



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В.

Компьютерные модели  
контактного взаимодействия  
стыковочных агрегатов  
космических аппаратов

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В. Компьютерные модели контактного взаимодействия стыковочных агрегатов космических аппаратов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 4. 40 с.  
<http://doi.org/10.20948/prepr-2020-4>  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-4>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**Ю.Ф. Голубев, А.В. Яскевич**

**Компьютерные модели контактного  
взаимодействия стыковочных агрегатов  
космических аппаратов**

**Москва — 2020**

**Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В.**

### **Компьютерные модели контактного взаимодействия стыковочных агрегатов космических аппаратов**

В настоящей работе описаны кинематика относительного движения стыкуемых космических аппаратов и их стыковочных агрегатов, а также метод расчета контактных реакций. Предложен новый способ описания направляющих элементов стыковочных агрегатов наборами простых геометрических примитивов. Условия и параметры контакта для каждой пары таких примитивов определяются простыми аналитическими выражениями. Рассмотрены две модели контактного взаимодействия пар стыковочных агрегатов центрального и периферийного типа.

**Ключевые слова:** космический аппарат, стыковочный агрегат, контактное взаимодействие

**Golubev Yu.F., Yaskevich A.V.**

### **Computer models of contact interaction of spacecraft docking units**

This paper describes kinematics of relative motion of docked spacecrafts and theirs docking units as well as contact reaction computing technique. A new method is presented for describing of docking unit guide elements by using a set of simple geometrical primitives. Contact conditions and parameters for each pair of such primitives are determined by simple analytical relations. Two contact interaction models of pairs of central and peripheral type docking units are considered.

**Key words:** spacecraft, docking unit, contact interaction

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ: 19-01-00123)

## **Оглавление**

Введение .....	3
1. Метод расчета контактных реакций .....	4
2. Модель контактного взаимодействия стыковочных агрегатов центрального типа .....	11
3. Модель контактного взаимодействия периферийных стыковочных агрегатов .....	25
4. Верификация и валидация математических моделей контактного взаимодействия .....	37
Заключение.....	39
Библиографический список.....	39

## Введение

Стыковка космических аппаратов представляет собой управляемый механический процесс их соединения на орбите, который выполняется с использованием активного и пассивного стыковочных агрегатов, их блоков управления. Активный агрегат реализует процесс соединения с помощью механизмов защелок, стыковочного механизма и механизма герметизации стыка. Каждый такой механизм имеет привод, который выдвигает его в исходное положение перед началом операции и полностью втягивает после ее завершения.

Стыковочный механизм устанавливается на корпусе активного агрегата. Его буферные звенья контактируют с пассивным агрегатом через свои направляющие элементы, форма которых обеспечивает уменьшение боковых и угловых рассогласований по мере их осевого сближения. Относительным перемещениям буферных звеньев противодействуют устройства демпфирования механизма. В результате поглощается кинетическая энергия сближения активного космического аппарата. Стыковочный механизм является пространственным и наиболее сложным из всех механизмов активного агрегата и имеет, как правило, шесть степеней свободы.

Механизмы защелок являются плоскими и могут иметь различные кинематические схемы. Но любая защелка при моделировании динамики стыковки с достаточной точностью может быть представлена как запирающее звено, имеющее только одну степень подвижности. Она удерживается своей пружиной в исходном, выдвинутом положении, от которого может отклоняться только при контакте своей «прямой» рабочей поверхности с направляющей поверхностью соответствующего упора пассивного агрегата. При попадании защелки в свободное пространство за этим упором ее пружина, деформированная при контакте, возвращает ее в исходное положение. После этого защелка может контактировать с этим упором только своей «обратной» поверхностью. Реакция такого контакта действует на внутренний упор защелки и не приводит к ее относительному движению. Контакты всех защелок с ответными упорами пассивного агрегата обеспечивают сцепку — первичную механическую связь стыковочных агрегатов и стыкуемых космических аппаратов. Защелки или их механизмы целиком устанавливаются на буферных звеньях стыковочного механизма. При моделировании стыковки, особенно если сближение осуществляется с малой скоростью, необходимо учитывать механическое сопротивление защелок, а также контактных датчиков, сигнализирующих о наступлении характерных событий, в частности сцепки. Контактующие звенья датчиков, как и защелки, имеют одну степень свободы, их относительное перемещение определяется внешним контактным ограничением. Механизм герметизации стыка практически не влияет на динамику стыковки, поэтому контактное взаимодействие его звеньев (крюков) не рассматривается.

В данной работе описываются модели контактного взаимодействия стыковочных агрегатов, которые являются составной частью моделей динамики стыковки космических аппаратов. В зависимости от числа степеней свободы тел в

каждой контактирующей паре используются два типа таких моделей. В моделях первого типа описываются контакты буферных звеньев стыковочного механизма и пассивного стыковочного агрегата, жестко соединенного с пассивным космическим аппаратом. Каждое из контактирующих тел обладает несколькими степенями свободы. Поэтому его движение корректно описывается дифференциальными уравнениями, в которых должны быть учтены ограничения, налагаемые при контактах. В этом случае модули контактных реакций из-за относительно малой инерции стыковочного механизма определяются главным образом податливостью его отдельных звеньев и устройств демпфирования. Контакты звеньев механизма и пассивного агрегата из-за их сложной конструкции упрощенно представляются как точечные. Модели, описывающие взаимодействие частных видов пар контактирующих простых тел, а также распределение упругих свойств тел по глубине и объему, например [1, 2], не используются.

В контактных моделях второго типа одно из контактирующих тел имеет пренебрежимо малую инерцию и перемещается (практически мгновенно) в шарнире с одной степенью подвижности. Центр этого шарнира относительно второго, инерционного тела считается зафиксированными в момент расчета относительного перемещения звена нулевой массы, которому противодействует пружина. Точка приложения и направление силы сопротивления тела с нулевой инерцией определяются положением центра его шарнира относительно второго тела, а величина этой силы – деформацией пружины, то есть относительным перемещением в шарнире. Это перемещение может быть определено итерационно с любой заданной точностью в пределах компьютерного представления вещественных чисел. Модели этого класса в данной работе описывают взаимодействие с пассивным агрегатом до сцепки защелок и механических датчиков стыковочного механизма.

Форма направляющих элементов буферных звеньев стыковочного механизма и пассивного агрегата обеспечивает при их осевом сближении уменьшение боковых и угловых рассогласований и поэтому не является произвольной. В работе используется способ ее описания конечной совокупностью простых геометрических элементов, геометрических примитивов – отрезков прямых, окружностей, сфер, усеченных конусов, цилиндров. Алгоритмы анализа возможности контакта произвольных поверхностей, например [3-7], не используются. Для каждой пары геометрических примитивов условия и параметры контакта определяются простыми аналитическими выражениями.

Все вышесказанное позволяет обеспечить высокую вычислительную эффективность алгоритмов моделирования контактного взаимодействия.

## **1. Метод расчета контактных реакций**

Динамика стыковочного механизма с несколькими степенями свободы, установленного на активном объекте, описывается отдельными дифференциальными уравнениями вследствие того, что инерция его звеньев меньше, чем у

стыкуемых аппаратов [8-10]. Относительное движение контактирующих тел определяется в процессе численного интегрирования дифференциальных уравнений динамики всей механической системы. То есть контактное взаимодействие рассматривается как динамический механический процесс. Контактные реакции в ходе численного интегрирования могут быть вычислены как функции времени и соответственно являются известными величинами. Поэтому классическая теория удара [11-13], описывающая мгновенное перераспределение энергии, не используется.

На основе численного решения уравнений динамики космических аппаратов с учетом упругих колебаний их конструкции [8] вычисляются векторы и матрицы, характеризующие положение и скорости основания стыковочного механизма и пассивного стыковочного агрегата. Положение и ориентация систем координат  $X_{C1}Y_{C1}Z_{C1}$  и  $X_{C2}Y_{C2}Z_{C2}$ , связанных соответственно с центрами масс активного и пассивного космических аппаратов, относительно инерциальной системы координат  $X_IY_I Z_I$  описывается векторами  $\mathbf{r}_{C1}$ ,  $\mathbf{r}_{C2}$  и матрицами направляющих косинусов  $\mathbf{A}_{C1}$ ,  $\mathbf{A}_{C2}$  (рис.1).

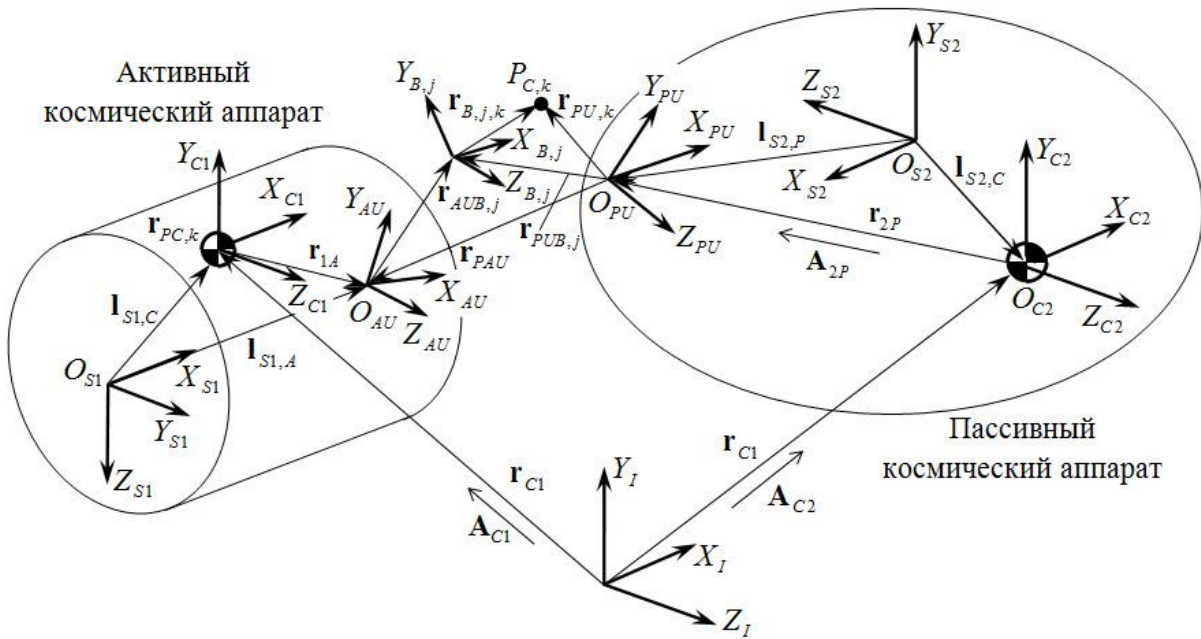


Рис. 1. Системы координат, используемые для описания кинематики контактного взаимодействия космических аппаратов

Положение и ориентацию системы координат  $X_{AU}Y_{AU}Z_{AU}$  активного агрегата относительно  $X_{C1}Y_{C1}Z_{C1}$  определяют вектор  $\mathbf{r}_{1A} = \mathbf{l}_{1A} + \mathbf{r}_{AU}^f$  и матрица направляющих косинусов  $\mathbf{A}_{1A} = \mathbf{A}_{AU}^f \boldsymbol{\gamma}_{1A}$ . Положение и ориентацию системы координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  пассивного стыковочного агрегата относительно системы координат  $X_{C2}Y_{C2}Z_{C2}$  определяют вектор  $\mathbf{r}_{2P} = \mathbf{l}_{2P} + \mathbf{r}_{PU}^f$  и матрица

$\mathbf{A}_{2P} = \mathbf{A}_{PU}^f \boldsymbol{\gamma}_{2P}$ . Векторы  $\mathbf{r}_{AU}^f$ ,  $\mathbf{v}_{AU}^f$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{AU}^f$  и  $\mathbf{r}_{PU}^f$ ,  $\mathbf{v}_{PU}^f$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{PU}^f$  сначала вычисляются из решения дифференциальных уравнений упругих колебаний активного и пассивного космических аппаратов [8] в их строительных системах координат  $X_{S1}Y_{S1}Z_{S1}$  и  $X_{S2}Y_{S2}Z_{S2}$ , а потом преобразуются соответственно в системы координат  $X_{C1}Y_{C1}Z_{C1}$  и  $X_{C2}Y_{C2}Z_{C2}$ . Положение и ориентация  $X_{C1}Y_{C1}Z_{C1}$ ,  $X_{AU}Y_{AU}Z_{AU}$  относительно  $X_{S1}Y_{S1}Z_{S1}$  и  $X_{C2}Y_{C2}Z_{C2}$ ,  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  относительно  $X_{S2}Y_{S2}Z_{S2}$  определяется постоянными векторами и матрицами  $\mathbf{l}_{S1,C}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_{S1,C}$ ,  $\mathbf{l}_{S1,A}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_{S1,A}$  и  $\mathbf{l}_{S2,C}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_{S2,C}$ ,  $\mathbf{l}_{S2,P}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_{S2,P}$ .

Положение и ориентацию системы координат  $X_{AU}Y_{AU}Z_{AU}$  относительно  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  определяют вектор  $\mathbf{r}_{PAU}$  и матрица  $\mathbf{A}_{PAU}$

$$\mathbf{r}_{PAU} = \mathbf{A}_{2P} [-\mathbf{r}_{2P} + \mathbf{A}_{C2}(-\mathbf{r}_{C2} + \mathbf{r}_{C1} + \mathbf{A}_{C1}^T \mathbf{r}_{1A})], \quad \mathbf{A}_{PAU} = \mathbf{A}_{1A} \mathbf{A}_{C1} \mathbf{A}_{C2}^T \mathbf{A}_{2P}^T.$$

Абсолютные поступательные и угловые скорости систем координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  и  $X_{AU}Y_{AU}Z_{AU}$ , выраженные в проекциях на оси  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$ , равны

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{PU}^{(P)} &= \mathbf{A}_{2P} (\mathbf{A}_{C2} \mathbf{v}_{C2} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 \mathbf{r}_{2P} + \mathbf{v}_{PU}^f), & \boldsymbol{\omega}_{PU}^{(P)} &= \mathbf{A}_{2P} (\boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_{PU}^f), \\ \mathbf{v}_{AU}^{(P)} &= \mathbf{A}_{2P} \mathbf{A}_{C2} [\mathbf{v}_{C1} + \mathbf{A}_{C1}^T (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \mathbf{r}_{1A} + \mathbf{v}_{AU}^f)], & \boldsymbol{\omega}_{AU}^{(P)} &= \mathbf{A}_{2P} \mathbf{A}_{C2} \mathbf{A}_{C1}^T (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{AU}^f), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{v}_{C1}, \mathbf{v}_{C2}$  – скорости центров масс космических аппаратов относительно инерциальной системы координат;  $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$  – угловые скорости аппаратов в системах координат  $X_{C1}Y_{C1}Z_{C1}$  и  $X_{C2}Y_{C2}Z_{C2}$  соответственно;  $\mathbf{v}_{AU}^f, \mathbf{v}_{PU}^f$  и  $\boldsymbol{\omega}_{AU}^f, \boldsymbol{\omega}_{PU}^f$  – поступательные и угловые скорости, определяемые упругими колебаниями конструкций активного и пассивного космических аппаратов в месте установки стыковочных агрегатов;  $\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

С каждым  $j$ -м буферным звеном стыковочного механизма связана система координат  $X_{B,j}Y_{B,j}Z_{B,j}$ , в которой задается форма его контактирующей поверхности. Для определения возможности контакта этого звена с пассивным агрегатом вычисляются вектор  $\mathbf{r}_{PUB,j}^{(P)}$  из начала системы координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  в начало системы координат  $X_{B,j}Y_{B,j}Z_{B,j}$ , выраженный в системе  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$ , и матрица  $\mathbf{A}_{PUB,j}$  преобразования из  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  в  $X_{B,j}Y_{B,j}Z_{B,j}$ .

$$\mathbf{r}_{PUB,j}^{(P)} = \mathbf{r}_{PAU}^{(P)} + \mathbf{A}_{PAU}^T \mathbf{r}_{AUB,j}^{(A)}, \quad \mathbf{A}_{PUB,j} = \mathbf{A}_{AUB,j} \mathbf{A}_{APU}. \quad (1.1)$$

Для расчета параметров контакта вычисляются абсолютные скорости системы координат  $X_{B,j}Y_{B,j}Z_{B,j}$ , выраженные в  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$

$$\mathbf{v}_{B,j}^{(P)} = \mathbf{v}_{AU}^{(P)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{AU}^{(P)} (\mathbf{A}_{PAU}^T \mathbf{r}_{AUB,j}^{(A)}) + \mathbf{A}_{PAU}^T \mathbf{v}_{B,j}^{(A)}, \quad \boldsymbol{\omega}_{B,j}^{(P)} = \boldsymbol{\omega}_{AU}^{(P)} + \mathbf{A}_{PAU}^T \boldsymbol{\omega}_{B,j}^{(A)}. \quad (1.2)$$

В этих соотношениях положение  $\mathbf{r}_{AUB,j}^{(A)}$ , ориентация  $\mathbf{A}_{AUB,j}$  и скорости  $\mathbf{v}_{B,j}^{(A)}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{B,j}^{(A)}$  системы координат  $X_{B,j}Y_{B,j}Z_{B,j}$  относительно  $X_{AU}Y_{AU}Z_{AU}$  определяются кинематикой конкретного стыковочного механизма.

Если пассивный агрегат и  $j$ -е буферное звено стыковочного механизма контактируют в  $k$ -й точке ( $P_{C,k}$  на рис. 1), то ее положение относительно системы координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  определяется вектором  $\mathbf{r}_{PU,k}^{(P)}$ , а относительно  $X_{B,j}Y_{B,j}Z_{B,j}$  – вектором  $\mathbf{r}_{B,j,k}^{(P)}$ . Абсолютные скорости  $j$ -го буферного звена и пассивного агрегата в этой точке контакта равны

$$\mathbf{v}_{B,j,k}^{(P)} = \mathbf{v}_{B,j}^{(P)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B,j}^{(P)} \mathbf{r}_{B,j,k}^{(P)}, \quad \mathbf{v}_{PU,k}^{(P)} = \mathbf{v}_{PU}^{(P)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{PU}^{(P)} \mathbf{r}_{PU,k}^{(P)}.$$

Все приведенные выше векторы выражены в проекциях на оси  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  пассивного агрегата.

Односторонние ограничения на движение тел, возникающие в  $k$ -й точке контакта, могут быть описаны кинематическими уравнениями неударживающих связей, например, в виде равенства проекций скоростей  $\mathbf{v}_{B,j,k}^{(P)}$  и  $\mathbf{v}_{PU,k}^{(P)}$  на единичный вектор нормали  $\mathbf{n}_{R,k}^{(P)}$  к контактирующим поверхностям

$$\mathbf{n}_{R,k}^{(P)T} (\mathbf{v}_{B,j,k}^{(P)} - \mathbf{v}_{PU,k}^{(P)}) = 0.$$

Из таких условий для  $K$  точек контакта, имеющих место в текущий момент времени, могут быть получены уравнения связей относительно  $(n \times 1)$ -вектора  $\dot{\mathbf{q}}$  обобщенных скоростей всей механической системы твердых тел в виде

$$\mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0},$$

где  $\dot{\mathbf{q}} = [\mathbf{v}_{C1}^T, \boldsymbol{\omega}_1^T, \dot{\mathbf{q}}_{DM}^T, \mathbf{v}_{C2}^T, \boldsymbol{\omega}_2^T]^T$  – вектор обобщенных скоростей;  $\mathbf{v}_{C1}, \boldsymbol{\omega}_1$  и  $\mathbf{v}_{C2}, \boldsymbol{\omega}_2$  – скорости центров масс и угловые скорости активного и пассивного космических аппаратов;  $\dot{\mathbf{q}}_{DM}$  – обобщенные скорости стыковочного механизма;  $\mathbf{H} - (K \times n)$  – матрица, зависящая от  $\mathbf{q}$ .

Если использовать эти уравнения для определения движения, то их необходимо объединить с уравнениями динамики механической системы всех тел, участвующих в процессе стыковки. Результатом такого объединения будет система дифференциально-алгебраических уравнений (СДАУ) с индексом 2 [14], который характеризует меру их вырожденности (в одной системе объединяются разнородные неизвестные – ускорения и скорости). Решение подобных си-



стем основано на приведении к однородному составу неизвестных на основе той или иной схемы дискретизации, лежащей в основе неявной схемы численного интегрирования, например, BDF-методов [15 и др.]. Для такого подхода характерны наибольшие вычислительные затраты.

Если использовать условие контакта в виде

$$\mathbf{n}_{R,k}^{(P)T} (\dot{\mathbf{v}}_{B,j,k}^{(P)} - \dot{\mathbf{v}}_{PU,k}^{(P)}) = 0$$

и сформировать уравнения связей относительно обобщенных ускорений  $\ddot{\mathbf{q}}$

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h} = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{h} - (K \times 1)$  – вектор, зависящий от  $\mathbf{q}$  и  $\dot{\mathbf{q}}$ , то можно сформировать СДАУ с индексом 1, с общим набором неизвестных – вектором  $\ddot{\mathbf{q}}$ . Такие системы могут быть проинтегрированы более простыми явными методами, но для этого необходимо применять специальные методы стабилизации решения, например, метод Баумгарта [16], который преобразует уравнения связей в осциллятор с демпфированием перед их подстановкой в уравнения динамики. Это обеспечивает затухание во времени ошибок, возникающих при численном решении дифференциально-алгебраических уравнений.

При описании контактных ограничений кинематическими уравнениями связей решение СДАУ имеет следующие особенности.

1. Оно может быть получено, только при условии, что все  $K$  уравнений связей являются линейно независимыми. Это приводит к необходимости применять процедуру, которая исключает отдельные точки контакта и соответственно искажает реальную контактную ситуацию, затрудняет процесс ее интерпретации.
2. Оно позволяет найти только обобщенные реакции временно налагаемых связей, приведенные к степеням подвижности механической системы. Это не позволяет оценивать контактные силы в декартовых координатах, которые являются важной характеристикой качества процесса стыковки и используются для оценки нагрузок на конструкцию космических аппаратов.
3. Оно требует больших вычислительных затрат, обусловленных увеличением размерности системы уравнений за счет добавления уравнений связей, применением либо BDF-методов интегрирования, либо методов стабилизации решений.
4. Структура СДАУ усложняется при учете упругих деформаций космических аппаратов.

Таким образом, непосредственный учет уравнений кинематических связей, налагаемых в точках контакта, лишь частично решает задачи моделирования динамики процессов стыковки. Большую гибкость и эффективность обеспечивает используемое в дальнейшем непосредственное вычисление контактных реакций на основе определения взаимного внедрения контактирующих тел с заданной контактной жесткостью. При этом точка контакта соответствует макси-

мальной величине внедрения. Эта величина контролируется, и если она превышает максимально допустимую, то процесс моделирования завершается с выдачей диагностического сообщения. В этом случае требуется уменьшить шаг численного интегрирования.

На основе известного положения  $j$ -го буферного звена относительно пассивного стыковочного агрегата для каждой пары их направляющих поверхностей, контакт которых потенциально возможен, определяется величина их взаимного внедрения вдоль общей к ним нормали. Если такое внедрение является положительной величиной, то имеет место очередная  $k$ -я точка контакта с величиной внедрения  $\Delta_{n,k}$  вдоль нормали  $\mathbf{n}_{R,k}^{(P)}$ . В этом случае вычисляются:

- векторы  $\mathbf{r}_{PU,k}^{(P)}$ ,  $\mathbf{r}_{B,j,k}^{(P)}$  положения  $k$ -й точки контакта на пассивном агрегате и на  $j$ -м буферном звене механизма и абсолютные скорости  $\mathbf{v}_{PU,k}^{(P)}$ ,  $\mathbf{v}_{B,j,k}^{(P)}$ ;
- скорость  $\dot{\Delta}_{n,k} = \mathbf{n}_{R,k}^{(P)T} (\mathbf{v}_{B,j,k}^{(P)} - \mathbf{v}_{PU,k}^{(P)})$  взаимного внедрения вдоль вектора  $\mathbf{n}_{R,k}^{(P)}$  общей нормали;
- относительная тангенциальная скорость  $\mathbf{v}_{T,k}^{(P)} = \mathbf{v}_{B,j,k}^{(P)} - \mathbf{v}_{PU,k}^{(P)} - \dot{\Delta}_{n,k} \mathbf{n}_{R,k}^{(P)}$  поверхности буферного звена стыковочного механизма относительно поверхности пассивного стыковочного агрегата в точке контакта и ее единичный вектор  $\mathbf{n}_{T,k}^{(P)} = \mathbf{v}_{T,k}^{(P)} / |\mathbf{v}_{T,k}^{(P)}|$ ;
- модуль контактной реакции  $|\mathbf{f}_{R,k}| = k_{S,k} \Delta_{n,k} + c_{D,k} \dot{\Delta}_{n,k}$ , где  $k_{S,k}$  – контактная жесткость,  $c_{D,k}$  – коэффициент демпфирования;
- модуль силы трения  $|\mathbf{f}_{Fr,k}| = k_{Fr,k} |\mathbf{f}_{R,k}|$  в точке контакта, где  $k_{Fr,k}$  – коэффициент трения;
- контактная сила  $\mathbf{f}_{PU,k}^{(P)} = \mathbf{n}_{R,k}^{(P)} |\mathbf{f}_{R,k}| - \mathbf{n}_{T,k}^{(P)} |\mathbf{f}_{Fr,k}|$ , действующая на пассивный агрегат, и создаваемый ею момент  $\mathbf{m}_{PU,k}^{(P)} = \tilde{\mathbf{r}}_{PU,k}^{(P)} \mathbf{f}_{PU,k}^{(P)}$  относительно системы координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$ ;
- контактная сила  $\mathbf{f}_{B,j,k}^{(j)} = \mathbf{A}_{PUB,j} \mathbf{f}_{B,j,k}^{(P)} = \mathbf{A}_{PUB,j} (-\mathbf{n}_{R,k}^{(P)} |\mathbf{f}_{R,k}| - \mathbf{n}_{T,k}^{(P)} |\mathbf{f}_{Fr,k}|)$ , действующая на  $j$ -е буферное звено, и создаваемый ею момент  $\mathbf{m}_{B,j,k}^{(j)} = \mathbf{A}_{PUB,j} \mathbf{m}_{B,j,k}^{(P)} = \mathbf{A}_{PUB,j} (\tilde{\mathbf{r}}_{B,j,k}^{(P)} \mathbf{f}_{B,j,k}^{(P)})$  относительно системы координат  $X_{B,j}Y_{B,j}Z_{B,j}$ .

Модули  $|\mathbf{f}_{R,k}|$  контактных реакций определяются главным образом податливостью и относительно малой инерцией стыковочного механизма. Поэтому для правильной работы представленной модели контактного взаимодействия величины контактных жесткостей должны быть примерно на два порядка больше жесткости его звеньев и устройств демпфирования. Они ограничены только размером шага численного интегрирования.

Силы  $\mathbf{f}_{PU,k}^{(P)}$  и моменты  $\mathbf{m}_{PU,k}^{(P)}$ , действующие на пассивный агрегат, суммируются для всех выделенных точек контакта и входят в уравнения динамики пассивного космического аппарата. Аналогично силы  $\mathbf{f}_{B,j,k}^{(j)}$  и моменты  $\mathbf{m}_{B,j,k}^{(j)}$  суммируются для каждого  $j$ -го буферного звена и входят в уравнения динамики стыковочного механизма. Силы и моменты, создаваемые механизмом в своем основании, входят в уравнения динамики активного космического аппарата.

При таком подходе, в отличие от непосредственного использования кинематических уравнений связей, легко учитывается контактное трение, в модели сохраняются все точки контакта, а все силы и моменты контактного взаимодействия оказываются вычисленными в декартовых координатах, что упрощает интерпретацию результатов моделирования контактного взаимодействия и расчет нагрузок на критические точки конструкции космических аппаратов.

Использование контактной жесткости и демпфирования для расчета величины реакций по своему действию эквивалентно методу Баумгарта, так как выражение для  $|\mathbf{f}_{R,k}|$ , с учетом последующего введения этой силы в уравнения динамики и инерции контактирующих тел, описывает динамику контакта (выполнения условий связей) в виде осциллятора с демпфированием. При этом требуется меньший объем вычислений, так как используются кинематические соотношения для вычисления скоростей  $\mathbf{v}_{B,j,k}^{(P)}$ ,  $\mathbf{v}_{PU,k}^{(P)}$  (а не ускорений) в точках контакта и сохраняется исходная структура дифференциальных уравнений динамики космических аппаратов и стыковочного механизма.

Геометрические модели контактного взаимодействия стыковочных агрегатов основаны на следующих основных положениях.

1. Каждая область отдельного контакта представляется одной точкой, которая соответствует максимальной величине контактного внедрения вдоль общей нормали к контактирующим поверхностям. Число таких точек контакта может быть произвольным, но конечным.
2. Поверхности направляющих элементов пассивного стыковочного агрегата и буферных звеньев стыковочного механизма могут быть представлены произвольным, но конечным числом простейших геометрических примитивов, которые далее для краткости будут называться соответственно пассивными и активными.
3. Геометрические примитивы имеют постоянные параметры: пассивные – в системе координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  пассивного агрегата, активные – в системах координат  $X_{B,j}Y_{B,j}Z_{B,j}$  буферных звеньев. Такими параметрами являются координаты характерных точек, которые являются концами отрезков, центрами линий и поверхностей второго порядка, а также величины радиусов окружностей сфер, цилиндров, усеченных конусов.
4. Для определения возможности контакта и расчета его параметров координаты характерных точек буферных звеньев преобразуются в систему коор-

динат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  пассивного агрегата, характерные точки которого и нормали к поверхностям его направляющих элементов являются неизменными в этой системе и могут быть определены до начала моделирования.

5. Пары контактирующих примитивов выбираются таким образом, чтобы расчет внедрения  $\Delta_{n,k}$  вдоль нормали  $\mathbf{n}_{R,k}^{(P)}$  и координат точки контакта можно было выполнить с помощью простых аналитических выражений. Множеством однотипных примитивов можно аппроксимировать более сложную направляющую поверхность, и в таком случае эффективное определение наличия контакта обеспечивает итерационный метод дихотомии. Это исключает необходимость решения трансцендентных уравнений.
6. Каждое аналитическое решение получается для допустимого диапазона боковых и угловых рассогласований стыковочных агрегатов. При нарушении этих условий возможна некорректная работа алгоритмов. Тогда моделирование завершается с выдачей диагностического сообщения.

После выявления очередной точки контакта и расчета ее геометрических параметров по приведенным выше соотношениям вычисляются ее кинематические параметры: скорости внедрения и тангенциальные скорости в ней буферного звена и пассивного агрегата, а после этого – динамические параметры (контактные реакции и силы трения).

Далее рассматриваются разработанные на этой методической основе модели контактного взаимодействия стыковочных агрегатов центрального и периферийного типов.

## 2. Модель контактного взаимодействия стыковочных агрегатов центрального типа

На рис. 2 показаны активный и пассивный стыковочные агрегаты центрального типа. Кинематика стыковочного механизма активного агрегата описана в [9]. Его буферными звеньями являются головка штыря (1) (рис. 2а,б), подвижный корпус с накладками (2) ограничителя относительных разворотов, рычаги выравнивания с роликами (3). На головке штыря имеются датчики (4) первого контакта, датчики (5) контакта с дном гнезда приемного конуса, датчики (6) захвата головки (сцепки) и защелки (7) (на рис. 2б в убранном положении). Направляющими элементами пассивного агрегата являются приемный конус (8), который заканчивается приемным гнездом (9) (рис. 2в).

Контактирующие с приемным конусом (8) пассивного агрегата грани накладок (2) ограничителя на подвижном корпусе стыковочного механизма моделируются отрезками прямых, концы которых являются характерными точками. Координаты этих точек задаются в системе координат  $X_M Y_M Z_M$ , жестко связанной с подвижным корпусом. Ось  $X_M$  направлена вдоль штыря к его головке (рис. 3а). Ролики рычагов выравнивания (3) моделируются сферами, центры которых являются характерными точками. Головка штыря (1) также опи-

сывается сферой радиуса  $R_H$ , в ее центре (характерной точке) расположена система координат  $X_H Y_H Z_H$ , в которой задаются защелки и датчики (рис. 3б).

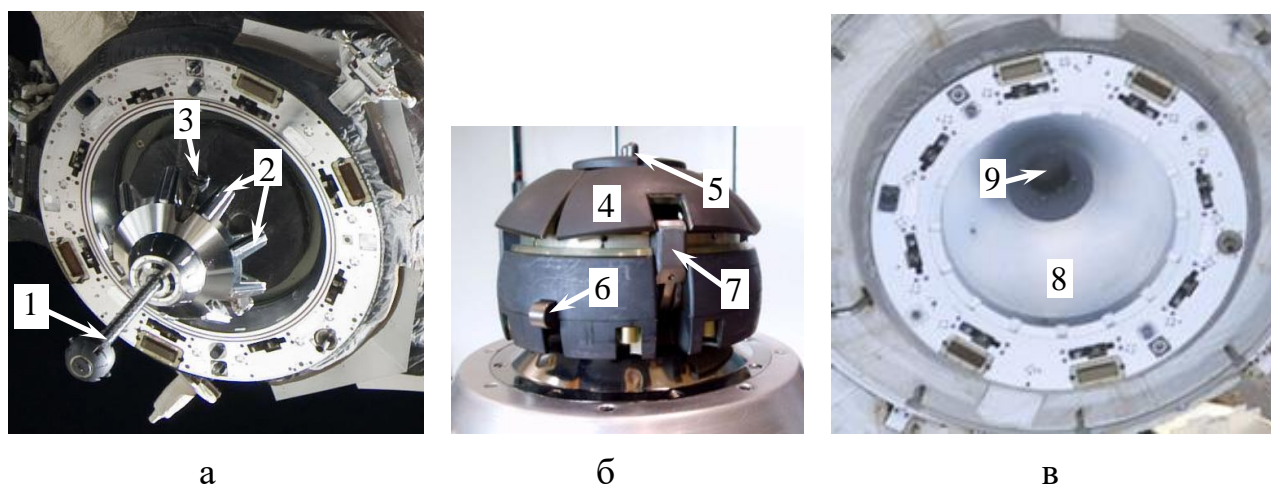


Рис. 2. а) Активный стыковочный агрегат центрального типа,  
 б) головка штанги стыковочного механизма,  
 в) пассивный стыковочный агрегат центрального типа

При малой скорости сближения на возможность сцепки влияют силы сопротивления защелок и датчиков захвата головки штанги. Поэтому эти элементы учитываются в модели контактного взаимодействия стыковочного механизма и пассивного агрегата.

Трехмерные защелки вследствие своей незначительной толщины описываются плоскими фигурами – набором точек и отрезков, в их локальных системах координат, начало которых точка 0 (центр вращения защелки) задается параметрами  $X_{LC0}$ ,  $Y_{LC0}$  (рис. 3в) в плоскостях  $X_H O_H Y_H$  для защелок (1) и (3) и  $X_H O_H Z_H$  для защелок (2) и (4) (рис. 3б). Характерные точки (1) и (2) являются концами отрезка, соответствующего поверхности, контактирующей с приемным конусом до срабатывания защелки. Их исходное положение относительно локальной системы координат  $X_{L1} Y_{L1}$  (для первой защелки) определяются постоянными параметрами  $X_{LC1}$ ,  $X_{LC2}$ ,  $L_{LC2}$ , с помощью которых вычисляются их переменные координаты в зависимости от угла  $\varphi_Z > 0$  поворота защелки до ее срабатывания. Характерные точки (3) и (4) являются концами отрезка, соответствующего поверхности, контактирующей с пазом гнезда приемного конуса после срабатывания защелки. Их координаты неизменны относительно  $X_H Y_H Z_H$ .

Аналогично звенья трехмерных датчиков захвата головки описываются характерными точками, лежащими в плоскости  $S$  (рис. 3б), проходящей через ось  $O_H X_H$  головки штанги. Положение их центров вращения, которые являются началом локальных систем координат  $X_{S1} Y_{S1}$  и  $X_{S2} Y_{S2}$  относительно центра головки, задается постоянными параметрами  $X_{SC0}$  и  $L_{SC0}$  (рис. 3г). С прием-

ным конусом контактируют цилиндрические поверхности звеньев датчиков, которые в плоской модели описываются окружностями радиуса  $R_{DSG}$ . Исходное положение центра окружности относительно центра вращения определяется постоянными параметрами  $X_{SC1}$  и  $L_{SC1}$ .

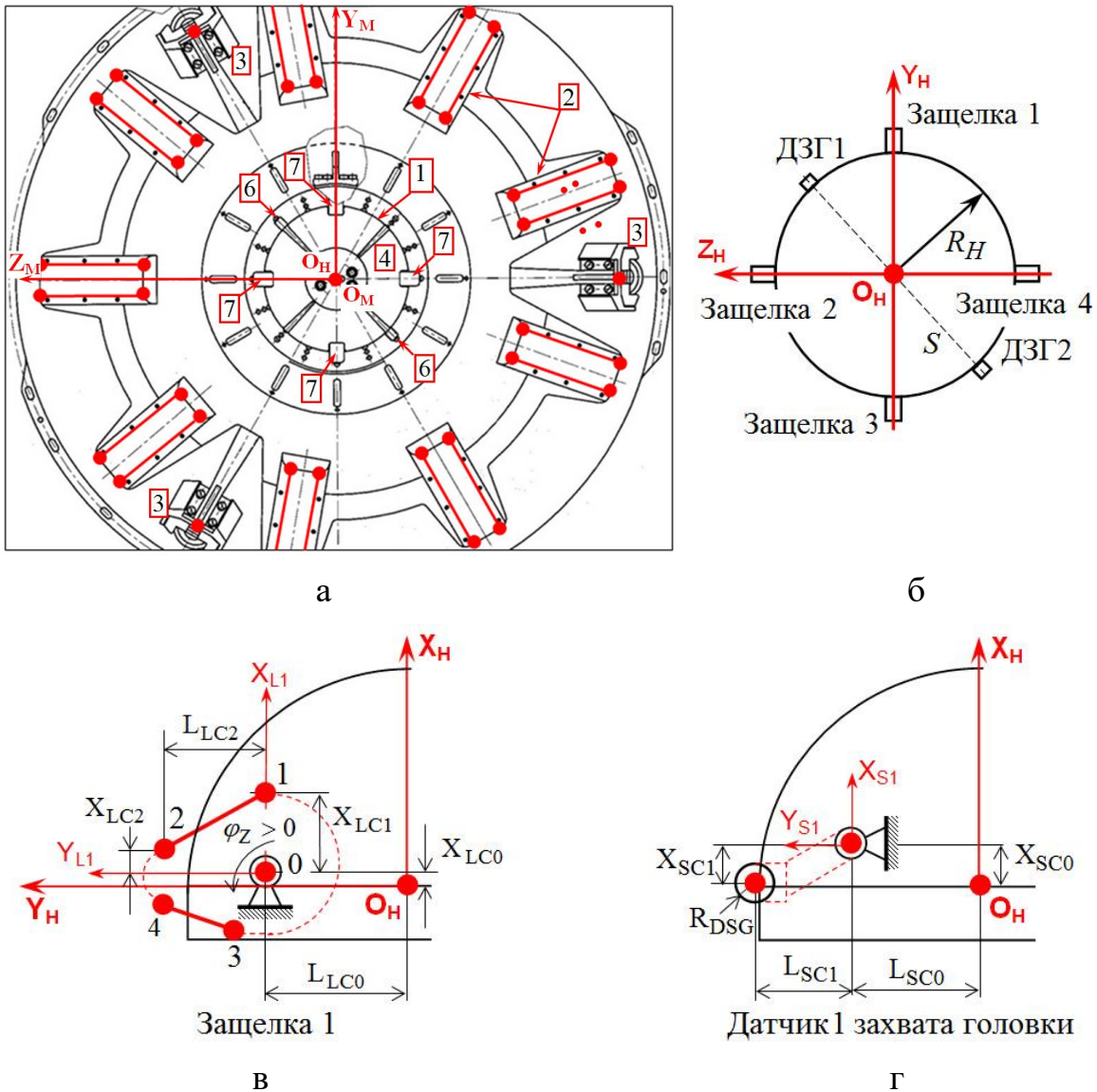


Рис. 3. а) Системы координат, характерные точки и отрезки подвижного корпуса стыковочного механизма центрального типа, б) головки штыря, в) защелки 1, г) датчика 1 захвата головки (ДЗГ1)

Геометрия направляющих элементов пассивного стыковочного агрегата задается в системе координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$ . Характерные точки (1) и (2) определяют продольную ось  $O_{PU}X_{PU}$ , а точки (2), (3) и (4) – плоскость стыка агрегата. Приемный конус представляет собой набор из нескольких усеченных конических поверхностей, расположенных последовательно вдоль их общей продольной оси  $O_{PU}X_{PU}$  (рис. 4а). Большой радиус  $R_{CB2}$  очередного усеченного конуса

является меньшим радиусом  $R_{CB1}$  предшествующего. Последний усеченный конус переходит в цилиндрическую поверхность гнезда с радиусом  $R_{CYL}$  и высотой  $H_{CYL}$ . Остальные параметры будут определены ниже.

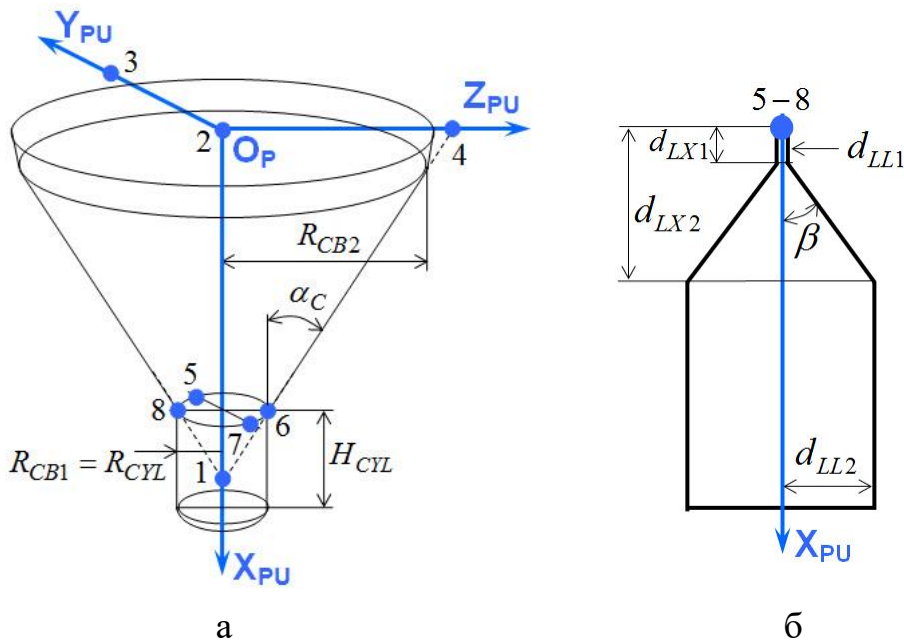


Рис. 4. а) Характерные точки и некоторые параметры приемного конуса пассивного стыковочного агрегата, б) характерные точки и параметры пазов гнезда приемного конуса

Гнездо приемного конуса имеет четыре паза, внутри которых четыре защелки головки штыря перемещаются после сцепки. Форма паза обеспечивает выравнивание стыковочного механизма и пассивного агрегата при их сближении (стягивании) за счет контакта с его гранями соответствующей защелки. Пространственная геометрия каждого паза в модели приближенно представлена плоской фигурой, которая параллельна плоскостям  $X_{PU}O_{PU}Y_{PU}$  или  $X_{PU}O_{PU}Z_{PU}$ . Основные параметры модели геометрии паза – это расстояния  $d_{LL1}$  и  $d_{LL2}$  от ее продольной оси до верхней и нижней вертикальных граней, осевые расстояния  $d_{LX1}$  и  $d_{LX2}$  от упора гнезда (характерная точка) до начала и окончания наклонных граней паза, угол  $\beta$  между ними и продольной осью (рис. 4б). Так как модель защелки является плоской, то значения параметров  $d_{LL1}$  и  $d_{LL2}$  уменьшены на половину ширины реальной защелки по сравнению с исходными конструктивными размерами. Это обеспечивает сохранение максимальных значений углов поворота стыковочного механизма относительно продольной оси пассивного агрегата. Защелки никогда не контактируют с нижними гранями пазов.

В математической модели система координат  $X_{AU}Y_{AU}Z_{AU}$  активного агрегата располагается в центре шарнира подвижного корпуса стыковочного меха-

низма. Поэтому матрица направляющих косинусов системы координат первого буферного звена – ограничителя угловых движений, и его угловая скорость относительно  $X_{AU}Y_{AU}Z_{AU}$  определяются соотношениями

$$\mathbf{A}_{AUB,1} = \begin{bmatrix} cq_1cq_2 & -sq_2 & -sq_1cq_2 \\ -cq_1sq_2 & cq_2 & sq_1sq_2 \\ sq_1 & 0 & cq_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{B,1}^{(B,1)} = \begin{bmatrix} sq_1\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \\ cq_1\dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{B,1}^{(A)} = \mathbf{A}_{AUB,1}^T \boldsymbol{\omega}_{B,1}^{(B,1)},$$

где  $sq_j = \sin q_j$ ,  $cq_j = \cos q_j$ ,  $q_j$  – углы отклонения подвижного корпуса от продольной оси стыковочного механизма.

Если ограничитель является внешней частью конструкции подвижного корпуса и вращается вместе с ним в шарнире, то положение и скорость его системы координат относительно основания равны нулю:  $\mathbf{r}_{AUB,1}^{(A)} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_{B,1}^{(A)} = \mathbf{0}$ . Если он перемещается вдоль продольной оси подвижного корпуса со скоростью  $\dot{x}_{LD}(t)$  и находится на расстоянии  $x_{LD}(t)$  от центра шарнира, то

$$\mathbf{r}_{AUB,1}^{(A)} = \mathbf{A}_{AUB,1}^T [x_{LD}(t), 0, 0]^T, \quad \mathbf{v}_{B,1}^{(A)} = \mathbf{A}_{AUB,1}^T (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B,1}^{(B,1)} [x_{LD}(t), 0, 0]^T + [\dot{x}_{LD}(t), 0, 0]^T).$$

Ориентация системы координат головки, как второго буферного звена, относительно системы координат  $X_{AU}Y_{AU}Z_{AU}$  определяется матрицей направляющих косинусов

$$\mathbf{A}_{AUB,2} = \begin{bmatrix} cq_3cq_3 & sq_4 & -cq_4sq_3 \\ -cq_5sq_4cq_3 + sq_5sq_3 & cq_5cq_4 & cq_5sq_4sq_3 + sq_5cq_3 \\ sq_5sq_4cq_3 + cq_5sq_3 & -sq_5cq_4 & -sq_5sq_4sq_3 + cq_5cq_3 \end{bmatrix} \mathbf{A}_{AUB,1},$$

где  $q_3, q_4, q_5$  – изгибные и крутильные деформации штыря относительно подвижного корпуса.

Угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}_{B,2}^{(A)}$  системы координат головки штыря, положение  $\mathbf{r}_{AUB,2}^{(A)}$  и скорость  $\mathbf{v}_{AUB,2}^{(A)}$  ее начала относительно  $X_{AU}Y_{AU}Z_{AU}$  определяются соотношениями

$$\boldsymbol{\omega}_{B,2}^{rel(B,2)} = \begin{bmatrix} sq_4\dot{q}_3 + \dot{q}_5 \\ cq_5cq_4\dot{q}_3 + sq_5\dot{q}_4 \\ -sq_5cq_4\dot{q}_3 + cq_5\dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_{B,2}^{(A)} = \boldsymbol{\omega}_{B,1}^{(A)} + \mathbf{A}_{AUB,2}^T \boldsymbol{\omega}_{B,2}^{rel(B,2)},$$

$$\mathbf{r}_{AUB,2}^{(A)} = \mathbf{A}_{AUB,1}^T [L_M, 0, 0]^T + \mathbf{A}_{AUB,2}^T [L_H(t), 0, 0]^T,$$

$$\mathbf{v}_{B,2}^{(A)} = \mathbf{A}_{AUB,1}^T (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B,1}^{(B,1)} [L_M, 0, 0]^T) + \mathbf{A}_{AUB,2}^T (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B,2}^{(B,2)} [L_H(t), 0, 0]^T),$$



где  $\omega_{B,2}^{rel(B,2)}$  – угловая скорость штока относительно подвижного корпуса в системе координат штока;  $L_M$  – постоянное осевое расстояние от центра шарнира до выходного опорного подшипника штока;  $L_H(t)$  – текущая длина внешней части штока от выходного подшипника до центра головки.

Ролики рычагов выравнивания являются третьим буферным звеном стыковочного механизма. Траектория их движения задается в системе координат подвижного корпуса, положение и скорости которой определены ранее.

Матрицы  $\mathbf{A}_{AUB,1}$  и  $\mathbf{A}_{AUB,2}$ , векторы  $\mathbf{r}_{AUB,1}^{(A)}$ ,  $\mathbf{v}_{B,1}^{(A)}$ ,  $\omega_{B,1}^{(A)}$  и  $\mathbf{r}_{AUB,2}^{(A)}$ ,  $\mathbf{v}_{B,2}^{(A)}$ ,  $\omega_{B,2}^{(A)}$  входят в равенства (1.1), (1.2), которые определяют положение (вектор  $\mathbf{r}_{PUB,j}^{(P)}$ ) и матрицу ориентации  $\mathbf{A}_{PUB,j}$  буферных звеньев относительно системы координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  пассивного агрегата, а также их абсолютные скорости  $\mathbf{v}_{B,j}^{(P)}$ ,  $\omega_{B,j}^{(P)}$  в этой же системе координат. Положение  $k$ -й характерной точки  $j$ -го буферного звена стыковочного механизма относительно  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  определяется вектором

$$\mathbf{r}_{B,j,k}^{(P)} = \mathbf{r}_{PUB,j}^{(P)} + \mathbf{A}_{PUB,j}^T \mathbf{l}_{B,j,k}^{(B,j)}, \quad (2.1)$$

где постоянный вектор  $\mathbf{l}_{B,j,k}^{(B,j)}$  задает эту точку в системе координат  $X_{B,j}Y_{B,j}Z_{B,j}$ .

Параметры буферных звеньев относительно их характерных точек – радиусы сфер и размеры звеньев остаются неизменными. Они вместе с векторами  $\mathbf{r}_{B,j,k}^{(P)}$  позволяют выявить наличие контактов стыковочного механизма с пассивным агрегатом и рассчитать их параметры.

Геометрические примитивы, описывающие направляющие элементы стыковочного механизма, далее называются активными, а направляющие элементы пассивного агрегата – пассивными. Для моделей агрегатов центрального типа возможны следующие пары контактирующих примитивов:

- активная сфера или точка – пассивный усеченный конус;
- активная сфера или точка – пассивная линия граничной окружности;
- активная сфера или точка – пассивный цилиндр;
- активная сфера или точка – пассивный фрагмент плоскости;
- отрезок прямой – граничная окружность.

Для каждой из этих пар анализ возможности и расчет параметров контакта определяются простыми аналитическими выражениями.

В качестве первого активного примитива, контактирующего с направляющими поверхностями приемного конуса, рассматривается сфера радиуса  $R_S$  с центром в точке  $P_S = (x_S, y_S, z_S)$ , определенной в системе координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$ . Этот геометрический примитив описывает головку штока и ролики направляющих рычагов. При наличии точки контакта единичный вектор

реакции  $\mathbf{n}_R = [n_X, n_Y, n_Z]^T$  в ней направлен по радиусу сферы, поэтому положение этой точки в системе координат  $X_{PU} Y_{PU} Z_{PU}$  определяется вектором  $\mathbf{r}_{PU,k}^{(P)} = [x_S + n_X R_S, y_S + n_Y R_S, z_S + n_Z R_S]^T$ . При  $R_S = 0$  он вырождается в характерную точку, которая может соответствовать, например, концу характерного отрезка накладки ограничителя. В этом случае направление вектора  $\mathbf{n}_R$  определяется формой пассивного геометрического примитива.

Каждый пассивный геометрический примитив типа «усеченный конус» (элемент приемного конуса пассивного агрегата) описывается в системе координат  $X_{PU} Y_{PU} Z_{PU}$ . Его постоянными параметрами являются радиусы  $R_{CB,max}$  и  $R_{CB,min}$  большего и меньшего оснований,  $\alpha_C$  – угол между осью и образующими конуса, абсцисса  $x_T$  точки  $P_T$  их пересечения (вершины конуса). Постоянными параметрами при фиксированном радиусе  $R_S$  активной сферы являются также минимальная  $x_{C,min} = R_{CB,min} \operatorname{ctg} \alpha + R_S \sin \alpha_C$  и максимальная  $x_{C,max} = x_{CB,max} + (R_{CB,max} - R_{CB,min}) \operatorname{ctg} \alpha$  абсциссы центра  $P_S = (x_S, y_S, z_S)$  активной сферы при контакте; минимальное  $d_{L,min} = R_{CB,min} - R_S \cos \alpha_C$  и максимальное  $d_{L,max} = R_{CB,max} - R_S \cos \alpha_C$  расстояния от  $P_S$  до оси конуса;  $n_{CX} = \sin \alpha_C$ ,  $n_{CL} = \cos \alpha_C$  – осевая и боковая компоненты единичного вектора реакции, нормального к поверхности конуса (рис. 5а).

Контакт активной сферы и пассивного усеченного конуса невозможен при выполнении одного из условий  $x_S < x_{C,min}$ ,  $x_S > x_{C,max}$ ,  $d_L < d_{L,min}$ ,  $d_L > d_{L,max}$ , где  $d_L = \sqrt{y_S^2 + z_S^2}$ . Если перечисленные условия выполнены, то дальнейший анализ возможности контакта завершается. В противоположном случае уточнение его наличия и определение его параметров выполняются следующим образом.

1. Вычисляются расстояния  $d_{SX} = x_T - d_L \operatorname{ctg} \alpha_C$  от центра  $P_S = (x_S, y_S, z_S)$  сферы до поверхности конуса вдоль его оси и  $d_S = d_{SX} \sin \alpha_C$  вдоль нормали к его поверхности  $d_S = d_{SX} \sin \alpha_C$ . Если  $d_S > R_S$ , то контакт этого типа отсутствует, и анализ завершается.
2. Вычисляется величина  $\Delta_n = R_S - d_S$  внедрения вдоль нормали к поверхности конуса, и если  $\Delta_n < 0$ , то контакт отсутствует и анализ завершается, если она превышает максимально допустимую величину, то есть  $\Delta_n > \Delta_{n,max}$ , то моделирование завершается с выдачей соответствующего диагностического сообщения о превышении допустимой величины внедрения.
3. При наличии контакта ( $0 < \Delta_n < \Delta_{n,max}$ ) вычисляются переменные компоненты  $n_X = n_{CX}$ ,  $n_Y = n_{CL} y_S / d_L$  и  $n_Z = n_{CL} z_S / d_L$  единичного вектора реакции и координаты точки контакта.

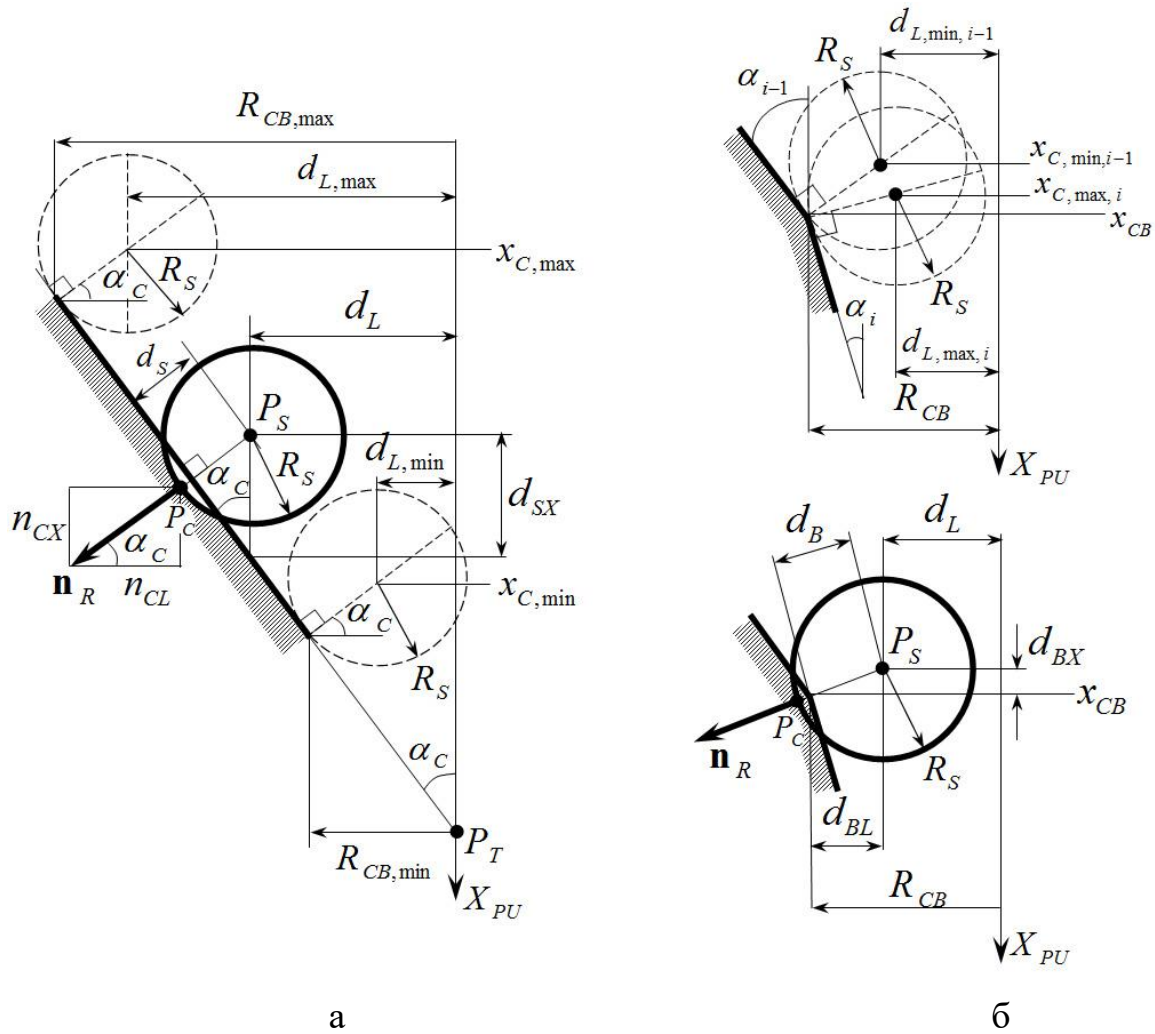


Рис. 5. а) Контакт активной сферы и пассивного усеченного конуса, б) контакт активной сферы и пассивной граничной окружности

Алгоритм анализа контакта сферы и усеченного конуса используется также для описания взаимодействия с приемным конусом роликов выравнивающих рычагов, координаты центров которых вычисляются в системе координат подвижного корпуса стыковочного механизма и преобразуются в систему координат  $X_{PU} Y_{PU} Z_{PU}$ . В этом случае координаты точки контакта и единичный вектор реакции, вычисленные в системе  $X_{PU} Y_{PU} Z_{PU}$ , преобразуются в систему координат подвижного корпуса и используются для расчета сил и моментов, действующих на это буферное звено.

Активная сфера может также контактировать с пассивной граничной окружностью, которая является линией сопряжения двух соосных усеченных конусов –  $(i-1)$ -го и  $i$ -го с углами  $\alpha_{i-1}, \alpha_i$  между их образующими и осью  $X_{PU}$  (рис. 5б). В частном случае  $i$ -й конус может вырождаться в цилиндр с равными радиусами оснований и углом  $\alpha_i = 0$  между образующими и осью  $X_{PU}$ . Независимо от этого  $(i-1)$ -й усеченный конус может вырождаться в

плоскость (угол  $\alpha_{i-1} = 90^\circ$ , рис. 6б). Граничная окружность имеет радиус  $R_{CB}$ . Ее плоскость перпендикулярна к  $X_{PU}$  и пересекает ее в точке  $(x_{CB}, 0, 0)$ . Возможность контакта с ней сферы радиуса  $R_S$ , центр которой расположен в точке  $P_S = (x_S, y_S, z_S)$ , определяют следующие постоянные параметры  $(i-1)$ -го и  $i$ -го соосных усеченных конусов: абсциссы точки  $P_S$  и расстояния от нее до оси  $X_{PU}$ , которые соответствуют окончанию контакта сферы с  $(i-1)$ -м усеченным конусом и началу контакта с  $i$ -м конусом, то есть (рис. 5б)  $x_{C, \min i-1} = x_{CB} + R_S \sin \alpha_{i-1}$ ,  $d_{L, \min i-1} = R_{CB} - R_S \cos \alpha_{i-1}$ , и соответственно  $x_{C, \max i} = x_{CB} + R_S \sin \alpha_i$ ,  $d_{L, \max i} = R_{CB} - R_S \cos \alpha_i$ .

При одновременном выполнении условий  $x_S \geq x_{C, \min i-1}$ ,  $d_L \geq d_{L, \min i-1}$ ,  $x_S \leq x_{C, \max i}$ ,  $d_L < d_{L, \max i}$ , где  $d_L = \sqrt{y_S^2 + z_S^2}$ , контакт возможен. Уточнение его возникновения и определение его параметров выполняется следующим образом.

1. Определяются боковое  $d_{BL} = R_{CB} - d_L$ , осевое  $d_{BX} = x_S - x_{CB}$  и полное  $d_B = \sqrt{d_{BL}^2 + d_{BX}^2}$  расстояния от центра головки до окружности входной грани.
2. Если  $d_B > R_S$ , то контакт отсутствует и данный анализ завершается.
3. Вычисляется внедрение  $\Delta_n = d_B - R_S$  и, если  $\Delta_n > \Delta_{n, \max}$ , то моделирование завершается с выдачей диагностического сообщения о превышении допустимой величины внедрения.
4. Вычисляются компоненты  $n_X = d_{BX} / d_B$ ;  $n_L = d_{BL} / d_B$ ,  $n_Y = n_L (y_S / d_L)$ ,  $n_Z = n_L (z_S / d_L)$  единичного вектора реакции и координаты точки контакта.

Контакт активной сферы и пассивного цилиндра описывает взаимодействие головки штыря и стенок гнезда приемного конуса. Для определения возможности его существования используются следующие постоянные параметры: радиус  $R_{CB}$  цилиндра, абсцисса  $x_{C, \min}$  его верхней грани и расстояние  $d_{L, \min} = R_{CB} - R_S$  от центра сферы до оси  $X_{PU}$  цилиндра в начале контакта. Параметры  $x_{C, \max}$  и  $d_{L, \max}$  не используются (рис. 6а). Рассматриваемый контакт невозможен, и дальнейший анализ завершается при выполнении одного из условий:  $x_S < x_{C, \min}$  или  $d_L < d_{L, \min}$ , где  $d_L = \sqrt{y_S^2 + z_S^2}$ . В противном случае уточнение его наличия и определение параметров точки контакта выполняются следующим образом.

1. Вычисляется боковое  $d_{BL} = R_{CB} - d_L$  расстояние от центра головки до поверхности цилиндра.
2. Если  $d_{BL} > R_S$ , то контакт отсутствует и данный анализ завершается.

3. Вычисляется внедрение  $\Delta_n = d_L - R_S$ , и если  $\Delta_n > \Delta_{n,\max}$ , то моделирование завершается с выдачей диагностического сообщения о соответствующей ошибке.
4. Вычисляются компоненты  $n_X = 0$ ;  $n_Y = y_S / d_L$ ,  $n_Z = z_S / d_L$  единичного вектора реакции и координаты точки контакта.

Контакт активной сферы с пассивной плоскостью, перпендикулярной к оси  $X_{PU}$ , соответствует попаданию головки штыря в дно гнезда приемного конуса или в стыковочную плоскость пассивного агрегата. Постоянными параметрами, определяющими возможность такого контакта, являются абсцисса  $x_{C,\min}$  центра сферы при ее касании с плоскостью, характерные расстояния  $d_{L,\min}$ ,  $d_{L,\max}$  от центра  $P_S = (x_S, y_S, z_S)$  сферы до оси  $X_{PU}$ , если она ограничена одним или двумя радиусами, и компоненты  $n_X = 1$ ,  $n_Y = 0$ ,  $n_Z = 0$  единичного вектора реакции (рис. 6.б). Параметр  $x_{C,\max}$  не используется.

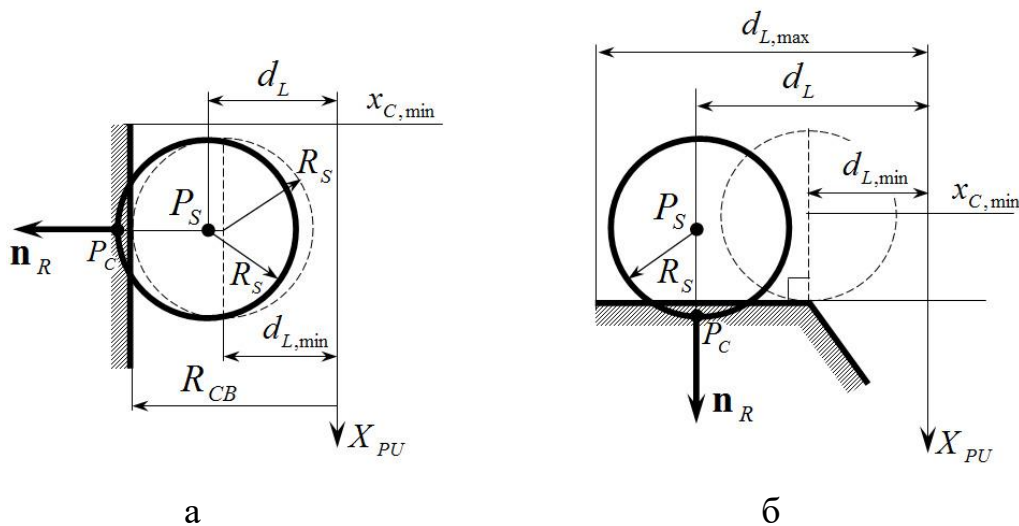


Рис. 6. а) Контакт активной сферы и пассивного цилиндра, б) контакт активной сферы и пассивной плоскости

При выполнении условий  $x_S \geq x_{C,\min}$  и  $d_{L,\min} < d_L < d_{L,\max}$ , где  $d_L = \sqrt{y_S^2 + z_S^2}$ , определение наличия точки контакта и расчет ее параметров выполняются следующим образом.

1. Вычисляется величина внедрения  $\Delta_n = x_S - x_{C,\min}$  сферы в плоскость.
2. Если  $\Delta_n < 0$ , то контакт отсутствует и анализ завершается; при  $\Delta_n > \Delta_{n,\max}$  моделирование завершается с выдачей диагностического сообщения о превышении допустимой величины.
3. Вычисляются координаты точки контакта в соответствии с значениями  $n_X = 1$ ,  $n_Y = 0$ ,  $n_Z = 0$  компонент единичного вектора реакции.

В паре «отрезок прямой – окружность» каждый из геометрических примитивов в моделях различных агрегатов может быть активным или пассивным. Поэтому в используемых обозначениях отсутствует указание на его принадлежность к конкретному типу стыковочного агрегата. Постоянные параметры пассивного примитива вычисляются до начала моделирования.

Отрезок прямой, проходящий через точки  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  и  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , описывается параметрическим уравнением  $x = x_1 + lt$ ,  $y = y_1 + mt$ ,  $z = z_1 + nt$ , то есть исходной точкой  $P_1$  и направляющим вектором  $\mathbf{L} = [l, m, n]^T$  с компонентами  $l = x_2 - x_1$ ,  $m = y_2 - y_1$ ,  $n = z_2 - z_1$ . Если эта прямая пересекает плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$  в точке  $P_C$ , то значение параметра равно  $t_C = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)/(Al + Bm + Cn)$ , а точка  $P_C$  имеет координаты  $x_C = x_1 + t_C l$ ,  $y_C = y_1 + t_C m$ ,  $z_C = z_1 + t_C n$ . Она принадлежит отрезку между точками  $P_1$  и  $P_2$  при выполнении условия  $t_C \in [0, 1]$ .

В модели контактного взаимодействия агрегатов центрального типа граничная окружность радиуса  $R_C$  с центром  $P_B = (x_B, y_B, z_B)$  является основанием первого усеченного конуса (принадлежащего плоскости  $Y_{PU}O_{PU}Z_{PU}$ ) или цилиндра, описывающего гнездо приемного конуса. Вершина конуса или центр другого основания цилиндра задаются точкой  $P_T = (x_T, y_T, z_T)$ . Отрезок прямой представляется вектором  $\mathbf{L}_i = [l_i, m_i, n_i]^T$  с начальной точкой  $P_{1,i}$  (рис. 7).

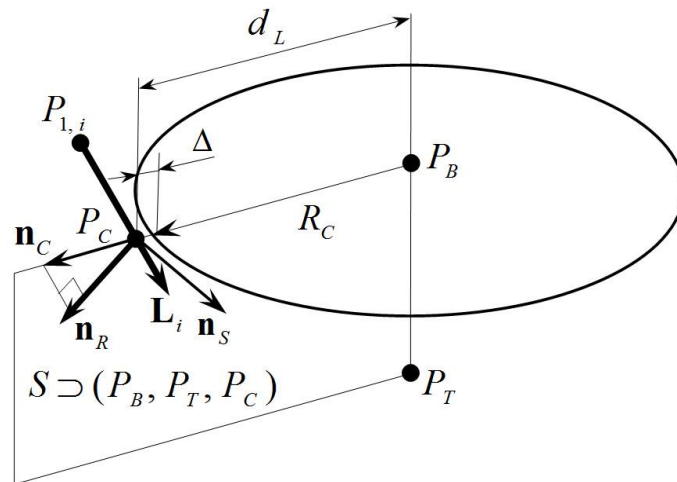


Рис. 7. Контакт отрезка прямой и граничной окружности

Здесь и далее при определении параметров контакта используются известные формулы аналитической геометрии [17] для отрезков, плоскостей и параметров их пересечения. Для определения наличия контакта и его геометрических параметров последовательно вычисляются:

1. Параметры  $A, B, C, D$  плоскости окружности, проходящей через  $P_B$  перпендикулярно отрезку  $P_B P_T$  оси конуса или цилиндра:  $A = l = x_T - x_B$ ,  $B = m = y_T - y_B$ ,  $C = n = z_T - z_B$ ,  $D_C = -(l x_B + m y_B + n z_B)$ .
2. Параметры вектора  $\mathbf{L}_i$  отрезка с исходной точкой  $P_{1,i}$ , где  $i$  – индекс отрезка в некотором их множестве.
3. Параметр  $t_C$ , соответствующий точке  $P_C$  пересечения отрезка  $\mathbf{L}_i$  и плоскости окружности. Если  $t_C \notin [0, 1]$ , то отрезок не пересекает плоскость окружности и определение параметров контакта данного типа завершается.
4. координаты точки  $P_C$  и расстояние  $d_L$  от нее до центра окружности  $P_B$  и боковое внедрение  $\Delta = d_L - R_C$  (если  $\Delta \leq 0$  то отрезок не пересекает окружность и определение параметров контакта данного типа завершается).
5. Компоненты направляющего вектора  $\mathbf{n}_S = [A_S, B_S, C_S]^T$  плоскости  $S$  проходящей через три точки  $P_C, P_B$  и  $P_T$ , то есть компоненты вектора, параллельного касательной к окружности в точке ее пересечения с отрезком  $P_B P_C$ :  $A_S = (y_B - y_C)(z_T - z_C) - (y_T - y_C)(z_B - z_C)$ ,  
 $B_S = -[(x_B - x_C)(z_T - z_C) - (x_T - x_C)(z_B - z_C)]$ ,  
 $C_S = (x_B - x_C)(y_T - y_C) - (x_T - x_C)(y_B - y_C)$ .
6. Единичный вектор  $\mathbf{n}_R$  реакции в точке контакта как результат нормирования компонент вектора  $\mathbf{L}_i \times \mathbf{n}_S$  с выполнением условия  $\mathbf{n}_{R,x} > 0$ .
7. Единичный вектор  $\mathbf{n}_C = [0, y_C / d_L, z_C / d_L]^T$  радиуса окружности, проходящего через точку  $P_C$ , который позволяет определить величину контактного внедрения  $\Delta_n = \Delta(\mathbf{n}_R^T \mathbf{n}_C)$  вдоль вектора  $\mathbf{n}_R$ .
8. Если  $\Delta_n \leq \Delta_{n,\max}$ , то  $P_C$  является точкой контакта, в противном случае моделирование завершается с выдачей соответствующего диагностического сообщения.

Координаты точки контакта отрезка с окружностью и единичный вектор реакции, вычисленные в системе координат  $X_{PU} Y_{PU} Z_{PU}$ , в модели контактного взаимодействия стыковочного механизма и приемного конуса пассивного агрегата преобразуются в систему координат ограничителя угловых движений и используются для расчета сил и моментов, действующих на это буферное звено.

Силы сопротивления, создаваемые защелками и датчиками захвата головки до сцепки, рассчитываются итерационно после завершения очередного шага численного интегрирования уравнений динамики механической системы. Последовательность вычислений далее коротко поясняется на примере одной защелки. Отрезок защелки, контактирующий до ее срабатывания с направляющими поверхностями приемного конуса, описывается характерными точками

(1) и (2) (рис. 3в). Сначала при нулевом угле поворота защелки координаты точки (2) преобразуются в систему координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  и определяется величина внедрения защелки в последний (переходящий в цилиндр приемного гнезда) усеченный конус. Положительная величина внедрения означает, что защелка начала контактировать с приемным конусом. Для итерационного уточнения ее истинного положения начальное значение угла поворота берется равным его величине, полученной перед началом предшествующего шага интегрирования. На каждом шаге итерационной процедуры выполняются следующие действия.

1. Угол поворота защелки увеличивается на малую величину, которая определяет точность расчета силы сопротивления.
2. Вычисляются координаты характерных точек (1) и (2) защелки относительно  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$ . Определяется тип контакта «прямого» отрезка – с усеченным конусом, граничной окружностью или цилиндром (рис. 8а). Здесь  $P_{P,1}$  – характерная точка (1), а плоскость граничной окружности проходит через характерные точки (5) и (8) пассивного агрегата (рис. 4а). Вычисляется величина контактного внедрения. Если оно остается положительным, то выполняется очередное увеличение угла поворота защелки.
3. Если внедрение становится меньше или равным нулю, то значение угла поворота защелки запоминается для старта итерационного процесса после очередного шага интегрирования.
4. Координаты точки пересечения отрезка с граничной окружностью или его конечной точки (2) преобразуются в систему координат головки штыря, определяется плечо силы относительно центра вращения защелки.
5. По текущему значению угла поворота защелки вычисляется момент, создаваемый ее пружиной, а по величине плеча силы – ее модуль. Силы, действующие со стороны защелки на головку штыря и пассивный агрегат, равны умноженному на этот модуль единичному вектору реакции, выраженному в системе координат головки, а также в системе координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$ .
6. Координаты точки (2) в системе координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  проецируются на плоскость соответствующего паза гнезда. При попадании внутрь его границ защелка считается сработавшей (рис. 8б). После этого она не оказывает сопротивления сближению.

Аналогично определяются силы сопротивления до сцепки, которые создают датчики захвата головки. После сцепки они контактируют со стенками гнезда приемного конуса. Суммарная сила трения от всех датчиков головки при ее движении вдоль продольной оси гнезда определяется экспериментально и также учитывается в уравнениях динамики.

Каждая защелка (3) головки штыря (4) (рис. 8в) после срабатывания контактирует с соответствующим пазом (5) гнезда (6) приемного конуса своей обратной стороной, а в модели – отрезком, концы которого – характерные точки (3) и (4) на рис. 3в, являются неизменными в системе координат головки.



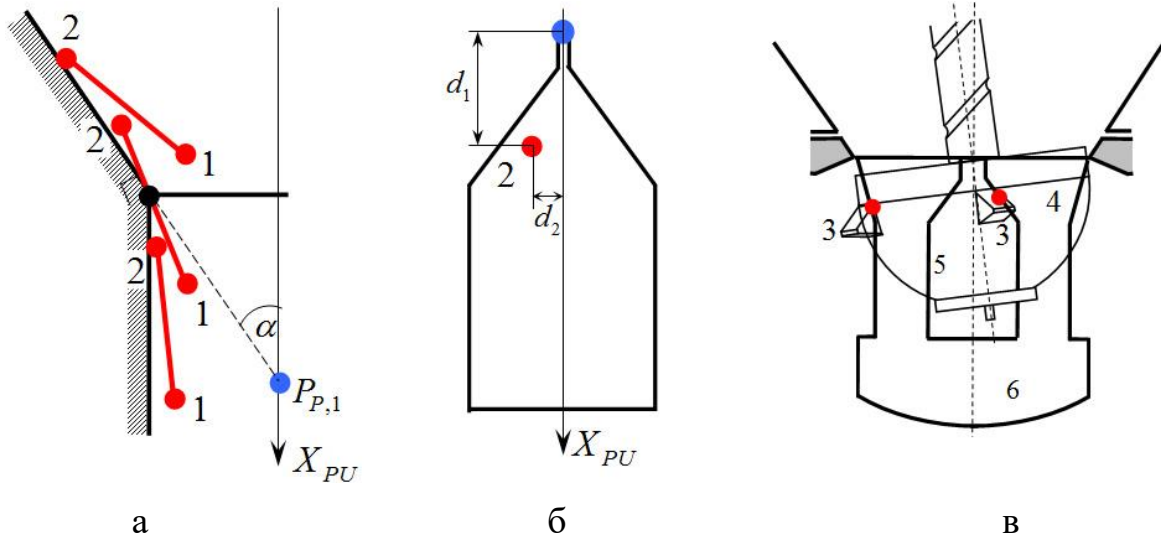


Рис. 8. а) Контакты прямого отрезка (1)-(2) защелки до ее срабатывания, б) определение срабатывания защелки по попаданию ее характерной точки (2) внутрь соответствующего паза приемного гнезда, в) контакты защелок с пазами гнезда после сцепки

Характерная точка и единичные векторы контактных реакций каждого паза гнезда являются постоянными в системе координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  пассивного агрегата. На рис. 9 они показаны для первого паза. Вхождение в свои паза всех четырех защелок означает сцепку, установление первичной механической связи стыковочных агрегатов. Форма пазов обеспечивает их выравнивание относительно продольной оси при стягивании.

Анализ контактного взаимодействия защелки с соответствующим ей пазом выполняется следующим образом.

1. Параметры постоянного характерного отрезка защелки преобразуются в систему координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$ , и определяется точка  $P_C$  его пересечения с плоскостью соответствующего паза.
2. Вычисляется разность  $d_1$  абсцисс точки  $P_C$  и характерной точки вершины паза, а также расстояние  $d_2$  от  $P_C$  до продольной оси паза. Характерные точки вершин для первого и третьего паза имеют координату  $z=0$ , а для второго и четвертого – координату  $y=0$  (рис. 4а).
3. В зависимости от положения точки  $P_C$  относительно узкой и широкой областей паза с вертикальными гранями, а также области с наклонными гранями вычисляются внедрения  $\Delta_x$  в поверхность упора,  $\Delta_L$  в боковые и  $\Delta_S$  в наклонную стенки гнезда.
4. В случае отрицательной величины  $d_1$  или положительных значений  $\Delta_L$  или  $\Delta_S$  имеет место контакт, которому соответствует единичный вектор реакции  $\mathbf{n}_x$ ,  $\mathbf{n}_L$  или  $\mathbf{n}_S$  с постоянными компонентами в системе координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$ . Осевое внедрение в упор и боковое внедрение в стенку узкой

части паза могут возникать одновременно, тогда пара «защелка-гнездо» может одновременно работать на растяжение и кручение штыря.

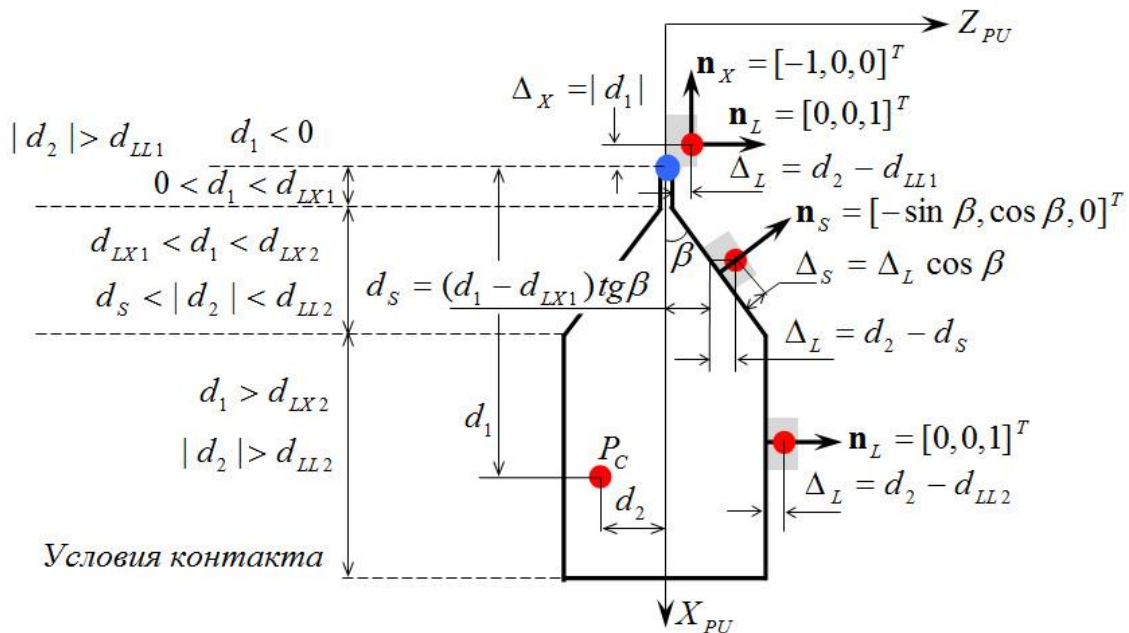


Рис. 9. Условия контакта, величины внедрений и единичные векторы реакций в модели взаимодействия защелки с первым пазом гнезда приемного конуса

Суммарные контактные силы  $\mathbf{f}_{B,j}^{(P)}$  и моменты  $\mathbf{m}_{B,j}^{(P)}$ , действующие на  $j$ -е буферное звено, преобразуются в систему координат  $X_{B,j}Y_{B,j}Z_{B,j}$  и входят в уравнения динамики стыковочного механизма. Суммарная сила  $\mathbf{f}_{PU}^{(P)}$ , действующая на пассивный агрегат, приводится к системе координат  $X_{C2}Y_{C2}Z_{C2}$  и преобразуется в систему координат  $X_IY_I Z_I$ , а суммарный момент  $\mathbf{m}_{PU}^{(P)}$  преобразуется в систему координат  $X_{C2}Y_{C2}Z_{C2}$ . Они входят в уравнения динамики пассивного космического аппарата.

### 3. Модель контактного взаимодействия периферийных стыковочных агрегатов

Периферийные стыковочные агрегаты изначально были созданы как андрогинные, то есть способные выполнять либо активные, либо пассивные функции в зависимости от программы полета. Поэтому они имеют одинаковую геометрию единственного буферного звена – стыковочного кольца (1) с направляющими выступами (2), на которых установлены механизмы защелок (3) (рис. 10). На активном агрегате (4) стыковочный механизм (5) перед стыковкой выдвигается в исходное положение, на пассивном агрегате (6) он либо втянут, либо отсутствует. Защелки (3) зацепляются за соответствующие упоры (7), установленные на пассивном агрегате (6).

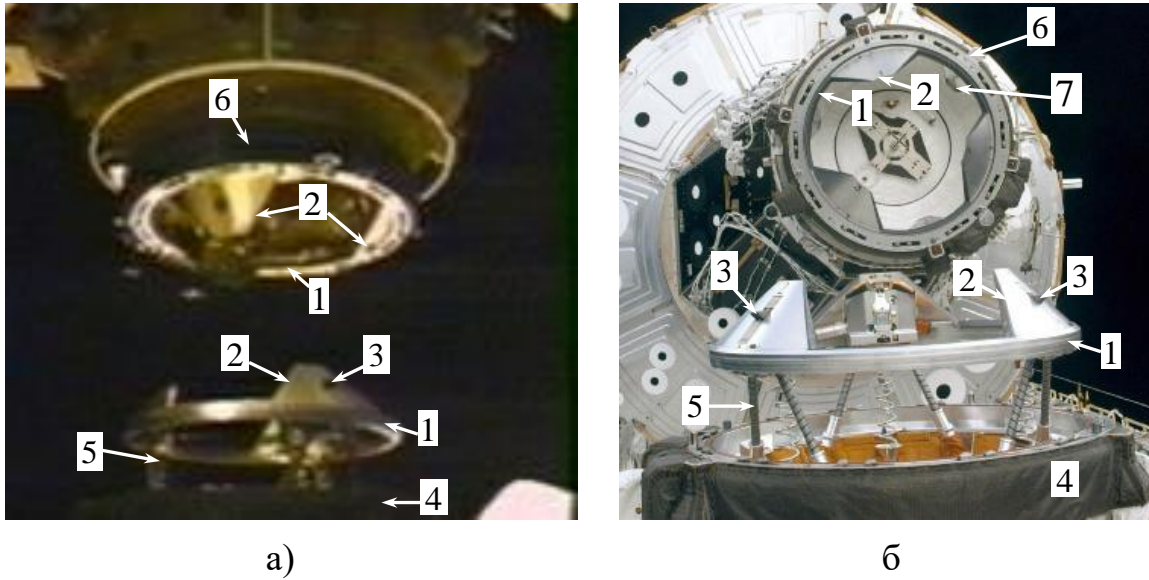


Рис. 10. а) Вид на андрогинные периферийные агрегаты при стыковке корабля Space Shuttle к орбитальной станции «Мир», б) перед стыковкой корабля Space Shuttle с американским модулем NODE1 международной космической станции (фото NASA)

Стыковочные кольца (рис. 11а) для возможности выравнивания их рассогласований и совмещения их плоскостей обладают симметрией относительно одной поперечной оси (оси  $Z_A$  и  $Z_P$ ) и обратной симметрией относительно другой (оси  $Y_A$  и  $Y_P$ ).

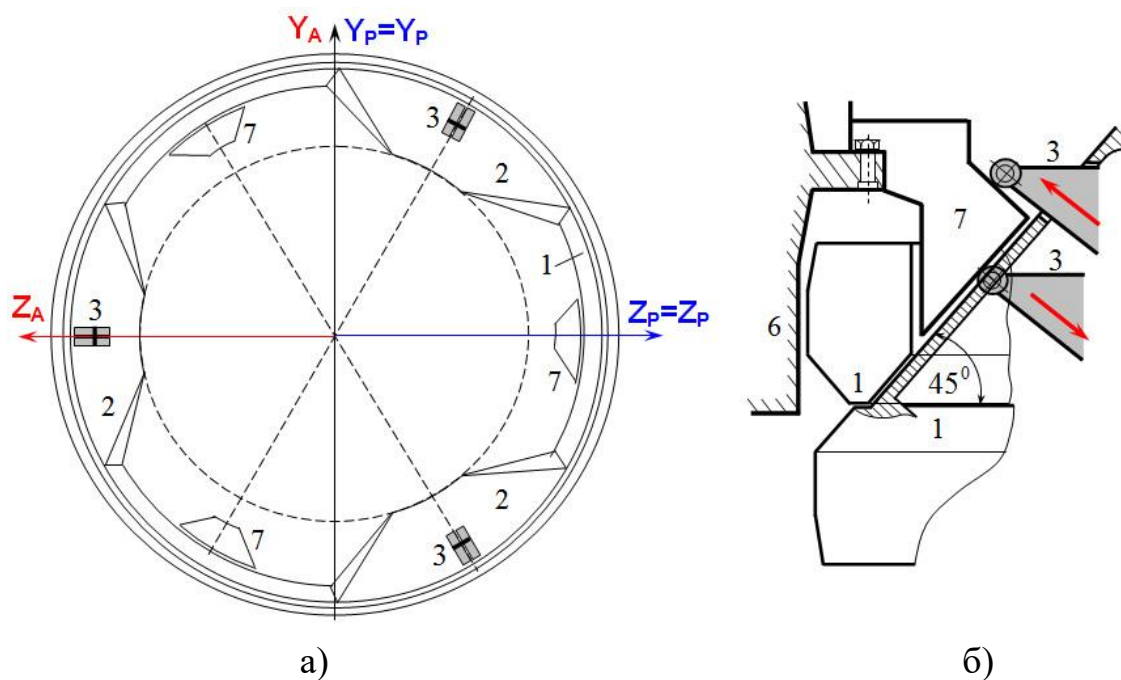


Рис. 11. а) Геометрия стыковочного кольца периферийных агрегатов, б) контакт защелки активного агрегата с направляющей поверхностью упора пассивного агрегата и выход ее за этот упор

Каждая защелка (3) на своем конце имеет ролик, уменьшающий силу трения. Она контактирует с направляющей и обратной (запирающей) поверхностями упора (7) (рис. 11б). Ее движение с хорошей степенью приближения может быть описано как поступательное. При контакте с направляющей поверхностью упора (7) защелка утапливается внутрь своего направляющего выступа, а после прохождения его грани восстанавливает свое выдвинутое положение. Все защелки дублированные. Если при совмещении плоскостей колец хотя бы одна защелка из каждой пары заходит за соответствующий упор, то образуется первичная механическая связь стыковочных агрегатов – сцепка.

При взаимодействии активного и пассивного стыковочных колец могут возникать контакты их плоскостей, контакты боковых граней их направляющих выступов, контакты граней и конических поверхностей направляющих выступов одного кольца с внутренней границей-окружностью плоскости другого кольца. Исходя из этого геометрия активного стыковочного кольца описывается набором следующих примитивов: характерные отрезки боковых граней и конических поверхностей боковых выступов, характерные точки плоскости кольца, характерные отрезки защелок.

Границы каждой треугольной плоской боковой грани направляющих выступов задаются двумя отрезками, каждый из которых описывается начальной точкой и вектором. Начальные точки  $B_1$  и  $B_2$  направленных отрезков верхних границ на плоскости кольца лежат на ее граничной окружности радиуса  $R_R$  (рис. 12а). Точки  $A_1$  и  $A_2$  являются вершинами треугольников, концами направленных отрезков. Отрезки верхних границ продлеваются за плоскость кольца. Их новые исходные точки  $C_1$  и  $C_2$  лежат на окружности радиуса  $R_{R,max} = R_R + \Delta_{max}$ , где  $\Delta_{max}$  – максимально допустимое боковое внедрение. Плоскость этой окружности расположена ниже плоскости стыковочного кольца и параллельна ей. Это сделано для того, чтобы в модели исходные точки верхних границ граней не могли пройти внутрь граничной окружности ответного кольца. Положения начальных точек  $E_1$  и  $E_2$  направленных отрезков нижних границ определяются из конструкции. Сечение конической поверхности плоскостью, наклонной к оси конуса, является гиперболой. Максимальное отклонение гиперболы от отрезка  $B_1A_1$  верхней границы грани составляет 4.65 мм и определяет погрешность модели ее контакта. Конические поверхности направляющих выступов аппроксимированы наборами из  $2^N + 1$  отрезков-образующих (рис. 12б), где  $N$  определяет точность аппроксимации и число итераций при поиске точки контакта. Эти отрезки также описываются начальными точками, лежащими на окружности радиуса  $R_{R,max}$ , и векторами. Векторы образующих, пересекающие поверхность направляющего выступа между точками  $A_1$  и  $A_2$ , имеют максимальную длину  $L_{max}$ , пересекающие плоскости боковых граней – имеют длину  $L < L_{max}$ . Первый и последний векторы имеют минимальную длину  $L_{min}$ .

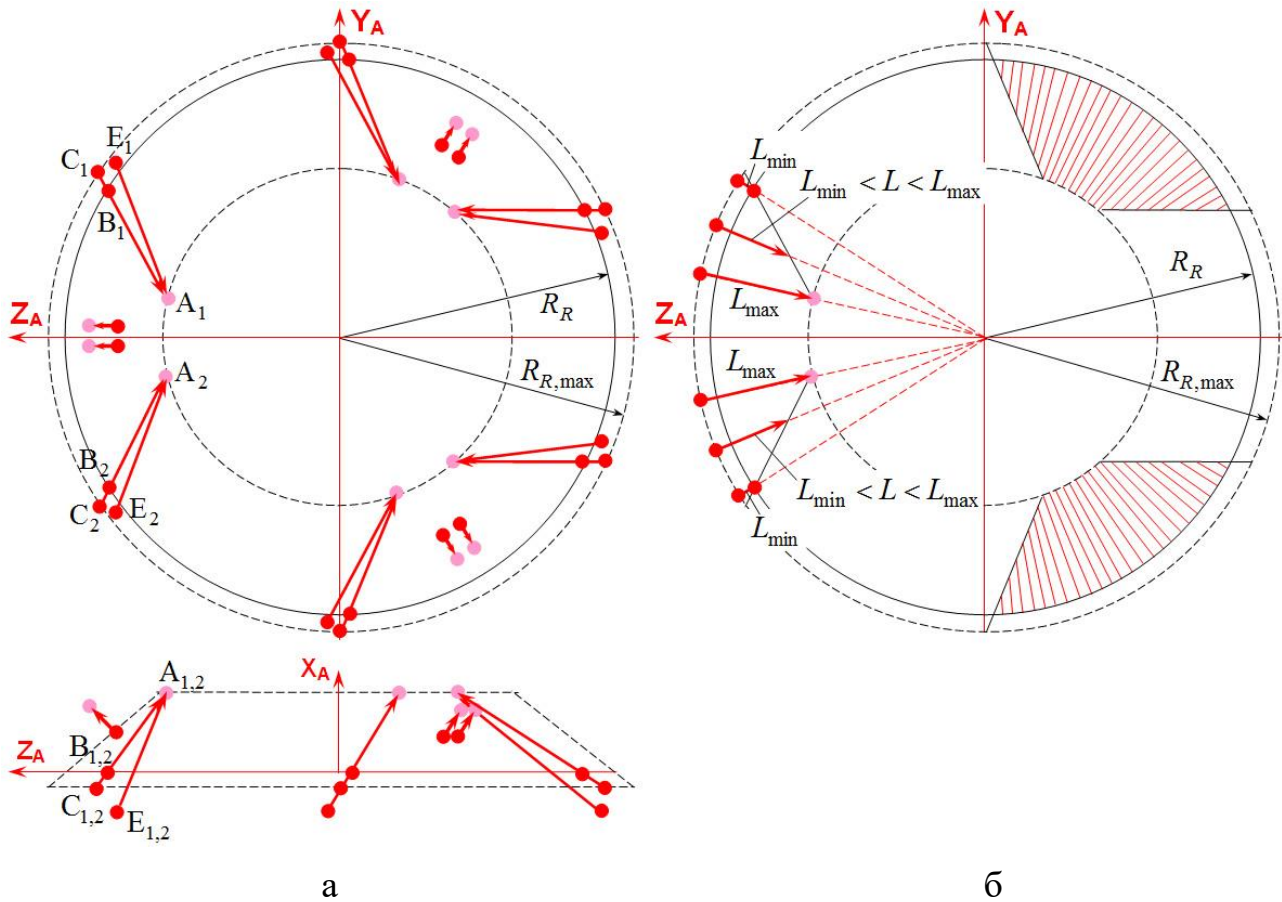


Рис. 12. а) Характерные отрезки и точки граней направляющих выступов, защелок и плоскости кольца активного периферийного стыковочного агрегата, б) характерные отрезки конических поверхностей направляющих выступов

При инициализации геометрической модели координаты начальных точек и параметры векторов отрезков-образующих формируются автоматически в зависимости от заданного числа  $N$ . В описываемом варианте модели  $N = 8$ , то есть число образующих, аппроксимирующих коническую поверхность каждого направляющего выступа, равно  $2^8 + 1 = 257$ .

Контакт плоскостей стыковочных колец возможен при их боковых и угловых рассогласованиях, близких к нулю. Он описывается как контакт характерных точек плоскости активного кольца (точки  $B_1$  и  $B_2$  каждого направляющего выступа) с плоскостью пассивного кольца.

Геометрическая модель пассивного кольца описывается аналогично, только вместо характерных отрезков защелок задаются геометрические параметры упоров, которые будут рассмотрены ниже.

В математической модели начало системы координат  $X_{AU}Y_{AU}Z_{AU}$  активного периферийного агрегата располагается в точке пересечения его продольной оси с плоскостью, проходящей через центры нижних шарниров стыковочного механизма. Положение центра  $\mathbf{r}_{AUB,1}^{(A)}$ , матрица направляющих косинусов

$\mathbf{A}_{AUB,1}$  и скорости  $\mathbf{v}_{B,1}^{(A)}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{B,1}^{(A)}$  единственного буферного звена – стыковочного кольца – определяются в этой системе координат соотношениями

$$\mathbf{r}_{AUB,1}^{(A)} = \mathbf{r}_R^{(A)} = [q_1, q_2, q_3]^T,$$

$$\mathbf{A}_{AUB,1} = \mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} cq_5cq_4 & sq_5 & -cq_5sq_4 \\ -cq_6sq_5cq_4 + sq_6sq_4 & cq_6cq_5 & cq_6sq_5sq_4 + sq_6cq_4 \\ sq_6sq_5cq_4 + cq_6sq_4 & -sq_6cq_5 & -sq_6sq_5sq_4 + cq_6cq_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{B,1}^{(A)} = \mathbf{v}_R^{(A)} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3]^T, \boldsymbol{\omega}_{B,1}^{(A)} = \boldsymbol{\omega}_R^{(A)} = \begin{bmatrix} 0 & c_4 & c_4c_5 \\ 1 & 0 & s_5 \\ 0 & -s_4 & -s_4c_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix},$$

где  $q_1, q_2, q_3$  – координаты центра кольца,  $q_4, q_5, q_6$  – его углы рыскания, тангажа и крена,  $sq_j = \sin q_j$ ,  $cq_j = \cos q_j$ ,  $j = \overline{4, 6}$ .

Эти векторы и матрицы входят в соотношения (1.1) и (1.2), которые определяют положение и скорости активного стыковочного кольца относительно системы координат  $X_P Y_P Z_P$  пассивного, для периферийного агрегата совпадающей с системой  $X_{PU} Y_{PU} Z_{PU}$ . Положение  $k$ -й характерной точки активного кольца относительно системы  $X_{PU} Y_{PU} Z_{PU}$  определяется аналогично (2.1). Компоненты векторов активных отрезков преобразуются в систему координат  $X_{PU} Y_{PU} Z_{PU}$  с помощью матрицы  $\mathbf{A}_{PUB,1}^T$ .

Для моделей контакта колец периферийных агрегатов возможны следующие пары контактирующих примитивов:

- активный и пассивный отрезки, описывающие границы граней направляющих выступов;
- активный или пассивный отрезок, описывающий границу грани, и пассивная или активная окружность (внутренняя граница плоскости соответствующего кольца);
- активный или пассивный отрезок-образующая конической поверхности и пассивная или активная окружность;
- точки плоскости активного кольца и плоскость пассивного кольца.

Алгоритмы анализа возможности и расчета параметров контактов точки и плоскости, отрезка и окружности рассмотрены ранее в разделе 2.

Для определения контакта активного и пассивного отрезков, заданных своими исходными точками  $O_A = (x_A, y_A, z_A)$ ,  $O_P = (x_P, y_P, z_P)$  и векторами  $\mathbf{L}_A = [l_A, m_A, n_A]^T$ ,  $\mathbf{L}_P = [l_P, m_P, n_P]^T$ , и расчета параметров этого контакта сначала вычисляются параметры плоскостей (рис. 13):

- $\mathbf{S}_{PP}$ , проходящей через  $\mathbf{L}_A$  параллельно  $\mathbf{L}_P$ ;

- $S_{PA}$ , проходящей через  $L_P$  параллельно  $L_A$ ;
- $S_{NP}$ , проходящей через  $L_A$  перпендикулярно к  $S_{PP}$ ;
- $S_{NA}$ , проходящей через  $L_P$  перпендикулярно к  $S_{PA}$ .

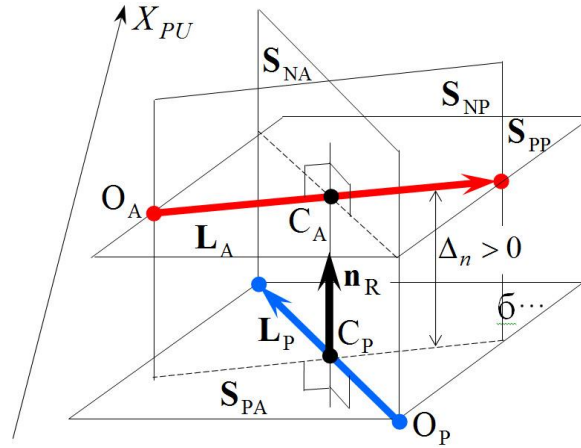


Рис. 13. Контакт двух отрезков прямых

Параметры плоскости, проходящей через отрезок  $L_i$  параллельно другому отрезку  $L_j$ , и параметры плоскости, проходящей через отрезок  $L_i$  перпендикулярно плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ , определяются схожими по структуре условиями

$$\begin{vmatrix} x - x_i & y - y_i & z - z_i \\ l_i & m_i & n_i \\ l_j & m_j & n_j \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x - x_i & y - y_i & z - z_i \\ l_i & m_i & n_i \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Далее вычисляются параметр  $t_{CA}$ , соответствующий точке  $C_A$  пересечения отрезка  $L_A$  с плоскостью  $S_{NA}$ , и параметр  $t_{CP}$ , соответствующий точке  $C_P$  пересечения отрезка  $L_P$  с плоскостью  $S_{NP}$ .

Если  $t_{CA} \notin [0, 1]$  или  $t_{CP} \notin [0, 1]$ , то отрезки не пересекаются и анализ возможности контакта завершается. В противном случае отрезок  $C_P C_A$  пересекает векторы  $L_A$ ,  $L_P$  и перпендикулярен к ним. Вычисляются его компоненты и длина.

Если проекция отрезка  $C_P C_A$  на ось  $X_{PU}$  оказалась меньше нуля, то активная грань еще не внедрилась в пассивную и анализ возможности контакта завершается.

Вычисляется длина отрезка  $C_P C_A$ . Если она меньше очень малой величины (в описываемом варианте модели она меньше  $10^{-6}$  мм), то контакт не учитывается для исключения ситуации деления на ноль.

В противном случае единичный вектор  $\mathbf{n}_R$  контактной реакции, действующей в точке  $C_P$ , определяется компонентами отрезка  $C_P C_A$ , деленными на его длину, которая равна величине контактного внедрения  $\Delta_n$ .

При анализе контакта конической поверхности каждого направляющего выступа и граничной окружности, лежащей в плоскости ответного кольца, для каждого отдельного отрезка образующей используется алгоритм, аналогичный рассмотренному в разделе 2. В этом алгоритме вместо последовательного перебора всех отрезков используется итерационный метод дихотомии [18], который в данном случае реализуется следующим способом.

На очередном шаге итерации для двух крайних и одного среднего аппроксимирующих отрезков текущего сектора с индексами  $i_B$ ,  $i_E$  и  $i_M$  соответственно определяются характерные расстояния от точек их пересечения с ответной окружностью до центра этой окружности. На первой итерации значения индексов крайних и среднего аппроксимирующих отрезков равны  $i_B = 1$ ,  $i_E = i_B + 2^N$ ,  $i_M = i_B + 2^{N-1}$ . Если характерные расстояния для всех трех точно равны между собой, то параметр контакта определяется для среднего, так как в этом случае ось аппроксимированной конической поверхности совпадает с осью ответной окружности. В противном случае из этих трех отрезков выбираются два с максимальными характерными расстояниями. Индексам  $i_B$  и  $i_E$  присваиваются новые значения, и сектор поиска сужается в два раза. Вычисляется индекс  $i_M = (i_B + i_E) / 2$  нового среднего отрезка, и осуществляется переход к следующей итерации. Процесс заканчивается, когда в секторе поиска разность индексов двух крайних образующих равна 1 и дальнейшее его деление пополам невозможно. Из двух оставшихся отрезков выбирается один с максимальным характерным расстоянием, для него определяются параметры контакта. Общее число шагов дихотомии не превышает  $N$ . Единственность решения обеспечивается выпуклыми формами фрагмента аппроксимированной конической поверхности направляющего выступа и ответной окружности. В систему координат пассивного агрегата преобразуются координаты исходных точек и параметры только тех аппроксимирующих активных отрезков, которые выбираются в процессе реализации метода дихотомии.

На рис. 14 показан упрощенный пример оценки возможности контакта граничной окружности (1) радиуса  $R_R$  и поверхности усеченного конуса с нижним (2) и верхним (3) основаниями. В нем выполняются три итерации для определения образующей (4) усеченного конуса, точка (5) пересечения которой с плоскостью окружности максимально удалена от центра этой окружности. Две крайние и средняя образующая в секторе поиска на  $k$ -й итерации ( $k = \overline{1, 3}$ ) имеют индексы  $i_B(k)$ ,  $i_E(k)$ ,  $i_M(k)$ . Характерные расстояния для них равны  $d_B(k)$ ,  $d_E(k)$ ,  $d_M(k)$  соответственно. Для следующей итерации выбираются



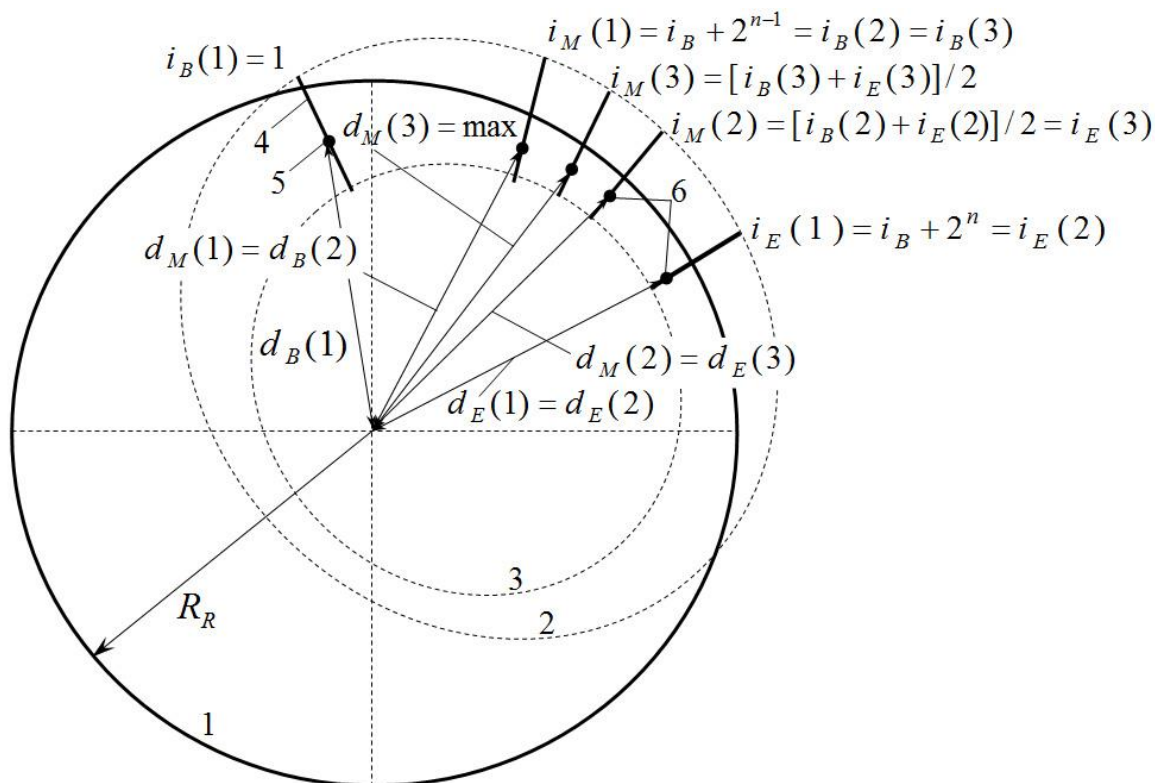


Рис. 14. Оценка возможности контакта усеченной конической поверхности и грани-окружности

две образующие с наибольшим удалением и определяется индекс новой средней между ними. На последней, третьей итерации наиболее удалены от центра окружности точки пересечения отрезков с индексами  $i_M(3)$  и  $i_E(3)$ , разность между которыми равна 1. При этом  $d_M(3) < d_E(3) < R_R$ , что указывает на отсутствие внедрения и, соответственно, точки контакта.

Длина образующих конических поверхностей направляющих выступов стыковочных колец монотонно изменяется в областях их наклонных боковых граней. Вследствие этого отрезки образующих в таких областях могут пересекать окружность, но их отрезки ограниченной длины не будут касаться плоскости этой окружности. Для оценки возможности контакта других отрезков в этом случае используется следующая модификация описанного выше алгоритма.

На первом этапе методом дихотомии определяется отрезок образующей с индексом  $i_{Max}$ , имеющий максимальное значение характерного расстояния  $d(i_{Max})$ . При  $d(i_{Max}) < R_R$  контакт направляющего выступа невозможен, и анализ завершается. В противном случае, если для отрезка с индексом  $i_{Max}$  параметр пересечения с плоскостью окружности удовлетворяет условию  $t_C(i_{Max}) \in [0, 1]$ , то вычисляются параметры контакта по описанному выше алгоритму для пары геометрических примитивов «отрезок прямой – граничная окружность».

При  $t_C(i_{Max}) > 1$  или  $t_C(i_{Max}) < 0$  точка пересечения образующей конуса с плоскостью окружности, наиболее удаленная от центра этой окружности, не принадлежит аппроксимирующему отрезку направляющего выступа. Но в этом случае возможен контакт соседних аппроксимирующих отрезков. Поэтому выполняется их последовательный просмотр в направлении, наиболее близком к возможности контакта. Длина отрезков образующих направляющего выступа может изменяться только монотонно, поэтому начиная с отрезка с индексом  $i_{Max}$  последовательно выбираются те, у которых при  $t_C(i_{Max}) > 1$  значение  $t_C$  убывает, а при  $t_C(i_{Max}) < 0$  возрастает. Контакт отсутствует, если

- для очередного отрезка  $t_C \in [0, 1]$ , но расстояние от точки его пересечения с плоскостью окружности до центра окружности меньше радиуса  $R_R$ ;
- просмотрен и не внедряется в окружность крайний (первый или последний) аппроксимирующий отрезок направляющего выступа.

Если для очередного отрезка образующей выполняется условие  $t_C \in [0, 1]$  и имеет место внедрение в окружность, то параметры его контакта определяются по описанным ранее в разделе 2 соотношениям для этой пары геометрических примитивов.

Описанный выше алгоритм требует значительно меньшего объема вычислений, чем простой перебор всех отрезков, аппроксимирующих коническую поверхность направляющего выступа.

Плоскость активного стыковочного кольца определяется шестью характерными точками (точки  $B_1$  и  $B_2$  для каждого направляющего выступа). При близких к нулю боковых и угловых рассогласованиях эти точки могут внедряться в плоскость пассивного кольца с параметрами  $A = 1$ ,  $B = C = D = 0$  в системе координат  $X_{PU}Y_{PU}Z_{PU}$  и радиусами-границами  $R_R$  и  $R_{R,max}$ . В этом случае возможен также контакт внутренней граничной окружности радиуса  $R_R$  с внешними отрезками боковых граней направляющих выступов ответного кольца. Алгоритмы анализа таких контактов рассмотрены ранее в разделе 2.

Инерция звеньев механизма защелок сопоставима с инерцией звеньев стыковочного механизма. Поэтому при расчете силы сопротивления каждой защелки до ее срабатывания используются система уравнений ее движения в форме Коши

$$\begin{cases} \dot{v}_{L,x} = (-k_L x_L - f_{L,0} + f_{R,L})/m_{L,x} \\ \dot{x}_{L,x} = v_{L,x} \end{cases},$$

где  $x_{L,x}, v_{L,x}$  – линейная осевая деформация пружины защелки и скорость изменения этой деформации соответственно;  $m_{L,x}$  – приведенная к перемещению масса звеньев механизма защелки;  $k_L, f_{L,0}$  – коэффициент жесткости и началь-

ная сила поджатия пружины защелки;  $f_{R,L}$  – контактная сила, действующая на защелку.

Для численного интегрирования системы уравнений защелки используется неявный метод Эйлера. Соответствующая разностная схема приводится к системе линейных алгебраических уравнений, матричная форма которой и решение имеют вид

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{hk_{L,x}}{m_{L,x}} \\ -h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{L,x}(t+h) \\ x_L(t+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{L,x}(t) + (f_{R,L}(t+h) - f_{L,0})h/m_{L,x} \\ x_L(t) \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{0,L} = 1 + \frac{h^2 k_{L,x}}{m_{L,x}}, \quad \Delta_{1,L} = v_{L,x}(t) + \frac{h}{m_{L,x}} [(f_{R,L}(t+h) - f_{L,0}) - k_{L,x} x_L(t)],$$

$$\Delta_{2,L} = x_L(t) + h [v_{L,x}(t) + (f_{R,L}(t+h) - f_{L,0})h/m_{L,x}],$$

$$v_{L,x}(t+h) = \Delta_{1,L} / \Delta_{0,L}, \quad x_L(t+h) = \Delta_{2,L} / \Delta_{0,L}.$$

Направляющие поверхности упоров, с которыми защелки контактируют до своего срабатывания, являются фрагментами усеченного конуса с радиусами оснований  $R_{Stop,min}$  и  $R_{Stop,max}$ . Через грани упоров проходит плоскость  $P_{Stop}$  с направляющим вектором  $\mathbf{n}_{P,Stop}$  (рис. 15). Контактная сила  $f_{R,L}$ , действующая на защелку до ее срабатывания, вычисляется следующим образом. Координаты

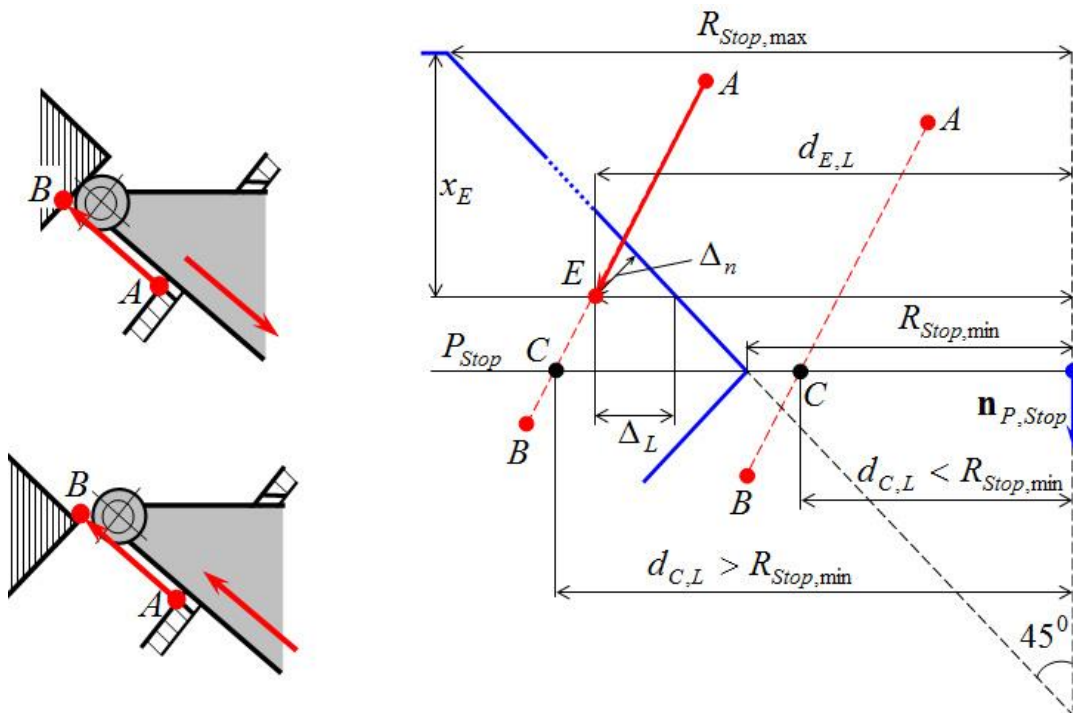


Рис. 15. Модель контакта защелки с направляющей поверхностью упора

исходной точки  $A$  защелки и параметры ее характерного отрезка преобразуются в систему координат  $X_P Y_P Z_P$  пассивного кольца, которая совпадает с системой  $X_{PU} Y_{PU} Z_{PU}$ . Определяется точка  $C$  пересечения этого характерного отрезка с плоскостью  $P_{Stop}$  и расстояние  $d_{C,L}$  от нее до оси  $X_{PU}$ . Если  $d_{C,L} < R_{Stop,min}$ , то защелка считается сработавшей, устанавливается соответствующий признак, блокирующий дальнейший расчет ее силы сопротивления, обусловленной пружинами. Если  $d_{C,L} > R_{Stop,min}$ , то вычисляются единичный вектор  $\mathbf{n}_L$  линии защелки, координаты ее конечной точки  $E = (x_E, y_E, z_E)$  с учетом текущей деформации  $x_{L,x}$  пружин механизма, расстояние  $d_{E,L}$  от этой точки до продольной оси агрегата. Так как угол образующей прямой конической поверхности упора равен  $45^0$ , то боковое и нормальное внедрения точки  $E$  в эту поверхность равны  $\Delta_L = d_{E,L} - (R_{Stop,max} - x_E)$  и  $\Delta_n = \Delta_L / \sqrt{2}$ . Контактная реакция, перпендикулярная к направляющей конической поверхности упора, равна  $f_n = k_{L,S} \Delta_n$ , где  $k_{L,S}$  – коэффициент контактной жесткости. Значение  $k_{L,S}$  может быть выбрано произвольно большим из-за малой жесткости пружин защелок. Единичный вектор контактной реакции равен  $\mathbf{n}_R = [1, y_E / d_{E,L}, z_E / d_{E,L}] / \sqrt{2}$ . Величина силы, сжимающей пружины защелки, равна  $f_{R,L} = \mathbf{n}_L^T \mathbf{n}_R f_n$ . На кольцо стыковочного механизма действует сила  $\mathbf{f}_{L,A} = -(k_L x_L + f_{L,0}) \mathbf{n}_L$  сопротивления пружин механизма несработавшей защелки, а на пассивный агрегат – сила, противоположная ей по направлению. Создаваемые этими силами моменты определяются положением точки  $E$  относительно центров стыковочных колец.

Силы и моменты сопротивления несработавших защелок вычисляются между шагами численного интегрирования явным методом уравнений динамики космических аппаратов и стыковочного механизма. Они входят в суммарные векторы сил и моментов контактного взаимодействия стыковочных агрегатов.

Если защелка сработала, то она контактирует с обратной, запирающей поверхностью упора. Контакты ее конечной точки или характерного отрезка могут иметь место порознь или одновременно. Для их определения координаты характерных точек  $A$  и  $B$  преобразуются в систему координат  $X_P Y_P Z_P$ , после чего определяются параметры отрезка  $AB$  (рис. 16).

Вычисляется боковое расстояние  $\Delta_{B,L} = d_{B,L} - (x_{Stop,top} - x_B)$  от точки  $B = (x_B, y_B, z_B)$  до продольной оси пассивного агрегата, где  $x_{Stop,top}$  – координата обратной конической поверхности упоров, характерная точка пассивного агрегата. Если  $\Delta_{B,L} < 0$ , то контакт конца защелки с упором отсутствует.

В противном случае вычисляется внедрение  $\Delta_n = \Delta_{B,L} / \sqrt{2}$  вдоль нормали к поверхности упора. Единичный вектор реакции в точке  $B$  контакта конца защелки имеет компоненты  $\mathbf{n}_R = [1, y_B / d_{B,L}, z_B / d_{B,L}] / \sqrt{2}$ .

Вычисляются координаты точки  $C = (x_C, y_C, z_C)$  пересечения характерного отрезка  $AB$  защелки с плоскостью  $P_{Stop}$ , проходящей через грани упоров, и расстояние от  $d_{C,L}$  этой точки до продольной оси агрегата. Если  $d_{C,L} < R_{Stop,min}$ , контакт отрезка защелки с упором отсутствует.

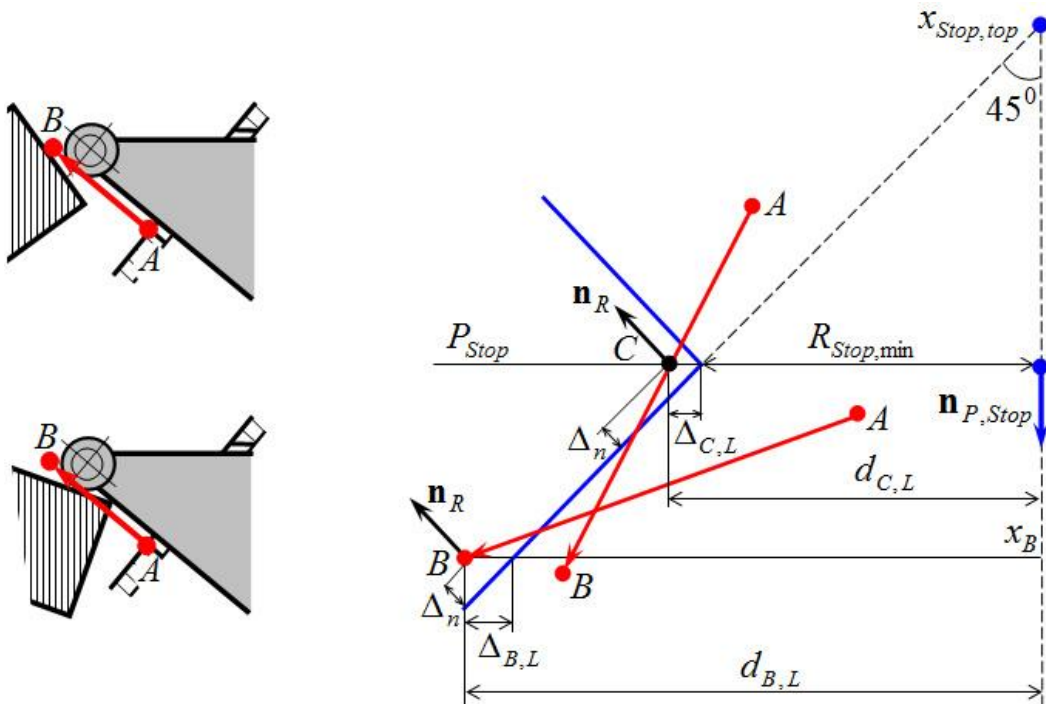


Рис. 16. Модель контакта защелки с запирающей поверхностью упора

В противном случае вычисляется боковое внедрение  $\Delta_{C,L} = d_{C,L} - R_{Stop,min}$  и внедрение  $\Delta_n = \Delta_{C,L} / \sqrt{2}$  вдоль нормали к поверхности упора. Единичный вектор реакции в точке  $C$  контакта отрезка защелки имеет компоненты  $\mathbf{n}_R = [1, y_C / d_{C,L}, z_C / d_{C,L}] / \sqrt{2}$ .

Звенья трех механических датчиков сцепки стыковочного механизма расположены рядом с основаниями конических поверхностей направляющих выступов и имеют сферическую поверхность, выступающую за плоскость кольца. Расчет их перемещений и сил сопротивления основан на контактной модели «сфера-плоскость» (рис. 6б).

Суммарные силы  $\mathbf{f}_{AR}^{(P)} = \mathbf{f}_{B,1}^{(P)}$  и моменты  $\mathbf{m}_{AR}^{(P)} = \mathbf{m}_{B,1}^{(P)}$ , действующие на активное кольцо, преобразуются в его систему координат  $X_{B,1}Y_{B,1}Z_{B,1} = X_A Y_A Z_A$  и входят в уравнения динамики стыковочного механизма. Суммарная сила  $\mathbf{f}_{PU}^{(P)}$ , действующая на пассивный агрегат, приводится к системе координат  $X_{C2}Y_{C2}Z_{C2}$  и преобразуется в систему координат  $X_I Y_I Z_I$ , а суммарный момент

$\mathbf{m}_{PU}^{(P)}$  преобразуется в систему  $X_{C2}Y_{C2}Z_{C2}$ . Они входят в уравнения динамики пассивного космического аппарата.

#### **4. Верификация и валидация математических моделей контактного взаимодействия**

Верификация контактной модели включает в себя проверку правильности выбора ее геометрических параметров, программной реализации алгоритмов и заданных начальных условий. Автономное тестирование программ осуществляется до их интеграции в общую модель процесса стыковки. На этом этапе практически нереально выявить все вероятные комбинации взаимодействия различных расчетных схем отдельных видов контактов. Поэтому тестирование предусмотрено также в процессе моделирования динамического процесса. В каждой отдельной моделирующей подпрограмме имеется возможность выдачи в файл в удобном формате данных обо всех ее параметрах. Для того чтобы сделать объем такого файла приемлемым для анализа, режим тестирования может включаться на любой сколь угодно короткий интервал времени, вплоть до отдельного шага интегрирования. В рамках этого интервала устанавливаются отдельные индикаторы, иницирующие тест любой конкретной подпрограммы. Если ненормальное завершение процесса моделирования происходит при выявлении самой подпрограммой нарушения предельных условий контакта или предельно допустимой величины внедрения, то на основе модельного времени наступления такого события и характера ошибки, фиксируемых в протоколе вычислительного процесса, можно выбрать интервал и индикаторы тестирования для повторного моделирования и анализа.

Обоснование соответствия компьютерной модели реальному процессу контактного взаимодействия обеспечивается ее валидацией – сопоставлением результатов моделирования с данными наземных, а также летных испытаний. Наземные испытания реализуются методом гибридного моделирования на б-ступенном динамическом стенде, в котором используются реальные стыковочные агрегаты. Один из них устанавливается неподвижно на измерительной платформе с тензометрическими датчиками сил, а второй – на подвижной платформе, позволяющей воспроизводить относительное поступательное и угловое движения агрегатов. Управляющий компьютер стенда обеспечивает обработку показаний датчиков сил, численное интегрирование с учетом этих сил дифференциальных уравнений относительного движения активного и пассивного космических аппаратов, управление подвижной платформой. В результате стыковочные агрегаты движутся и контактируют аналогично тому, как это происходит в реальном полете. Числовые данные испытаний сохраняются в виде зависимостей от времени измеренных сил и моментов контактного взаимодействия, показаний датчиков стыковочного механизма, вычисленных параметров относительного движения космических аппаратов.

Отдельные виды контактов наиболее наглядно проявляются при стыковке с использованием агрегатов центрального типа (рис. 17).

Процесс начинается с серии контактов головки штыря с приемным конусом (1), гранью (2) и дном (3) гнезда приемного конуса пассивного агрегата.

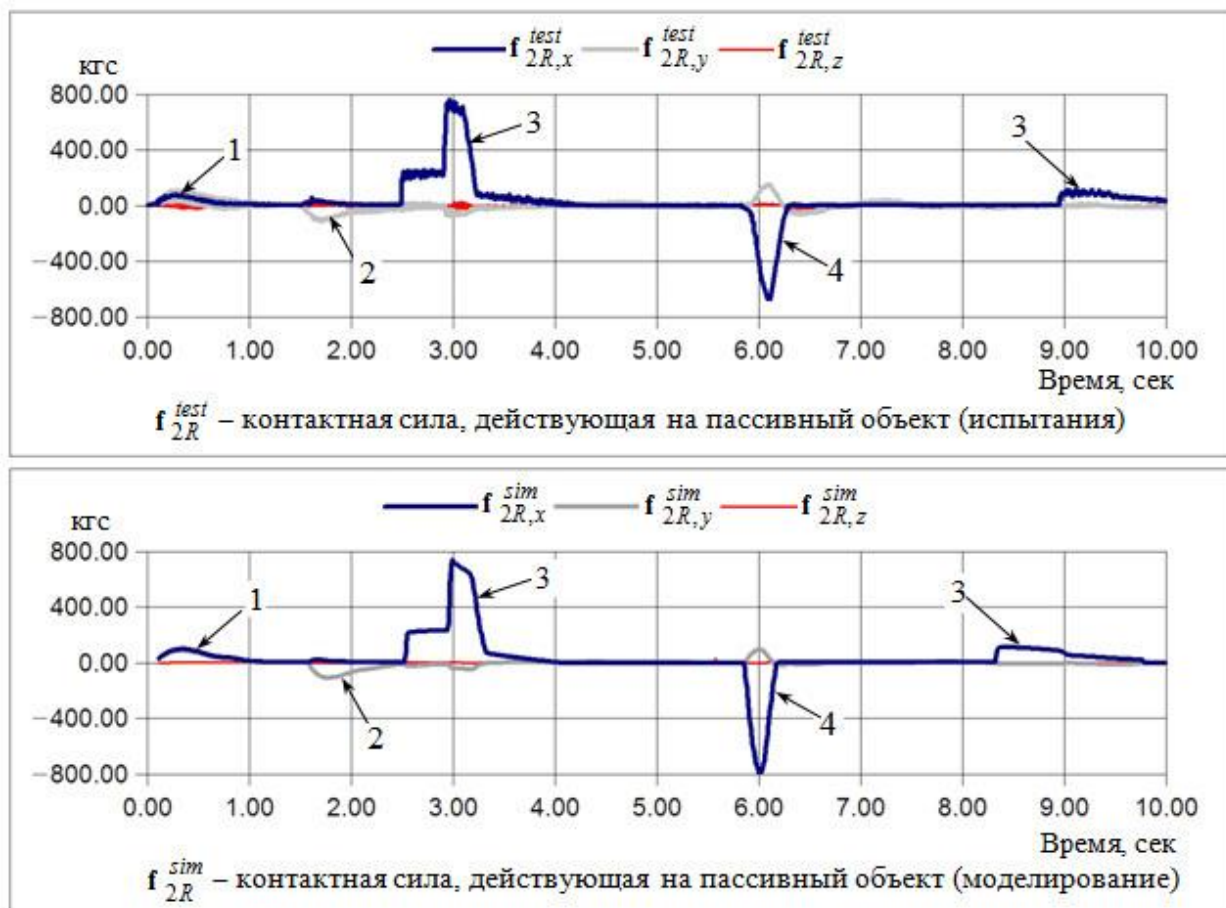


Рис. 17. Сопоставление контактных сил, полученных при испытаниях и компьютерном моделировании процесса стыковки с использованием стыковочных агрегатов центрального типа

При контакте головки с дном гнезда энергия осевого сближения активного космического аппарата поглощается сначала пружинным механизмом (меньший уровень осевой силы), а затем фрикционным тормозом (большой уровень) осевого демпфера стыковочного механизма. Освобождение накопленной в пружине потенциальной энергии вызывает обратное относительное осевое движение агрегатов и космических аппаратов, которому противодействует только небольшая сила трения головки и датчиков в приемном гнезде и которое заканчивается недемпфированным контактом (4) защелок головки штыря и упоров гнезда приемного конуса. В результате контактное взаимодействие стыковочных агрегатов характеризуется знакопеременной реакцией с постепенно уменьшающейся амплитудой.

В процессе реальной стыковки измеряется значительно меньшее число параметров, чем при наземных динамических испытаниях. При послеполетном анализе могут быть использованы только показания датчиков стыковочного механизма, измеренные угловые скорости космических аппаратов и видеоинформация. Сначала определяются приближенные оценки начальных условий движения на момент первого контакта активного и пассивного агрегатов, которые впоследствии многократно уточняются с использованием компьютерного моделирования. Итерации завершаются при приемлемом совпадении телеметрических данных со значениями, полученными в результате моделирования. В итоге получают восстановленные динамические параметры реального процесса стыковки.

## **Заключение**

В препринте представлен метод расчета относительного движения стыковочных агрегатов космических аппаратов, содержащий алгоритм вычисления реакций их контактного взаимодействия на основе определения направления и величины контактного внедрения. Метод позволяет моделировать динамику процесса стыковки без использования дифференциально-алгебраических уравнений. Формы направляющих элементов стыковочных агрегатов описываются наборами простых геометрических примитивов с точностью, достаточной для анализа динамического процесса стыковки. Простые аналитические выражения, определяющие условия и параметры контакта для конкретных пар примитивов, и метод дихотомии, используемый для проверки условий контакта поверхностей, аппроксимированных множеством простых примитивов, позволяют надежно определять все возможные точки контакта и направления контактных реакций. На этой методической основе разработаны вычислительно эффективные алгоритмы анализа контактного взаимодействия стыковочных агрегатов центрального и периферийного типов.

## **Библиографический список**

1. Gonthier Y. Contact dynamics modeling for robotic task simulation. A thesis of PhD dissertation, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 2007. – 217 p.
2. Чебаков М.И., Колосова Е.М., Наседкин А.В. Моделирование контактного взаимодействия тел с неоднородными по глубине механическими свойствами при наличии трения в зоне контакта. – Известия Самарского научного центра РАН, т. 13, № 4 (3), 2011. С. 1252 – 1255.
3. Hubbard P. Approximating polyhedra with spheres for time-critical collision detection // ACM Transactions on Graphics. 1996. Vol. 15, № 3, pp. 179 - 210.
4. Gottschalk. S, Lin M.C., Manocha D. OBBTree: A hierarchical structure for rapid interference detection, Computer Graphics // ACM Siggraph'96 Proceedings, 1996, pp.171-180.



5. Klosowski J., Held M., Mitchell J.S.B., Sowizral H., Zikan K. Efficient collision detection using bounding volume hierarchies of k-DOPs // *IEE Transactions on visualization and computer graphics*. 1998. Vol. 4, №. 1, pp. 21 - 36.
6. Moeller T. A fast triangle-triangle intersection test // *Journal of Graphics Tools*. 1997. Vol. 2, №. 2, pp. 25-30.
7. Tropp O., Tal A., Shimshoni I. A Fast Triangle to Triangle Intersection Test for Collision Detection // *Computer Animation and Virtual Worlds*. 2006. Vol. 17, no. 5, pp. 527-535.
8. Яскевич А.В. Комбинированные уравнения движения для описания динамики стыковки космических аппаратов с помощью системы «штырь-конус» // *Изв. РАН. Космические исследования*, 2007, том 45, №4, с. 325-336.
9. Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В. Компьютерное моделирование динамики стыковочных механизмов центрального типа для космических аппаратов // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2019. № 89. 33 с. doi:10.20948/prep-2019-59. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-89>.
10. Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В. Уравнения динамики периферийных стыковочных механизмов как параллельных манипуляторов // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2019. № 59. 33 с. doi:10.20948/prep-2019-59. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-59>.
11. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 3-е издание. Переработанное и дополненное / Ю.Ф. Голубев. – М.: Издательство Московского университета, 2019. – 728 с.
12. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: Учебник. В 2-х томах. Т. II.: Динамика. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 544 с.
13. Иванов А.П. Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Международная программа образования, 1997. – 336 с.
14. Petzold L.R. Computational challenges in mechanical system simulation, *Computer-Aided Analysis of rigid and flexible Mechanical Systems*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 483-499, 1994.
15. Ibrahim Z.B., Suleiman M., Othman K.I. Direct block backward differentiation formulas for solving second order ordinary differential equations // *Int. Journal of Mathematical, Physical, Electrical and Computer Engineering*, Vol. 2, No. 2, 2008, pp. 260-262.
16. Baumgarte J.W. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.1, 1-16, 1972.
17. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. / М.Я. Выгодский. – М.: Астрель: АСТ, 2008. – 991 с.
18. Самарский А.А. Введение в численные методы. Учебное пособие для вузов. Изд. 3-е, стер. СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 288 с.