ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 42 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Гавриков М.Б., Таюрский А.А.

Математическая модель магнитного торнадо

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Математическая модель магнитного торнадо // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 42. 36 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-42
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-42

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

Математическая модель магнитного торнадо

Москва — 2020

Гавриков М.Б., Таюрский А.А.

Математическая модель магнитного торнадо

В работе введено понятие магнитного торнадо в магнитогидродинамической плазме, для которого предложена математическая модель, опирающаяся на аппарат механики сплошных сред и электродинамики Максвелла. Рассмотрено масштабирование системы уравнений магнитного торнадо. На трёх конкретных примерах исследуется взаимное влияние динамики плазмы и магнитного поля и возможное возникновение магнитного торнадо. Особый интерес представляют результаты исследования взаимодействия плазмы и магнитного поля для движения плазмы вдоль магнитного поля. Изучена устойчивость течений плазмы типа торнадо и антиторнадо. Рассмотрены некоторые нерешённые вопросы по проблеме торнадо в атмосферном воздухе, имеющие отношение к магнитному торнадо.

Ключевые слова: математическая модель торнадо, магнитное торнадо, магнитное антиторнадо, метод установления, устойчивость, масштабирование, супер-торнадо, супер-антиторнадо

Mikhail Borisovich Gavrikov, Aleksei Aleksandrovich Taiurskii

Mathematical model of magnetic tornado

The concept of magnetic tornado in magnetohydrodynamic plasma is introduced, for which a mathematical model is proposed, based on the apparatus of continuum mechanics and Maxwell electrodynamics. The scaling of the system of equations of a magnetic tornado is considered. Using three specific examples, we study the mutual influence of plasma dynamics and the magnetic field and the possible occurrence of a magnetic tornado. Of particular interest are the results of a study of the interaction of the plasma and the magnetic field for the motion of the plasma along the magnetic field. The stability of plasma flows of the tornado and antitornado type was studied. Some unresolved issues on the problem of tornadoes in atmospheric air related to magnetic tornadoes are considered.

Key words: mathematical model of a tornado, magnetic tornado, magnetic anti-tornado, method of establishment, stability, scaling, super-tornado, super-anti-tornado

1. Введение

Явление торнадо представляет значительный интерес для исследователей, поскольку разрушительные последствия торнадо приводят к огромным убыткам и человеческим жертвам. На это указывает и русское название торнадо – “смерч”, однокоренное со словом “смерть”. На сегодняшний день, несмотря на почти сотню публикаций по проблеме торнадо (см. обзор в [1,2]), отсутствует общепринятое понимание причин возникновения торнадо и природы этого явления. В результате открывается широкое поле для математического моделирования процесса движения воздушных масс в торнадо. При этом ценность любой модели определяется прежде всего её способностью ответить на два основных вопроса:

- Где и когда могут возникнуть торнадо и какова их мощность?
- Какие меры необходимо предпринять для предотвращения возможного или нейтрализации уже случившегося торнадо?

В работах [2,3] была предложена простая математическая модель торнадо, позволяющая ответить на указанные выше и другие вопросы, связанные с проблемой торнадо. В настоящей работе сделаны первые шаги в исследовании влияния магнитного поля на процессы образования торнадо и движения атмосферных масс в торнадо. При этом считается, что среда, где возникает торнадо, проводит электрический ток и является плазмой, подчиняющейся МГД-теории Х. Альфвена [4]. Естественным приложением результатов исследования является анализ процесса образования торнадо на Солнце и солнцеподобных звёздах, актуального в ряде вопросов. Например, есть предположение [5], что за счёт энергии магнитного торнадо в хромо- и фотосферах на Солнце происходит аномальный разогрев солнечной короны до температуры в несколько миллионов градусов. Однако причины возникновения магнитного торнадо в плазме значительно разнообразнее, чем в атмосферном воздухе. Чтобы разумным образом сузить постановку задачи о магнитном торнадо, напомним ключевые положения работ [2,3].

Основное допущение, сделанное в [2,3], состоит в том, что явление торнадо обусловлено процессами и закономерностями течения воздушных масс, происходящими в приосевой области, “стволе” торнадо, а процессы на периферии ответственны, главным образом, за воздействие торнадо на внешнюю среду. Поэтому исходным пунктом работ [2,3] была очевидная чисто математическая констатация, что скорость U и давление p осесимметричного движения воздушных масс вблизи оси торнадо сколь угодно точно аппроксимируются в цилиндрических координатах ($z = 0$ – поверхность Земли) функциями вида:

$$U_r = rA(t,z), \quad U_\varphi = rB(t,z), \quad U_z = C(t,z), \quad p = Q(t,z)r^2 + \Phi(t,z), \qquad (*)$$

В некоторых важных задачах аппроксимирующие функции $(*)$ являются точными решениями уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, что позволяет дать решения этих задач. На это обратил впервые внимание Т. Карман [6], который, рассматривая задачу о нахождении стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости, расположенной над вращающимся с постоянной угловой скоростью бесконечным плоским диском и обусловленное вращением диска, показал, что в случае $\partial/\partial t \equiv 0$, $Q \equiv 0$ функции $(*)$, являющиеся точным решением стационарных уравнений вязкой несжимаемой жидкости, задают искомое течение. При этом зависимости $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, $\Phi(z)$ ищутся из решения некоторой краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) пятого порядка на полупрямой $0 \le z < +\infty$. Подробности см. в [7,8]. Согласно решению, найденному Т. Карманом, жидкость на бесконечности с постоянной вертикальной скоростью всасывается по направлению к вращающемуся диску, закручиваясь при этом вокруг его оси и растекаясь в радиальном направлении от оси диска. В частности, существует конечный предел и верно неравенство $\lim\limits_{z\to+\infty} C(z) < 0$. Течения такого типа, аналогичные движению воздуха в пылесосе или жидкости в насосе, будем называть ниже *антиторнадо*.

Ключевое наблюдение работ [2,3] состояло в том, что аппроксимация осесимметричных течений вида $(*)$, более точная, чем у Т. Кармана, с $Q(t,z) \equiv Q(t) \ne 0$ доставляет точные решения уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, среди которых при $Q(t) > 0$ могут быть течения типа *торнадо*: жидкость притекает вдоль радиуса к вертикальной оси, вращаясь вокруг неё, а затем выбрасывается вдоль вертикальной оси в бесконечность с постоянной скоростью. В частности, для стационарных течений существует предел и верно неравенство $\lim\limits_{z\to+\infty} C(z) > 0$. В [2,3] получена система нелинейных уравнений в частных производных, позволяющая найти функции $A(t,z)$, $B(t,z)$, $C(t,z)$, $\Phi(t,z)$, при этом $Q(t)$ задаётся. Наибольший интерес представляют стационарные течения вида $(*)$, которые находятся численным решением полученной в [2,3] системы нелинейных уравнений в частных производных методом установления. Причём считается, что при $z=0$ воздух в торнадо у поверхности Земли имеет постоянную угловую скорость вращения ω, обусловленную силой Кориолиса, а при $z=+\infty$ задана угловая скорость вращения Ω воздушных масс атмосферного вихря, связанная с константой Q, определяющей радиальный перепад давления периферия-центр торнадо, формулой $\Omega = (2Q/\rho)^{1/2}$, где ρ – плотность воздуха. Более того, как показано в [2,3], существует критическое (бифуркационное) значение радиального перепада давления $Q_{\text{кр}} = \frac{1}{2}\omega^2\rho$, разделяющее различные типы установившихся течений: при $Q > Q_{\text{кр}}$ установившееся течение имеет тип торнадо, а при

$0 \le Q < Q_{кр}$ – тип антиторнадо. При $Q = Q_{кр}$ установившееся течение сводится к вращению воздуха вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Как показывает спектральный анализ (см. ниже), это бифуркационное вращение устойчиво в линейном приближении. Случай $Q = 0$, $\partial / \partial t = 0$, как уже говорилось, был рассмотрен Т. Карманом, и наши результаты в этом случае, разумеется, совпадают с полученными Т. Карманом.

Итак, согласно работам [2,3], причиной возникновения торнадо являются:

- радиальный перепад давления Q периферия-центр торнадо в пользу периферии ($Q > 0$);
- наличие вихревого движения в верхних слоях атмосферы $z = +\infty$ с угловой скоростью Ω;
- жёсткая связь радиального перепада давления и угловой скорости вихря: $\Omega = (2Q / \rho)^{1/2}$;
- наличие вихревого вращения воздуха у поверхности Земли ($z = 0$) с угловой скоростью ω того же знака, что и Ω ($\omega \cdot \Omega > 0$).

При этом течения типа торнадо возникают только при $Q > \dfrac{1}{2}\omega^2\rho$.

Обратимся теперь к магнитным торнадо, апеллируя при этом к процессам в солнечной плазме. Поскольку Солнце – это огромный плазменный шар без чётко выраженных поверхности Солнца и солнечной атмосферы, необходимо уточнить, что понимается под магнитным торнадо на Солнце. Ниже магнитным торнадо будем называть стационарное течение солнечной плазмы, гидродинамические параметры которого обладают осевой симметрией относительно некоторой вертикальной прямой, а вертикальная скорость имеет конечный и положительный предел при $z \to +\infty$. Здесь z – координата на вертикальной прямой, под которой понимается любая прямая, проходящая через центр Солнца, причём точка $z = 0$ совпадает с солнечным центром. Природа магнитного торнадо в указанном выше смысле может быть различной. Например, если солнечная плазма в силу различных причин сжимается к некоторой вертикальной прямой с координатой z аксиально симметричным образом, то в возникающем z-пинче, как известно [9], имеет место эффект аномального ускорения частиц плазмы вдоль вертикальной оси, что приводит к появлению торнадо. В этой работе анализируется другой возможный механизм возникновения магнитного торнадо, обусловленный наличием плазменного вихря в фото- или хромосфере в плоскости, ортогональной некоторой вертикальной прямой, центр которого лежит на этой прямой и перепадом плазменного давления периферия-центр. (Различные обстоятельства, приводящие к появлению плазменного вихря, требуют особого обсуждения, например, к образованию вихря может привести электрический дрейф плазмы в скрещенных электромагнитных полях.) Согласно [2,3], перечисленные причины приводят к появлению гидродинамического торнадо, и ниже ставится цель –

исследовать влияние осесимметричного магнитного поля на это торнадо. Осесимметричное магнитное поле вблизи оси симметрии сколь угодно точно аппроксимируется функциями вида

$$H_r = rP(t,z), \quad H_\varphi = rS(t,z), \quad H_z = G(t,z). \qquad (**)$$

Как показано в [3], функции $(*)$ и $(**)$ дают точное решение уравнений несжимаемой электропроводной альфвеновской МГД, если функции A, B, C, Q, Φ, P, S, G являются решениями некоторой системы нелинейных уравнений в частных производных, названных ниже *уравнениями магнитного торнадо*. В [3] и ниже используется идея комплексификации уравнений магнитного торнадо, позволяющая в компактной форме записать эти уравнения относительно комплексных неизвестных $u = A + \mathrm{i}B$, $w = P + \mathrm{i}S$ и вещественных неизвестных функций C и G, при этом функции Q и Φ исключаются из числа неизвестных. Рядом авторов [10–12] проведены экспериментальное и численное исследования возбуждения плазмы вращающимся диском, имеющие прямое отношение к проблеме торнадо. В частности, в случае $\partial / \partial t = 0$ близкая к нашей система уравнений магнитного торнадо была предложена в [11,12].

Надёжно установленных экспериментальных фактов и теоретических результатов в проблеме магнитного торнадо в плазме намного меньше, чем в случае атмосферного воздуха Земли. Поэтому численное и аналитическое исследование магнитного торнадо упирается в неопределённость в постановке граничных условий и выборе чисел подобия для уравнений магнитного торнадо.

Ниже уравнения магнитного торнадо решаются точно в трёх частных случаях. Анализ решений показывает, что взаимодействие магнитного поля с плазмой торнадо приводит к ряду неожиданных эффектов. Например, торнадо возникает, если даже радиальный перепад суммарного давления (магнитного и гидродинамического) плазмы периферия-центр будет в пользу центра – суммарное давление на оси больше, чем на периферии, что, на первый взгляд, противоречит здравому смыслу. Проведённый анализ точных решений трёх рассмотренных ниже задач – важный и необходимый шаг теоретического осмысления проблем, возникающих при исследовании взаимодействия плазмы и магнитного поля применительно к явлению торнадо.

2. Уравнения магнитного торнадо

Рассмотрим динамику плазменной среды, подчинённой уравнениям классической МГД для несжимаемой вязкой плазмы с конечной проводимостью в постоянном гравитационном поле [13]:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{U} = 0, \quad \rho = \text{const},$$

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\mathrm{Div}\left(\rho\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}+\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)\mathrm{I}_3-\frac{\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}}{4\pi}\right)=2\mu\mathrm{Div}\mathrm{def}\boldsymbol{U}+\rho\boldsymbol{g},$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=0(\text{закон Фарадея}),\quad \mathrm{div}\boldsymbol{H}=0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma}-\frac{1}{c}[\boldsymbol{U},\boldsymbol{H}](\text{закон Ома}),\quad \boldsymbol{j}=\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}(\text{закон Ампера}),$$

где $\mu=\mathrm{const}$, $\sigma=\mathrm{const}$ – гидродинамическая вязкость и проводимость плазмы, $\boldsymbol{g}=\mathrm{const}$ – ускорение силы тяжести. Исключая $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{E}$ из числа неизвестных, получим уравнение для $\boldsymbol{H}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\left(\nu_{\mathrm{m}}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}-[\boldsymbol{U},\boldsymbol{H}]\right)=0,\quad \nu_{\mathrm{m}}=\frac{c^2}{4\pi\sigma},$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0, \tag{2}$$

где ν_m – магнитная вязкость, причём последнее равенство в (2) есть ограничение только на начальное значение напряжённости магнитного поля $\boldsymbol{H}$.

В осесимметричном случае, $\partial/\partial\varphi=0$, система (1) допускает частные решения вида:

$$U_r=rA(t,z),\quad U_\varphi=rB(t,z),\quad U_z=C(t,z),$$
$$p=r^2Q(t,z)+\varPhi(t,z), \tag{3}$$
$$H_r=rP(t,z),\quad H_\varphi=rS(t,z),\quad H_z=G(t,z),$$

где функции $A,B,C,P,S,G,Q,\varPhi$ подлежат нахождению. Интерес к решениям вида (3) продиктован двумя причинами. Во-первых, любое осесимметричное течение плазмы в магнитном поле вблизи оси симметрии z сколь угодно точно аппроксимируется функциями вида (3). Во-вторых, среди решений типа (3), как будет ясно ниже, содержатся течения типа торнадо. Для нахождения функций $A,B,C,\ldots,Q,\varPhi$, подставим соотношения (3) в (1). В работе [3] доказан следующий результат.

Теорема 1. *В случае осевой симметрии функции* (3) *при выполнении в каждый момент времени* t *“граничного” условия в некоторой фиксированной точке* z_0

$$\left.\left(2\nu_{\mathrm{m}}\frac{\partial P}{\partial z}-2CP+AG\right)\right|_{z=z_0}=0,\quad G(t,z_0)=\mathrm{const} \tag{4}$$

являются решением системы (1) *тогда и только тогда, когда комплексные функции* $u = A + \mathrm{i}B$, $w = P + \mathrm{i}S$ *и вещественные функции* C *и* G *удовлетворяют системе уравнений*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{G}{4\pi\rho}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 - \frac{w^2}{4\pi\rho} + \frac{2\gamma_0(t)}{\rho} = 0,$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t} + C\frac{\partial w}{\partial z} - G\frac{\partial u}{\partial z} - \nu_m\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \\ &\frac{\partial C}{\partial z} = -2\,\mathrm{Re}\,u, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -2\,\mathrm{Re}\,w, \end{aligned} \tag{5}$$

$$0 \le z < +\infty, \quad t \ge 0,$$

где $\gamma_0(t)$ – *произвольная вещественная функция. По решению системы* (5) *функция* Q *ищется из равенства*

$$Q = \gamma_0(t) - \frac{|w|^2}{8\pi} = \gamma_0(t) - \frac{P^2 + S^2}{8\pi}, \tag{6}$$

а производная $\partial\Phi / \partial z$ *однозначно находится из уравнения*

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C^2}{2} + \frac{2\mu}{\rho}\mathrm{Re}\,u + \frac{\Phi}{\rho} + gz\right) = 0. \tag{7}$$

Здесь Re – *символ вещественной части комплексного числа*.

Систему уравнений (5) назовём *уравнениями магнитного торнадо*, поскольку среди её решений, как станет ясно ниже, содержатся течения типа торнадо. Если граничное условие (4) не выполнено, то функции (3) удовлетворяют системе (1) тогда и только тогда, когда помимо системы (5) выполнено уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \nu_{\mathrm{m}}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + C\frac{\partial G}{\partial z} - G\frac{\partial C}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Тем самым система (5) делается переопределённой. Несложно показать [3], что левая часть уравнения (8) в силу уравнений системы (5) тождественно преобразуется к виду

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \nu_{\mathrm{m}}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + C\frac{\partial G}{\partial z} - G\frac{\partial C}{\partial z} \equiv \frac{\partial G}{\partial t} + 2\nu_{\mathrm{m}}\frac{\partial P}{\partial z} - 2(CP - AG)$$

и зависит только от переменной t. Поэтому при выполнении граничного условия (4) в некоторой точке z_0 дополнительное уравнение (8) соблюдается тождественно. В общем случае необходимо следить за соблюдением условия

(8) на решении системы (5). Если пожертвовать комплексификацией, то нетрудно получить замкнутую определённую систему уравнений в частных производных на функции A, B, C, P, S, G без граничного условия (4). Для этого надо, разделив вещественные и мнимую части в двух первых уравнениях системы (5), вернуться к вещественным неизвестным функциям $A, B, \ldots, G$. После этого вещественную часть второго уравнения системы (5), имеющую вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C\frac{\partial P}{\partial z} - G\frac{\partial A}{\partial z} - \nu_{\mathrm{m}}\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0,$$

необходимо заменить на уравнение (8), оставив все остальные уравнения системы (5) без изменений. Полученная система и является искомой [3]. Частный случай этой системы для $\partial / \partial t = 0$ был выписан в [11,12]. Для решения полученной системы необходимо поставить граничные условия на участвующие в ней неизвестные функции в точках $z = 0$ и $z = +\infty$. Оказывается, что во многих практически важных случаях для поставленных граничных условий в точке $z = 0$ будет автоматически выполняться для $z_0 = 0$ и граничное условие (4), и мы приходим к комплексной форме уравнений (5). Таким образом, **Теорема 1** несколько сужает запас решений системы (1), задаваемых функциями вида (3), но ниже мы ограничимся системой (4), (5), поскольку она охватывает практически важные случаи.

В безразмерном виде система (5) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial z} - M_{\mathrm{A}}^2 G\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 - M_{\mathrm{A}}^2 w^2 + \Gamma = 0,\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + C\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{R_{\mathrm{m}}}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - G\frac{\partial u}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial C}{\partial z} = -2\,\mathrm{Re}\,u, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -2\,\mathrm{Re}\,w,\\
&0 \le z < +\infty, \quad t \ge 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

где $R = \rho L_0 U_0 / \mu$, $R_{\mathrm{m}} = L_0 U_0 / \nu_{\mathrm{m}}$ – числа Рейнольдса (гидродинамическое и магнитное), $M_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{A}} / U_0$ – альфвеновское число Маха, $v_{\mathrm{A}} = H_0 / \sqrt{4\pi\rho}$ – альфвеновская скорость, L_0, H_0, U_0, – характерные значения длины, напряжённости магнитного поля и скорости, $\Gamma = \Gamma(t) = 2\gamma_0(t) t_0^2 / \rho$. При этом считается $t_0 = L_0 / U_0$. Граничное условие (4) в безразмерном виде перепишется в форме

$$\left.\left(\frac{1}{R_{\mathrm{m}}}\frac{\partial P}{\partial z} - CP + AG\right)\right|_{z=0} = 0, \quad G(t,0) = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Соотношение (6) в безразмерной форме примет вид

$$Q=\frac{1}{\beta}\left(\frac{\Gamma}{M_{\text{A}}^{2}}-|w|^{2}\right),\quad \beta=\frac{8\pi p_{0}}{H_{0}^{2}}-\text{параметр удержания,}\qquad (6')$$

где p_0 – характерный масштаб давления. Давление в безразмерном виде вычисляется по формуле

$$p=Qr^{2}+\Phi,\qquad (6'')$$

а безразмерное значение Φ находится из уравнения (7), принимающего безразмерный вид

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C^{2}}{2}+\frac{2\,\text{Re}\,u}{R}+\frac{\beta M_{\text{A}}^{2}}{2}\Phi+g_{0}z\right)=0,\qquad (7')$$

где $g_0 = L_0 g / U_0^2$ – безразмерное значение ускорения силы тяжести. Итак, решение зависит от четырёх безразмерных констант – чисел подобия R, R_{m}, M_{A}, β.

При этом решения системы (9) определяются тремя числами подобия M_{A}, R, R_{m}, а параметр удержания β необходим лишь для вычисления безразмерных значений Q и Φ по формулам $(6')$ и $(7')$. За счёт масштабирования зависимых и независимых переменных в системе (9) можно избавиться от чисел подобия M_{A}, R, R_{m}, получив равносильную (9) систему, куда входит только отношение $R_{\text{m}} : R$. Более того, можно избавиться и от параметра Γ в уравнениях (9), при этом возникает зависимость граничных условий от M_{A}, R и Γ. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Легко проверить следующие утверждения:

1) если $u = R\tilde{u}$, $w = R\tilde{w}$, $C = \tilde{C}$, $G = \tilde{G}$, $z = x / R$, $t = \tau / R$, то функции u, w, C, G от (t, z) удовлетворяют системе (9) тогда и только тогда, когда функции $\tilde{u}$, $\tilde{w}$, $\tilde{C}$, $\tilde{G}$ от (τ, x) удовлетворяют системе (9) (где x вместо z и τ вместо t) с $R = 1$, Γ / R^2 вместо Γ, R_{m} / R вместо R_{m};

2) если $\Gamma \neq 0$, $u = |\Gamma|^{1/2}\tilde{u}$, $w = |\Gamma|^{1/2}\tilde{w}$, $C = |\Gamma|^{1/4}\tilde{C}$, $G = |\Gamma|^{1/4}\tilde{G}$, $z = x|\Gamma|^{-1/4}$, $t = \tau|\Gamma|^{-1/2}$, то функции u, w, C, G от (t, z) удовлетворяют системе (9) тогда и только тогда, когда функции $\tilde{u}$, $\tilde{w}$, $\tilde{C}$, $\tilde{G}$ от (τ, x) удовлетворяют системе (9) (где x вместо z и τ вместо t) с 1 вместо Γ при $\Gamma > 0$ и (-1) вместо Γ при $\Gamma < 0$;

3) если $u=\tilde{u}$, $w=\tilde{w}/M_{\text{A}}$, $C=\tilde{C}$, $G=\tilde{G}/M_{\text{A}}$, $z=x$, $t=\tau$, то функции u, w, C, G от (t,z) удовлетворяют системе (9) тогда и только тогда, когда функции $\tilde{u}$, $\tilde{w}$, $\tilde{C}$, $\tilde{G}$ от $(\tau,x)=(t,z)$ удовлетворяют системе (9) с $M_{\text{A}}=1$.

Масштабирования 1)–3) можно комбинировать, в частности, применяя все три масштабирования одновременно приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть* $\varGamma\neq 0$ *и*

$$u=|\varGamma|^{1/2}\tilde{u},\quad w=\frac{|\varGamma|^{1/2}}{M_{\text{A}}}\tilde{w},\quad C=\frac{|\varGamma|^{1/4}}{R^{1/2}}\tilde{C},\quad G=\frac{|\varGamma|^{1/4}}{M_{\text{A}}R^{1/2}}\tilde{G},$$
$$z=\frac{x}{|\varGamma|^{1/4}R^{1/2}},\quad t=\frac{\tau}{|\varGamma|^{1/2}}. \tag{11}$$

Тогда функции u, w, C, G *от* (t,z) *удовлетворяют системе* (9) *с граничным условием* (10) *тогда и только тогда, когда функции* $\tilde{u}$, $\tilde{w}$, $\tilde{C}$, $\tilde{G}$ *от* (τ,x) *удовлетворяют системе*

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}+\tilde{C}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}-\tilde{G}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}-\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}+\tilde{u}^2-\tilde{w}^2\pm 1=0,\\
\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau}+\tilde{C}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}-\frac{R}{R_{\text{m}}}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}-\tilde{G}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x}=-2\operatorname{Re}\tilde{u},\quad \frac{\partial\tilde{G}}{\partial x}=-2\operatorname{Re}\tilde{w},\\
0\le x<+\infty,\quad \tau\ge 0
\end{gathered} \tag{12}$$

с граничным условием

$$\left.\left(\frac{R}{R_{\text{m}}}\frac{\partial\tilde{P}}{\partial x}-\tilde{C}\tilde{P}+\tilde{A}\tilde{G}\right)\right|_{x=0}=0,\quad \tilde{G}(\tau,0)=\text{const}, \tag{13}$$

где в (12) *знак* "$+$" *берётся, если* $\varGamma>0$ *и знак* "$-$", *если* $\varGamma<0$. *Если дополнительно* $Q=\dfrac{|\varGamma|}{M_{\text{A}}^2}\tilde{Q}$, $\varPhi=\dfrac{|\varGamma|^{1/2}}{RM_{\text{A}}^2}\tilde{\varPhi}$, $r=\dfrac{s}{|\varGamma|^{1/4}R^{1/2}}$, $p=\dfrac{|\varGamma|^{1/2}}{RM_{\text{A}}^2}\tilde{p}$, *то функции* p, Q, $\varPhi$ *удовлетворяют соотношениям* $(6')$, $(6'')$, $(7')$ *тогда и только тогда, когда функции* $\tilde{p}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{\varPhi}$ *удовлетворяют соотношениям*:

$$Q=\frac{1}{\beta}\left(1-|\tilde{w}|^2\right),\ \varGamma>0,\quad Q=-\frac{1}{\beta}\left(1+|\tilde{w}|^2\right),\ \varGamma<0,$$
$$\tilde{p}=\tilde{Q}s^2+\tilde{\varPhi},$$

$$\frac{\partial\tilde{C}}{\partial\tau}+\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x}\left(\frac{\tilde{C}^2}{2}+2\mathrm{Re}\,\tilde{u}+\frac{\beta}{2}\tilde{\Phi}+\tilde{g}_0 x\right)=0,$$

где $g_0=\tilde{g}_0|\Gamma|^{3/4}/R^{1/2}$. #

Система (12) зависит только от одного числа подобия R_m/R и не имеет свободных параметров (типа Γ в (9)). Однако числа подобия M_A, R и параметр Γ не исчезли, а переместились в граничные условия и коэффициенты растяжения независимых переменных. Это обстоятельство можно использовать для упрощения анализа решения краевых задач для системы (9). Пусть для простоты краевые условия стационарные и сводятся к фиксации значений неизвестных функций в граничных точках области изменения независимой переменной $z=0$ и $z=+\infty$ (которые, что принципиально важно, не меняются при масштабировании (11)). Тогда, зная краевые и начальные условия для системы (9), по формулам (11) вычисляем краевые и начальные условия для системы (12) и после решения полученной краевой задачи для системы (12) из функций $\tilde{u}$, $\tilde{w}$, $\tilde{C}$, $\tilde{G}$ обратным масштабированием по формулам (11) получаем искомое решение u, w, C, G исходной краевой задачи для системы (9). Очевидно, что систему (12), зависящую от одного параметра R_m/R, решать и исследовать проще, чем систему (9), зависящую от четырёх параметров R, R_m, M_A, Γ. Если краевая задача решается на установление, то начальное условие роли не играет, а при обратном масштабировании связь t и τ несущественна. Масштабирование сводит к тривиальной процедуре получение решения системы (9) по известному решению системы (12). Для этого, согласно (11), необходимо провести растяжение полученных из решения системы (12) профилей функций $\tilde{u}$, $\tilde{w}$, $\tilde{C}$, $\tilde{G}$ вдоль x и τ, а также вдоль ординат всех неизвестных функций в заданное число раз, определяемое числами подобия и параметром Γ по формулам (11).

Полученный в **Теореме 2** результат в случае $\Gamma=0$ дополняется следующим утверждением. *Пусть в* (9) $\Gamma=0$ *и*

$$u=R\tilde{u},\quad w=\frac{R}{M_\mathrm{A}}\tilde{w},\quad C=\tilde{C},\quad G=\frac{\tilde{G}}{M_\mathrm{A}},\quad z=\frac{x}{R},\quad t=\frac{\tau}{R}.$$

Тогда функции u, w, C, G *от* (t,z) *удовлетворяют системе* (9) *с граничным условием* (10) *тогда и только тогда, когда функции* $\tilde{u}$, $\tilde{w}$, $\tilde{C}$, $\tilde{G}$ *от* (τ,x) *удовлетворяют системе уравнений*:

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}+\tilde{C}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}-\tilde{G}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}-\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}+\tilde{u}^2-\tilde{w}^2=0,$$

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau}+\tilde{C}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}-\frac{R}{R_{\mathrm{m}}}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}-\tilde{G}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial\tilde{C}}{\partial x}=-2\,\mathrm{Re}\,\tilde{u},\quad \frac{\partial\tilde{G}}{\partial x}=-2\,\mathrm{Re}\,\tilde{w}$$

с граничным условием (13).

Система (9) упрощается для чисто мнимых функций $w(t,z)$. Тогда $G=0$, и мы имеем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+C\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+u^2-M_{\mathrm{A}}^2w^2+\mathit{\Gamma}=0,\\&\frac{\partial w}{\partial t}+C\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{R_{\mathrm{m}}}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial C}{\partial z}=-2\,\mathrm{Re}\,u.\end{aligned}\tag{14}$$

Эта система позволяет исследовать влияние чисто азимутального магнитного поля ($H_r=H_z=0$) на образование торнадо. При этом граничное условие (10) всегда выполнено.

3. Простые частные решения уравнений магнитного торнадо

При $M_{\mathrm{A}}=0$ система (9) распадается на две подсистемы – изученную в [3] систему уравнений торнадо

$$\frac{\partial u}{\partial t}+C\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+u^2+\mathit{\Gamma}=0,\quad \frac{\partial C}{\partial z}=-2\,\mathrm{Re}\,u,\quad 0\le z<+\infty,\quad t\ge 0\tag{15}$$

и уравнений для нахождения магнитного поля в движущейся плазме

$$\frac{\partial w}{\partial t}+C\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{R_{\mathrm{m}}}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-G\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial G}{\partial z}=-2\,\mathrm{Re}\,w,\quad 0\le z<+\infty,\quad t\ge 0,\tag{16}$$

причём при решении системы (16) функции $C(t,z)$, $u(t,z)$ уже известны. Система (15), (16) может быть использована для исследования вопроса о генерации магнитного поля в движущейся плазме в предположении $M_{\mathrm{A}}^2\ll 1$.

Решения граничной задачи для системы (15) могут относиться к типу торнадо только при $\mathit{\Gamma}\ge 0$. Согласно [3], при $\mathit{\Gamma}\ge 0$ для граничных условий

$$u(0)=\mathrm{i}\omega,\quad \omega\ge 0,\quad u(\infty)=\mathrm{i}\sqrt{\mathit{\Gamma}},\quad C(0)=0\tag{17}$$

система (15) всегда имеет установившееся решение, которое относится либо к типу торнадо – при $\mathit{\Gamma}>\mathit{\Gamma}_{\text{кр}}=\omega^2$, либо к типу антиторнадо – при $0\le\mathit{\Gamma}<\mathit{\Gamma}_{\text{кр}}$.

При $\Gamma=\Gamma_{\text{кр}}$ система (15) имеет точное стационарное решение $u_0(z)=\mathrm{i}\omega$, $C_0(z)=0$, удовлетворяющее граничным условиям (17) и задающее вращение воздуха вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Это бифуркационное вращение устойчиво в линейном приближении. Действительно, линеаризованная на решении u_0, C_0 система (15) имеет вид

$$\frac{\partial\tilde u}{\partial t}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\tilde u}{\partial z^2}+2u_0\tilde u=0,\quad \frac{\partial\tilde C}{\partial z}=-2\,\mathrm{Re}\,\tilde u, \tag{18}$$

где $\tilde u$, $\tilde C$ – малые возмущения точного решения u_0, C_0. Для применения спектрального метода исследования устойчивости перейдём к вещественным переменным $\tilde u=\tilde A+\mathrm{i}\tilde B$, тогда система (18) перепишется в виде

$$\frac{\partial\tilde A}{\partial t}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\tilde A}{\partial z^2}-2\tilde B\omega=0,\quad \frac{\partial\tilde B}{\partial t}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\tilde B}{\partial z^2}+2\tilde A\omega=0,\quad \frac{\partial\tilde C}{\partial z}=-2\tilde A. \tag{19}$$

Ищем нетривиальные решения последней системы вида $\tilde A=A\exp(\Omega t+\mathrm{i}kz)$, $\tilde B=B\exp(\Omega t+\mathrm{i}kz)$, $\tilde C=C\exp(\Omega t+\mathrm{i}kz)$, где $k\in\mathbb{R}$ – константа, $\Omega,A,B,C\in\mathbb{C}$ – константы, причём последние три одновременно не обращаются в нуль. Подставляя указанные решения в систему (19), получим систему линейных уравнений для нахождения комплексных амплитуд A,B,C:

$$A\left(\Omega+\frac{k^2}{R}\right)-2B\omega=0,\quad B\left(\Omega+\frac{k^2}{R}\right)+2A\omega=0,\quad \mathrm{i}kC+2A=0,$$

которая имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда её определитель обращается в нуль:

$$\mathrm{i}k\left[\left(\Omega+\frac{k^2}{R}\right)^2+4\omega^2\right]=0\underset{k\neq0}{\Leftrightarrow}\Omega=-\frac{k^2}{R}\pm2\mathrm{i}\omega\underset{k\neq0}{\Rightarrow}\mathrm{Re}\,\Omega<0.$$

Полученные дисперсионные соотношения между Ω и k, показывают, что любое возмущение решения u_0, C_0, пропорциональное $\sim e^{\mathrm{i}kz}$, экспоненциально затухает при $t\to+\infty$, причём коротковолновые возмущения ($k\gg1$) затухают быстрее длинноволновых ($k\ll1$). Но это и означает устойчивость бифуркационного вращения u_0, C_0 в линейном приближении.

Рассмотрим точное решение системы (14), являющейся частным случаем системы (9) для случая $w=\mathrm{i}S$, $S=\mathrm{const}$, и тем самым изучается влияние на торнадо стационарного азимутального магнитного поля $H_\varphi=rS$, $S=\mathrm{const}$, порождённое осевым однородным током. Тогда система (14) сводится к паре уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t}+C\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+u^2+M_{\text{A}}^2S^2+\varGamma=0,\quad \frac{\partial C}{\partial z}=-2\,\text{Re}\,u, \qquad (20)$$

которая отличается от системы (15) заменой параметра $\varGamma \to M_{\text{A}}^2S^2+\varGamma$. Учитывая сказанное в начале параграфа, для граничных условий

$$u(0)=\text{i}\omega,\quad \omega\ge 0,\quad u(\infty)=\text{i}\sqrt{\varGamma+M_{\text{A}}^2S^2},\quad C(0)=0$$

установившееся решение системы (20) при $M_{\text{A}}^2S^2+\varGamma>\omega^2$ является торнадо, а при $0\le M_{\text{A}}^2S^2+\varGamma<\omega^2$ – антиторнадо. Таким образом, бифуркационное критическое значение ω^2 при наличии азимутального магнитного поля $H_\varphi = rS$ уменьшается $\varGamma_{\text{кр}}=\omega^2-M_{\text{A}}^2S^2$ и может сместиться в отрицательную область при достаточно сильном азимутальном магнитном поле, $|S|>\omega/M_{\text{A}}$. В частности, при $\varGamma_{\text{кр}}<\varGamma<0$ установившееся решение является торнадо. Это, на первый взгляд, кажется удивительным, поскольку, согласно формулам (6) и ($6'$), величина $\varGamma$ определяет радиальный перепад периферия-центр суммарного (гидродинамического и магнитного) давления и при $\varGamma<0$ суммарное давление на оси больше, чем на периферии, и, значит, плазма, по идее, должна по радиусам растекаться от оси z. Поэтому ожидаемое установившееся течение должно быть антиторнадо. Это кажущееся противоречие объясняется тем, что указанное выше растекание плазмы от оси z сдерживается частично силой вязких напряжений и, что самое главное, силой Ампера $[\boldsymbol{j},\boldsymbol{H}]/c$. Для вычисления этой силы надо к градиенту полного давления добавить дивергенцию части пондеромоторного тензора $-\text{Div}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H})/(4\pi)$, которая имеет положительную r-ую компоненту, равную в безразмерном виде $M_{\text{A}}^2S^2$ и за счёт которой перевешивается отрицательный градиент полного давления и плазма в итоге течёт к оси z, инициируя возникновение торнадо. Итак, на этом простом примере видна важная роль магнитного поля в образовании торнадо – постоянное азимутальное магнитное поле, порождённое однородным током вдоль оси z, существенно влияет на образование торнадо, смещая бифуркационное значение параметра $\varGamma$ в сторону уменьшения вплоть до отрицательных величин.

Прежде чем рассмотреть следующую задачу, уточним некоторые понятия. Выше под торнадо (антиторнадо) понималось осесимметричное течение вида (3), для которого верны асимптотические, в смысле матанализа, соотношения $C(z)\sim C_\infty$, при $z\to+\infty$ с $C_\infty>0$ ($C_\infty<0$). Будем называть *циклон* (*антициклон*) осесимметричные течения вида (3), для которых $C(z)\sim kz^n$, $z\to+\infty$ с $n=\text{const}\ge 0$, $k=\text{const}>0$ ($k=\text{const}<0$). Числа k, n называются показателями циклона или антициклона. Чаще всего $n=1$. Такие решения, очевидно, существуют. Например, пусть w, u – любые комплексные константы, определённые с точностью до знака и связанные условием $u^2 = M_{\text{A}}^2 w^2 - \Gamma$. Тогда при $\operatorname{Re} u \neq 0$ функции $u(z) \equiv u$, $w(z) \equiv w$, $C(z) = -2\operatorname{Re} u \cdot z$, $G(z) = -2\operatorname{Re} w \cdot z$ дают точное решение системы (9), удовлетворяющее граничным условиям (10) и задающее либо циклон (для $\operatorname{Re} u < 0$), либо антициклон (для $\operatorname{Re} u > 0$).

Рассмотрим теперь влияние на течения плазмы вида (3) постоянного во времени, но неоднородного осесимметричного магнитного поля, задаваемое условиями $w = \text{const}$, $G = -2\operatorname{Re} w \cdot z$. Тогда система (9) имеет решение $u = u(t)$, $C(t,z) = -2\operatorname{Re} u \cdot z$, удовлетворяющее (вместе с w и G) граничному условию (10), где $u(t)$ находится из решения уравнения

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u^2 - M_{\text{A}}^2 w^2 + \Gamma = 0. \tag{21}$$

При $w \neq \pm\sqrt{\Gamma} / M_{\text{A}}$ решение (21) имеет вид [3]:

$$u(t) = -\sqrt{\Gamma - M_{\text{A}}^2 w^2}\,\mathrm{tg}\left[\sqrt{\Gamma - M_{\text{A}}^2 w^2}\,(t + \mathrm{i}R)\right],$$

где берётся одно из двух (неважно какое) значений корня, а $R \neq 0$ – произвольная вещественная константа. Учитывая, что

$$\mathrm{tgz} = \frac{\sin 2x + \mathrm{i}\,\mathrm{sh}2y}{\cos 2x + \mathrm{ch}2y}, \quad z = x + \mathrm{i}y$$

и обозначая $\sqrt{\Gamma - M_{\text{A}}^2 w^2} = a + \mathrm{i}b$, получим

$$\begin{aligned} u(t) = A(t) + \mathrm{i}B(t) = -\frac{a\sin 2(at - bR) - b\,\mathrm{sh}2(bt + aR)}{\cos 2(at - bR) + \mathrm{ch}2(bt + aR)} - \\ -\mathrm{i}\frac{a\,\mathrm{sh}2(bt + aR) + b\sin 2(at - bR)}{\cos 2(at - bR) + \mathrm{ch}2(bt + aR)}, \quad C(t,z) = -2A(t)z. \end{aligned} \tag{22}$$

Отсюда следует, что при $b \neq 0$ для любой константы R существуют пределы (не зависящие от R) и верны равенства:

$$b > 0: \begin{array}{l} u^{\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = b - \mathrm{i}a, \\ u_{\infty} = \lim\limits_{t\to-\infty} u(t) = -b + \mathrm{i}a, \end{array} \qquad b < 0: \begin{array}{l} u^{\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = -b + \mathrm{i}a, \\ u_{\infty} = \lim\limits_{t\to-\infty} u(t) = b - \mathrm{i}a. \end{array}$$

Эти формулы можно переписать в компактной форме:

$$u^{\infty} = \lim_{t\to+\infty} u(t) = \mathrm{i}\sqrt{\Gamma - M_{\text{A}}^2 w^2}, \quad u_{\infty} = \lim_{t\to-\infty} u(t) = -\mathrm{i}\sqrt{\Gamma - M_{\text{A}}^2 w^2},$$

где берётся значение корня с отрицательной мнимой частью. Предельные значения u^∞, u_∞ вместе с функциями $C^\infty(z) = -2\operatorname{Re}u^\infty \cdot z$, $C_\infty(z) = -2\operatorname{Re}u_\infty \cdot z$ (и функциями w и G) задают течения типа циклона (для u_∞, C_∞) или антициклона (для u^∞, C^∞), отличающиеся друг от друга только знаками. При $b = 0$ имеем

$$u(t) = -\frac{a\sin 2at}{\cos 2at + \operatorname{ch}2aR} - \mathrm{i}\frac{a\operatorname{sh}2aR}{\cos 2at + \operatorname{ch}2aR}. \tag{23}$$

Для любого $R \neq 0$ функция $u(t)$ определена на всей прямой, периодична с периодом π / a, но не имеет предельных значений $\lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t)$. Имеют место асимптотические равенства, выполненные равномерно по t на всей прямой:

$$R > 0:\ u(t) \underset{a\to\pm\infty}{\sim} \mp\mathrm{i}a, \quad R < 0:\ u(t) \underset{a\to\pm\infty}{\sim} \pm\mathrm{i}a.$$

Из соотношения $a + \mathrm{i}b = \sqrt{\Gamma - M_\mathrm{A}^2 w^2}$ следует, что условие $b = 0$ равносильно принадлежности w заштрихованным линиям (включающим круглые точки) на рис. 1.

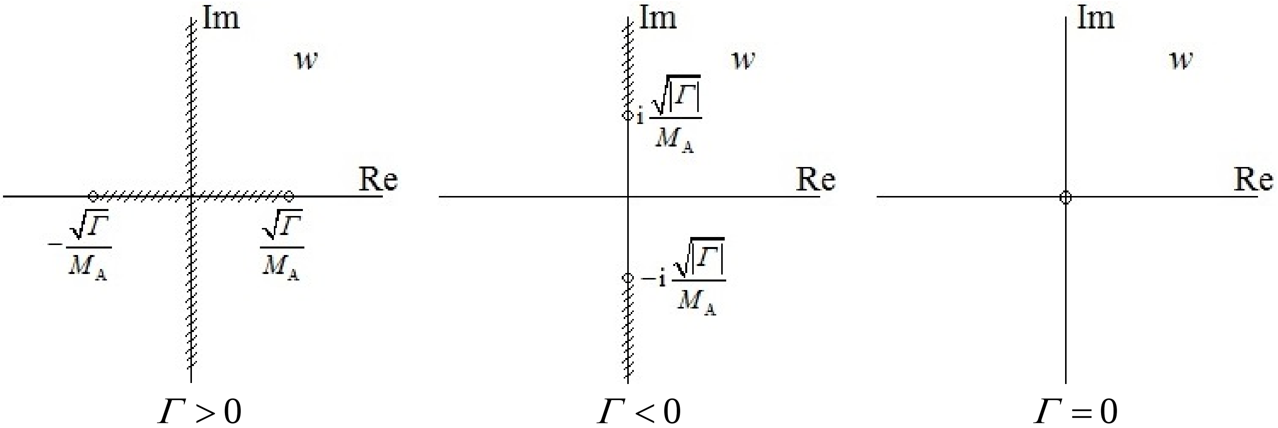

Рис. 1. Области существования установившихся течений.

При $w = \pm\sqrt{\Gamma} / M_\mathrm{A}$ (круглые точки на рис. 1) решение уравнения (21), определённое на всей прямой, задаётся формулой

$$u(t) = \frac{t - \mathrm{i}R}{t^2 + R^2}, \quad R \neq 0, \quad R \in \mathbb{R},$$

и при $t \to +\infty$ устанавливается к нулевому константному решению.

Подведём некоторой итог. При $\Gamma > 0$, в отсутствие магнитного поля ($w = 0$, $G = 0$), движение плазмы задаётся формулой (23) с $a = \sqrt{\Gamma}$, которая определяет семейство периодических кривых на прямой с общим периодом π / a. При появлении магнитного поля для w, не лежащего на заштрихованном “кресте” без круглых точек на рис. 1а, указанное семейство структурируется в следующем смысле – магнитное поле преобразует его в семейство функций, имеющих установление при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$, причём установившиеся течения относятся к циклону ($t = -\infty$) и антициклону ($t = +\infty$), а любая кривая структурированного семейства описывает трансформацию циклона в антициклон, когда t меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Эта трансформация задаётся формулой (22) и качественно может быть определена так. Сначала в некоторой окрестности точки $-\infty$ циклон переходит в квазипериодическое течение, являющееся комбинацией периодических функций и экспонент, из которого через определённое время в некоторой окрестности точки $+\infty$ возникает антициклон. Время существования квазипериодического течения тем больше, чем ближе w к заштрихованному “кресту” на рис. 1а. Если w попадает на заштрихованный “крест” (т.е. когда магнитное поле либо азимутальное, либо полоидальное), то течение задаётся семейством периодических кривых (23) и структурирование происходит только в пределе, при $|w| \to +\infty$. Тогда семейство периодических движений плазмы вырождается в периодическое вращение с огромной, теоретически бесконечной, угловой скоростью вокруг вертикальной оси.

Общий вывод из проведённого анализа состоит в том, что магнитное поле может кардинально изменить плазменное течение вида (3). Тот факт, что в присутствии магнитного поля разрушается циклон, порождая антициклон (а не наоборот), означает возможную неустойчивость течений типа циклон (см. ниже).

4. Стационарные торнадо, текущие вдоль магнитного поля

Известно, что интегрирование уравнений магнитной гидродинамики может быть сведено к интегрированию уравнений обычной гидродинамики в случае стационарных течений плазмы, когда магнитное поле и скорость параллельны друг другу (библиографию см. в [14]). Рассмотрим стационарные течения системы (9) с $R_{\mathrm{m}} = \infty$ (идеально проводящая плазма), для которых $w = ku$, $G = kC$, где $k \neq 0$ – постоянная вещественная константа. Для таких решений всегда выполнены граничные условия (10), а система (9) с учётом $\partial / \partial t = 0$ сводится к виду:

$$C\left(1-k^2M_{\mathrm{A}}^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2\left(1-k^2M_{\mathrm{A}}^2\right) + \mathit{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -2\,\mathrm{Re}\,u. \tag{24}$$

При $k^2M_{\mathrm{A}}^2 < 1$ (слабое магнитное поле) заменой

$$C = \frac{\tilde{C}}{\sqrt{1-k^2M_{\mathrm{A}}^2}}, \quad z = \frac{x}{\sqrt{1-k^2M_{\mathrm{A}}^2}}, \quad \tilde{\mathit{\Gamma}} = \frac{\mathit{\Gamma}}{1-k^2M_{\mathrm{A}}^2} \tag{25}$$

система (24) сводится к виду

$$\tilde{C}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u^2+\tilde{\Gamma}=0,\quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}=-2\,\mathrm{Re}\,u, \tag{26}$$

который совпадает с системой (15) при $\partial/\partial t=0$.

При $k^2M_\text{A}^2>1$ (сильное магнитное поле) заменой (где черта – комплексное сопряжение)

$$C=-\frac{\tilde{C}}{\sqrt{k^2M_\text{A}^2-1}},\quad z=\frac{x}{\sqrt{k^2M_\text{A}^2-1}},\quad u=-\bar{v},\quad \tilde{\Gamma}=\frac{\Gamma}{k^2M_\text{A}^2-1} \tag{27}$$

система (24) приводится к виду

$$\tilde{C}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v^2-\tilde{\Gamma}=0,\quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}=-2\,\mathrm{Re}\,v, \tag{28}$$

который отличается от системы (15) при $\partial/\partial t=0$ только заменой параметра $\Gamma\to-\Gamma$.

В пограничном случае $k^2M_\text{A}^2=1$ имеем

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\Gamma=0,\quad \frac{\partial C}{\partial z}=-2\,\mathrm{Re}\,u,$$

откуда, интегрируя, получим

$$\begin{aligned} &u(z)=\frac{1}{2}R\Gamma z^2+K_0z+K_1,\quad K_0,K_1\in\mathbb{C}-\text{любые},\\ &C(z)=-\frac{1}{3}R\Gamma z^3-(\mathrm{Re}\,K_0)z^2-2(\mathrm{Re}\,K_1)z+K_3,\quad K_3\in\mathbb{R}-\text{любое}. \end{aligned} \tag{28$'$}$$

Поскольку при $z\to+\infty$ имеем $u(z)\sim\frac{1}{2}R\Gamma z^2$, $C(z)\sim-\frac{1}{3}R\Gamma z^3$, то пограничное течение является циклоном для $\Gamma<0$ и антициклоном для $\Gamma>0$.

Случай слабого магнитного поля ($k^2M_\text{A}^2<1$)**.** Рассмотрим решение системы (24) для $\Gamma\ge 0$ с естественными граничными условиями:

$$u(0)=\mathrm{i}\omega,\quad \omega>0,\quad u(\infty)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\Gamma}{1-k^2M_\text{A}^2}},\quad C(0)=0. \tag{29}$$

Это решение получается из решения $u(x)$, $\tilde{C}(x)$ краевой задачи для системы (26) с $\tilde{\Gamma}\ge 0$ и краевыми условиями $u(0)=\mathrm{i}\omega$, $\omega>0$, $u(\infty)=\mathrm{i}\sqrt{\tilde{\Gamma}}$, $\tilde{C}(0)=0$ посредством формул масштабирования (25). Согласно [2,3], с указанными граничными условиями задача (26) разрешима и решение имеет тип торнадо для $\tilde{\Gamma}_{\text{кр}} = \omega^2 < \tilde{\Gamma}$ и тип торнадо для $0 \le \tilde{\Gamma} < \tilde{\Gamma}_{\text{кр}}$ (при $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_{\text{кр}}$ решение имеет вид $u(x) \equiv \mathrm{i}\omega$, $\tilde{C}(x) \equiv 0$). Поэтому граничная задача (24), (29) разрешима для $\Gamma \ge 0$ и для $\Gamma_{\text{кр}} = \omega^2(1 - k^2 M_{\text{A}}^2)$ верно утверждение: при $0 \le \Gamma < \Gamma_{\text{кр}}$ решение имеет тип антиторнадо, а при $\Gamma_{\text{кр}} < \Gamma$ – тип торнадо. Это решение можно сравнить для данного $\Gamma \ge 0$ с решением $u_0(z)$, $C_0(z)$ краевой задачи (24), (29) с $k = 0$, т.е. в отсутствие магнитного поля.

Случай сильного магнитного поля ($k^2 M_{\text{A}}^2 > 1$)**.** Рассмотрим решение системы (24) для $\Gamma \le 0$ с естественными граничными условиями

$$u(0) = \mathrm{i}\omega, \quad \omega > 0, \quad u(\infty) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\Gamma}{k^2 M_{\text{A}}^2 - 1}}, \quad C(0) = 0. \tag{30}$$

Это решение получается из решения $v(x)$, $\tilde{C}(x)$ краевой задачи для системы (28) с $\tilde{\Gamma} \le 0$ и краевыми условиями $v(0) = \mathrm{i}\omega$, $\omega > 0$, $v(\infty) = \mathrm{i}\sqrt{|\tilde{\Gamma}|}$, $\tilde{C}(0) = 0$ посредством формул масштабирования (27). Согласно [2,3], с указанными граничными условиями задача (28) разрешима и решение имеет тип торнадо для $\tilde{\Gamma} < -\omega^2$ и тип торнадо для $-\omega^2 < \tilde{\Gamma} \le 0$ (при $\tilde{\Gamma} = -\omega^2$ решение имеет вид $v(x) \equiv \mathrm{i}\omega$, $\tilde{C}(x) \equiv 0$). Поэтому граничная задача (24), (30) для $\Gamma \le 0$ разрешима и для $\Gamma_{\text{кр}} = -\omega^2(k^2 M_{\text{A}}^2 - 1)$ верно утверждение: при $0 \ge \Gamma > \Gamma_{\text{кр}}$ решение имеет тип торнадо, а при $\Gamma_{\text{кр}} > \Gamma$ – тип антиторнадо.

Полученные результаты собраны на следующей диаграмме.

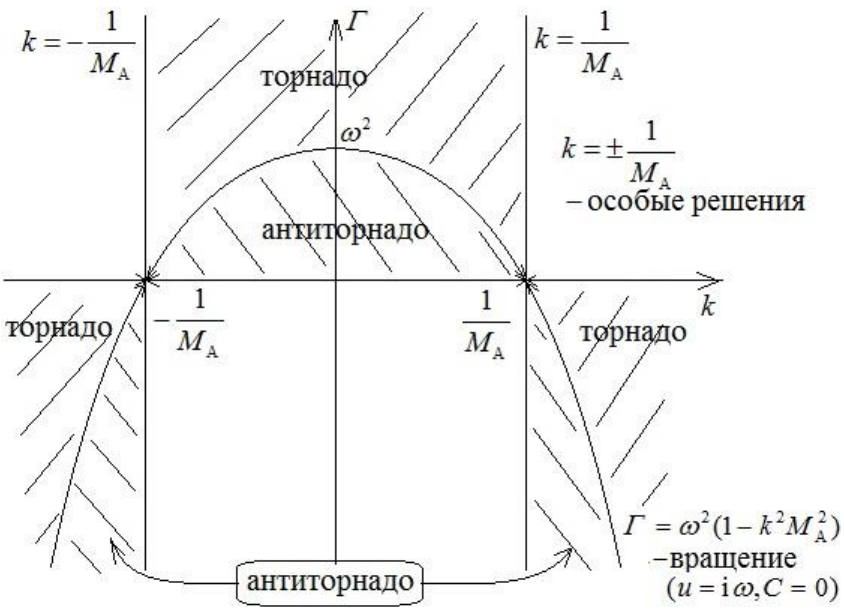

Рис. 2. Типы стационарных течений в зависимости от Γ и k.

Диаграмма на рис. 2 наглядно демонстрирует ограниченность и неудовлетворительность наших знаний о решении краевых задач для системы (15). Во-первых, анализ решений относится только к случаю $\varGamma \geq 0$ и краевым условиям вида $u(0) = \mathrm{i}\omega$, $\omega > 0$, $u(\infty) = \mathrm{i}\sqrt{\varGamma}$, $C(0) = 0$. Если условия на бесконечности можно считать естественными, то условия в точке $z = 0$ мотивированы учётом силы Кориолиса и не являются бесспорными. Что будет в случае общего краевого условия $u(0) = u_0 \in \mathbb{C}$? Будет ли краевая задача для системы (15) иметь стационарное решение и если “да”, то не появятся ли новые типы решений, отличные от торнадо и антиторнадо? Если новых типов решений нет, то для каких $\varGamma \in [0, +\infty)$ решение краевой задачи будет иметь тип торнадо, а для каких – тип антиторнадо (например, будут ли течения типа торнадо и антиторнадо разделяться некоторым критическим значением $\varGamma_{\text{кр}}$, как выше – если да, то парабола на рис. 2 заменится на более сложную кривую $\varGamma_{\text{кр}}(k)$)? Во-вторых, остаётся открытым вопрос, какие типы стационарных течений существуют при $\varGamma < 0$? Для его решения надо поставить граничные условия для системы (15). Граничное условие на бесконечности очевидно, $u(\infty) = \pm\sqrt{|\varGamma|}$, а постановка граничных условий в нуле требует дополнительного исследования. Если $u(\infty) = \pm\sqrt{|\varGamma|}$, то мы вправе рассчитывать на линейную асимптотику на бесконечности $C(z) \sim kz$, $z \to +\infty$ и, значит, должны получить решения типа циклон ($k > 0$) или типа антициклон ($k < 0$). Оказывается, однако, что знаки “$\pm$” в граничном условии на бесконечности неравноправны. На рис. 3 приведены установившиеся решения системы (15) для $\varGamma = -1$ и граничных условий $u(0) = \pm\mathrm{i}$, $u(\infty) = 1 = \sqrt{|\varGamma|}$, $C(0) = 0$, полученные численно.

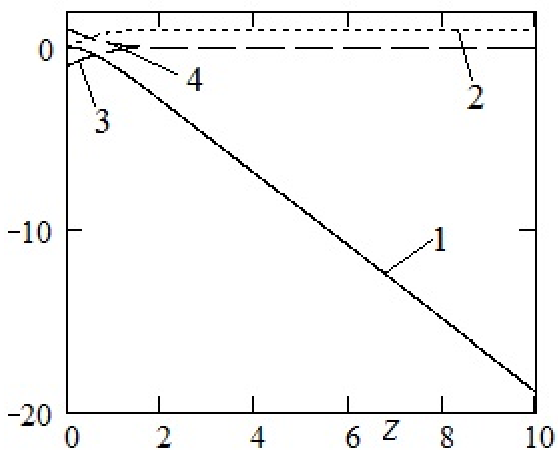

Рис. 3. Установившиеся решения системы (15) для $\varGamma = -1$ и граничных условий $u(0) = \pm\mathrm{i}$, $u(\infty) = 1 = \sqrt{|\varGamma|}$, $C(0) = 0$: 1 – $C(z)$, 2 – $\mathrm{Re}\,u(z)$, 3 – $\mathrm{Im}\,u(z)$ для $u(0) = -\mathrm{i}$, 4 – $\mathrm{Im}\,u(z)$ для $u(0) = \mathrm{i}$.

Эти решения имеют тип антициклон, поскольку скорость $C(z)$ для больших z линейно убывает в область отрицательных значений. Однако, как показали расчёты, для граничных условий $u(0)=\pm\mathrm{i}$, $u(\infty)=-1$, $C(0)=0$ установления решения нет. Это означает, что с указанными граничными условиями стационарная краевая задача (15) решений не имеет и, значит, течение типа циклон, которым должно являться решение указанной краевой задачи, вследствие условия $u(\infty)=-1$ не имеет место. Вероятное объяснение эффекта состоит в неустойчивости течений типа циклон (см. ниже).

Вернёмся к диаграмме на рис. 2, отражающей взаимодействие магнитного поля со стационарными течениями плазмы рассматриваемого вида. Нулевое магнитное поле соответствует оси $k=0$ на рис. 2, однако типы стационарных течений известны только для верхней положительной полуоси $k=0$, $\Gamma\geq 0$. В полном объёме роль магнитного поля мешают выяснить два обстоятельства. Во-первых, три белых пятна на рис. 2 – а) $k>1/M_{\mathrm{A}}$, $\Gamma>0$, б) $k<-1/M_{\mathrm{A}}$, $\Gamma>0$, в) $|k|<1/M_{\mathrm{A}}$, $\Gamma<0$, для которых типы и классификация стационарных течений неизвестны. Во-вторых, переход от верхней полуоси $\Gamma\geq 0$, $k=0$ с нулевым магнитным полем и известными стационарными течениями к заштрихованным областям $\Gamma\leq 0$ на рис. 2 требует пересечения бифуркационных прямых $k=\pm 1/M_{\mathrm{A}}$, которые задают пятимерное вещественное многообразие решений $(28')$ системы (15). При пересечении бифуркационных прямых, как правило, происходит качественная перестройка стационарных решений, и новые решения (для $k^2M_{\mathrm{A}}^2>1$) “забывают” структуру старых (для $k^2M_{\mathrm{A}}^2<1$). Исключением является случай, когда бифуркационные прямые пересекаются в точках $\Gamma=0$, $k=\pm 1/M_{\mathrm{A}}$. Тогда формулы $(28')$ при соблюдении левого граничного условия и ограниченности приводят к выражениям $u_0(z)=\mathrm{i}\omega$, $C_0(z)=0$, которые задают предельные (при $k^2\to 1/M_{\mathrm{A}}^2-0$) значения решений краевой задачи (24), (29) для $\Gamma=0$ и совпадают с бифуркационным вращением плазмы вокруг оси z с угловой скоростью ω. Действительно, решение краевой задачи (24), (29) для $\Gamma=0$ и $k^2M_{\mathrm{A}}^2<1$ имеет вид $u(z)=u_{\mathrm{Kar}}(z\sqrt{1-k^2M_{\mathrm{A}}^2})$, $C(z)=C_{\mathrm{Kar}}(z\sqrt{1-k^2M_{\mathrm{A}}^2})/\sqrt{1-k^2M_{\mathrm{A}}^2}$, где u_{Kar}, C_{Kar} – решение краевой задачи (24), (29) при $k=0$, $\Gamma=0$, полученное Карманом [7,8]. Нетрудно проверить, что решение $u(z)$, $C(z)$ поточечно на $[0,+\infty)$ (и равномерно на любом конечном отрезке) сходится к функциям $u_0(z)$, $C_0(z)$, что и утверждалось. Как следствие, все три кривые (бифуркационные прямые $k=\pm 1/M_{\mathrm{A}}$, ось $\Gamma=0$ и бифуркационная парабола $\Gamma=\omega^2(1-k^2M_{\mathrm{A}}^2))$ на рис. 2 пересекаются в двух общих точках, переходя через которые и опускаясь далее по бифуркационной параболе, мы из верхней заштрихованной области попадаем в нижнюю, не забывая структуру стационарных решений.

Таким образом, существуют критические значения $\pm 1/M_{\text{А}}$ параметра k, определяющего величину магнитного поля. В зависимости от k магнитное поле ответственно за следующие эффекты:

- слабое магнитное поле в $1-k^2M_{\text{А}}^2$ раз уменьшает критическое значение параметра $\Gamma \ge 0$, разделяющего течения типа торнадо и типа антиторнадо, в частности, при данном $\Gamma > 0$ и $k^2M_{\text{А}}^2 \to 1-0$ течения типа антиторнадо исчезают, переходя в течения типа торнадо;
- при $\Gamma = 0$ и $|k| \to 1/M_{\text{А}} \pm 0$ течения типа антиторнадо поточечно на полупрямой $[0,+\infty)$ сходятся к течению $u_0(z) = \mathrm{i}\omega$, $C_0(z) = 0$, задающему равномерное вращение плазмы вокруг оси z с угловой скоростью ω, а при $|k| \to +\infty$ функции $C(z)$, $\mathrm{Re}\,u(z)$ равномерно на $[0,+\infty)$ сходятся к 0, а $\mathrm{Im}\,u(z)$ поточечно сходится к разрывной функции, равной ω при $z = 0$ и нулю в остальных точках;
- при $\Gamma > \omega^2$, как минимум, в $1/\sqrt{1-k^2M_{\text{А}}^2}$ раз возрастает вертикальная скорость торнадо на бесконечности по сравнению с такой же скоростью в незамагниченной плазме; вертикальная скорость на бесконечности $C(\infty)$ для торнадо монотонно возрастает и при $|k| \to 1/M_{\text{А}} - 0$ стремится к $+\infty$ со скоростью не менее $1/\sqrt{1-k^2M_{\text{А}}^2}$;
- при переходе $|k|$ через критическое значение $1/M_{\text{А}}$ течение типа торнадо возникает в сильно замагниченной плазме, в которой суммарное давление на оси больше, чем на периферии; при данном $\Gamma < 0$ и $|k| \to 1/M_{\text{А}} + 0$ течение типа торнадо исчезает, переходя в течение типа антиторнадо с вертикальной скоростью на бесконечности $C(\infty)$, монотонно стремящейся к $-\infty$, причём со скоростью не менее $(k^2M_{\text{А}}^2 - 1)^{-1/2}$, а при $|k| \to +\infty$ течение типа антиторнадо исчезает, переходя в течение типа торнадо с вертикальной скоростью на бесконечности, стремящейся к нулю, в частности, сильное магнитное поле препятствует появлению течений типа торнадо;
- происходит генерация вертикального магнитного поля на бесконечности, $H_z(\infty) = kC(\infty)$, причём $|H_z(\infty)| \to +\infty$ при $|k| \to 1/M_{\text{А}}$ и $H_z(\infty) \to \dfrac{\operatorname{sgn} k}{M_{\text{А}}}|C_{\text{Kar}}(\infty)|$ при $|k| \to +\infty$;
- в слабом магнитном поле происходит усиление (для торнадо) и ослабление (для антиторнадо) в $\sqrt{\Gamma/\Gamma_{\text{кр}}}$ раз азимутального магнитного поля на бесконечности $H_\varphi(\infty)$ по сравнению с азимутальным магнитным полем при $z = 0$; в сильном магнитном поле, наоборот, происходит ослабление (для

торнадо) и усиление (для антиторнадо) в $\sqrt{|\Gamma|/|\Gamma_{\text{кр}}|}$ раз $H_\varphi(\infty)$ по сравнению с $H_\varphi(0)$.

Заметим, что для $\Gamma=0$ и $|k|\to 1/M_{\text{A}}-0$ значение $C(\infty)$ сходится к $-\infty$, а при $|k|\to 1/M_{\text{A}}+0$ – к $+\infty$.

Рассмотрим вопрос об устойчивости течений типа циклон и антициклон. Отбрасывая граничные условия в точке $z=0$, исследуем устойчивость решений системы (15) для $\Gamma<0$ вида

$$u_0^{\pm}(z)\equiv\pm\sqrt{|\Gamma|},\quad C_0^{\pm}(z)=-2u_0^{\pm}z=\mp 2\sqrt{|\Gamma|}z. \tag{31}$$

Ограничимся исследованием устойчивости решений (31) в линейном приближении. Линеаризуем систему (15) на решении $u_0^{\pm}$, $C_0^{\pm}$, для чего подставим в систему (15) выражения $u_0^{\pm}+\tilde{u}$, $C_0^{\pm}+\tilde{C}$, где $\tilde{u}$, $\tilde{C}$ – малые добавки, которые в каждый момент времени считаются ограниченными на $[0,+\infty)$ по z функциями. Выполняя действия и оставляя только линейные по $\tilde{u}$, $\tilde{C}$ члены, получим для нахождения малых добавок систему линеаризованных уравнений:

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}-2u_0^{\pm}z\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2}+2u_0^{\pm}\tilde{u}=0,\quad \frac{\partial\tilde{C}}{\partial z}=-2\operatorname{Re}\tilde{u}. \tag{32}$$

Поскольку для $\operatorname{Re}\tilde{u}$ и $\operatorname{Im}\tilde{u}$ первое уравнение системы (32) даёт одно и то же соотношение, достаточно исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial t}-2u_0^{\pm}z\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2u_0^{\pm}u=0,\quad \frac{\partial C}{\partial z}=-2u, \tag{33}$$

где $u(t,z)$, $C(t,z)$ – вещественные, ограниченные на $[0,+\infty)$ по z при каждом фиксированном t функции. Простейший приём – применение спектрального признака устойчивости с учётом принципа “замороженных” коэффициентов. Суть этого подхода в следующем. Фиксируем $z=z_*\in[0,+\infty)$ в системе (33) (“замораживаем” коэффициенты). Тогда получается система с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-2u_0^{\pm}z_*\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2u_0^{\pm}u=0,\quad \frac{\partial C}{\partial z}=-2u. \tag{34}$$

Ищем нетривиальное решение системы (34) вида $u=U\exp(\omega t+\mathrm{i}kz)$, $C=D\exp(\omega t+\mathrm{i}kz)$, где $k\in\mathbb{R}$, $\omega,U,D\in\mathbb{C}$, причём два последних числа (называемые комплексными амплитудами) не равны нулю одновременно. Подставляя эти функции в систему (34), получим, что нетривиальное решение указанного вида существует тогда и только тогда, когда ω и k связаны (дисперсионным) соотношением:

$$\omega = \omega(k) = -\left(\frac{k^2}{R} + 2u_0^{\pm}\right) + 2u_0^{\pm} z_* \mathrm{i}k. \tag{35}$$

При этом $U \neq 0$ – любое, $D = 2\mathrm{i}U / k$. Согласно принципу “замороженных” коэффициентов, *для устойчивости нулевого решения системы* (33) *необходимо, чтобы* $\mathrm{Re}\,\omega(k) \leq 0$ *для любого* $k \in \mathbb{R}$ *и для всех “замороженных” коэффициентов системы* (33), *т.е. для любого* $z_* \geq 0$. Для $\omega(k)$, вычисляемого по дисперсионному уравнению (35), это необходимое условие, очевидно, выполнено при $u_0^+ > 0$, т.е. для антициклона, и не выполнено для $u_0^- < 0$, т.е. для циклона. В последнем случае для любого $z_* \geq 0$ из дисперсионного уравнения (35) имеем:

$$\mathrm{Re}\,\omega(k) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{k^2}{R} - 2\sqrt{|\Gamma|} \geq 0 \Leftrightarrow |k| \geq (2R)^{1/2} |\Gamma|^{1/4}.$$

Это означает, что циклон устойчив относительно коротковолновых возмущений $\sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$ с длиной волны $2\pi / |k| \leq 2\pi (2R)^{-1/2} |\Gamma|^{-1/4}$ и неустойчив относительно наиболее важных длинноволновых возмущений с длиной волны $> 2\pi (2R)^{-1/2} |\Gamma|^{-1/4}$. Следовательно, физическая и численная реализуемость течений типа циклон находится под вопросом.

Поскольку выше отсутствовало обоснование принципа “замороженных” коэффициентов применительно к системе (33), рассмотрим другой способ исследования устойчивости нулевого решения системы (33). Ищем решение системы (33) в виде

$$u = \mathrm{e}^{\omega t} U(z), \quad C = \mathrm{e}^{\omega t} D(z), \tag{36}$$

где $\omega \in \mathbb{R}$, а $U(z)$, $D(z)$ определены на $[0, +\infty)$ и называются *модами*. Нас интересуют решения (33) вида (36) с ограниченными модами. Мода $D(z)$ выражается через моду $U(z)$ по формуле

$$D(z) = -2\int U(z)\mathrm{d}z, \tag{37}$$

а мода $U(z)$ является решением дифференциального уравнения 2-го порядка с коэффициентами, зависящими от ω:

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2} + 2u_0^{\pm} z \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} - (\omega + 2u_0^{\pm})U = 0, \tag{38}$$

пространство решений которого $\mathscr{L}(\omega)$ двумерное и тоже зависит от ω.

Определение. Нулевое решение системы (33) (решение $u_0^{\pm}$, $C_0^{\pm}$ системы (15)) называется:

1) *неустойчивым* (в линейном приближении), если для любого $\omega \le 0$ пространство ограниченных мод $U \in \mathscr{L}(\omega)$ с ограниченным неопределённым интегралом (37) имеет нулевую размерность;
2) *устойчивым* (в линейном приближении), если для любого $\omega \ge 0$ пространство ограниченных мод $U \in \mathscr{L}(\omega)$ с ограниченным неопределённым интегралом (37) имеет нулевую размерность;
3) *условно устойчивым* (в линейном приближении), если для любого $\omega < 0$ пространство ограниченных мод $U \in \mathscr{L}(\omega)$ с ограниченным неопределённым интегралом (37) имеет ненулевую размерность.

Основной результат содержится в теореме.

Теорема 3. 1) *Решение* u_0^-, C_0^- (*циклон*) *неустойчиво в линейном приближении*. 2) *Решение* u_0^+, C_0^+ (*антициклон*) *условно устойчиво в линейном приближении*.

Доказательство. Перепишем уравнение (38) в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}z^2} + 2u_0^{\pm} Rz \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} - (\omega + 2u_0^{\pm}) RU = 0.$$

Рассмотрим случай верхнего знака, и пусть $u_0 = u_0^+ > 0$. Заменой $z = x / \sqrt{u_0 R}$ сведём полученное уравнение к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} + 2x \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + AU = 0, \quad A = -\left(2 + \frac{\omega}{u_0}\right), \tag{39}$$

а заменой $U = V\mathrm{e}^{-x^2/2}$ последнее уравнение сводится к равенству:

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = \left(x^2 + 1 - A\right)V.$$

Наконец, заменой $x = s / \sqrt{2}$ приходим к окончательному результату – *уравнению Вебера* [15]:

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}s^2} = \left(\frac{s^2}{4} + a\right)V, \quad a = \frac{1 - A}{2}.$$

Воспользуемся следующим свойством решений уравнения Вебера [15]: найдутся линейно независимые решения $V_1(s)$, $V_2(s)$, образующие базис в пространстве всех решений уравнения Вебера, для которых верны эквивалентности (в смысле матанализа)

$$V_1(s) \sim s^{-a-1/2} \mathrm{e}^{-s^2/4}, \quad V_2(s) \sim s^{a-1/2} \mathrm{e}^{s^2/4}, \quad s \to +\infty.$$

Производя обратные замены, получим, что найдётся базис $U_1(x)$, $U_2(x)$ в пространстве решений уравнения (39), для которого верны эквивалентности

$$U_1(x) \sim 2^{-1-\omega/(4u_0)} x^{-2-\omega/(2u_0)} \mathrm{e}^{-x^2}, \quad U_2(x) \sim 2^{1/2+\omega/(4u_0)} x^{1+\omega/(2u_0)}, \quad x \to +\infty.$$

Отсюда следует, что для любого $\omega \in \mathbb{R}$ и, в частности, для $\omega < 0$ одномерное пространство решений уравнения (39), натянутое на функцию U_1, состоит из ограниченных функций с ограниченным неопределённым интегралом. Значит, решение u_0^+, C_0^+ условно устойчиво в смысле данного выше определения.

Рассмотрим теперь случай нижнего знака и, обозначив $u_0 = -u_0^- > 0$ заменой $z = x / \sqrt{u_0 R}$, сведём уравнение (38) к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}x^2} - 2x \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + AU = 0, \quad A = 2 - \frac{\omega}{u_0}. \tag{40}$$

Заменой $U = V\mathrm{e}^{x^2/2}$ последнее уравнение приводится к тождеству

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = \left(x^2 - 1 - A\right)V,$$

из которого заменой $x = s / \sqrt{2}$ получаем снова уравнение Вебера

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}s^2} = \left(\frac{s^2}{4} + a\right)V, \quad a = -\frac{1+A}{2}.$$

Используя указанное выше свойство решений уравнения Вебера, приходим к следующему результату: найдётся базис $U_1(x)$, $U_2(x)$ в пространстве решений уравнения (40), для которого верны эквивалентности

$$U_1(x) \sim 2^{1/2-\omega/(4u_0)} x^{1-\omega/(2u_0)}, \quad U_2(x) \sim 2^{-1+\omega/(4u_0)} x^{-2+\omega/(2u_0)} \mathrm{e}^{x^2}, \quad x \to +\infty.$$

Отсюда следует, что при $\omega \le 0$ функции $U_1(x)$, $U_2(x)$ не являются ограниченными на $[0, +\infty)$, равно как и любая их линейная комбинация. Поэтому пространство $\mathscr{L}(\omega)$ состоит из неограниченных функций и, значит, в силу данного выше определения решение u_0^-, C_0^- неустойчиво. Теорема доказана. #

5. Дополнительные результаты и комментарии

В этом параграфе рассмотрены рекомендации по исследованию некоторых важных нерешённых задач, связанных с проблемой торнадо.

Выбор граничных условий в точке $z=0$**.** Как отмечалось в §3, физическая мотивация выбора левого граничного условия в точке $z=0$, апеллирующая к силе Кориолиса, является неубедительной. В то же время от этого выбора существенно зависят типы стационарных течений, если они существуют. Рассмотрим поучительный пример, относящийся к системе (15) и $\Gamma \geq 0$. Тогда для граничных условий $u(0)=\mathrm{i}$, $u(\infty)=\mathrm{i}\sqrt{\Gamma}$, $C(0)=0$, как известно [2,3], существует критическое значение $\Gamma_{\text{кр}}=1$, для которого при $0 \leq \Gamma < \Gamma_{\text{кр}}$ установившееся течение существует и имеет тип антиторнадо, а при $\Gamma > \Gamma_{\text{кр}}$ установившееся течение существует и имеет тип торнадо. Изменим теперь левое граничное условие:

$$u(0)=-1+\mathrm{i}, \quad u(\infty)=\mathrm{i}\sqrt{\Gamma}, \quad C(0)=0.$$

Тогда, как показало численное исследование, происходит смещение критического значения $\Gamma_{\text{кр}} \cong 0.325$ – для $\Gamma \geq 0$ установившееся течение существует и имеет тип антиторнадо при $0 \leq \Gamma < \Gamma_{\text{кр}}$ и тип торнадо при $\Gamma > \Gamma_{\text{кр}}$. В таблице приведены значения вертикальной скорости на бесконечности $C(\infty)$ для конкретных Γ.

Таблица 1

Значение вертикальной скорости $C(\infty)$ для различных Γ

Γ	0.1	0.3	0.325	0.326	0.5	1	1.5	1.9	4
$C(\infty)$	-0.451	-0.037	-0.0003	0.001	0.216	0.608	0.854	1.001	1.482

Графики на рис. 4 демонстрируют профили $C(z)$, $\mathrm{Re}\,u(z)$, $\mathrm{Im}\,u(z)$ установившихся течений для различных значений Γ.

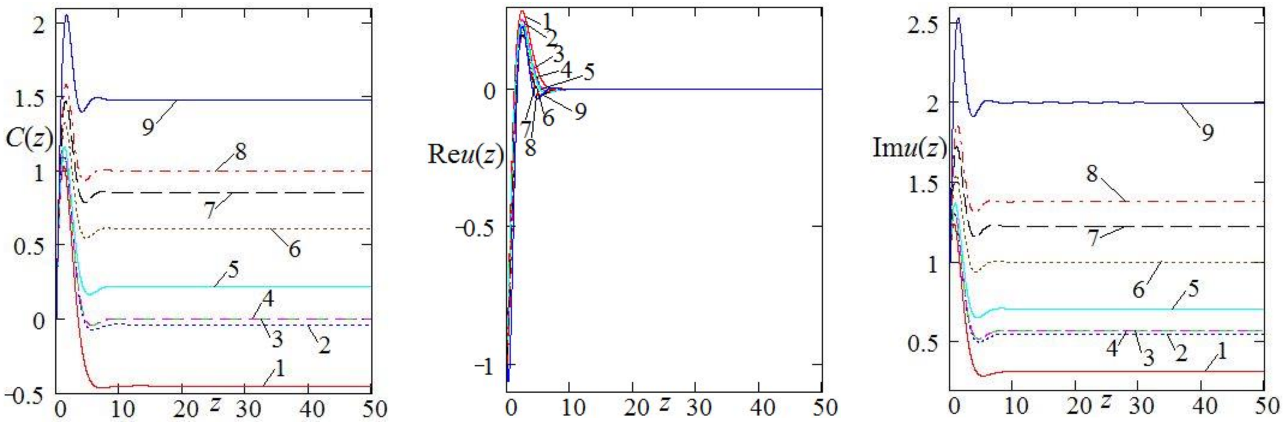

Рис. 4. Установившиеся Профили $C(z)$, $\mathrm{Re}\,u(z)$, $\mathrm{Im}\,u(z)$ в зависимости от Γ: 1 – $\Gamma=0.1$, 2 – $\Gamma=0.3$, 3 – $\Gamma=0.325$, 4 – $\Gamma=0.326$, 5 – $\Gamma=0.5$, 6 – $\Gamma=1$, 7 – $\Gamma=1.5$, 8 – $\Gamma=1.9$, 9 – $\Gamma=4$.

Теперь бифуркационное течение, определяемое условием $C(\infty)=0$, реализуемое при $\Gamma=\Gamma_{\text{кр}}$ и разделяющее течения типа торнадо и типа антиторнадо, не имеет, по видимому, аналитического описания и должно находиться численно.

Исследование зависимости стационарных течений для общих граничных условий вида

$$u(0)=u_0\in\mathbb{C},\quad u(\infty)=\mathrm{i}\sqrt{\Gamma},\quad C(0)=0,\quad \Gamma\geq 0 \tag{41}$$

от левого граничного условия u_0 можно упростить, используя следующее масштабирование применительно к системе (9). Пусть $\omega>0$ и

$$u=\omega\tilde{u},\quad w=\omega\tilde{w},\quad C=\sqrt{\omega}\tilde{C},\quad G=\sqrt{\omega}\tilde{G},\quad z=x/\sqrt{\omega},\quad t=\tau/\omega. \tag{42}$$

Тогда функции u, w, C, G от (t,z) удовлетворяют системе (9) с граничным условием (10) тогда и только тогда, когда функции $\tilde{u}$, $\tilde{w}$, $\tilde{C}$, $\tilde{G}$ от (τ,x) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau}+\tilde{C}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}-M_{\mathrm{A}}^2\tilde{G}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}+\tilde{u}^2-M_{\mathrm{A}}^2\tilde{w}^2+\frac{\Gamma}{\omega^2}=0,\\ \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau}+\tilde{C}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x}-\tilde{G}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}-\frac{1}{R_{\mathrm{m}}}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial\tilde{C}}{\partial x}=-2\operatorname{Re}\tilde{u},\quad \frac{\partial\tilde{G}}{\partial x}=-2\operatorname{Re}\tilde{w}\end{gathered}$$

с граничным условием

$$\left.\left(\frac{1}{R_{\mathrm{m}}}\frac{\partial\tilde{P}}{\partial x}-\tilde{C}\tilde{P}+\tilde{A}\tilde{G}\right)\right|_{x=0}=0,\quad \tilde{G}(\tau,0)=\mathrm{const},$$

где $\tilde{u}=\tilde{A}+\mathrm{i}\tilde{B}$, $\tilde{w}=\tilde{P}+\mathrm{i}\tilde{S}$.

Указанное масштабирование позволяет понизить размерность задачи при исследовании зависимости установившихся решений краевых задач для системы (9) от граничных условий. Для чисто гидродинамического случая ($w=0$, $G=0$) рассмотрим краевую задачу (15), (41) для $u_0\neq 0$, $u_0=|u_0|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Согласно указанному выше масштабированию, её решения получаются из решений краевой задачи (15), (43)

$$u(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\quad u(\infty)=\mathrm{i}\sqrt{\Gamma}\left|u_0\right|^{-1},\quad C(0)=0,\quad \Gamma\geq 0 \tag{43}$$

растяжением зависимых и независимых переменных, согласно формулам (42). С учётом сказанного возникает следующая программа действий. Необходимо для каждого $\varphi\in[0,2\pi]$ найти множество тех $\Gamma\geq 0$, для которых система (15) с краевыми условиями $u(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $u(\infty)=\mathrm{i}\sqrt{\Gamma}$, $C(0)=0$ имеет установившиеся решения, определить типы этих решений и их зависимость от Γ. Например, если для данного φ будет показано существование установившегося решения указанной краевой задачи для любого $\Gamma \geq 0$ и наличие критического $\Gamma_{\text{кр}} = \Gamma_{\text{кр}}(\varphi) > 0$, для которого при $0 \leq \Gamma < \Gamma_{\text{кр}}(\varphi)$ установившееся течение имеет тип антиторнадо, при $\Gamma_{\text{кр}}(\varphi) < \Gamma$ имеет тип торнадо, то для граничного условия (41) верно следующее заключение. Для $\Gamma > \Gamma_{\text{кр}}(\varphi)|u_0|^2$ установившееся течение существует и имеет тип торнадо, для $0 \leq \Gamma < \Gamma_{\text{кр}}(\varphi)|u_0|^2$ установившееся течение существует и имеет тип антиторнадо. Выше для $\varphi = 3\pi/4$ эта работа была выполнена и найдено значение $\Gamma_{\text{кр}}(3\pi/4) \cong 0.325/2 = 0.1625$. Следует подчеркнуть, что установившиеся течения для краевых условий $u(0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $u(\infty) = \mathrm{i}\sqrt{\Gamma}$, $C(0) = 0$ существуют не для всех φ – в [2,3] было установлено, что для $\varphi = 3\pi/2$ установившихся течений для указанных краевых условий нет. Кроме того, теоретически могут появиться новые типы установившихся течений, отличные от торнадо и антиторнадо. Поэтому область определения функции $\Gamma_{\text{кр}}(\varphi)$ неизвестна и также подлежит нахождению. Сформулированная программа действий переносится и на случай $\Gamma < 0$. Тогда, посредством масштабирования (42), всё сводится к исследованию двух (для знаков "$\pm$") краевых задач (15), (44):

$$u(0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad u(\infty) = \pm\sqrt{|\Gamma|}\,|u_0|^{-1}, \quad C(0) = 0, \quad \Gamma < 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{44}$$

где $u_0 = |u_0|\mathrm{e}^{i\varphi} \neq 0$. Поскольку система (15) инвариантна относительно операции комплексного сопряжения (u, C – решение (15)$\Leftrightarrow \bar{u}$, C – решение (15)), то достаточно исследовать решение краевой задачи (15), (44), где в (44) $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Геометрическая форма торнадо. Из наблюдений известно, что торнадо в атмосферном воздухе имеет вид воронки, граница которой определяет геометрическую форму торнадо. Эта граница определяется условием равенства давлений воздуха в торнадо и в атмосфере Земли, невозмущённой движением воздушных масс торнадо. В предположении осевой симметрии указанная граница (профиль торнадо) находится из уравнения

$$Qr^2 + \Phi(z) = p(z),$$

где $p(z)$ – распределение давления невозмущённого атмосферного воздуха по высоте z. В простейшем случае можно пренебречь изменением давления воздуха по высоте и считать $p(z) = \text{const}$. В предположении адиабатической атмосферы в размерном виде имеем зависимость [16]:

$$p(z) = p_0\left(1 - zg/c_{\mathrm{s}}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \tag{45}$$

где $c_s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ – квадрат скорости звука, $\gamma > 1$ – показатель адиабаты, p_0, ρ_0 – давление и плотность воздуха при $z = 0$ (поверхность Земли). В безразмерном виде:

$$p(z) = \left(1 - \frac{zg_0}{M^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad g_0 = \frac{L_0 g}{U_0^2}, \quad M = \frac{c_s}{U_0} - \text{число Маха.}$$

Из соотношений ($6'$), ($6''$), ($7'$) тогда следуют равенства:

$$\Phi = \left(1 - \frac{zg_0}{M^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - Qr^2, \quad Q = \frac{\Gamma}{\beta M_\text{A}^2}, \quad \beta M_\text{A}^2 = \frac{2}{\gamma} M^2,$$

$$\frac{C(z)^2}{2} + \frac{2\operatorname{Re} u(z)}{R} + \frac{\beta M_\text{A}^2}{2}\left[\left(1 - \frac{zg_0}{M^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - Qr^2\right] + g_0 z = \text{const},$$

откуда получаем искомое выражение для профиля торнадо

$$r = r(z) = \left(\frac{2}{\Gamma}\right)^{1/2} \left\{\frac{C(z)^2}{2} + \frac{2\operatorname{Re} u(z)}{R} + \frac{M^2}{\gamma}\left(1 - \frac{zg_0}{M^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + g_0 z + \text{const}\right\}^{1/2}. \quad (46)$$

Функция $r(z)$ определяет геометрическую форму торнадо для данного $\Gamma > \Gamma_\text{кр}$, $C(z)$, $u(z)$ получаются из расчётов, $\gamma = 5/3$, M, R – числа подобия, g_0 – безразмерное значение ускорения силы тяжести. Константа в правой части равенства (46) подбирается так, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным. Если пренебречь изменением давления воздуха по высоте, то выражение (46) для $r(z)$ упрощается – в правой части (46) надо под знаком корня отбросить слагаемое $\sim (1 - zg_0 / M^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$.

Устойчивость течений типа циклон и антициклон при наличии магнитного поля. Выше в линейном приближении была исследована устойчивость течений типа циклон и типа антициклон в классе возмущений вида (3) и в отсутствие магнитного поля. Магнитное поле может привести к дополнительной неустойчивости указанных течений, что неудивительно, поскольку, как известно, плазма, взаимодействующая с магнитным полем, весьма неустойчива. Ниже этот тезис получит дополнительное подкрепление.

Рассмотрим стационарное решение системы (9)

$$\begin{gathered} u_0(z) \equiv u_0 = A_0 + \mathrm{i}B_0, \quad w(z) \equiv w_0 = P_0 + \mathrm{i}S_0, \\ C_0(z) = -2A_0 z, \quad G_0(z) = -2P_0 z, \end{gathered} \quad (47)$$

удовлетворяющее граничному условию (10). При этом константы u_0, w_0 удовлетворяют ограничению

$$u_0^2 + \Gamma = M_\text{A}^2 w_0^2 \Leftrightarrow \begin{array}{ll} (a) & A_0 B_0 = P_0 S_0 M_\text{A}^2, \\ (\textit{б}) & A_0^2 - B_0^2 + \Gamma = M_\text{A}^2 (P_0^2 - S_0^2). \end{array} \tag{48}$$

Соотношения (48) означают, что для решений (47) магнитное поле полностью определяет динамику плазмы, и наоборот. При $A_0 > 0$ решение (47) имеет тип антициклон, а при $A_0 < 0$ – тип циклон. Линеаризация системы (9) на решении (47) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial t} - 2A_0 z \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2M_\text{A}^2 P_0 z \frac{\partial P}{\partial z} + 2(A_0 A - BB_0) - 2M_\text{A}^2 (PP_0 - SS_0) = 0, \\
&\frac{\partial B}{\partial t} - 2A_0 z \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + 2M_\text{A}^2 P_0 z \frac{\partial S}{\partial z} + 2(A_0 B + B_0 A) - 2M_\text{A}^2 (P_0 S + S_0 P) = 0, \\
&\frac{\partial P}{\partial t} - 2A_0 z \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{R_\text{m}}\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + 2P_0 z \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -2A, \\
&\frac{\partial S}{\partial t} - 2A_0 z \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{1}{R_\text{m}}\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + 2P_0 z \frac{\partial B}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -2P,
\end{aligned} \tag{49}$$

где $u = A + \text{i}B$, $w = P + \text{i}S$, C, G – малые возмущения функций (47), считающиеся ограниченными на $[0, +\infty)$. "Замораживая" коэффициенты в точке $z = z_* \in [0, +\infty)$ в системе (49), ищем нетривиальное решение полученной системы уравнений в частных производных с *постоянными* коэффициентами в виде:

$$A(t,z) = A\text{e}^{\omega t + \text{i}kz}, B(t,z) = B\text{e}^{\omega t + \text{i}kz}, \ldots, G(t,z) = G\text{e}^{\omega t + \text{i}kz}, \tag{50}$$

где $\omega \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$ и комплексные амплитуды $A, B, \ldots, G$ одновременно не равны нулю. Подставляя функции (50) в (49), получим для нахождения амплитуд A, B, P, S систему линейных уравнений, записанную в матричном виде:

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix} A \\ B \\ P \\ S \end{pmatrix} = 0, \quad \mathscr{A} = \begin{pmatrix} \Omega + 2A_0 + \dfrac{k^2}{R} & -2B_0 & M_\text{A}^2 (F - 2P_0) & 2M_\text{A}^2 S_0 \\ 2B_0 & \Omega + 2A_0 + \dfrac{k^2}{R} & -2M_\text{A}^2 S_0 & M_\text{A}^2 (F - 2P_0) \\ F & 0 & \Omega + \dfrac{k^2}{R_\text{m}} & 0 \\ 0 & F & 0 & \Omega + \dfrac{k^2}{R_\text{m}} \end{pmatrix},$$

где $\Omega = \omega - 2\text{i}A_0 z_* k$, $F = 2\text{i}P_0 z_* k$ и амплитуды C и G выражаются через амплитуды A и P по формулам $C = 2\text{i}A/k$, $G = 2\text{i}P/k$. Условие существования нетривиального решения вида (50) системы (49) равносильно равенству $\det\mathscr{A}=0$, называемому дисперсионным соотношением (кривой). Прямое вычисление показывает, что условие $\det\mathscr{A}=0$ равносильно справедливости одного из двух квадратных уравнений относительно Ω:

$$\begin{aligned}
&\left(\Omega+2u_0+\frac{k^2}{R}\right)\left(\Omega+\frac{k^2}{R_{\mathrm{m}}}\right)+F(2w_0-F)M_{\mathrm{A}}^2=0, \quad \text{(а)}\\
&\left(\Omega+2\bar{u}_0+\frac{k^2}{R}\right)\left(\Omega+\frac{k^2}{R_{\mathrm{m}}}\right)+F(2\bar{w}_0-F)M_{\mathrm{A}}^2=0. \quad \text{(б)}
\end{aligned} \tag{51}$$

Таким образом, дисперсионная кривая распадается на четыре ветки, задаваемых равенствами (51). Согласно принципу “замороженных” коэффициентов, для устойчивости решения (47) в линейном приближении необходимо, чтобы для любых $z_*\in[0,+\infty)$, $k\in\mathbb{R}$, для каждой из четырёх веток, задаваемых формулами (51), выполнились неравенства $\mathrm{Re}\,\omega\le 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\Omega\le 0$. Если магнитное поле азимутальное ($P_0=0$), то две ветки азимутальной кривой сливаются в одну и (51) даёт

$$\Omega+2(A_0\pm \mathrm{i}B_0)+\frac{k^2}{R}=0, \quad \Omega+\frac{k^2}{R_{\mathrm{m}}}=0.$$

Отсюда следует, что для $A_0>0$ (антициклон) необходимое условие устойчивости выполнено, а для $A_0<0$ (циклон) – нет.

Если магнитное поле и течение плазмы полоидальные ($H_\varphi=0$, $U_\varphi=0$), то $u_0=\bar{u}_0$, $w_0=\bar{w}_0$ и уравнения (51) (а) и (б) совпадают.

В общем случае необходимые условия устойчивости заведомо не выполнены и решения (47) неустойчивы в линейном приближении. Это удручающий результат, который объясняет серьёзные проблемы при численном решении системы (9). Из него следует, что решения (47) могут быть устойчивыми только в вырожденных случаях – для азимутальных или полоидальных полей или когда $\Gamma=0$.

Докажем утверждение о неустойчивости, считая u_0, w_0 комплексными (вещественные и магнитные части отличны от нуля). Тогда каждое из соотношений (51) задаёт две неявные аналитические функции $\Omega(k)$ с начальными условиями $\Omega(0)=0$, $\Omega(0)=-2u_0$ для (51а) и $\Omega(0)=0$, $\Omega(0)=-2\bar{u}_0$ для (51б). Эти функции легко ищутся в виде рядов по целым неотрицательным степеням k методом неопределённых коэффициентов, и для неявных функций с начальным условием $\Omega(0)=0$ первый член разложения имеет вид:

$$\Omega(k)=-2M_{\mathrm{A}}^2P_0z_*\frac{w_0}{u_0}\mathrm{i}k+\ldots, \quad \text{(а)} \quad \Omega(k)=-2M_{\mathrm{A}}^2P_0z_*\frac{\bar{w}_0}{\bar{u}_0}\mathrm{i}k+\ldots, \quad \text{(б)} \tag{52}$$

где многоточием обозначены степени k, большие 1. Отсюда

$$\mathrm{Re}\,\Omega(k) = \pm 2M_{\mathrm{A}}^2 P_0 z_* \frac{(A_0 S_0 - P_0 B_0)}{A_0^2 + B_0^2} k + \ldots,$$

где "$+$" отвечает уравнению (52а), а "$-$" – уравнению (52б). Из (49) легко выводится, что при $\Gamma \neq 0$ справедливо $A_0 S_0 - P_0 B_0 \neq 0$ и, значит, для всех достаточно малых k величина $\mathrm{Re}\,\Omega(k)$ принимает значения разных знаков и для веток дисперсионной кривой, выделяемых начальным условием $\Omega(0) = 0$, необходимое условие устойчивости заведомо нарушается, причём неустойчивыми являются самые важные динноволновые возмущения.

Стационарные движения невязкой плазмы вдоль магнитного поля. В §3 частично исследованы решения системы (9), описывающие стационарные движения вида (3) вязкой несжимаемой плазмы вдоль магнитного поля. Это исследование может быть доведено до конца в случае невязкой плазмы ($R = \infty$), и опирается оно на возможность полной интеграции нелинейной системы:

$$C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dz}} + u^2 + \Gamma = 0, \quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{dz}} = -2\,\mathrm{Re}\,u. \tag{53}$$

При $\Gamma \geq 0$ общее решение этой системы было получено в [3]. В случае $\Gamma < 0$ результат, полученный в [3], дополняется следующей теоремой, доказательство которой легко получить по методу работы [3].

Теорема 4. *При* $\Gamma < 0$ *общее решение системы* (53) *имеет вид*

$$A(z) = |\Gamma|^{1/2} \frac{\sin 2pz}{\sin 2|\Gamma|^{1/2} R}, \quad B(z) = \pm|\Gamma|^{1/2}\left(\mathrm{tg}|\Gamma|^{1/2} R\cos^2 pz - \mathrm{ctg}|\Gamma|^{1/2} R\sin^2 pz\right),$$
$$C(z) = \frac{1}{2D}\left(\frac{\cos^2 pz}{\cos^2|\Gamma|^{1/2} R} - \frac{\sin^2 pz}{\sin^2|\Gamma|^{1/2} R}\right), \tag{54}$$

где $u = A + \mathrm{i}B$, $p = |\Gamma|^{1/2} D\sin 2|\Gamma|^{1/2} R$, D, R *– произвольные вещественные константы*, $D \neq 0$, $R \neq \pi|\Gamma|^{-1/2}\ell/2$, $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *Кроме того, существует особое решение*

$$A(z) = |\Gamma| Dz, \quad B(z) = 0, \quad C(z) = D^{-1} - |\Gamma| Dz^2, \tag{55}$$

где $D \neq 0$ *– произвольная вещественная константа.* #

Прямой подстановкой несложно проверить, что функции (54) и (55) обращают уравнения системы (53) в тождества.

Рассмотрим теперь решения системы (9) для $R = \infty$, описывающие течения невязкой несжимаемой плазмы вдоль магнитного поля – $G = kC$, $w = ku$ для некоторого $k \in \mathbb{R}$. Эти течения ищутся из системы (24), где положено $R = \infty$:

$$C(1-k^2M_\text{A}^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dz}}+u^2(1-k^2M_\text{A}^2)+\Gamma=0,\quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{dz}}=-2\,\mathrm{Re}\,u. \qquad (56)$$

Согласно соотношениям (25)–(28), результатам **Теоремы 4** и работы [3], эти стационарные течения задаются аналитически следующим образом.

Решения (56) для $\Gamma\neq 0$ и $k^2M_\text{A}^2\neq 1$ имеют вид:

$$A(z)=-\Gamma_*^{1/2}\frac{\sin 2\alpha(z)}{\mathrm{sh}2\beta},\quad C(z)=\frac{1}{2D}\left(\frac{\cos^2\alpha(z)}{\mathrm{ch}^2\beta}+\frac{\sin^2\alpha(z)}{\mathrm{sh}^2\beta}\right),$$
$$B(z)=\pm\Gamma_*^{1/2}\left(\mathrm{th}\beta\cos^2\alpha(z)+\mathrm{cth}\beta\sin^2\alpha(z)\right), \qquad (57)$$
$$p=D\Gamma_*^{1/2}\mathrm{sh}2\beta,\quad \alpha(z)=pz,\quad \beta=R\Gamma_*^{1/2},$$

где $\Gamma_*=\Gamma/(1-k^2M_\text{A}^2)$ и для $\Gamma_*<0$ считается $\Gamma_*^{1/2}=\mathrm{i}\left|\Gamma_*\right|^{1/2}$, D, R – вещественные константы, причём $D\neq 0$, $R\neq(\ell\pi i/2)\Gamma_*^{-1/2}$, ℓ – целое.

Для $\Gamma=0$ решения (56) имеют вид

$$A(z)=-(Rp/2)\sin 2\alpha(z),\quad B(z)=\pm Rp\sin^2\alpha(z),\quad C(z)=R\sin^2\alpha(z) \qquad (58)$$

с тем же $\alpha(z)$, что и выше, и произвольными вещественными R, p.

Кроме того, существует особое решение

$$A(z)=-\Gamma_*Dz,\quad B(z)=0,\quad C(z)=D^{-1}+\Gamma_*Dz^2,\quad D\neq 0.$$

Решения (58) являются предельным случаем решений (57) при $\Gamma\to 0$ и $p=\mathrm{const}$.

При $k^2M_\text{A}^2=1$ и $\Gamma\neq 0$ система (56) не имеет решений, а при $\Gamma=0$ решения задаются функциями $C(z)$, $u(z)=A(z)+\mathrm{i}B(z)$ с произвольными $C(z)$ и $B(z)$ и $A(z)=-C'(z)/2$.

Список литературы

1. Вараксин А.Ю., Роман М.Э., Копейцев В.Н. Торнадо. М: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 344 с.
2. Gavrikov M.B., Taiurskii A.A. A Mathematical Model of Tornado // Journal of Physics: Conference Series. **1336**, 012001, 2019. doi:10.1088/1742-6596/1336/1/012001.
3. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Простая математическая модель торнадо // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 42. 34 с. doi:10.20948/prepr-2019-42.
4. Альфвен Х. Космическая электродинамика. – М.: ИЛ, 1952.
5. Sven Wedemeyer-Böhm, Eamon Scullion, Oskar Steiner, Luc Rouppe van der Voort, Jaime de la Cruz Rodriguez, Viktor Fedun & Robert Erdélyi. Magnetic

tornadoes as energy channels into the solar corona // Nature. 2012. V. 486. p. 505–508. doi: 10.1038/nature11202.
6. Karman T. Über laminare und turbulente Reibung. ZAMM, 1921, v. 1, pp. 244-247.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
8. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 288 с.
9. Филиппов Н.В. Обзор экспериментальных работ, выполненных в ИАЭ им. И.В.Курчатова, по исследованию плазменного фокуса. // Физика плазмы, 1983. Т. 9. № 1. С. 25-44.
10. Lundquist S. Experimental Investigation of Magneto-Hydrodynamic Waves // Physical Review, V. 76. N 12. 1949. pp. 1805–1809.
11. Сычев В.В. О движении вязкой электропроводной жидкости под действием вращающегося диска в присутствии магнитного поля – ПММ, 1960, т. 24, № 5, с. 906.
12. Шидловский В.П. Исследование движения вязкой электропроводной жидкости, вызванное вращением диска, при наличии осевого магнитного поля. // Магнитная гидродинамика, 1966, № 1, с. 93–97.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 2-е изд.: М.: Наука, 1982. 624 с.
14. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
15. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 376 с.
16. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.

Оглавление

1. Введение 3
2. Уравнения магнитного торнадо 6
3. Простые частные решения уравнений магнитного торнадо 13
4. Стационарные торнадо, текущие вдоль магнитного поля 18
5. Дополнительные результаты и комментарии 27
Список литературы 35