концентрических газопылевых слоёв [19].

Существует обширная литература по моделированию эволюции околосолнечного допланетного облака без пылевой составляющей (см., например, пространную библиографию к обзору [12]). Вместе с тем немногочисленные публикации по запылённым дисковым системам охватывают сравнительно узкий круг задач, относящихся к данной проблеме, поскольку используемые модели турбулентности двухфазных сред «газ–твёрдые частицы» не могут быть признаны вполне удовлетворительными (см., например, [13, 20-30]). В общем случае при моделировании дисковой среды важно учитывать обратное влияние пыли на турбулентность потока, которое не является, вообще говоря, однозначным и сильно зависит от величины объёмного содержания (концентрации) и инерционности твёрдых частиц. В частности, на определённых этапах эволюции подобной гетерогенной смеси становятся существенными такие механизмы воздействия пылевой компоненты на турбулентность в диске, как генерирование дополнительных турбулентных возмущений за счёт коллективных эффектов, связанных с межчастичными столкновениями твёрдых частиц [31], образование вихревых структур за обтекаемыми крупными частицами при отрыве несущего газового потока, а также совместное влияние этих двух механизмов турбулизации течения и т.д. Кроме этого, само присутствие в турбулентной среде полидисперсной примеси существенно усложняет гидродинамику диска, способствуя реализации дополнительных режимов течения космического вещества.

Помимо этого существенно влияние турбулентности на процесс коагуляции частиц, которое в различных ситуациях может сказываться совершенно неожиданным образом, однако, по-видимому, турбулентность всегда способствует коагуляции [32]. Так, если внутренний колмогоровский масштаб турбулентности λ_K меньше или сравним с размером дисперсных частиц, то имеет место турбулентное блуждание частиц (аналогичное броуновскому), приводящее к их взаимному столкновению, т.е. к турбулентной коагуляции, дополняющей эффективную в спокойном газе гравитационную коагуляцию. Турбулентные пульсации могут также способствовать втягиванию мелкодисперсных частиц в гидродинамический след или в зону действия индукционных сил в случае одноименно заряженных частиц, а также могут содействовать электростатической коагуляции путём разрушения экранировки (см. [32,33]).

Основываясь на доступных результатах лабораторных и модельных исследований (см., например, [34]), можно в первом приближении считать, что столкновения сравнительно мелких (примерно миллиметровых) частиц при скоростях <1 м/с приводят к их объединению. По-видимому, на возникающих при этом структурах возможно преобладание процессов интеграционных над деструктивными даже при скоростях >10 м/с. Эффективным механизмом аккумуляции твёрдых частиц может быть также, наряду с гравитационной, негравитационная аккреция, связанная с броуновской коагуляцией, электрической коагуляцией, турбулентно-броуновской коагуляцией заряженных и нейтральных частиц и т.п. (подробнее см. [35]). В результате роста инерционности частиц они все в меньшей степени будут участвовать в пульсационном (вихревом) движении газовзвеси, что приводит, в конечном итоге, к их эффективному оседанию к экваториальной плоскости протозвезды и агломерации. Таким образом, вопреки распространённому мнению, что турбулентность в газопылевой среде субдиска не способствует укрупнению частиц (см. напр., обзор [36]), ситуация может быть обратной, что подтверждают и полученные недавно результаты наблюдений [37]. Тем не менее пока остаётся открытым вопрос о том, как и за какие времена происходит рост в турбулентной среде диска зародышей планетезималей начиная примерно от метровых размеров [38-44].

Наконец, коснёмся ещё одного важного механизма, с которым связано создание космогонических моделей. Едва ли есть основания подвергать сомнению тот факт, что при образовании и в процессе эволюции околосолнечного допланетного диска существенную роль играли электродинамические (плазменные) эффекты. Космическая плазма в общем случае является пылевой, т.е. содержит мельчайшие частицы пыли (см. [45]). Так как любой аккреционный диск содержит твёрдые частицы различных размеров, то существует, по-видимому, некоторый граничный линейный масштаб (обычно он бывает порядка 10^{-5}–10^{-7} м), зависящий от величины электромагнитного и гравитационного полей, заряда и плотности частиц, который разделяет достаточно малые частицы, являющиеся частью пылевой плазмы, и достаточно большие частицы, движение которых определяется воздействием неэлектромагнитных сил. Известно, что основными физическими процессами, определяющими поверхностный заряд пылинок, являются фотоэлектронная эмиссия и столкновения с плазменными электронами и положительными ионами (см., например, [46]). Вместе с тем твёрдая частица в космической плазме чаще заряжается отрицательно до потенциала порядка нескольких вольт в результате столкновений с электронами. В совокупности процессов формирования диска и его эволюции чрезвычайно важную роль играет электризация пылевых частиц при их оседании и взаимодействии с магнитным полем звезды, что требует учёта влияния соответствующих электродинамических эффектов в дифференциально- вращающейся среде. В частности, при движении электропроводной двухфазной среды в электромагнитном поле на заряженные частицы действует пондеромоторная сила Лоренца, что приводит к возникновению ряда дополнительных эффектов, особенно при турбулизации течения [47,48]. Следует заметить, что развитая турбулентность способна также приводить к формированию в диске мезомасштабных относительно устойчивых газопылевых когерентных структур, обеспечивающих, по-видимому, наиболее благоприятные условия для механического и физико-химического взаимодействия между частицами вещества (см. [49-52]). В результате происходит самопроизвольное образование и рост конденсированной пылевой компоненты (пылевых кластеров), интенсификация фазовых переходов и тепломассопереноса при различных значениях термогидродинамических параметров несущей и дисперсной фаз, существенная модификация спектра колебаний в сильно запылённой среде и т.п.

Однако на данном этапе исследований мы остановимся только на формулировании базовой системы уравнений сохранения массы, импульса и энергии для мгновенных (актуальных) параметров течения газопылевой смеси и излучения, предназначенных для численного моделирования околосолнечного допланетного диска на разных стадиях его эволюции (в основном, ламинарной стадии образования субдиска) и в пространственных зонах, расположенных на различных расстояниях от протозвезды.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭВОЛЮЦИИ ЛАМИНАРНОГО ГАЗОПЫЛЕВОГО ДИСКА

Наиболее адекватное моделирование движения газовзвеси в газопылевом протопланетном диске можно провести, по-видимому, в рамках механики гетерогенных сред, с учётом специфики физико- химических свойств фаз, процессов тепло- массопереноса и излучения, химических реакций, фазовых переходов, процессов коагуляции, дробления и т.д. Изучение эволюции подобных сред связано с привлечением новых термогидродинамических параметров и решением уравнений, более сложных, чем те, с которыми приходится иметь дело в «обычной» гидродинамике.

Как правило, в перечисленных выше и некоторых других известных публикациях по континуальному моделированию аккреционных дисков с учётом пылевой составляющей исходят из уравнений неразрывности, движения и энергии для каждой фазы в отдельности [6,11,29,53-56]. Такой подход является аналогом 13- моментного метода Грэда [92], получившего широкое распространение, в частности, в кинетической теории многокомпонентной плазмы. Вместе с тем моделирование эволюции газопылевого облака можно выполнить в рамках односкоростного приближения гетерогенной механики, аналогичного моментному методу Чепмена−Энскога решения системы кинетических уравнений Больцмана для многокомпонентных газовых смесей [57,58]. Своеобразие этого подхода в рассматриваемом случае состоит в том, что континуальное описание дисковой среды возможно проводить исходя из законов сохранения массы, импульса и энергии для системы в целом, дополненных определяющими соотношениями для ряда термогидродинамических потоков, как внутрифазных, так и межфазных. В частности, для потоков межфазной диффузии могут быть использованы обобщённые соотношения Стефана−Максвелла, выведенные для гетерогенных сред методами неравновесной термодинамики в работе [59]. Важно также подчеркнуть, что применение только одного суммарного континуума для моделирования турбулентного космического вещества позволяет выполнить осреднение Фавра [60] гидродинамических уравнений достаточно аккуратно [35].

Огромное разнообразие, взаимовлияние и сложность эффектов неоднофазности в солнечном допланетном облаке (фазовые переходы, химические реакции, теплообмен, гравитационное взаимодействие, пульсационное и хаотическое движение, вращение, радиация, коагуляция и т.п.) с необходимостью требует разумной схематизации описания движения подобной среды. В связи с этим в данной работе предложено моделировать гетерогенный континуум, состоящий и двух соприкасающихся друг с другом фаз – несущей газовой фазы солнечного состава и дисперсной фазы твёрдых конденсированных частиц сложного химического состава (см., например, [61]), находящийся при общей абсолютной температуре T и давлении p. Заметим, что условие термического и механического равновесия фаз не является условием полного фазового равновесия, для которого необходимо совпадение химических потенциалов фаз. Кроме того, при химическом равновесии, т.е. равновесном распределении химических компонентов между двумя фазами, их химические потенциалы должны иметь постоянное значение в обеих фазах.

Для применимости континуального приближения линейные размеры элементарного макро объёма δV дисковой среды должны быть намного больше линейных размеров дисперсных включений, но намного меньше характерного гидродинамического размера задачи L_{hydr}. Кроме того, будем далее предполагать, что движение дисперсной смеси в допланетном диске можно адекватно описать при следующих допущениях:

- пылевые частицы – твёрдые и недеформируемые, сферичны по форме и полидисперсны;
- предполагается несжимаемость вещества пылевых частиц, $\rho_d = const$;
- истинная плотность пылевых частиц много больше истинной плотности газа, $\rho_d >> \rho_g$;
- объёмная концентрация дисперсной фазы мала ($s^2 << 1$), так что членами порядка s^2 в уравнениях гетерогенной механики можно пренебречь;
- несущая фаза – сжимаемый многокомпонентный совершенный газ;
- диффузионный перенос молекул всех химических сортов отсутствует, $\mathbf{u}_{\alpha(k)} \equiv \mathbf{u}_\alpha$;
- вязкостью и теплопроводностью дисперсной фазы можно пренебречь, $\mathbf{\Pi}_d = 0$, $\mathbf{q}_d = 0$;
- предполагается термическое равновесие фаз, $T_g = T_d = T$;
- рассматривается однодавленческое приближение, $p_g = p_d = p(\rho_g, T)$;
- гетерогенные реакции на поверхности твёрдых частиц не учитываются;
- вкладом от приповерхностного слоя твёрдых частиц в энергетику дисковой системы в целом пренебрегается [41];
- вращением твёрдых частиц можно пренебречь;
- теплообмен между дисперсными частицами и несущим газом отсутствует.

Помимо этого предполагается, что каждая фаза представляет собой гомогенную n-компонентную смесь (причём каждое химически значимое вещество допланетного облака присутствует в каждой фазе α). Далее для обозначения фаз будем использовать нижние греческие индексы $\alpha,\beta,..$, а нижние латинские индексы в круглых скобках типа (k) или (i) у любой величины будем относить к молекулярной составляющей фазы. Газовая фаза ($\alpha = g$) является несущей средой, описываемой моделью вязкой жидкости. Дисперсная фаза ($\alpha = d$), присутствующая в виде твёрдых включений, является невязкой и не теплопроводной. Иногда для обозначения газовой и конденсированной фаз вместо буквенных будем использовать цифровые индексы, отнеся нижний индекс $\alpha = 1$ к параметрам газовой фазе, а $\alpha = 2$ – к параметрам дисперсной фазы.

2. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА МАСС ДЛЯ ГАЗОПЫЛЕВОЙ СРЕДЫ

Предполагая далее локальное термодинамическое равновесие в пределах каждой фазы, а также локальное термодинамическое равновесие излучения с веществом, воспользуемся для описания гидродинамических движений в газопылевой среде феноменологической теорией многожидкостных взаимопроникающих континуумов, учитывающей, в частности, динамические эффекты из-за несовпадения гидродинамических скоростей $\mathbf{u}_\alpha$ фаз, входящих в состав системы (см., например, [59,62]).

Для каждой из двух фаз в каждой пространственно-временной точке $(\mathbf{r},t)$ определим массовую плотность, гидродинамическую скорость, внутреннюю энергию и другие термогидродинамические параметры, относящиеся к своему континууму и своей химической составляющей смеси. При этом в качестве характеристик фазы будем использовать величины, осреднённые как по совокупному элементарному макрообъёму $\delta V = \sum_\alpha \delta V_\alpha$, относящемуся к гетерогенной системе в целом, так и по части δV_α элементарного объёма, занимаемой отдельной фазой α. В частности, наряду с распределённой (размазанной по совокупному объёму δV) массовой плотностью $\tilde{\rho}_\alpha$ фазы α, далее будем использовать истинную (физическую) плотность ρ_α (равную отношению массы частиц фазы α в элементарном макрообъёме δV к части этого объёма δV_α, которую фаза занимает), определяемую выражением

$$\rho_\alpha = \tilde{\rho}_\alpha / s_\alpha, \quad s_\alpha \equiv \delta V_\alpha / \delta V, \quad \sum_\alpha s_\alpha = 1, \tag{1}$$

где s_α – так называемое объёмное содержание (объёмная концентрация или фазовая насыщенность) α-фазы. Именно истинная ρ_α, а не распределённая $\tilde{\rho}_\alpha$

плотность фазы совместно с другими параметрами состояния, например, такими, как температура T_α, внутренняя энергия e_α и энтропия S_α, определяет термодинамические свойства элементарной макрочастицы α-фазы в различных её состояниях. Кроме того, величины s_α непосредственно влияют и на гидродинамическое движение фаз, поскольку фигурируют в соответствующих уравнениях движения. Одновременно будем предполагать, что между отдельными химическими компонентами k дисковой системы возможны r независимых химических реакций, включая межфазные реакции и случаи, когда химические превращения сводятся просто к перемещению компоненты k из одной фазы в другую.

Рассмотрим сначала случай, когда все сконденсированные частицы допланетного газопылевого диска в каждом элементарном макрообъёме $\delta\mathrm{V}$ независимо от их размеров имеют одну и ту же мгновенную гидродинамическую скорость $\mathbf{u}_d(\mathbf{x},t)$. Массовую плотность $\rho(\mathbf{x},t)$ и среднемассовую гидродинамическую скорость $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ (мгновенную скорость движения центра тяжести элементарного макрообъёма газовзвеси с центром в точке $\mathbf{r}$) газопылевой смеси в целом определим соотношениями

$$\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha s_\alpha = \rho_g(1-s) + \rho_d s, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = \rho^{-1}\sum_\alpha \rho_\alpha s_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \frac{\rho_g(1-s)}{\rho}\mathbf{u}_g + \frac{\rho_d s}{\rho}\mathbf{u}_d, \tag{3}$$

где $\rho_\alpha(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x},t)$ – соответственно истинная массовая плотность и гидродинамическая скорость фазы α; $s_d(\mathbf{x},t)$ – мгновенное значение объёмной концентрации дисперсной фазы, $(s_g + s_d = 1)$; индекс "d" у параметра s_d далее будем опускать, $s_d \equiv s$.

Для моделирования химического состава, особенно на ранних этапах эволюции допланетного облака, необходимо в общем случае привлекать уравнения баланса масс для каждой химической компоненты фазы, которые могут быть представлены в форме уравнений сохранения частиц сорта k в фазе α [61,63]. С учётом сделанных выше допущений эти уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_\alpha n_{\alpha(k)}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\left(s_\alpha n_{\alpha(k)}\mathbf{u}_\alpha\right) = \sigma_{\alpha(k)} \equiv \sum_{\rho=1}^{r} \nu_{\alpha(k),\rho}\xi_\rho + \delta_{2\alpha}\dot{n}_{\alpha(k)}, \quad (\alpha = 1,2;\ k = 1,2,\ldots n), \tag{4}$$

или

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{s_\alpha n_{\alpha(k)}}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\left(s_\alpha n_{\alpha(k)}\mathbf{w}_\alpha\right) = \sigma_{\alpha(k)}, \quad \mathbf{w}_\alpha \equiv (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}). \tag{5}$$

Здесь $d(...)/dt \equiv \partial(...)/\partial t + \mathbf{u}\cdot\partial(...)/\partial\mathbf{x}$ – субстанциональная производная, связанная с движением элементарного макро- объёма газопылевой среды в целом; $\partial(...)/\partial\mathbf{x} = \sum_l \mathbf{i}_l \partial(...)/\partial x_l$ – векторный дифференциальный оператор; $\mathbf{i}_l$ ($l = 1,2,3$) – суть декартовы единичные векторы, параллельные соответствующим осям координат; величина $(\partial/\partial\mathbf{x})\cdot\mathbf{b}$ является дивергенцией $\mathbf{b}$; $n_{\alpha(k)}(\mathbf{x},t)$ – число частиц химического вещества k в единице объёма, занимаемого фазой α; $\mathbf{w}_\alpha(\mathbf{x},t)$ – мгновенная диффузионная скорость фазы α, удовлетворяющая, в силу определения среднемассовой скорости $\mathbf{u}$, соотношению

$$\sum_\alpha \rho_\alpha s_\alpha \mathbf{w}_\alpha = 0, \quad \mathbf{w}_\alpha \equiv (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}), \tag{6}$$

или

$$\sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha = 0, \quad \mathbf{J}_\alpha \equiv \rho_\alpha s_\alpha \mathbf{w}_\alpha = \rho_\alpha s_\alpha (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}), \tag{7}$$

где $\rho_\alpha = \sum_k m_{(k)} n_{\alpha(k)}$; $\mathbf{J}_\alpha(\mathbf{x},t)$ – массовый диффузионный поток частиц α-фазы; $\dot{n}_{\alpha(k)}$ – величина, описывающая изменение числовой концентрации химической компоненты k в пылевой фазе, связанное с процессами дробления или слипания сконденсированных частиц в газопылевом облаке, $m_{(k)}$ – молекулярная масса k-й компоненты; $\sigma_{\alpha(k)}$ – скорость образования числа частиц компоненты k в единице объёма среды за счёт химических реакций и фазовых переходов (испарения и конденсации вещества), а также процессов дробления и коагуляции дисперсной составляющей; $\xi_\rho(\mathbf{x},t)$ – скорость ρ-й химической реакции (включая межфазовые реакции и фазовые переходы), $\rho = 1,2,...,r$; $\nu_{\alpha(k),\rho}$ – стехиометрический коэффициент компоненты k в фазе α по отношению к ρ-ой химической реакции, стехиометрическое уравнение которой символически может быть записано в виде [64]:

$$\sum_\alpha \sum_k \nu_{\alpha(k),\rho} m_{(k)} = 0, \quad (\rho = 1,2,...,r). \tag{8}$$

Стехиометрические коэффициенты компонентов, образующихся при протекании реакции (слева направо), считаются положительными, а коэффициенты расходующихся при этом компонентов – отрицательными.

Из (4), при условии сохранения массы $\left(\sum_k m_{(k)} \dot{n}_{\alpha(k)} = 0\right)$ всех химических компонентов в пылевой фазе в процессе трансформации твёрдых частиц, следует дифференциальное уравнение сохранения

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho_\alpha s_\alpha}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\rho_\alpha s_\alpha \mathbf{w}_\alpha\right) = \sigma_{\alpha\beta} = \sum_{\rho=1}^{r} \nu_{\alpha,\rho} \xi_\rho , \quad (\alpha,\beta = 1,2) \tag{9}$$

для распределённой массовой плотности

$$\tilde{\rho}_\alpha \equiv s_\alpha \sum\nolimits_k m_{(k)} n_{\alpha(k)} = \rho_\alpha s_\alpha \tag{10}$$

α-фазы. Здесь $\nu_{\alpha,\rho} \equiv \sum\nolimits_k m_{(k)} \nu_{\alpha(k),\rho}$; $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x},t)$ – интенсивность перехода массы из фазы α в фазу β (или наоборот, тогда $\sigma_{\alpha\beta} < 0$) за счёт химических реакций и процессов испарения или конденсации вещества в допланетном облаке; при этом $\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_{\beta\alpha}$. Для дальнейших целей удобно ввести в рассмотрение массовые фазовые концентрации

$$C_\alpha \equiv \tilde{\rho}_\alpha / \rho = \rho_\alpha s_\alpha / \rho , \qquad \sum\nolimits_\alpha C_\alpha = 1 , \tag{11}$$

и относительную скорость пыли и газа $\mathbf{w} \equiv \mathbf{w}_{dg} = (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_g)$; тогда уравнениям (9) можно придать более компактный вид

$$\rho \frac{dC_\alpha}{dt} = -\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{J}_\alpha\right) + \sigma_{\alpha\beta} , \quad (\alpha,\beta = 1,2) , \quad \mathbf{J}_{1,2} = \begin{cases} \rho C_1 \mathbf{w}_1 = -\rho C_1 C_2 \mathbf{w}, \\ \rho C_2 \mathbf{w}_2 = \ \ \rho C_1 C_2 \mathbf{w}. \end{cases} \tag{12}$$

Закон сохранения массы в целом, получающийся в результате суммирования (4) по индексам k и α, с учётом (7) и (8), принимает обычную форму

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}\right) = 0 , \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 , \tag{13}$$

как и в однофазном континууме. Отметим, что излучение не изменяет уравнения непрерывности (13), поскольку оно «не обладает» массой.

Далее будем также предполагать, что в процессе эволюции газопылевого облака материал твёрдых включений остаётся несжимаемым, т.е. истинная (физическая) плотность пыли $\rho_d = const$. Тогда мгновенное уравнение (12) для пыли сводится к уравнению

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{\rho}\right) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(s \mathbf{w}_d\right) + \rho_d^{-1} \sigma_{dg} , \quad \mathbf{w}_d = C_g \mathbf{w} = (1-s) \frac{\rho_g}{\rho} \mathbf{w} , \tag{14}$$

позволяющему найти объёмное содержание $s(\mathbf{r},t)$ пылевой составляющей в двухфазном потоке при заданной относительной скорости фаз $\mathbf{w}$. Таким образом, для расчёта параметров ρ и s (а следовательно, и плотности газа ρ_g), можно использовать уравнения (13) и (14) вместо двух уравнений (9).

Интенсивность силового взаимодействия фаз и характеристики излучения в газопылевом облаке сильно зависят от характерного размера твёрдых включений (например, характерного объёма одной частицы пыли $\tilde{U}_d(\mathbf{x},t)$) и полного их числа $N_d \equiv s\sum_k n_{d(k)}$ в единице совокупного объёма газовзвеси. В случае если все твёрдофазные конденсаты являются сферическими или близкими к ним по форме с характерным диаметром Ферета $(\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)})$, то $\tilde{U}_d = (\pi/6)\tilde{d}^3$. Балансовое уравнение для полного числа дисперсных частиц $N_d(\mathbf{x},t)$ можно получить, используя (4); в результате будем иметь

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{N_d}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot(N_d\mathbf{w}_d) = \sigma_{N_d} \equiv \sum_k\sum_{\rho=1}^{r}\nu_{d(k),\rho}\xi_\rho + \dot{N}_d\,, \tag{15}$$

где источниковый член $\dot{N}_d \equiv \sum_k \dot{n}_{\alpha(k)}$, характеризующий изменение полной числовой плотности разномасштабных твёрдых частиц за счёт процессов коагуляции и дробления, определяется в общем случае кинетическим уравнением Смолуховского [см. ниже (29)]. По известным параметрам N_d и s можно определить важный параметр коагулирующей смеси в двухфазном потоке – характерный объем $\tilde{U}_d(\mathbf{x},t)$ (или средний линейный размер $\tilde{d}_d$) твёрдых включений:

$$\tilde{U}_d = s/N_d\,, \quad \tilde{d}_d = \sqrt[3]{(6/\pi)(s/N_d)}\,. \tag{16}$$

Следует отметить, что если при численном моделировании эволюции газопылевого облака не принимать во внимание процессы дробления и коагуляции твердых частиц ($\dot{N}_d = 0$), процессы испарения и конденсации $(\sigma_{dg} = 0)$, а также предположить несжимаемость материала включений ($\rho_d = const$), то тогда $\rho_{(k)} = m_{(k)}n_{(k)}$. При этих допущениях $\tilde{\rho}_d = s\rho_d = \rho_d\tilde{U}_d N_d$, и уравнение (15) (с правой нулевой частью) является просто следствием уравнения (14) сохранения массы второй фазы, которое в этом случае принимает более простой вид

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{s}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\left(s\mathbf{w}_d\right) = 0, \qquad \mathbf{w}_d = C_g\mathbf{w}\,. \tag{14*}$$

Межфазная диффузия. Обобщённые соотношения Стефана−Максвелла могут служить исходными уравнениями при анализе процессов межфазовой диффузии в газопылевом диске. Диффузия в многокомпонентной смеси газов подробно рассмотрена методами кинетической теории в монографии [65]. Полученный в ней основной результат состоит в том, что скорости $(\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)})$ находятся из системы уравнений Стефана−Максвелла

$$\sum_j \frac{n_{(j)}n_{(k)}}{n^2 \mathsf{D}_{(jk)}}(\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)}) - \mathrm{k}_{T(k)}\frac{\partial \ln T}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{d}_{(k)} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{p}\left\{-\rho_{(k)}\mathbf{F}_{(k)} + \frac{\partial p_{(k)}}{\partial \mathbf{x}} - C_{(k)}\sum_j \left(-\rho_{(j)}\mathbf{F}_{(j)} + \frac{\partial p_{(j)}}{\partial \mathbf{x}}\right)\right\}, \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

которым можно придать следующий вид уравнений движения отдельных компонентов смеси (см., например, «Примечание И» в монографии [58]):

$$\rho_{(k)}\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\partial p_{(k)}}{\partial \mathbf{x}} + \rho_{(k)}\mathbf{F}_{(k)} + \sum_j \mathrm{k_B}\, T\frac{n_{(j)}n_{(k)}}{n\mathsf{D}_{(jk)}}(\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)}) - \mathrm{k_B}\mathrm{k}_{T(k)}\, n\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}.$$

Здесь $\rho_{(k)} = m_{(k)}n_{(k)}$, $C_{(k)} = \rho_{(k)}/\rho$, $p_{(k)}$ – соответственно массовая плотность, массовая концентрация и парциальное давление частиц сорта k; $p = \sum_k p_{(k)}$ – полное давление смеси (закон Дальтона), $p_{(k)} = n_{(k)}\mathrm{k_B}T$; $\mathrm{k_B}$ – постоянная Больцмана; $n = \sum_k n_{(k)}$, $\rho = \sum_k \rho_{(k)}$ – соответственно полные числовая и массовая плотности многокомпонентной смеси; $\mathsf{D}_{(jk)}$ – бинарные коэффициенты диффузии; $\mathbf{F}_{(k)}$ – объёмная внешняя сила (на единицу массы k-й компоненты); $\mathrm{k}_{T(k)}$ – термодиффузионное отношение.

В работе [66] соотношения Стефана−Максвелла для многокомпонентных смесей были выведены методами неравновесной термодинамики, а в работе [59] они были обобщены и на гетерогенные смеси. В рассматриваемом здесь однодавленческом приближении ($p_g = p_d$) эти соотношения для межфазовой диффузии принимают следующий вид:

$$\sum_\beta R_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha) - p\,\mathrm{k}_{T\alpha}\frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{d}_\alpha \equiv -\tilde{\rho}_\alpha\mathbf{K}_\alpha + s_\alpha\frac{\partial p_\alpha}{\partial \mathbf{x}} - C_\alpha\sum_\beta(-\tilde{\rho}_\beta\mathbf{K}_\beta + s_\beta\frac{\partial p_\beta}{\partial \mathbf{x}}) \equiv$$

$$\equiv \rho_\alpha s_\alpha\frac{d_\alpha\mathbf{u}_\alpha}{dt} + s_\alpha\frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} - \rho_\alpha s_\alpha\mathbf{F}_\alpha - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{\Pi}_\alpha\right) + \frac{1}{2}\sum_\beta \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta), \tag{17}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots$; $d_\alpha(\ldots)/dt = \partial(\ldots)/\partial t + \mathbf{u}_\alpha\cdot\partial(\ldots)/\partial\mathbf{x}$ – субстанциональная производная, вдоль траектории центра масс α-фазы, заключённой внутри элементарного макро−объёма $\delta\mathsf{V}$ многофазной среды; $\mathbf{\Pi}_\alpha$ – парциальный тензор вязких напряжений; $R_{\alpha\beta}$ – коэффициент межфазного трения для фаз α и β (коэффициент $R_{\alpha\beta}$ отражает взаимодействие двух фазовых континуумов, и поэтому его часто удобно записать в симметричном виде $R_{\alpha\beta} = \tilde{\rho}_\alpha\tilde{\rho}_\beta\theta_{\alpha\beta}$, где параметры $\theta_{\alpha\beta}$ не зависят, по крайней мере грубо, от пропорций смеси), $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$; $\mathbf{F}_\alpha$ – внешняя массовая сила, отнесённая к единице массы вещества фазы α;

$$\tilde{\rho}_\alpha \mathbf{K}_\alpha \equiv -\tilde{\rho}_\alpha \frac{d_\alpha \mathbf{u}_\alpha}{dt} + \tilde{\rho}_\alpha \mathbf{F}_\alpha + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{\Pi}_\alpha \right) - \frac{1}{2} \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{w}_{\alpha\beta} \tag{18}$$

– обобщённая термодинамическая сила, сопряжённая с диффузионным потоком $\mathbf{J}_\alpha$; величины $\mathbf{d}_\alpha$ также имеют смысл обобщённых термодинамических сил, вызывающих относительное движение фаз ($\sum_\alpha \mathbf{d}_\alpha = 0$); $\mathrm{k}_{T\alpha}$ – термофоретическое отношение, причём $\sum_\alpha \mathrm{k}_{T\alpha} = 0$.

Для определения величины термофоретической силы в литературе предложен целый ряд теоретических формул (см., например, [67,68]). Следует, однако, отметить, что в случае дисперсных частиц, размер которых, как правило, значительно меньше характерного размера неоднородностей температуры в диске, силу, связанную с термофорезом, можно не учитывать. Последнее слагаемое в правой части уравнения (17), равное $\frac{1}{2}\sum_\beta \mathbf{w}_{\alpha\beta} \sum_{\rho=1}^{r} \nu_{\alpha,\rho} \xi_\rho$, описывает изменение импульса фазы α при фазовых переходах (здесь $\mathbf{w}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta$). В рассматриваемом нами случае двухфазной газопылевой дисковой системы этим слагаемым учитывается утрата импульса частицами пылевой фазы за счёт перехода массы части их в газовую фазу при испарении или приобретение дополнительного импульса дисперсной фазой за счёт образования (из газовой составляющей) новых твёрдых частиц при конденсации. Тем не менее, далее этим слагаемым мы также будем в большинстве случаев пренебрегать, поскольку практически оно всегда много меньше стоксовой силы трения $\mathbf{F}_{fric,\alpha} \equiv \sum_\beta R_{\alpha\beta} \mathbf{w}_{\alpha\beta}$, возникающей из-за эффектов вязкости фаз [62], и точно равно нулю при отсутствии фазовых переходов. Важно лишний раз подчеркнуть, что в отличие от классических безынерционных соотношений Стефана–Максвелла для относительных скоростей компонентов $\mathbf{w}_{(jk)} = \mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(k)}$, законы межфазной диффузии, описываемые обобщёнными соотношениями (17), учитывают инерцию относительного движения фаз.

Для двухфазной газопылевой дисковой среды соотношения (17) принимают вид уравнений движения газа и пыли

$$R_{gd} \mathbf{w} \equiv (1-s) s \rho_d \rho_g \theta_{dg} \mathbf{w} = \rho_g (1-s) \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} + (1-s) \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} - \rho_g (1-s) \mathbf{g} - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{\Pi}_g \right),$$

$$-R_{dg} \mathbf{w} = \rho_d s \frac{d_d \mathbf{u}_d}{dt} + s \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} - \rho_d s \mathbf{g}, \tag{17*}$$

где $\mathbf{F}_d = \mathbf{F}_g \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x},t)$ – объёмная сила на единицу массы, связанная в общем случае как с гравитационным притяжением звезды, так и с гравитационным притяжением самого газопылевого облака.

Искомое диффузионное соотношение для вектора относительной скорости пыли и газа $\mathbf{w} \equiv (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_g)$ можно получить из тех членов уравнений (18), которые описывают действие трения, если каждый из них разделить на соответствующую величину $s_\alpha \rho_\alpha$, вычесть один из другого и выделить слагаемое с $\mathbf{w}$. Записывая истинные скорости фаз в виде $\mathbf{u}_d = (C_g \mathbf{w} + \mathbf{u})$ и $\mathbf{u}_g = (-C_d \mathbf{w} + \mathbf{u})$ и предполагая, что $\rho_d >> \rho_g$, в результате получим определяющее соотношение для $\mathbf{w}$ (аналог закона Дарси для фильтрации)

$$\frac{\rho}{\tilde{\rho}_d \tilde{\rho}_g} R_{dg} \mathbf{w} \equiv \rho \theta_{gd} \mathbf{w} = \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} - \frac{d_d \mathbf{u}_d}{dt} + \frac{\rho_d - \rho_g}{\rho_g \rho_d} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{\tilde{\rho}_g} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{\Pi}_g \right) \cong -\frac{d\mathbf{w}}{dt} + \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}}, \quad (19)$$

которое далее будет рассматриваться нами при моделировании фазовой диффузии в диске как основное. Отметим, что гравитационные силы при таком вычитании взаимно уничтожились, однако их воздействие на процесс движения газопылевой среды проявляется посредством градиента давления. При написании (19) нами не делалось различия между субстанциональными производными для отдельных фаз и системы в целом, т.е. предполагалось, что $d_d / dt \cong d_g / dt \cong d / dt$, что справедливо в механике смесей лишь в так называемом диффузионном приближении. В общем случае, т.е. при учёте ускорения диффузионных потоков относительно центра тяжести, надлежит использовать точное преобразование

$$\frac{d_d \mathbf{u}_d}{dt} - \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} = \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \left(\mathbf{w}_d \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}_d - \left(\mathbf{w}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}_g =$$

$$= \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u} + C_g \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) C_g \mathbf{w} - C_d \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) C_d \mathbf{w} =$$

$$= \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u} + \Im(\mathbf{w}^2) \approx \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}, \quad (20)$$

где $\Im(\mathbf{w}^2) \equiv C_g \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) C_g \mathbf{w} - C_d \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) C_d \mathbf{w}$ – квадратичная по $\mathbf{w}$ функция, которая часто может быть опущена [30], в частности для пассивной мелкодисперсной примеси, поскольку для них величина $|\mathbf{w}|$ мала. Тогда определяющее диффузионное соотношение для вектора относительной скорости фаз принимает более сложный вид:

$$\rho\theta_{gd}\mathbf{w} \cong -\frac{d\mathbf{w}}{dt} - \left(\mathbf{w}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)\mathbf{u} - C_g\left(\mathbf{w}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)C_g\mathbf{w} + C_d\left(\mathbf{w}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)C_d\mathbf{w} + \frac{1}{\rho_g}\frac{\partial p}{\partial\mathbf{x}}. \quad (19^*)$$

Коэффициент аэродинамического сопротивления. Коэффициент трения R_{dg} между газовым и пылевым континуумами определяется в литературе различными формулами в зависимости от характерного диаметра $\tilde{d}_d$ частиц дисперсной фазы (см., например, [69,70]). Если характерный размер сферических твёрдых частиц $\tilde{d}_d << \lambda_g$, где λ_g – длина свободного пробега молекул в газовой фазе, то величина R_{dg} задаётся формулой Эпстейна [71]. Для крупнодисперсных сферических конденсатов с диаметрами, превышающими длину свободного пробега молекул газа, коэффициент сопротивления определяется законом Стокса [72]. Таким образом, для коэффициентов сопротивления R_{dg} (или θ_{dg}) гладкой шарообразной частицы имеем (см., например, [73,74])

$$R_{dg} = \begin{cases} 2\tilde{\rho}_d\tilde{\rho}_g c_{sg} / \tilde{d}_d\rho_d, & \text{когда} \quad \tilde{d}_d << \lambda_g \ (\text{режим Эпштейна}), \\ 2\tilde{\rho}_d\tilde{\rho}_g C_D(\mathbf{Re}_d)|\mathbf{w}| / \tilde{d}_d\rho_d, & \text{когда} \quad \tilde{d}_d >> \lambda_g (\text{режим Стокса}), \end{cases} \quad (21)$$

или

$$\theta_{dg} = \begin{cases} 2c_{sg} / \tilde{d}_d\rho_d, & \text{когда} \quad \tilde{d}_d << \lambda_g, \\ 2C_D(\mathbf{Re}_d)|\mathbf{w}| / \tilde{d}_d\rho_d, & \text{когда} \quad \tilde{d}_d >> \lambda_g. \end{cases} \quad (21^*)$$

Здесь c_{sg} – скорость звука в газе [см. (57)]; $\mathbf{Re}_d = \tilde{d}_d|\mathbf{w}|/\nu_g$ – число Рейнольдса для пыли; ν_g – коэффициент молекулярной кинематической вязкости газовой составляющей смеси, $\nu_g = \lambda_g c_{sg}/2$; $C_D(\mathbf{Re}_d)$ – коэффициент аэродинамического сопротивления (так называемая стандартная кривая сопротивления), который имеет достаточно сложный характер [67,69,75]. В астрофизике широкое распространение получило выражение [76]

$$C_D(\mathbf{Re}_d) = \begin{cases} 9\mathbf{Re}_d^{-1}, & \mathbf{Re}_d \le 1, \\ 9\mathbf{Re}_d^{-0.6}, & 1 \le \mathbf{Re}_d \le 800, \\ 0.165, & \mathbf{Re}_d \ge 800. \end{cases} \quad (22)$$

На наш взгляд, не менее удобной является трёхчленная формула

$$C_D(\mathbf{Re}_d) = 9\mathbf{Re}_d^{-1}(1 + 0.179\mathbf{Re}_d^{1/2} + 0.013\mathbf{Re}_d), \quad (0.1 < \mathbf{Re}_d < 10^3), \quad (22^*)$$

достоинством которой является возможность применения в широком диапазоне значений $\mathbf{Re}_d$.

Следует отметить, что в реальных многофазных потоках условия обтекания частиц, как правило, существенно отличаются от идеализированных условий, в которых применима стандартная кривая. В газопылевом облаке космические частицы имеют, в общем случае, неправильную форму и шероховатую поверхность, движутся неравномерно в турбулентном потоке газа, который является разреженным и сжимаемым. Рассмотрим кратко их влияние, не учитываемое, как правило, в астрофизической литературе.

1) Турбулизация течения также оказывает существенное влияние на величину $C_D(\mathbf{Re}_d)$. Как отмечается в работе [77], по данным различных авторов, например, в области $20 < Re_d < 100$ значения C_D колеблются в пределах (0.01-3) C_D^* (здесь и ниже C_D^* соответствует стандартной кривой). Важно отметить, что влияние турбулентности уменьшается с уменьшением числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_d$. Для сравнительно небольших Re_d можно использовать формулы Лопеса и Даклера (см., например, [69])

$$C_D(\mathbf{Re}_d) = \begin{cases} 60.75\varepsilon^{1/3}\mathbf{Re}_d^{-1}, \quad \mathbf{Re}_d < 50; \quad 0.05 < \varepsilon < 0.5; \\ \\ 0.0498\left(1 + 150/\mathbf{Re}_d\right)^{1.565} + 1.5\varepsilon, \quad 50 < \mathbf{Re}_d < \mathbf{Re}_d^*; \quad 0.07 < \varepsilon < 0.5, \end{cases}$$

где ε – относительная степень турбулентности, т.е. отношение среднеквадратичной пульсационной скорости к осреднённой скорости скольжения; $\mathbf{Re}_d^* = min\{0.9\mathbf{Re}_{crit}, 700\}$; $\mathbf{Re}_{crit}$ – критическое значение числа Рейнольдса: $\ln \mathbf{Re}_{crit} = 5.477 - 15.8\varepsilon$ ($\varepsilon \le 0.15$); $\ln \mathbf{Re}_{crit} = 3.371 - 1.75\varepsilon$ ($\varepsilon > 0.15$).

2) Значительное влияние на аэродинамическое сопротивление частиц оказывают сжимаемость и разрежённость набегающего потока. Роль этих факторов определяется прежде всего значениями чисел Маха $\mathbf{Ma} = |\mathbf{u}_g| / c_{sg}$ и Кнудсена $\mathbf{Kn}$. В высокоскоростном течении газовзвеси в диске значительную роль играет сжимаемость несущего газа. Из многочисленных обобщённых зависимостей, имеющихся в литературе, приведём формулу Карлсона и Хоглунда [69])

$$C_D(\mathbf{Re}_d) = 9\mathbf{Re}_d^{-1}(1 + 0.179\mathbf{Re}_d^{1/2} + 0.013\mathbf{Re}_d) \times \\ \times \frac{[1 + \exp(-0.427\mathbf{Ma}^{-4.63} - 3\mathbf{Re}_d^{-0.88})]}{1 + \mathbf{Re}_d^{-1}\mathbf{Ma}[3.82 + 1.28\exp(-1.25\mathbf{Ma}^{-1}\mathbf{Re}_d)]}, \qquad (22^{**})$$

где $\mathbf{Re}_d < 100$, $\mathbf{Ma} < 2$. Здесь два первых сомножителя в числителе соответствуют стандартной кривой, третий учитывает влияние сжимаемости, а знаменатель – разрежённости.

3) При пониженном давлении газа в диске Вассон получил следующие оценки давления в центральной плоскости околосолнечного диска: $2{\cdot}10^{-5}$–10^{-1} г/см^3 на $\mathrm{r}=1$ а.е. и $5\cdot10^{-7}-2\cdot10^{-6}$ г/см^3 на $\mathrm{r}=3$ а.е.) [78]. В этом случае может возникнуть скольжения газовой составляющей среды по поверхности твёрдой частицы, что приводит к уменьшению коэффициента аэродинамического сопротивления.

Разреженность среды характеризуется числом Кнудсена $\mathbf{Kn}=\lambda_g/\tilde{d}_d$. Обычно различают четыре области значений $\mathbf{Kn}$: свободномолекулярное обтекание ($\mathbf{Kn}>10$), переходный режим ($10>\mathbf{Kn}>0.25$), течение со скольжением $(0.25>\mathbf{Kn}>0.01)$, континуальное обтекание (эффект разреженности отсутствует, $\mathbf{Kn}<0.01$). Для первых трёх областей коэффициент аэродинамического сопротивления можно представить в виде $C_D=\phi C_D^*$, где коэффициент ϕ определяется известной формулой Милликена (см., например, [79])

$$\phi\equiv\left\{1+\mathbf{Kn}[1.155+0.471\exp(-0.596/\mathbf{Kn})]\right\}^{-1}.$$

Все перечисленные усовершенствования формулы (22) легко могут быть учтены при численном моделировании строения допланетного газопылевого диска, например, на стадии образования субдиска.

Возвращаясь к формуле (21*) для коэффициента $\theta_{dg}(\mathbf{Re}_d)$ заметим, что выражение (21*) удобном только для монодисперсной пыли с заданным характерным линейным размером включений $\tilde{d}_d$, так как в этом случае θ_{dg} не зависит от объёмной концентрации дисперсной фазы s и полной числовой плотности твёрдых частиц N_d. Однако при учёте процессов коагуляции, происходящих в газопылевом допланетном облаке, т.е. с учётом многофракционности пылевой составляющей, целесообразно переписать (21*) в виде, явно зависящем от параметров s и N_d, которые определяются уравнением Смолуховского. При использовании (16) выражение (21*) для $\theta_{dg}(s,N_d,\mathbf{Re}_d)$ преобразуется к виду

$$\theta_{dg}=\theta_{dg}(s,N_d,\mathbf{Re}_d)=\begin{cases}(\tfrac{4}{3}\pi)^{1/3}\rho_d^{-1}s^{-1/3}c_{sg}N_d^{1/3}, & \text{когда}\quad \tilde{d}_d<<\lambda_g,\\[2ex] (\tfrac{4}{3}\pi)^{1/3}\rho_d^{-1}s^{-1/3}N_d^{1/3}C_D(\mathbf{Re}_d)|\mathbf{w}|, & \text{когда}\quad \tilde{d}_d>>\lambda_g.\end{cases}\tag{23}$$

3. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КОАГУЛЯЦИИ

Рассмотрим теперь более детально методику расчёта величины $N_d(\mathbf{x},t)$ в случае учёта многофракционности пылевой составляющей системы. Реальное допланетное облако полидисперсно, т.е. в элементарном макрообъёме δV присутствуют сконденсированные частицы разных размеров $d_{d,k}$. Этот фактор можно учесть, если разбить пылевую составляющую на конечное число фракций, каждая из которых характеризуется, вообще говоря, своими термогидродинамическими параметрами, т.е. вместо одной дисперсной фазы, необходимо рассматривать m фаз (где m – число фракций), каждая из которых имеет свои макрохарактеристики

$$d_{d,k}, \quad n_{d,k}, \quad s_{d,k} = n_{d,k}(\pi/6)d^3_{d,k}, \quad \rho_{d,k}, \quad \mathbf{u}_{d,k} \dots \quad (k = 1,\dots,m), \quad (24)$$

где $\mathbf{u}_{d,k}(\mathbf{r},t)$ – гидродинамическая скорость твёрдых частиц k-ой фракции.

Будем далее считать, что вещество разных фракций одно и то же ($\rho_{d,1} = \rho_{d,2} = \dots = \rho_{d,m} = \rho_d = const$) и что твёрдофазные конденсаты фракции «1» составляют группу частиц наименьшего размера (первичные частицы), фракции «2» – группу двойных частиц и т.д. до максимального размера. Для упрощения анализа процесса коагуляции, происходящего в ($m+1$)-фазном полидисперсном потоке, предположим также, что все твёрдые частицы являются сферическими или близкими к ним по форме с диаметрами Ферета $d_{d,k}$. Так как размер одинаковых по химическому составу твёрдых частиц после слипания возрастает пропорционально кубическому корню из количества первичных конденсатов, её составляющих $d_{d,k} = d_{d,1}\sqrt[3]{k}$, то объёмная концентрация дисперсных частиц k-ой фракции определяется соотношением

$$s_{d,k} = n_{d,k}(\pi/6)d^3_{d,k} = U_1 k n_{d,k}, \quad (25)$$

где $n_{d,k}(\mathbf{x},t)$ – числовая плотность частиц k-й фракции (их число в единице совокупного объёма газовзвеси); $U_1 = (\pi/6)d^3$, $d \equiv d_{d,1}$ – соответственно объем и диаметр одной частицы наименьшего размера. Тогда объёмное содержание $s(\mathbf{x},t)$, распределённая массовая плотность $\tilde{\rho}_d(\mathbf{x},t)$ и гидродинамическая скорость $\mathbf{u}_d(\mathbf{r},t)$ всего пылевого континуума выражаются в виде

$$s \equiv \sum_{k=1}^{m} s_{d,k} = U_1 \sum_{k=1}^{m} k\, n_{d,k}, \quad \tilde{\rho}_d = \rho_d \sum_{k=1}^{m} s_{d,k}, \quad s\mathbf{u}_d = \sum_{k=1}^{m} s_{d,k}\mathbf{u}_{d,k}. \quad (26)$$

В дисперсной смеси, в которой макроскопические скорости фракций отличаются друг от друга, т.е. фракции j и k движутся друг относительно друга со скоростью $\mathbf{u}_{d,j} - \mathbf{u}_{d,k}$ $(j,k = 1,\dots,m)$, будут происходить столкновения между частицами разных фракций, что приведёт к обмену массой, импульсом и энергией между фракциями [59]. В данной работе, однако, будем предполагать, что частицы вещества («псевдомолекулы»), принадлежащие к различным пылевым континуумам (фракциям), двигаются с одной и той же гидродинамической скоростью, $\mathbf{u}_{d,k} \equiv \mathbf{u}_d$ $(k = 1,...,m)$.

Выше уже упоминалось, что в процессе аккумуляции крупных твёрдых частиц в газопылевом облаке основными механизмами формирования их размеров являются процессы дробления и коагуляции [77]. Однако далее распад частиц не рассматривается; при этом изменение плотности $n_{d,k}$ может произойти только в результате уменьшения числа частиц k-ой фракции при соединении их с другими, а также в результате увеличения количества частиц этой фракции в результате слипания более мелких конденсатов. Тогда система кинетических уравнений, описывающая процесс коагуляции, может быть записана в виде [80]

$$\dot{n}_{d,k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} K_{j(k-j)} n_{d,j} n_{d,(k-j)} - \sum_{j=1}^{m} K_{kj} n_{d,k} n_{d,j}\,, \quad (k = 1,2,....,m)\,, \tag{27}$$

где $\dot{n}_{d,k}(\mathbf{x},t)$ – полная скорость изменения концентрации $n_{d,k}(\mathbf{x},t)$ пылевых частиц k-ой фракции за счёт процессов коагуляции; $K_{kj}(d_k, d_j)$ – коэффициент (ядро) коагуляции для частиц k-го и j-го размеров, характеризующий эффективность коагуляционного взаимодействия, определяется как среднее число столкновений частиц размера d_k с частицами размера d_j в единице объёма в единицу времени при единичной концентрации того и другого сорта. Поскольку подобное взаимодействие двух разновеликих частиц в потоке усложнено влиянием окружающей среды, характером взаимодействия в ламинарном или турбулентном потоке, а также силовыми полями (гравитацией, электромагнитным полем, молекулярным взаимодействием), то определение ядра коагуляции представляет самостоятельную сложную задачу (см., например, [33,81]). Коагуляция частиц в газопылевом потоке может быть вызвана одновременным воздействием различных механизмов столкновения частиц. Это, прежде всего, гравитационная коагуляция, электрическая коагуляция, броуновская коагуляция, турбулентная коагуляция и различные их сочетания, типа турбулентно-броуновской коагуляции заряженных и нейтральных частиц, броуновской коагуляции заряженных частиц в гравитационном поле и т.п. В работе [82] проанализированы различные механизмы коагуляции применительно к турбулентному газопылевому облаку и приведены соответствующие выражения для коэффициентов K_{kj}. С использованием (27) система мгновенных уравнения сохранения числа частиц k-ой фракции пылевой фазы принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}n_{d,k}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\left(n_{d,k}\mathbf{u}_d\right)=\dot{n}_{d,k}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}K_{j(k-j)}n_{d,j}\,n_{d,(k-j)}-n_{d,k}\sum_{j=1}^{m}K_{kj}\,n_{d,j}\,,\ (k=1,2,....,m)\quad(28)$$

Из (28) следует балансовое уравнение для полного числа $N'_d=\sum_k n_{d,k}$ дисперсных частиц в единице совокупного объёма газовзвеси, определяемого только процессами коагуляции (см. (15))

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{N'_d}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\left(N'_d\mathbf{w}_d\right)=\sum_k \dot{n}_{d,k}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}\sum_{j=1}K_{kj}n_{d,k}n_{d,j},\qquad(29)$$

причём правая часть (29) равна половине второго члена в правой части уравнения (28), поскольку увеличения общего числа пылевых частиц в единице объёма во время коагуляции не происходит. В пространственно-однородном случае, когда все константы коагуляции приблизительно одинаковы $K_{kj}=K$, уравнение (29) $\partial N'_d\partial t=-(K/2)N'^2_d$ (с начальным условием $N'_d(0)=N'_{d0}$) имеет простое решение $N'_d(t)=N'_{d0}/(1+qt)$, где $q=KN'_{d0}/2$, которое позволяет определить (по наклону прямой) константу коагуляции K экспериментально.

Важно иметь в виду, что количество нелинейных дифференциальных уравнений (28), требуемых для описания пространственно-временного распределения всей совокупности размеров пылевых частиц в диске, в общем случае неограниченно. Вместе с тем при численном моделировании процессов коагуляции на основе системы (28) приходится использовать конечное (m) число уравнений. При этом, разумеется, возможна «потеря материала», поскольку некоторое количество частиц может коагулировать до размеров, превышающих наибольший из учитываемых при таком подходе размеров $d_{d,m}$. В связи с этим для наших целей более предпочтительной является другая, интегральная форма записи системы уравнений коагуляции (28).

Для получения этой формы предположим, что число частиц с объёмом от U до $U+dU$, находящихся в момент времени t в элементарном объёме в окрестности точки $\mathbf{x}$, равно $f(U,\mathbf{x},t)dU$. Функция $f(U,\mathbf{x},t)$, характеризующая спектр размеров частиц, по определению удовлетворяет следующему соотношению

$$N_d(\mathbf{x},t)=\int_0^\infty f(U,\mathbf{x},t)dU\,.\qquad(30)$$

Очевидно, что формулой

$$s(\mathbf{x},t)=\int_0^\infty U\,f(\mathbf{x},t,U)dU\qquad(31)$$

определяется объёмная суммарная концентрация пылевых частиц. Поскольку объем частиц k-го размера равен kU_1, то числовая плотность $n_{d,k}$ частиц k может быть выражена через $f(\mathbf{x},t,U)$ следующим образом:

$$n_{d,k}=f(kU_1,\mathbf{x},t)U_1. \qquad (32)$$

Если воспользоваться этим соотношением, то после операции $U_1\to dU$ из (28) можно получить следующее кинетическое уравнение коагуляции

$$\frac{\partial f(U,\mathbf{x},t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\left[f(U,\mathbf{x},t)\mathbf{u}_d\right]\equiv\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\left[\mathbf{w}_d\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^U f(W,\mathbf{x},t)f(U-W,\mathbf{x},t)K(W,U-W)\,dW-f(U,\mathbf{x},t)\int_0^\infty f(W,\mathbf{x},t)K(W,U)\,dW, \qquad (33)$$

являющееся обобщением на случай пространственно-неоднородных движений газовзвеси известного уравнения Мюллера для описания коагулирующей дисперсной среды [33]. Здесь $K(W,U)$ – симметричное по аргументам ядро коагуляции, определяющее поведение диспергированной смеси во времени. Для решения этого уравнения необходимо потребовать выполнения соглашений $f(U,\mathbf{x},t)\to 0$ при $U\to 0$ и $U\to\infty$, а также задать начальное условие $f(U,\mathbf{x},0)=f_0(U,\mathbf{x})$ и граничные условия.

Кинетическое уравнение (33) представляет собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, решение которого в общем случае можно получить только численными методами [83]. В литературе известен ряд точных аналитических решений нестационарного пространственно-однородного аналога уравнения (33) для некоторых простых по структуре ядер коагуляции (линейных по каждому из аргументов в отдельности), основанных на применении интегрального преобразования Лапласа [3,33]. В связи с этим следует отметить следующее. Наиболее теоретически продвинутыми к настоящему времени являются исследования процессов коагуляции для ядер $K(W,U)=\Lambda_0$, не зависящих от объёмов коагулирующих частиц. Решение уравнения коагуляции с ядром $K(W,U)=\Lambda_1 WU$ вряд ли можно считать физически реализуемым, поскольку оно не обладает свойствами непрерывности во времени (начиная с некоторого времени число частиц в системе становится отрицательным [8]). Аналитическое решение кинетического уравнения с ядром, пропорциональным сумме объёмов коагулирующих частиц $K(W,U)=\Lambda_2(W+U)$, было получено Сафроновым [3] в связи с исследованиями эволюции допланетного газопылевого облака. Однако до сих пор не найдено ни одной дисперсной системы, для которой микрофизика коагуляционного процесса в точности приводила бы к ядрам подобного типа.

4. УРАВНЕНИЕ СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

При моделировании допланетного облака приходится решать уравнения радиационной гидродинамики для больших пространственно- временных масштабов движения, которыми определяются осреднённые термогидродинамические и радиационные параметры газопылевой дисковой среды. При линейном размере совокупного элементарного объёма δV , значительно большего длины пробега излучения λ_{rad}, пренебрегать энергией и давлением излучения нельзя. В случае локального равновесия излучения с веществом, когда плотность энергии E_{rad} и давление p_{rad} излучения равны

$$E_{rad} = aT^4 / \rho, \quad p_{rad} = \rho E_{rad} / 3 = aT^4 / 3, \tag{34}$$

следует в гидродинамических уравнениях к внутренней энергии $E(\mathbf{x},t)$ и тепловому давлению $p(\mathbf{x},t)$ вещества добавлять энергию и давление излучения, а также вводить в рассмотрение процесс лучистой теплопроводности. В (34) $a = 4\sigma / c$, σ, c – соответственно постоянная плотности излучения, постоянная Стефана–Больцмана и скорость света.

Мгновенное уравнение сохранения полного количества движения газопылевого вещества можно получить, например, суммируя уравнения движения отдельных фаз (17*). В результате дифференциальное уравнение сохранения импульса дисковой среды в целом (с учётом поля излучения), зависящее, в отличие от уравнения неразрывности (13), от относительного движения фаз, может быть записано в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial(\rho\,\mathbf{u})}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho\,\mathbf{u}\,\mathbf{u})\right) = -\frac{\partial p_{sum}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{\Pi}^*_{sum}\right) + \rho \mathbf{g}, \tag{35}$$

где $\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{ab})\right) \equiv \sum_k \sum_l \mathbf{i}_l \frac{\partial(\mathrm{a_k} b_1)}{\partial x_\mathrm{k}}$ – дивергенция диадика $\mathbf{ab} \equiv \sum_k \sum_l \mathbf{i}_l \mathbf{i}_k (\mathrm{a_k} b_1)$; $p_{sum}(\mathbf{x},t)$ – полное давление, равное сумме теплового давления газопылевой смеси и давления излучения, $p_{sum} = p + p_{rad}$; $\mathbf{g}(\mathbf{x},t) = -\partial\Psi / \partial\mathbf{x}$ – вектор ускорения внешней массовой силы (силы тяжести); $\Psi(\mathbf{r},t)$ – гравитационный ньютоновский потенциал;

$$\mathbf{\Pi}^*_{sum} \equiv \mathbf{\Pi}_{sum} + \mathbf{\Pi}_{rel} = \mathbf{\Pi}_g + \mathbf{\Pi}_{rad} - (1-s)\rho_g \mathbf{w}_g \mathbf{w}_g - s\rho_d \mathbf{w}_d \mathbf{w}_d; \tag{36}$$

$\mathbf{\Pi}_{sum}(\mathbf{x},t)$ – суммарный тензор вязких напряжений, равный сумме тензора вязких напряжений для гетерогенной смеси $\mathbf{\Pi} = \sum_\alpha \mathbf{\Pi}_\alpha \cong \mathbf{\Pi}_g$ (т.к. по предположению $\mathbf{\Pi}_d \cong 0$) и тензора лучистых касательных напряжений $\mathbf{\Pi}_{rad}$; $\mathbf{\Pi}_\alpha$ – тензор вязких напряжений фазы α, зависящий от тензора скоростей деформаций, определяемого полем скоростей соответствующей фазы;

$$\mathbf{\Pi}_{rel} \equiv -\sum\nolimits_{\alpha} \tilde{\rho}_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = -(1-s)\rho_g \mathbf{w}_g \mathbf{w}_g - s\rho_d \mathbf{w}_d \mathbf{w}_d \tag{37}$$

– тензор «относительных» напряжений, возникающий из-за динамических эффектов относительного движения твёрдых частиц и газа. Наличие тензора относительных напряжений в суммарном уравнении движения смеси приводит к кардинальному отличию гетерогенной механики от механики многокомпонентной, для которой возможно пренебрежение членами, содержащими величины второго порядка относительно диффузионных скоростей $\mathbf{w}_{\alpha}$ (так называемое диффузионное приближение в механике смесей). Когда масса газопылевого облака составляет несколько процентов от массы центрального тела (или точнее, когда $\mathrm{M}_{disk} / \mathrm{M}_{\odot} \le h_{disk} / R$, где h_{disk} и R – полутолщина и радиус диска соответственно (см., например, [84]) можно пренебречь самогравитацией частиц диска; в этом случае будем иметь

$$\Psi = G\mathrm{M}_{\odot} / |\tilde{\mathbf{r}}|, \quad \mathbf{g} = -\partial\Psi / \partial\mathbf{x} = G\mathrm{M}_{\odot}\tilde{\mathbf{r}} / |\tilde{\mathbf{r}}|^3, \tag{38}$$

где $\mathrm{M}_{\odot}$ – масса центрального тела (звезды); G – гравитационная постоянная; $|\tilde{\mathbf{r}}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ – центральный радиус-вектор, $\tilde{\mathbf{r}} = \sum_k \mathbf{i}_k x_k$; центр масс протозвезды здесь и далее принят за начало системы отсчёта. В тех случаях, когда эффекты самогравитации важны $\Psi = G\mathrm{M}_{\odot} / |\tilde{\mathbf{r}}| + \Psi_{\mathrm{cr}}$ и потенциал самогравитации Ψ_{cr} удовлетворяет уравнению Пуассона $\nabla^2\Psi_{\mathrm{cr}} = 4\pi G\rho$, где ∇^2 – оператор Лапласа.

Тензор относительных напряжений $\mathbf{\Pi}_{rel}$ для газопылевого диска можно записать в нескольких эквивалентных формах, удобных при написании модельных уравнений движения в различных системах координат. Используя (6) и (12), будем иметь

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{rel}} &\equiv -(1-s)\rho_g \mathbf{w}_g \mathbf{w}_g - s\rho_d \mathbf{w}_d \mathbf{w}_d = -(1-s)\rho_g \mathbf{u}_g \mathbf{u}_g - s\rho_d \mathbf{u}_d \mathbf{u}_d + \rho\mathbf{u}\mathbf{u} = \\ &= -s\rho_d C_g \mathbf{w}\mathbf{w} = -s\rho_d C_g \big(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1\, \mathrm{w}_1\mathrm{w}_1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\, \mathrm{w}_1\mathrm{w}_2 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3\, \mathrm{w}_1\mathrm{w}_3 + \\ &\quad + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1\mathrm{w}_2\mathrm{w}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2\mathrm{w}_2\mathrm{w}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_3\mathrm{w}_2\mathrm{w}_3 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_1\mathrm{w}_3\mathrm{w}_1 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_2\mathrm{w}_3\mathrm{w}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3\mathrm{w}_3\mathrm{w}_3 \big).\end{aligned} \tag{39}$$

Важно отметить, что при моделировании динамики допланетного облака эти дополнительные напряжения должны приниматься во внимание, когда в нем присутствуют фракции относительно крупных твёрдых частиц (≥ 1 мм), поскольку в этом случае имеется существенная разница скоростей между фазами, т.е. скорость относительного движения фаз $\mathbf{w}$ по порядку величины может быть равной гидродинамической скорости суммарного континуума $\mathbf{u}$. Вместе с тем для очень мелких частиц ($<<1$мм, при числе Стокса $\mathbf{Stk}<<1$), когда частицы успевают реагировать на изменение параметров несущей среды, может быть использовано приближение пассивной примеси – двухфазный газопылевой поток аппроксимируется течением однофазной (в общем случае многокомпонентной) среды с определёнными эффективными теплофизическими свойствами (плотностью, газовой постоянной, теплоёмкостью и т.п.) [85]. В другом крайнем случае (при $\mathbf{Stk}>>1$), когда крупные твёрдые частицы в дисковой системе не изменяют своего состояния при изменении параметров газа, также можно рассматривать однофазное течение, но уже чистого газа, причём обратное влияние крупных тел может быть учтено путём введения распределённых источников сопротивления. Наконец, в случае, когда $C_d<<1$, присутствие пыли не влияет на параметры течения несущего газа и поэтому можно воспользоваться приближением единичной частицы; здесь вначале решаются уравнения движения газа, а затем по известным его параметрам определяются траектории частиц и изменение их состояния вдоль траекторий [73]. Далее мы воспользуемся представлением тензора $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{rel}}$ через вектор скорости $\mathbf{w}\equiv\mathbf{u}_d-\mathbf{u}_g$.

Как хорошо известно [86], тензор лучистых касательных напряжений $\mathbf{\Pi}_{rad}$ по своей структуре похож на тензор вязких напряжений $\mathbf{\Pi}$. По этой причине, в случае учета взаимодействия вещества и излучения до членов порядка $|\mathbf{u}|/c$ в тензор $(\mathbf{\Pi}_{rad})_{ik}$ входит слагаемое $-c^{-2}\left(u_i(\mathbf{q}_{rad})_k+u_k(\mathbf{q}_{rad})_i+\delta_{ik}u_s(\mathbf{q}_{rad})_s\right)$, где $\mathbf{q}_{rad}$ – вектор лучистого потока тепла, определенный формулой (48). Следовательно, можно написать [87],

$$\mathbf{\Pi}_{sum}\equiv(\mathbf{\Pi}+\mathbf{\Pi}_{rad})\cong 2(\mu_g+\mu_{rad})\overset{\circ}{\mathbf{D}}+\left(\xi_g+{}^5\!/_3\,\mu_{rad}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{u}\right)\mathbf{U}, \qquad (40)$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{D}}\equiv\mathbf{D}-{}^1\!/_3\,\mathbf{U}(\partial/\partial\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}$ и $\mathbf{D}\equiv{}^1\!/_2\left(\partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{x}+\left(\partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{x}\right)^{transp}\right)$; $\mu_g(\rho,T)$, $\xi_g(\rho,T)$ – молекулярные коэффициенты динамической и объёмной вязкости газа; $\mathbf{U}$ – единичный тензор, $\mathbf{U}=\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2+\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3$); $\mu_{rad}=4aT^4/15c\tilde{\kappa}\rho$ – коэффициент лучистой вязкости; $\tilde{\kappa}$ – полная непрозрачность среды (осреднённая по Росселанду), которая, в свою очередь, также зависит от ρ, s, N_d, T и химического состава газа [см. ниже (72) и (73)].

5. УРАВНЕНИЕ ПРИТОКА ТЕПЛА И РАДИАЦИИ

Мгновенное уравнение притока тепла (уравнение внутренней энергии) для гетерогенной газопылевой среды в целом, с учётом сделанных выше предположений, может быть записано в виде [59]

$$\rho\frac{d}{dt}(E_{\mathrm{sum}})=-\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{q}_{sum}\right)-p_{sum}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{u}\right)+\Phi_u+\sum_\alpha\left(\mathbf{J}_\alpha\cdot\mathbf{K}_\alpha\right). \tag{41}$$

Здесь $\mathbf{K}_\alpha \cong -d_\alpha\mathbf{u}_\alpha/dt+\mathbf{F}_\alpha-\sigma_{\alpha\beta}\mathbf{w}_{\alpha\beta}/2\tilde{\rho}_\alpha$ – обобщённая термодинамическая сила диффузии, включающая «инерционное слагаемое» и слагаемое, обязанное фазовым переходам [см. (18)]; $E_{sum}\equiv E+E_{rad}$ – полная внутренняя энергия дисковой системы (вещество плюс радиация) на единицу массы; $E(\mathbf{x},t)\equiv\sum_\alpha C_\alpha e_\alpha$ – внутренняя энергия вещества; $e_\alpha(\mathbf{x},t)$, $h_\alpha(\mathbf{x},t)$ $(=e_\alpha+p/\rho_\alpha)$ – соответственно парциальная внутренняя энергия и энтальпия (на единицу массы) вещества α-фазы; E_{rad} – плотность энергии излучения (на единицу массы), определяемая законом Стефана–Больцмана $E_{rad}=aT^4/\rho$; $\mathbf{q}_{sum}\equiv\mathbf{q}+\mathbf{q}_{rad}$ – плотность полного потока энергии в системе; $\mathbf{q}_{rad}$ – удельный поток энергии, переносимой излучением $\mathbf{q}$ – удельный поток энергии, связанный с тепловым движением вещества, определяемый теплопроводностью и переносом парциальных энтальпий фазовыми диффузионными потоками; $\Phi_u\cong\left(\mathbf{\Pi}_{sum}:\nabla\mathbf{u}\right)$ – диссипативная функция, представляющая собой скорость, с которой теплота порождается вязким трением газа в единичном объёме в единицу времени. При написании (41) использовано предположение об аддитивности термодинамических функций (внутренней энергии, энтальпии и т.п.) по массам входящих в гетерогенную систему фаз, что допустимо в случае пренебрежения вкладами в термодинамические функции от приповерхностных (кнудсеновских) слоёв твёрдых частиц.

Последнее слагаемое в уравнении (41) с учётом (17) и (18), может быть записано в виде $\sum_\alpha\mathbf{J}_\alpha\cdot\mathbf{K}_\alpha=\sum_\alpha\mathbf{w}_\alpha\cdot\left(-\mathbf{d}_\alpha+s_\alpha\partial p/\partial\mathbf{x}\right)$, где $\mathbf{d}_g=-\mathbf{d}_d=R_{gd}\mathbf{w}$ (без учёта термофореза). Тогда для дополнительного источника тепла, связанного с диссипацией кинетической энергии диффузии, будем иметь (аналог джоулева нагрева для плазмы)

$$\sum_\alpha\mathbf{J}_\alpha\cdot\mathbf{K}_\alpha=-C_d\mathbf{w}\cdot\left(-\mathbf{d}_g+s_g\frac{\partial p}{\partial\mathbf{x}}\right)+C_g\mathbf{w}\cdot\left(-\mathbf{d}_d+s_d\frac{\partial p}{\partial\mathbf{x}}\right)=R_{gd}\left|\mathbf{w}\right|^2-s\sigma\left(\mathbf{w}\cdot\frac{\partial p}{\partial\mathbf{x}}\right),$$

поскольку $s^2 << 1$. Здесь $\sigma \equiv (\rho_d - \rho_g)/\rho$ – относительное превышение плотности пылевых частиц над плотностью газа; для малых твёрдых частиц $s\sigma << 1$ и последним слагаемым в этом соотношении можно пренебречь.

Важно отметить, что в уравнении (41) фигурирует истинная внутренняя энергия газопылевой среды E на единицу массы, которая определена путём вычитания из полной энергии U_{tot} вещества дисковой системы потенциальной и кинетической энергий всех фаз [59]

$$E = U_{tot} - \sum_\alpha C_\alpha \psi_\alpha - \sum_\alpha \frac{1}{2} C_\alpha |\mathbf{u}_\alpha|^2 = U_{tot} - \Psi - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} - C_d C_g \frac{|\mathbf{w}|^2}{2}. \tag{42}$$

Вместе с тем, если определить внутреннюю энергию газопылевой системы соотношением $E^* = U_{tot} - \Psi - \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$, то она будет включать в себя и макроскопическую кинетическую энергию фаз в системе центра масс, т.е. $E^* = E + C_d C_g |\mathbf{w}|^2 / 2$. Если теперь записать уравнение (41) через переопределённую таким образом внутреннюю энергию E^*, то оно примет более привычный вид, т.е. не будет содержать слагаемых $R_{gd}|\mathbf{w}|^2 - s\sigma \mathbf{w} \cdot (\partial p / \partial \mathbf{x})$. Действительно, балансовое уравнение для кинетической энергии межфазной диффузии, с учётом (19*) и векторного преобразования $(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot (\partial / \partial \mathbf{x}))\mathbf{c} = \mathbf{ab} : (\partial / \partial \mathbf{x})\mathbf{c})$, можно представить в виде

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{C_d C_g}{2} |\mathbf{w}|^2 \right) \approx \rho C_d C_g \frac{d}{dt}\left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \right) \cong -R_{gd}|\mathbf{w}|^2 + \left(\mathbf{\Pi}_{\text{rel}} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} \right) + s\sigma \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right), \tag{43}$$

поскольку, с точностью до членов второго порядка относительно $\mathbf{w}$, имеем

$$\rho \frac{d}{dt}\left(C_d C_g \frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \right) = \rho C_d C_g \frac{d}{dt}\left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \right) + \frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \left\{ C_d \rho \frac{dC_g}{dt} + C_g \rho \frac{dC_d}{dt} \right\} =$$

$$= \rho C_d C_g \frac{d}{dt}\left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \right) + (|\mathbf{w}|^2 / 2)(C_d - C_g)\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho C_g C_d \mathbf{w}) \right) \approx \rho C_d C_g \frac{d}{dt}\left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \right).$$

И все-таки используемая в уравнении притока тепла (41) величина E, по-видимому, более заслуживает наименования внутренней энергии, чем величина E^*, поскольку внутренняя энергия должна содержать только вклад от теплового движения и короткодействующих молекулярных взаимодействий и не содержать каких-либо макроскопических слагаемых [13]).

Другие формы записи энергетического уравнения для газовзвеси. Далее нам потребуются энергетические уравнения, записанные в несколько других формах. Введём суммарную энтальпию $H_{sum} \equiv H + H_{rad}$ вещества и излучения в диске, где

$$H \equiv \sum_{\alpha} C_{\alpha} h_{\alpha} = \sum_{\alpha} C_{\alpha}(e_{\alpha} + p/\rho_{\alpha}) = E + p/\rho,$$

$$H_{rad} = E_{rad} + p_{rad}/\rho = \tfrac{4}{3} a T^4/\rho, \quad H_{sum} = E_{sum} + p_{sum}/\rho. \tag{44}$$

Тогда, с учётом выражения (42) и преобразования $\rho dE_{sum}/dt + p_{sum}(\partial/\partial\mathbf{x})\cdot\mathbf{u} = \rho dH_{sum}/dt - dp_{sum}/dt$, являющегося следствием определений (44) и уравнения неразрывности смеси (13), будем иметь

$$\rho\frac{dH_{sum}}{dt} = \frac{dp_{sum}}{dt} - \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{q}_{sum}\right) + \Phi_u + R_{gd}\left|\mathbf{w}\right|^2 - s\sigma\left(\mathbf{w}\cdot\frac{\partial p}{\partial\mathbf{x}}\right). \tag{45}$$

Это уравнение соответствует первому закону термодинамики (т.е. закону сохранения тепловой энергии).

Перепишем теперь уравнение (45) в переменных $T(\mathbf{x},t)$ и $p(\mathbf{x},t)$. Для большинства целей, относящихся к проблеме моделирования эволюции аккреционного диска, достаточно аппроксимировать парциальные энтальпии газа и пыли с помощью выражений: $h_g = c_{Pg}T + h_g^0$, $h_d = c_{Pd}T + h_g^0$, где h_{α}^0 – энтальпия фазы α при нулевой температуре (так называемая парциальная теплота образования); $c_{P\alpha}$ – удельная теплоёмкость (при постоянном давлении) фазы α. Теплофизические величины $c_{P\alpha}$ и h_{α}^0 можно считать постоянными величинами, аппроксимирующими реальные $c_{P\alpha}(T)$ и $h_{\alpha}^0(T)$ в ограниченном температурном интервале. Тогда можно написать

$$H = c_P T + \sum_{\alpha} C_{\alpha} h_{\alpha}^0, \quad H_{rad} = E_{rad} + p_{rad}/\rho = \tfrac{4}{3} a T^4/\rho, \tag{46}$$

где $c_P = \sum_{\alpha} c_{P\alpha} C_{\alpha} = \rho^{-1}\left(\rho_g(1-s)c_{Pg} + s\rho_d c_d\right)$ – полная удельная теплоёмкость системы «газ–твёрдые частицы» при постоянном давлении. Используя теперь выражения (46), а также уравнения (9), (12), (13), окончательно получим

$$\rho\frac{dH}{dt} \equiv \rho\sum_{\alpha} C_{\alpha}\frac{dh_{\alpha}}{dt} + \rho\sum_{\alpha} h_{\alpha}\frac{dC_{\alpha}}{dt} = \rho c_P\frac{dT}{dt} + \sum_{\alpha} h_{\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{J}_{\alpha} + \sigma_{\alpha\beta}\right) =$$

$$= \rho c_P\frac{dT}{dt} - \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\left[\sum_{\alpha} h_{\alpha}\mathbf{J}_{\alpha}\right] + \sum_{\rho=1}^{r} q_{\rho}\xi_{\rho} + \frac{\partial T}{\partial\mathbf{x}}\cdot\left[\sum_{\alpha} c_{P\alpha}\mathbf{J}_{\alpha}\right], \tag{47}$$

где соотношением $q_\rho \equiv \sum_\alpha h_\alpha \nu_{\alpha,\rho} = q_\rho^0 + \sum_\alpha c_{P\alpha} \nu_{\alpha,\rho}$ введена так называемая теплота реакции ρ, равная разности произведений парциальных энтальпий продуктов реакции на соответствующие стехиометрические коэффициенты и аналогичной суммой для реагентов; отметим, что величина $q_\rho^0 = \sum_\alpha h_\alpha^0 \nu_{\alpha,\rho}$ может интерпретироваться как теплота фазового перехода ρ при нулевой температуре. Последнее слагаемое в правой части (47) представляет собой эффект так называемых, «диффундирующих теплоёмкостей», который мал и потому его, как правило, не учитывают.

Полный поток энергии $\mathbf{J}_q \equiv \mathbf{q} - \sum_\alpha h_\alpha \mathbf{J}_\alpha$, связанный с тепловым движением частиц вещества, согласно [23], может быть записан в традиционном виде

$$\mathbf{J}_q \equiv \mathbf{q} - \sum_\alpha h_\alpha \mathbf{J}_\alpha \equiv \mathbf{q} - \rho C_g C_d (h_d - h_g)\mathbf{w} = -\chi_g \partial T / \partial \mathbf{x}, \qquad (48)$$

обобщающем на гетерогенные среды аналогичное соотношение, полученное для гомогенных многокомпонентных смесей [65]. В выражении (48) мы пренебрегли термофоретическим эффектом, $\mathrm{k}_{T\alpha} = 0$. Подобным же образом, если исключить из рассмотрения области диска, близкие к поверхности протозвезды, можно записать для вектора лучистого потока тепла закон теплопроводности

$$\mathbf{q}_{rad} = -\chi_{rad} \partial T / \partial \mathbf{x}. \qquad (48^*)$$

Здесь $\chi_{rad} = 4acT^3 / (3\tilde{\kappa}\rho)$ – коэффициент лучистой теплопроводности; χ_g – молекулярный коэффициент теплопроводности газа.

Подставляя (47), (48) и (48*) в уравнение (44), окончательно найдём

$$\rho c_{P,sum} \frac{dT}{dt} = \frac{dp_g}{dt} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\chi_{sum} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right) - 4p_{rad} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} \right) + \Phi_u + R_{gd} \mathbf{w}^2 - s\sigma \mathbf{w} \frac{\partial p_g}{\partial \mathbf{x}} - \sum_{\rho=1}^{r} q_\rho \xi_\rho \qquad (49)$$

где введены обозначения $\chi_{sum} = \chi_g + \chi_{rad}$ и $c_{P,sum} = c_P + 16aT^3 / 3\rho$.

Наконец, получим балансовое уравнение для удельной энтропии $S = \sum_\alpha C_\alpha S_\alpha$ суммарного континуума, моделирующего газопылевую среду диска в целом, которое обычно называют общим уравнением переноса тепла (здесь S_α – энтропия единицы массы α-фазы). Воспользуемся для этого фундаментальным соотношением Гиббса [64]) для однотемпературного гетерогенного многокомпонентного радиационного континуума в однодавленческом приближении, которое, будучи записанным вдоль траектории движения центра масс элементарного объёма δV, принимает вид [59]

$$T \frac{dS_{sum}}{dt} = \frac{dE_{sum}}{dt} + p_{sum} \frac{d}{d}\left(\frac{1}{\rho} \right) - \sum_\alpha \sum_{k=1}^{n} \mu_{\alpha(k)} \frac{d}{dt} \left(\frac{s_\alpha n_{\alpha(k)}}{\rho} \right), \qquad (50)$$

где $\mu_{\alpha(k)}$ – химический потенциал k-й компоненты в α-фазе. С помощью уравнений (9), (13) и (41) соотношению Гиббса (50) можно придать вид уравнения баланса

$$\rho\frac{dS_{sum}}{dt}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\left\{\frac{1}{T}\left(\mathbf{q}_{sum}-\sum_{\alpha}G_{\alpha}\mathbf{J}_{\alpha}\right)\right\}=\sigma_{(S)}, \tag{51}$$

где

$$0\le T\sigma_{(S)}=-(\mathbf{J}_q+\mathbf{q}_{rad})\cdot\frac{\partial\ln T}{\partial\mathbf{x}}-\sum_{\alpha}\mathbf{w}_{\alpha}\cdot\mathbf{d}_{\alpha}+\left(\mathbf{\Pi}_{sum}:\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}\right)+\sum_{\alpha}\left(\mathbf{\Pi}_{\alpha}:\frac{\partial\mathbf{w}_{\alpha}}{\partial\mathbf{x}}\right)+\sum_{\rho=1}^{r}\mathrm{A}_{\rho}\,\xi_{\rho} \tag{52}$$

– рассеяние энергии в необратимых процессах, являющееся локальной мерой неравновесности системы; $G_{\alpha}=\rho_{\alpha}^{-1}\sum_{k=1}^{n}\mu_{\alpha(k)}n_{\alpha(k)}=e_{\alpha}+p/\rho_{\alpha}-T\,S_{\alpha}$ – свободная энергия Гиббса элементарной макро частицы α - фазы;

$$\mathrm{A}_{\rho}\equiv-\sum_{\alpha=1}\sum_{k=1}^{n}\mu_{\alpha(k)}\nu_{\alpha(k),\rho} \tag{53}$$

– химическое сродство ρ-й реакции, протекающей, в общем случае, между компонентами, находящимися в разных фазах.

Отметим, что конкретное представление скорости производства энтропии $T\sigma_{(S)}$ в виде билинейной формы используется в неравновесной термодинамике для установления методом Онзагера определяющих соотношений, линейно связывающих между собой термодинамические потоки и сопряжённые им термодинамические силы в рассматриваемом необратимом процессе.

6. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

В качестве термического состояния многокомпонентной газовой фазы диска (уравнения для давления) будем использовать далее бароклинное уравнение состояния для смеси совершенных газов

$$p_g=\sum\nolimits_{(k)}p_{(k)}=\mathrm{k_B}\,T\sum\nolimits_{(k)}n_{g(k)}=\rho_g\Re_g T, \tag{54}$$

где $\Re_g=\mathrm{k_B}\sum_{(k)}n_{g(k)}/\rho_g=\mathrm{k_B}/\mathsf{M}_g$; M_g – средняя молекулярная масса частиц газовой составляющей, которая далее считается постоянной.

Используя предположение о равенстве парциальных давлений в фазах $p_g=p_d=p$, запишем уравнение состояния вещества диска в виде

$$p=\rho\Re T,\quad \Re(C_g,s)=\Re_g\rho_g/\rho=\Re_g C_g/(1-s)\cong\Re_g C_g. \tag{55}$$

Заметим, что в рассматриваемом здесь случае величина $\Re$ не является константой. Приближенное равенство в формуле (55) имеет место для случая газовзвеси с малым объёмным содержанием конденсированной фазы (т.е. когда $s\ll 1$, что далее будем предполагать); тем не менее даже в этом случае динамическое воздействие твёрдых частиц на газовый поток может оказаться существенным из-за большого влияния силы гравитации. Таким образом, газопылевая дисковая среда в целом может рассматриваться как совершенный газ с показателем адиабаты γ и скоростью звука c_s, определяемыми соотношениями

$$\gamma \equiv \frac{c_P}{c_P - \Re} \cong \frac{\rho_g c_{Pg} + s\,\rho_d c_{Pd}}{\rho_g (c_{Pg} - \Re_g) + s\rho_d c_{Pd}}, \quad 1 \le \gamma \le \gamma_g \equiv \frac{c_{Pg}}{c_{Pg} - \Re_g}, \tag{56}$$

$$c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \Re T \cong c_{sg}^2 \frac{\gamma \rho_g}{\gamma_g \rho}, \quad c_s < c_{sg} \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_g}\right)_{S_g} = (\gamma_g \Re_g T)^{1/2}, \tag{57}$$

где γ_g и c_{sg} – показатель адиабаты и изотермическая скорость звука в чистом газе. Для газа солнечного состава, состоящего на 98% из водорода и гелия, показатель адиабаты $\gamma_g = 1.45$, а средняя молекулярная масса $\mathrm{M_g} = 2.39$.

7. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЫЛИНОК

Лучистый теплообмен оказывает определяющее влияние на состояние и движение высокотемпературного допланетного облака [87]. Между тем, взаимодействие лучистого теплообмена и гидродинамического движения дискового вещества до последнего времени почти не учитывалось и при моделировании эволюции субдиска. В связи с этим рассмотрим более детально некоторые основные понятия теории переноса излучения, которые необходимы для указанных целей.

Излучение и поглощение фотонов описывается уравнением переноса излучения, которое для локально-равновесной газопылевой среды принимает вид

$$c^{-1}\partial I_\nu / \partial t + \mathbf{\Omega} \cdot (\partial I_\nu / \partial \mathbf{x}) = \rho \kappa_\nu (B_\nu - I_\nu). \tag{58}$$

Известно, что рассеяние непосредственным образом не отражается на тепловом режиме среды. Именно поэтому в задачах радиационной гидродинамики рассеянием излучения, как правило, пренебрегают и рассматривают только истинный коэффициент ослабления κ_ν и истинную функцию источников излучения B_ν (без учёта рассеяния). Здесь $I_\nu \equiv I_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}, t)$ – спектральная интенсивность излучения, определённая таким образом, что $I_\nu d\nu d\mathbf{\Omega}$ описывает энергию фотонов в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, пересекающих в единицу времени единичный элемент поверхности с нормалью $\mathbf{\Omega}$ в пределах телесного угла $d\mathbf{\Omega}$, ориентированного в направлении $\mathbf{\Omega}$; $B_\nu(T) \equiv (2h\nu^3/c^2)\left(\exp(h\nu / \mathrm{k_B} T) - 1\right)^{-1}$ – функция Планка; h – постоянная Планка; $\kappa_\nu(\mathbf{x}, t)$ – полный спектральный коэффициент ослабления (непрозрачность), выражающийся через сечения элементарных физических процессов в газопылевой смеси соотношением

$$\rho\kappa_\nu = (1-s)\sum_k n_{g(k)}\sigma_{(k)}(\nu) + N_d \frac{\pi\tilde{d}_d^2}{4} Q_d(m(\nu), \tilde{d}_d); \tag{59}$$

$\sigma_{(k)}(\nu) = \sigma_{a\,(k)}(\nu)\left[1-\exp(h\nu/\mathrm{k_B}T)\right] + \sigma_{s(k)}^{eff}$ – сечение ослабления излучения частоты ν в расчёте на одну молекулу газа сорта k, равное сечению поглощения фотонов (исправленное на индуцированное испускание излучения) плюс эффективное сечение рассеяния; $Q_d = Q_{ds} + Q_{da}$; Q_{ds}, Q_{da} – соответственно факторы эффективности для рассеяния и поглощения света на пылевых частицах (безразмерные величины, рассчитываемые на основе теории Ми); $m(\nu)$ – комплексный показатель преломления вещества пылинки. С функцией I_ν связаны используемые в работе моменты:

$$E_{rad,\nu}(\mathbf{x},t) \equiv \frac{1}{c\rho}\int_{4\pi} I_\nu(\mathbf{x},\mathbf{\Omega},t)\, d\mathbf{\Omega} \tag{60}$$

– спектральная плотность энергии (на единицу массы вещества),

$$\mathbf{q}_{rad,\nu}(\mathbf{x},t) \equiv \int_{4\pi} I_\nu(\mathbf{x},\mathbf{\Omega},t)\mathbf{\Omega}\, d\Omega \tag{61}$$

– спектральный поток энергии по направлению $\mathbf{\Omega}$. Полные плотность энергии и поток получаются интегрированием соответствующих монохроматических величин по частоте

$$E_{rad}(\mathbf{x},t) \equiv \int_{\nu=0}^{\infty} E_{rad,\nu}(\mathbf{x},t)d\nu, \quad \mathbf{q}_{rad}(\mathbf{x},t) \equiv \int_{\nu=0}^{\infty} \mathbf{q}_{rad,\nu}(\mathbf{x},t)d\nu. \tag{62}$$

Уравнение (58), записанное вдоль направления распространения излучения, принимает более простой вид

$$dI_\nu / dl = \rho\kappa_\nu (B_\nu - I_\nu). \tag{63}$$

Здесь l – координата вдоль луча; член $c^{-1}\partial I_\nu / \partial t$ в уравнении (58) далее будем опускать, поскольку характерные времена при движении газопылевой среды много больше, чем l^*/c, где l^*– длина луча. Если определить оптическую толщину слоя газопылевой среды (с длиной луча l) вдоль направления распространения излучения выражением

$$\tau_\nu = \int_0^l \rho\kappa_\nu dl, \tag{64}$$

то легко можно проинтегрировать уравнение (63); в результате получим следующее выражение для интенсивности излучения из области, имеющей полную оптическую толщину τ_ν:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)\exp(-\tau_\nu) + \int_{\tau_{\nu 1}=0}^{\tau_\nu} B_\nu(\tau_{\nu 1})\exp[-(\tau_\nu - \tau_{\nu 1})]d\tau_{\nu 1}, \qquad (65)$$

где $I_\nu(0)$ – постоянная интегрирования, которая имеет смысл интенсивности излучения в некоторой точке на луче, в которой $l = 0$. При удалении точки $l = 0$ на очень большое расстояние из (65) следует

$$I_\nu \approx \int_{-\infty}^{l} B_\nu(l_1)\exp\left(-\int_{l_2=l_1}^{l} \rho\kappa_\nu(l_2)\,dl_2\right)\rho\kappa_\nu(l_1)\,dl_1. \qquad (66)$$

Выражения (65) и (66) позволяют в идеале найти, при известных оптических свойствах среды (т.е. распределении $\kappa_\nu(\mathbf{x},t)$) и граничных условиях на центральной плоскости диска, интенсивность $I_\nu(\mathbf{x},\mathbf{\Omega},t)$ в разных точках и по разным направлениям, после чего по формулам (61) и (62) можно будет рассчитать распределение лучистого теплового потока $\mathbf{q}_{rad}(\mathbf{x},t)$.

Вместе с тем в уравнения притока тепла (41) или (45) входит дивергенция потока излучения $(\partial/\partial\mathbf{x})\cdot\mathbf{q}_{rad}$. Часто, при известном распределении I_ν эту величину можно найти, не вычисляя $\mathbf{q}_{rad}$ по (62). Проинтегрировав стационарное уравнение (58) по всему спектру частот и по телесному углу Ω, получим следующее общее выражение для вклада радиации в тепловой баланс газопылевой среды диска

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{q}_{rad}\right) = -\int_{\nu=0}^{\infty}\int_{4\pi}\left(\mathbf{\Omega}\cdot\frac{\partial I_\nu}{\partial\mathbf{x}}\right)d\mathbf{\Omega}\,d\nu = \int_{\nu=0}^{\infty}\left\{4\pi\rho\kappa_\nu B_\nu(T) - \int_{4\pi}\rho\kappa_\nu I_\nu d\mathbf{\Omega}\right\}d\nu, \quad (67)$$

где первый член соответствует спонтанно излучаемой, а второй – поглощаемой радиационной энергии в единице объёма в единицу времени. Вычисления вклада излучения в уравнение притока тепла (41) по формуле (67) в общем случае очень сложны. Однако они значительно упрощаются в следующих двух случаях, важных при моделировании различных этапов эволюции допланетного газопылевого облака:

1. **Малая оптическая толщина газопылевого диска**. В этом случае в (67) можно пренебречь членом с I_ν, т.е. в уравнении притока тепла можно принять

$$\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{q}_{rad}\right] \cong 4\pi\int_{\nu=0}^{\infty}\rho\kappa_\nu B_\nu(T)d\nu. \qquad (68)$$

При очень высоких температурах среды этот член может быть существенным даже при малой оптической толщине газа в приповерхностном слое диска [88].

2. **Большая оптическая плотность газопылевого диска для излучения всех частот** ν. В этом случае применимо диффузионное приближение для лучистого переноса тепла (приближение лучистой теплопроводности), когда поле излучения I_ν оказывается лишь слегка анизотропным. При умножении урав-

нения переноса излучения (58) на Ω и интегрировании по всем углам, получим (с учётом того, что изотропный член с $\rho\kappa_\nu B_\nu$ не зависит от направления и потому не вносит вклада в интеграл)

$$\int_{4\pi} \mathbf{\Omega}\left(\mathbf{\Omega}\cdot\frac{\partial I_\nu}{\partial \mathbf{x}}\right) d\mathbf{\Omega} = -\rho\kappa_\nu \mathbf{q}_{rad,\nu}, \tag{69}$$

откуда для полного потока тепла будем иметь

$$\mathbf{q}_{rad} = -\int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\rho\kappa_\nu}\int_{4\pi} \mathbf{\Omega}\left(\mathbf{\Omega}\cdot\frac{\partial I_\nu}{\partial \mathbf{x}}\right) d\mathbf{\Omega}\,. \tag{70}$$

Если для слегка анизотропного поля излучения в левой части (69) оставить в рассмотрении только наиболее значащую изотропную часть, то

$$\mathbf{q}_{rad} = -\int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\rho\kappa_\nu}\int_{4\pi} \mathbf{\Omega}\left(\mathbf{\Omega}\cdot\frac{\partial I_\nu}{\partial \mathbf{x}}\right) d\mathbf{\Omega} \cong -\frac{c}{4\pi}\int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\rho\kappa_\nu}\left(\frac{\partial B_\nu}{\partial \mathbf{x}}\int_{4\pi}\cdot\mathbf{\Omega}\right)\mathbf{\Omega}\, d\mathbf{\Omega} =$$

$$= -\frac{c}{3\rho}\int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial \mathbf{x}} d\nu = -\frac{c}{3\rho}\int_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{dB_\nu}{dT}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} d\nu = -\frac{4caT^3}{3\rho\tilde{\kappa}}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = -\chi_{rad}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}}, \tag{71}$$

где введена в рассмотрение так называемая полная непрозрачность среды $\tilde{\kappa}(\rho, s, T, N_d)$, которая определяется как Росселандово среднее по обратным величинам $1/\kappa_\nu$ спектральной непрозрачности [89]

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}} \equiv \frac{1}{4aT^3}\int_{\nu=0}^{\infty}(1/\kappa_\nu)(dB_\nu/dT)d\nu = \frac{\int_{\nu=0}^{\infty}(1/\kappa_\nu)(dB_\nu/dT)d\nu}{\int_{\nu=0}^{\infty}(dB_\nu/dT)d\nu} \tag{72}$$

(поскольку $\int_{\nu=0}^{\infty} dB_\nu/dT\, d\nu = 4aT^3$). Диффузионное приближение справедливо, если поле излучения изотропно на расстояниях, сравнимых со средней длиной свободного пробега фотонов: $\lambda_\nu = 1/\kappa_\nu$, или малых по сравнению с ней. Отметим также, что уравнение (71) с очень хорошей точностью выражает вектор лучистого потока $\mathbf{q}_{rad}$ во внутренних областях газопылевого диска. Однако в приповерхностных слоях диска оптическая толща порядка единицы или меньше, и поток уже не определяется этим локальным выражением. Поэтому нужно использовать нелокальное решение (68) уравнения переноса, которое обычно используют при изучении звёздных атмосфер.

Спектральную непрозрачность среды, связанную с пылевой составляющей, определяемую соотношением (59), удобно переписать в виде

$$\kappa_\nu(\rho,s,N_d)=\frac{\pi\tilde{d}_d^2}{4\rho}N_d\,Q_d(m(\nu),d_d)=\frac{\pi^{1/3}6^{2/3}}{4\rho}s^{2/3}N_d^{1/3}\left[Q_{da}+Q_{ds}\right], \qquad (73)$$

явно зависящем от первых моментов s и N_d [см. (30) и (31)] функция распределения $f(U,\mathbf{x},t)$ пылевых частиц по размерам. Расчёты рассеяния и поглощения света сферическими твёрдыми телами с комплексным показателем преломления m предполагается проводить на основе теории Ми. Заметим, что, например, $m=\infty$ соответствует бесконечной диэлектрической проницаемости, $m=1.33$ соответствует частичкам льда (для видимых длин волн), $m=1.33-0.09i$ соответствует грязному льду (льду с поглощающими примесями), $m=1.27-1.37i$ соответствует пылинкам из железа.

Размер сферической твёрдой частицы обычно выражают через безразмерный параметр $x(\nu)=\pi d_d/\lambda$, где $\lambda=c/\nu$ – длина волны света. Для малых x фактор эффективности рассеяния света на пылевых частицах фактор эффективности рассеяния Q_{ds} становится очень малым; при $|mx|<<1$ имеем обычную формулу рэлеевского рассеяния

$$Q_{ds}(m(\nu),d_d)=\tfrac{8}{3}x^4\left|(m^2-1)/(m^2+2)\right|^2, \qquad (74)$$

а фактор эффективности поглощения в этом случае даётся соотношением

$$Q_{da}(m(\nu),d_d)=-4xIm\left[(m^2-1)/(m^2+2)\right], \qquad (75)$$

где Im означает, что нужно брать мнимую часть.

8. БАЗОВАЯ СИСТЕМА ЛАМИНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГАЗОПЫЛЕВОЙ ДИСКОВОЙ СРЕДЫ

Для удобства ссылок суммируем приведённые выше уравнения движения двухфазной полидисперсной среды, состоящей из газа и пыли. Эти уравнения (опорный базис модели), учитывающие относительное движение фаз, процессы коагуляции и фазовые переходы, а также различные физико-химические и радиативные процессы, предназначены, в частности, для континуального описания пространственно-временной эволюции состава, динамики и теплового режима газопылевого облака на последней ламинарной стадии эволюции допланетного диска (т.е. после затухания турбулентных движений; отметим, что в областях диска, близких к прото- Солнцу, полного затухания турбулентности может и не быть из-за возмущающего воздействия на среду магнитных полей, корпускулярных потоков и т.п.) в зонах субдиска, расположенных на различных расстояниях от прото- Солнца (см., например, [6]. Существенным также является и то, что эти уравнения, описывающие мгновенное состояние турбулизованного допланетного облака на любой стадии его эволюции, могут рассматриваться как исходные при изучении осреднённого движения дисковой системы, когда с целью феноменологического описания гидродинамических и физико-химических процессов приходится проводить теоретико-вероятностное осреднение стохастических уравнений движения. Итак, имеем:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{u}\right)=0, \qquad \left(\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \tag{76}$$

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{s\rho_d}{\rho}\right)=-\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{J}_d\right)+\sum_{\rho=1}^{r}\nu_{d,\rho}\xi_\rho, \quad (\mathbf{J}_d=\rho C_d C_g\mathbf{w}, \quad C_g=1-\frac{s\rho_d}{\rho}, \quad \rho_d=const) \tag{77}$$

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{N_d}{\rho}\right)=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\left(N_d C_g\mathbf{w}\right)-\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty K(W,U)\,f(W)\,f(U)\,dWdU+\sum_k\sum_{\rho=1}^{r}\nu_{d(k),\rho}\xi_\rho, \tag{78}$$

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}=-\frac{\partial(p+p_{rad})}{\partial \mathbf{x}}+\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\left(\mathbf{\Pi}_{\mathrm{sum}}-\mathbf{J}_d\mathbf{w}\right)\right)+\rho\frac{G M_\odot}{|\tilde{\mathbf{r}}|^3}\tilde{\mathbf{r}}, \tag{79}$$

$$(\rho c_{Vg}+4aT^3/3)\frac{dT}{dt}=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot(\mathbf{J}_q+\mathbf{q}_{rad})-(p+4p_{rad})\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{u}\right)+\Phi_u+$$

$$-s\rho_d C_g\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{w}^2}{2}\right)-\sum_{\rho=1}^{r}q_\rho\xi_\rho, \qquad (\rho_g\cong\rho-s\rho_d), \tag{80}$$

$$p=p_g=\rho_g\Re_g T, \qquad p_{rad}=aT^4/3. \tag{81}$$

Гидродинамические уравнения движения (76-81) должны быть дополнены соответствующими выражениями для скоростей фазовых переходов ξ_ρ и определяющими соотношениями для термодинамических потоков

$$\mathbf{\Pi}_{sum}=(\mu_g+\mu_{rad})\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}+\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}\right)^{transp}\right]+\left(\xi_g-{}^2\!/_3\mu_g+\mu_{rad}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{u}\right)\mathbf{U}, \tag{82}$$

$$\mathbf{w}\cong\frac{1}{\rho\theta_{dg}}\left(-\frac{d\mathbf{w}}{dt}-\left(\mathbf{w}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)\mathbf{u}+\frac{1}{\rho_g}\frac{\partial p_g}{\partial\mathbf{x}}\right), \tag{83}$$

$$\mathbf{J}_q=-\chi_g\frac{\partial T}{\partial\mathbf{x}}, \quad \mathbf{q}_{rad}=-\chi_{rad}\frac{\partial T}{\partial\mathbf{x}}, \tag{84}$$

а также выражениями для коэффициентов коагуляции $K(W,U)$ (см. [82]) и коэффициентов молекулярного переноса $\mu_g(s,T)$, $\xi_g(s,T)$, $\chi_g(s,T)$, $\theta_{dg}(s,N_d,Re)$ и лучистой теплопроводности $\chi_{rad}(s,N_d,T)$. Для выписанной системы уравнений двухфазной механики (76)-(77) необходимо задать начальные и граничные условия, выбор которых требует в каждом конкретном случае специального рассмотрения, поскольку, как правило, моделируется не дисковая система в целом, имеющая, скажем, такие естественные границы, как экваториальная плоскость диска или его внешняя граница, а её отдельные области.

Важно подчеркнуть, что приведённая система уравнений (76)-(77), описывающая при заданных начальных и граничных условиях также и все детали мгновенного состояния стохастических термогидродинамических полей турбулизованного течения газопылевой дисковой среды и их вариации, зачастую не может быть решена с помощью современных вычислительных средств. Это обусловлено тем, что применение численных методов влечёт за собой аппроксимацию колоссального пространственно- временного поля параметров турбулизованного потока конечным числом узлов сетки, которое нужно использовать, чтобы решить конечно-разностные аппроксимации дифференциальных уравнений. В настоящее время существует единственный экономически оправданный выход: решать гидродинамические уравнения (76)-(77) только для больших пространственно-временных масштабов движения, которыми определяются осреднённые структурные параметры подобной стохастической среды, а все более мелкие масштабы моделировать феноменологически.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За последние годы, благодаря впечатляющим успехам космологии, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем и бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции допланетного газопылевого диска вокруг молодых звёзд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты. Создание адекватных космогонических моделей связано с изучением динамической и тепловой эволюции гетерогенного газопылевого вещества дифференциально вращающегося допланетного диска при учёте магнитогидродинамических, турбулентных и радиационных эффектов, а также с участием фазовых переходов, химических реакций и коагуляционных процессов.

К сожалению, большое число проблем, связанных с данным направлением исследований, пока остаётся нерешённым. К ним, в первую очередь, относятся вопросы о ранних этапах эволюции Солнечной системы и причинах её уникальности по сравнению с известными планетными системами у других звёзд. Первостепенный интерес представляет разработка численных моделей такой динамической системы, в которой эволюция изначального допланетного облака последовательно приводит к формированию аккреционного газопылевого диска вокруг молодого Солнца и уплотнённого пылегазового субдиска. Таким образом, в связи с проблемой реконструирования эволюции допланетного газопылевого облака, окружавшего прото- Солнце, на первый план выступает:

- построение численной модели эволюции газопылевого слоя (субдиска) в окрестности центральной плоскости прото-Солнца, изучение механизмов его уплощения в спокойном газе и при наличии турбулентности;
- моделирование механизмов развития гравитационной неустойчивости во вращающемся субдиске (когда плотность его вещества за счёт вертикального и радиального сжатия становится выше критического значения), образования и эволюции допланетных пылевых сгущений для зоны внутренних планет и для периферии диска;
- моделирование процессов аккумуляции Земли и планет;
- оценка следствий для химического состава Земли, планет, астероидов и комет.

В представленной работе приведена базовая система усложнённых гидродинамических уравнений, предназначенная для численного моделирования ранней ламинарной стадии образования планетной системы – стадии допланетного газопылевого облака. Предложенный подход открывает перспективы существенно более полного моделирования разнообразных процессов эволюции дифференциально вращающегося допланетного газопылевого диска, чем это имеет место в ряде цитируемых выше исследований.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 18-01-00064.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Сафронов В.С.** Современное состояние теории происхождения Земли // Физика Земли. 1982. № 6. С. 5-24.

[2] **Шмидт О.Ю.** Четыре лекции о происхождении Земли. Изд. 3, доп. М.: Изд-во АН СССР. 1957. 140 с.

[3] **Сафронов В.С.** Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.

[4] **Goldrich P., Ward W.R.** The formation of planetesimals // Astrophys. J. 1973. V.183. № 3. P. 1051-1061.

[5] **Makalkin A.B.** Radial compaction of the dust subdisk in a protoplanetary disk as possible way to gravitational instability // Lunar Planet. Sci. 1994. V.25. P. 827-828.

[6] **Nakagawa Y., Sekiya M., Hayashi C.** Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula// Icarus. 1986. V.67. P. 375-390.

[7] **Toomre A.** On the gravitational stability of a disk of stars // Astrophys. J. 1964. V.139**. P. 1217-1238.**

[8] **Youdin A.N., Shu F.** Planetesimal formation by gravitational instability // Astrophys. J. 2002. V. 580. P. 494-505.

[9] **Сафронов В.С.** Эволюция пылевой компоненты околосолнесного допланетного диска //Астрон. вестн. 1987. Т.21. № 3. С. 216-220.

[10] **Фридман Ф.М.** К динамике вязкой дифференциально вращающейся гравитирующей среды // Письма в Астрон. журн. 1989. Т. 15. № 12. С.1122-1130.

[11] **Balbus S. A., Hawley J. F.** Instability, Turbulence, and Enhanced Transport in Accretion Disks // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70, P.1-53.

[12] **Bisnovaty-Kogan G.S., Lovelace R.V.E.** Advective accretion disks and related problems including magnetic fields/ / New astron. Rev. 2001. V. 45. P.663-742.

[13] **Dubrulle B.** Differentional rotation as a source of angular momentum transfer in the solar nebula // Icarus. 1993. V. 106. P. 59-76.

[14] **Richard D., Zahn J.P**. Turbulence in differentially rotating flow. What can be learned from the Couette-Taylor experiment/ / Astron. Astrophys. 1999. V. 347. P. 734-738.

[15] **Zel'dovich Ya. B.** On the friction of fluids between rotating cylinders // Proc. Roy. Soc. Lond. 1981. V. A374. P. 299-312.

[16] **Горькавый Н.Н., Фридман А.М.** Физика планетных колец. М.: Наука. 1994. 348 с.

[17] **Fridman A.M., Boyarchuck F.F., Bisikalo D.V., Kuznetsov O.A., Khoruzhii O.V., Torgashin Yu. M., Kilpio A.A.** The collective mode and turbulent viscosity in accretion disks // Physics Letters A. 2003. V. 317. P. 181-198.

[18] **Armitage P.J., Livio M., Pringle J. E**. Episodic accretion in magnetically layered protoplanetary disks // Mon. Not. R. Astron. Soc.2001. V.324. P. 705-711.

[19] **Bryden G, Chen X, Lin D, Nelson R., Papaloizou J** . Tidally induced gap formation in protostellar disks: gap clearing and suppression of protoplanetary growth // Astrophys. *J.* 1999. V. 514 P. 344.

[20] **Cuzzi J. N., Dobrovolskis A. R., Champney J. M.** Particle-gas dynamics in the midplane of a protoplanetary nebula //I carus. 1993. V.106 P. 102-134.

[21] **Dubrulle B., Morfill G., Sterzic M.** The dust subdisk in the protoplanetary nebula // Icarus. 1995. V. 114. P. 237-246.

[22] **Goodmann J., Pindor B.** Secular instability and planetesimal formation in the dust laye // Icarus. 2000. V.148. P. 537-549.

[23] **Sekiya M., Nakagawa Y.** Settling of Dust Particles and Formation of Planetesimals // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1988. V. 96, P. 141-150.

[24] **Stepinski T.F., Valageas P.** Global evolution of solid matter in turbulent protoplanetary disks. I. Aerodynamics of solid particles // Astron. Astrophys. 1996. V. 309. P. 301-312.

[25] **Stepinski T.F., Valageas P.** Global evolution of solid matter in turbulent protoplanetary disks. II. Development of icy planetesimals // Astron. Astrophys. 1997. V. 319. P. 1007-1019.

[26] **Takeuchi T., Lin D.N.C.** Radial flow of dust particles in accretion disks // Astrophys. J. 2002. V. 581. № 2. P. 1344-1355.

[27] **Takeuchi T., Lin D.N.C.** Surface out in optically thick dust disks by the radiation pressure//Astrophys. J. 2003. V. 593. P. 524-538.

[28] **Weidenschilling S. J.** Dust to Planetesimals: Settling and Coagulation in the Solar Nebula // Icarus.1980. V. 44, P.172-189.

[29] **Weidenschilling S. J.** Evolution of grains in a turbulent solar nebula // Icarus. 1984. V.60. P. 553-567.

[30] **Youdin A.N., Goodman J.** Streaming instabilitiea in protoplanetary disks // arXiv: Astro-ph/0409263. 2004. V. 1 P. 1-26.

[31] **Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П.** Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твёрдым полидисперсным веществом. Киев: Наук. думка. 1980. 250 с.

[32] **Волощук В.М, Седунов Ю.С.** Процессы коагуляции в дисперсных системах. Л.: Гидрометеоиздат. 1975. 320 с. .

[33] **Волощук В.М.** Кинетическая теория коагуляции. М.: Гидрометиздат. 1984. 283 с.

[34] **Dominik C., Blum J., Cuzzi J., Wurm G**. Growth of dust as the initial step toward planet formation // In: Protostars and Planets V, Arizona Press, AZ, 2007.

[35] **Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V.** Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers. 2002. 375 p.
Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Turbulence and Self-Jrganization. Modtling astrophysical objects. New-York, Dordrecht, Boston, London.: Springer. 2013. 657 p.

[36] **Макалкин А.Б.** Проблемы эволюции протопланетных дисков // В сб. «Современные проблемы механики и физики космоса. К юбилею М.Я. Марова». М.: Физматлит. 2003. с. 402-446

[37] **Natta A., Testi L., Calvet N. Henning T., Waters R., Wilner D.** Dust in protoplanetary discs: Properties and evolution // In: Protostars and Planets V, Arizona Press, AZ, 2007.

[38] **Cuzzi J. N., Davis S. S., Dobrovolskis A. R.** Blowing in the wind. II. Creation and redistribution of refractory inclusions in a turbulent protoplanetary nebula // Icarus. 2003. V. 166. P. 385-402.

[39] **Cuzzi J. N.** Blowing in the wind: III. Accretion of dust rims by chondrule-sized particles in a turbulent protoplanetary nebula // Icarus, 2004. V. 168, P. 484-497.

[40] **Cuzzi J. N., Ciesla F. J., Petaev M. I., Krot A. N., Scott E. R. D., Weidenschilling S.** Nebula Evolution of Thermally Processed Solids: Reconciling Models and Meteorites Chondrites and the Protoplanetary Disk // ASP Conference Series, Vol. 341. Edited by Alexander N. Krot, Edward R. D. Scott, and Bo Reipurth. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific. 2005. P. 732-773.

[41] **Cuzzi J. N. ,Weidenschilling S. J.** Particle-Gas Dynamics and Primary Accretion // In: Meteorites and the Early Solar System II (D. Lauretta, L. A. Leshin, and H. McSween, eds.), Univ of Arizona Press; Tuscon, 2006. 943 pp., P.353-381.

[42] **Dullemond C. P. , Dominik C.** Dust coagulation in protoplanetary disks: A rapid depletion of small grains // Astron. Astrophys. 2005. V. 434, P.971-986.

[43] **Russell S. S., Hartmann L. A., Cuzzi J. N., Krot A. N., Weidenschilling S.J**. Timescales of the Solar Protoplanetary Disk // In: Meteorites and the Early Solar System, II (D. Lauretta, L. A. Leshin, and H. McSween, eds.), 2006.University of Arizona Press, Tucson, 943 pp., P.233-251.

[44] **Wadhwa M., Amelin Y. Davis A. M., Lugmair G. W., Meyer B., Gounelle, M., Desch S. J.** From Dust to Planetesimals: Implications for the Solar Protoplanetary Disk from Short-lived Radionuclides // In: Protostars and Planets V, Arizona Press, AZ, 2007.

[45] **Фортов В.Е., Храпак А.Г., Якубов И.Т.** Физика неидеальной плазмы. М.: Физматлит. 2004. 528 с.

[46] **Альвен Х., Аррениус Г**. Эволюция солнечной системы. М.:Мир.1979. 511 с.

[47] **Бусройд Р.** Течение газа со взвешенными частицами. М.: Мир. 1975. 378 с.

[48] **Верещагин И.П., Левитов В.И., Мирзобекян Г.З., Пашин М.М.** Основы электрогазодинамики дисперсных систем. М.: Энергия. 1974. 480 с.

[49] **Колесниченко А.В.** О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 5. С. 405-427.

[50] **Barge P., Sommeria J.** Did planet formtion begin inside persistent gaseous vortices? / / Astron Astrophys. 1995. V. 295. P. L1-L4.

[51] **Chavanis P.-H.** Trapping of Dust by Coherent Vortices in the Solar Nebula // arXiv:astro-ph/9912087. 1999. V.16 P. 1-54.

[52] **Tanga P., Babiano A., Dubrulle B.** Forming planetosimals in vortices // Icarus. 1996. V.121. P.158-170.

[53] **Колесниченко А.В.** Континуальные модели природных и космических сред: Проблемы термодинамического моделирования. М.: ЛЕНАНД, 2017. 400 с (Синергетика: от прошлого к будущему. № 79).

[54] **Hayashi C., Nakazawa K., Nakagawa Y**. Formation of the Solar System // In Protostars and Planets II, (D. C. Black & M. S. Matthews, eds.), University of Arizona Press, Tucson, 1985. P. 1100-1153.

[55] **Nakagawa Y., Nakagawa K. Hayashi C.** Growth and sedimentation of dust grains in the primordial solar nebula // Icarus. 1981. V. 45. P. 517-528.

[56] **Schmitt W., Henning T., Mucha R.** Dust evolution in protoplanetary accretion disks // Astron. astrophys. 1997. V. 325 .P. 569-584.

[57] **Маров М.Я., Колесниченко А.В.** Введение в планетную аэрономию. М.: Наука. 1987.456 с.

[58] **Чепмен С., Каулинг Т.К.** Математическая теория неоднородных газов.М.: ИЛ. 1960. 510 с.
[59] **Колесниченко А.В. Максимов В.М.** Обобщенный закон фильтрации Дарси, как следствие соотношений Стефана-Максвелла для гетерогенной среды // Математическое моделирование. 2001. том 13. №1. С.3-25.
[60] **Favre A.** Equations statistiques des gaz turbulents//Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М.: Наука. 1969. С. 483-511.
[61] **Дорофеева В.А., Макалкин А.Б.** Эволюция ранней Солнечной системы. Космохимические и физические аспекты. М.: Едиториал УРСС. 2004. 264 с.
[62] **Нигматулин Р.И.** О сновы механики гетерогенных сред. М.: Наука. 1978. 336 с.
[63] **Willacy K., Klahr H.H., Millar T.J., Henning Th.** Gas and grain chemistry in a protoplanetary disk // Astron. Astrophys. 1998. V. 338. P. 995-1005.
[64] **Пригожин И., Дефей Р.** Химическая термодинамика. Новосибирск: Наука. 1966. 509 с.
[65] **Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р.** Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: ИЛ. 1961. 930 с.
[66] **Колесниченко А.В.** Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред // Проблемы современной механики. К юбилею Л.И. Седова. М.: Изд-во МГУ. 1998. С. 52-76.
[67] **Медников Е.П.** Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука. 1981. 174 с.
[68] **Soo S. L., Ihrig H.K., Kouh A.F.** Experimental determination of statistical properties of two-phase turbulent motion // Trans. ASME J. Basic Engng. 1960. V.82. № 3. P. 609-621.
[69] **Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М**. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами . М.: Машиностроение. 1980. 171 с.
[70] **Шрайбер А.А., Милютин В.Н., Яценко В.П.** Турбулентные течения газовзвеси. Киев: Наук. думка. 1987. 239 с.
[71] **Epstein P.S.** On the resistance experienced by spheres in their motion through gases // Phys. Rev. 1924. V.23. P. 710-733.
[72] **Stokes G.G.** On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums// Trans. Camb. Phil. Soc. 1851. V. 9. Pt. II. P. 8-106.
[73] **Garaud P., Barriere-Fouchet L., Lin D.N.C**. Individual and collective behavior of dust particles in a protoplanetary nebula // J. Astroph. 2005. V. 603. P. 292-306.
[74] **Weidenschilling S. J.** Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1977. V. 180, P.57-70.
[75] **Шлигтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 712 с.
[76] **Whipple F.L.** From plasma to planet. London. 1972. 211 p.
[77] **Стернин Л.Е., Шрайбер А.А.** Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение. 1994. 319 с.

[78] **Wasson J.T.** Meteorites: Their record of early solar-system history // New York. W.H. Freeman and Co. 1985. 274 p.
[79] **Фукс Н.А.** Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР. 1955. 351 с.
[80] **Смолуховский М.** Три доклада о диффузии, броуновском молекулярном движении и коагуляции коллоидных частиц. Броуновское движение. М. Л.: Изд. ОНТИ, 1936. 332 с.; Коагуляция коллоидов. М.: Изд. ОНТИ. 1936.
[81] **Мазин И.П.** Теоретическая оценка коэффициента коагуляции капель в облаках // Труды ЦАО. 1971. Вып. 95. С. 12-25.
[82] **Колесниченко А.В.** Гидродинамические аспекты моделирования процессов массопереноса и коагуляции в турбулентном аккреционном диске // Астрон. вестн. 2001. Т. 35. № 2. С. 139-155.
[83] **Lissauer J.J., Stewart G.R.** Growth of planets from planetesimals // Protostars and Planets III/ Eds. E.H. Levy, I. J. Lunine. Tucson: Univ. Arizona Press. 1993. P. 1061-1088.
[84] **Hersant F, Dudrulle B, Hure J.-M.** Turbulence in circumstellar disks // Astron. astrophys. manuscript № aa3549. 2004. P. 1-12.
[85] **Колесниченко А.В.** Моделирование коэффициентов турбулентного переноса в газопылевом аккреционном диске // Астрон. вестн. 2000. Т.34. № 6. С. 516-528.
[86] **Тассуль Ж.-Л.** Теория вращающихся звезд. М.: Мир. 1982, 472 с.
[87] **Иевлев В.М.** Приближенные уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 1. С. 91-103.
[88] **Иевлев В.М.** Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука. 1975. 256 с.
[89] **Pollack J.B., McKay C.P., Cristofferson B.M.** A calculation of a Rosseland mean opacity of dust grains in primordial solar system nebulae // Icarus. 1985. V. 64. P. 473-492.

ОГЛАВЛЕНИЕ