



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 44 за 2020 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Гавриков М.Б., Таюрский А.А.

Математическая модель
мощного торнадо в
атмосфере

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Математическая модель мощного торнадо в атмосфере // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 44. 31 с. <http://doi.org/10.20948/prepr-2020-44>
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-44>

Ордена Ленина

**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

**Математическая модель мощного торнадо
в атмосфере**

Москва — 2020

Гавриков М.Б., Тайурский А.А.

Математическая модель мощного торнадо в атмосфере

В работе построена математическая теория мощных торнадо в атмосферном воздухе, позволяющая сколь угодно точно вычислить скорость воздушного потока в торнадо и определить его воронкообразную форму. Даны практические рекомендации по предсказанию торнадо и его предотвращению. Предложена элементарная теория циклонов и антициклонов. Проведённые построения обобщаются на случай торнадо в плазме, подчинённой уравнениям классической МГД. На конкретных примерах рассмотрено влияние магнитного поля на динамику плазмы в торнадо.

Ключевые слова: торнадо, антиторнадо, мощное торнадо, профиль торнадо, циклон, антициклон, магнитное торнадо

Mikhail Borisovich Gavrikov, Aleksei Aleksandrovich Taiurskii

Mathematical model of powerful tornado in the atmosphere

The mathematical theory of powerful tornadoes in atmospheric air is constructed in the work, which allows one to arbitrarily accurately calculate the velocity of the air flow in the tornado and determine its funnel shape. Practical recommendations for predicting a tornado and its prevention are given. An elementary theory of cyclones and anticyclones is proposed. The performed constructions are generalized to the case of a tornado in a plasma subordinate to the equations of classical MHD. Using concrete examples, the influence of a magnetic field on the plasma dynamics in a tornado is considered.

Key words: tornado, antitornado, powerful tornado, tornado profile, cyclone, anticyclone, magnetic tornado

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Исходные положения.....	3
3. Теория мощного торнадо.....	7
4. Нахождение границы торнадо	11
5. Элементарная теория циклонов и антициклонов.....	15
6. Магнитный торнадо	17
7. Заключительные замечания.....	25
Список литературы.....	31

1. Введение

Явление торнадо (смерч) состоит в образовании в земной атмосфере вблизи поверхности Земли закрученного восходящего потока воздуха, обладающего огромной разрушительной силой. К настоящему времени считается, что торнадо порождается вихревым движением в материнском (смерчевом) облаке. Судя по наблюдениям [1], вихрь, порождающий торнадо, имеет сложную трёхмерную структуру, состоящую из одновременной циркуляции воздуха в полоидальном и азимутальном направлениях и образующую изогнутый тор (вихревое кольцо). Причины возникновения вихревого кольца, равно как и механизм генерации им торнадо, плохо изучены. В [2, 3] была предложена простая математическая модель, позволяющая исследовать причинно-следственную связь между наличием вихревого движения в материнском облаке и возникновением закрученного восходящего потока воздуха. Эта модель абстрагируется от ряда важных особенностей торнадо, но позволяет подойти к ответу на два ключевых вопроса, которые в конечном итоге являются целью исследования по проблеме торнадо: 1) где и когда могут возникнуть торнадо и какова их мощность? 2) какие меры необходимо принять для предотвращения возможного или нейтрализации уже случившегося торнадо? Для ответа на эти вопросы на базе простой модели [2, 3] необходим дополнительный анализ данных мониторинга вихревых образований в верхних слоях атмосферы и распределения давления в атмосферном воздухе.

В настоящем исследовании идеи работ [2, 3] развиваются в трёх направлениях. Во-первых, построена теория мощных торнадо, наиболее актуальных для приложений. Во-вторых, рассмотрено нахождение границы торнадо, имеющего воронкообразный профиль, в-третьих, на базе МГД-теории на простых примерах изучается влияние магнитного поля на образование торнадо в плазме. Последнее направление ориентируется на исследование проблемы возникновения торнадо на Солнце и солнцеподобных звёздах, актуальной в ряде задач астрофизики [4].

2. Исходные положения

Абстрагируясь от движения материнского облака, будем считать, что динамика воздушных масс в торнадо обладает осевой симметрией относительно некоторой вертикальной мгновенной оси вращения, которая меняет свое местоположение вместе с материнским облаком. Движение последнего ниже не рассматривается. Тогда гидродинамические параметры воздуха U и p вблизи оси торнадо в цилиндрической системе координат сколь угодно точно аппроксимируются функциями вида

$$U_r = rA(t, z), \quad U_\varphi = rB(t, z), \quad U_z = C(t, z),$$

$$p = \Phi(t, z) + r^2 Q(t, z). \quad (1)$$

Основное допущение, сделанное в [2, 3], состоит в том, что: 1) явление торнадо обусловлено процессами и закономерностями течения воздушных масс, происходящими в приосевой области, “стволе” торнадо, 2) течение воздуха в приосевой области торнадо задаётся *точными* решениями уравнений Навье-Стокса (2) вязкого несжимаемого воздуха (1)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \quad \rho = \text{const}, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{Div}(\rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p \mathbf{I}_3) &= 2\mu \operatorname{Div} \operatorname{def} \mathbf{U} + \rho \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ρ , p , \mathbf{U} – плотность, давление, гидродинамическая скорость воздуха соответственно, μ – коэффициент динамической вязкости, \mathbf{g} – постоянное ускорение силы тяжести, \mathbf{I}_3 – единичный трёхмерный тензор, $\operatorname{def} \mathbf{U}$ – тензор деформаций векторного поля \mathbf{U} . Ниже предполагается $\mu = \text{const}$. В [2] доказан следующий результат.

Теорема 1. *Функции вида (1) являются решениями уравнений (2) тогда и только тогда, когда $\partial Q / \partial z \equiv 0$ и комплексная функция $u = A + iB$ и вещественная функция C удовлетворяют нелинейной системе уравнений:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 + \frac{2Q}{\rho} &= 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -2 \operatorname{Re} u, \\ 0 \leq z < +\infty, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где Re – символ вещественной части комплексного числа. При этом функция Φ однозначно, с точностью до произвольной константы, ищется из уравнения

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C^2}{2} + \frac{2\mu}{\rho} \operatorname{Re} u + \frac{\Phi}{\rho} + gz \right) = 0. \quad (4)$$

#

Уравнения системы (2) записаны в неинерциальной системе отсчёта, жёстко связанной с поверхностью Земли, причём ось z направлена вертикально вверх. Учитывая вращение Земли вокруг своей оси, в системе (2) необходимо дополнительно учесть силы инерции – силу Кориолиса и центробежную силу. В [2] показано, что эти добавочные силы при изучении явления торнадо будут пренебрежимо малы и могут быть отброшены. Сила Кориолиса играет роль, самое большое, при постановке граничного условия для системы (3) на поверхности Земли $z = 0$. Кроме того, приближение несжимаемой атмосферы, согласно [2], выполнено даже для разрушительных по шкале Фуджиты [5] торнадо типа F4, для которого скорость звука достигает ~ 100 м/с. Наибольший интерес представляют стационарные решения системы (3),

которые ищутся методом установления для $Q(t) \equiv Q = \text{const}$ и граничных условий

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{C}, \quad u(\infty) = i\sqrt{2Q/\rho}, \quad C(0) = 0. \quad (5)$$

При этом от выбора начального условия зависит только время установления.

Под *торнадо* (*антиторнадо*) ниже понимается стационарные решения системы (3), для которых существуют конечные пределы и имеет место неравенство $\lim_{z \rightarrow +\infty} C(z) > 0$ ($\lim_{z \rightarrow +\infty} C(z) < 0$). Система (3) называется уравнениями торнадо. Величина Q определяет радиальный перепад давления в центре торнадо $r=0$ и на его периферии $r=\infty$. Интуитивно ясно, что закрученные восходящие потоки воздуха, т.е. течения типа торнадо, возможны только при $Q > 0$ и из правого граничного условия (5) для $u(\infty)$ следует наличие жёсткой связи между угловой скоростью Ω вращения воздуха на бесконечности и величины Q : $\Omega^2 \rho / 2 = Q$. Если эта связь нарушается, то, как показывает численное исследование, задача (3), (5) при любом u_0 не имеет стационарного решения, в частности, отсутствуют течения типа торнадо. Этот принципиальный результат позволяет приблизиться к решению задачи предсказания торнадо. Для этого по данным мониторинга верхних слоёв атмосферы необходимо получить координаты центра и угловую скорость вращения Ω воздушных масс вихревого кольца в материнском облаке (Ω легко вычисляется по радиусу и азимутальной скорости воздуха вихревого кольца). Затем, проектируя центр вихревого кольца на поверхность Земли ортогонально последней, получим точку зарождения возможного торнадо, а вертикальная прямая, проходящая через эту точку, является осью торнадо. Согласно простой модели [2, 3], необходимое условие возникновения торнадо, порождаемого вихревым кольцом, имеет вид:

$$\Omega^2 = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left\langle \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right\rangle, \quad (6)$$

где $\langle \rho \rangle$ – средняя плотность воздуха, $\langle \partial^2 p / \partial r^2 \rangle$ – средняя производная. При этом осреднение ведётся по точкам оси торнадо от центра вихревого кольца до точки зарождения торнадо на поверхности Земли, построенной выше. Значения $\partial^2 p / \partial r^2$ в точках указанного отрезка находятся посредством интерполяции данных мониторинга о распределении давления воздуха вблизи поверхности Земли. Вероятно, для существования торнадо условие (6) должно быть выполнено лишь приближенно. Кроме того, при движении материнского облака, а значит и вихревого кольца, точка зарождения торнадо на поверхности Земли тоже будет двигаться, а обе части необходимого условия (6) зависят от времени.

Начальное условие для функции C в (5) является математическим выражением физического условия непротекания. Левое граничное условие для $u(0)$ определяется физическими гипотезами о воздушных потоках вдоль поверхности Земли. Например, если считать существенной роль силы Кориолиса в закручивании воздушного потока у поверхности Земли, то левое граничное условие для u примет вид $u(0) = i\omega$. Этот случай исследован в [2, 3], где установлен следующий результат. Пусть $\omega \geq 0$, $Q \geq 0$ и в граничном условии (5) для $u(\infty)$ берётся арифметическое значение корня, тогда существует критическое значение $Q_{кр} = \omega^2 \rho / 2$, для которого при $Q_{кр} < Q$ стационарное решение краевой задачи (3), (5) с $u_0 = i\omega$ существует и имеет тип торнадо, а при $0 \leq Q < Q_{кр}$ стационарное решение указанной краевой задачи существует и имеет тип антиторнадо, при $Q = Q_{кр}$ стационарное решение сводится к вращению воздуха вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω . В то же время, как показали численные расчёты, краевая задача (3), (5) с $u_0 = i\omega$, $\omega < 0 < Q$ не имеет стационарного решения для $\omega = -\Omega$ ($\Omega = (2Q / \rho)^{1/2}$) и имеет стационарное решение, если $|\omega| \ll \Omega$ (например, при $|\omega| \leq 0.01\Omega$). Следовательно, если угловые скорости вращения воздуха у поверхности Земли (ω) и на бесконечности (Ω) имеют разные знаки и одинаковые порядки, то торнадо возникнуть не может. Этот результат можно использовать для предупреждения торнадо, если искусственным образом создать вблизи поверхности Земли антивихрь с центром в известной точке зарождения возможного торнадо, угловая скорость которого имеет тот же порядок, что и угловая скорость вихря в материнском облаке.

Проблемы с выбором левого граничного условия для u , $u(0) = u_0$ теряют свою остроту для мощных торнадо, определяемых условием $|\Omega / \omega| \gg 1$. Теория мощных торнадо изложена в следующем параграфе. Предварительно запишем систему (3)–(5) в безразмерном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 + \Gamma = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -2\text{Re}u, \quad (7)$$

$$u(0) = u_0, \quad u(\infty) = i\sqrt{\Gamma}, \quad C(0) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C^2}{2} + 2 \frac{\text{Re}u}{R} + M_0^2 \Phi + g_0 z \right) = 0, \quad (9)$$

где $R = \rho U_0 L_0 / \mu$ – число Рейнольдса, $M_0 = p_0^{1/2} (\rho U_0^2)^{-1/2}$ – модифицированное число Маха, $\Gamma = 2Qt_0^2 / \rho$, $g_0 = L_0 g / U_0^2$, t_0 , L_0 , U_0 , p_0 – характерные масштабы времени, длины, скорости, давления, причём $U_0 = L_0 / t_0$.

3. Теория мощного торнадо

Рассмотрим метод приближённого решения краевой задачи (7), (8), основанный на разложении её решения в двукратные степенные ряды по параметру $a = u_0 / \sqrt{\Gamma}$ в предположении, что $\sqrt{\Gamma} / |u_0| \gg 1$. Последнее заведомо выполнено, если $\sqrt{\Gamma} \gg 1$ и левое граничное условие u_0 ограничено по модулю константой, не зависящей от Γ . Оказывается, что главный член разложения не зависит от u_0 , что притупляет остроту проблемы выбора левого граничного условия в (8). Физический смысл условия $\sqrt{\Gamma} \gg 1$ определяется величиной характерного масштаба времени t_0 . Например, если $u_0 = i\omega$, $\omega > 0$ и $t_0 = \omega^{-1}$, то $\sqrt{\Gamma} = (2Q)^{1/2} (\rho\omega^2)^{-1/2} = |\Omega / \omega|$, где Ω – угловая скорость вращения воздушного вихря на бесконечности и условие $\sqrt{\Gamma} \gg 1$ эквивалентно $|\Omega| \gg |\omega|$, что соответствует мощному торнадо, для которого угловая скорость вращения воздушных масс в материнском облаке намного превосходит угловую скорость вращения воздуха у поверхности Земли.

Сначала вычислим главный член искомого разложения, не строя самого разложения. Это вычисление основано на следующем результате.

Теорема 2. Пусть $\Gamma \neq 0$ и

$$u = |\Gamma|^{1/2} \tilde{u}, \quad C = |\Gamma|^{1/4} R^{-1/2} \tilde{C}, \quad z = x|\Gamma|^{-1/4} R^{-1/2}, \quad t = \tau|\Gamma|^{-1/2}. \quad (10)$$

Тогда функции u , C от (t, z) удовлетворяют системе (7) тогда и только тогда, когда функции \tilde{u} , \tilde{C} от (τ, x) удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{C} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \tilde{u}^2 \pm 1 = 0, \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = -2 \operatorname{Re} \tilde{u}, \quad (11)$$

где в (11) берётся знак “+”, если $\Gamma > 0$, и знак “–”, если $\Gamma < 0$. #

Теперь используем непрерывную зависимость решения краевой задачи (7), (8) от левого граничного условия. Используем следующий результат, установленный численно. Пусть $u_0(x)$, $C_0(x)$ – стационарное решение системы (11) для знака “+” и краевых условий $u(0) = 0$, $u(\infty) = i$, $C(0) = 0$. Графики функций $C_0(x)$, $\operatorname{Re} u_0(x)$, $\operatorname{Im} u_0(x)$, полученные численно и представленные на Рис. 1, показывают, что это решение имеет тип торнадо. Тогда найдётся $\varepsilon > 0$, такое, что для любого $|a| < \varepsilon$, $a \in \mathbb{C}$ существует стационарное решение системы (11) для знака “+” и краевых условий $u(0) = a$, $u(\infty) = i$, $C(0) = 0$, обозначаемое $u_a(x)$, $C_a(x)$, имеющее тип торнадо, для которого:

$$\max_{0 \leq x < \infty} |u_a(x) - u_0(x)| \rightarrow 0, \quad \max_{0 \leq x < \infty} |C_a(x) - C_0(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } a \rightarrow 0. \quad (12)$$

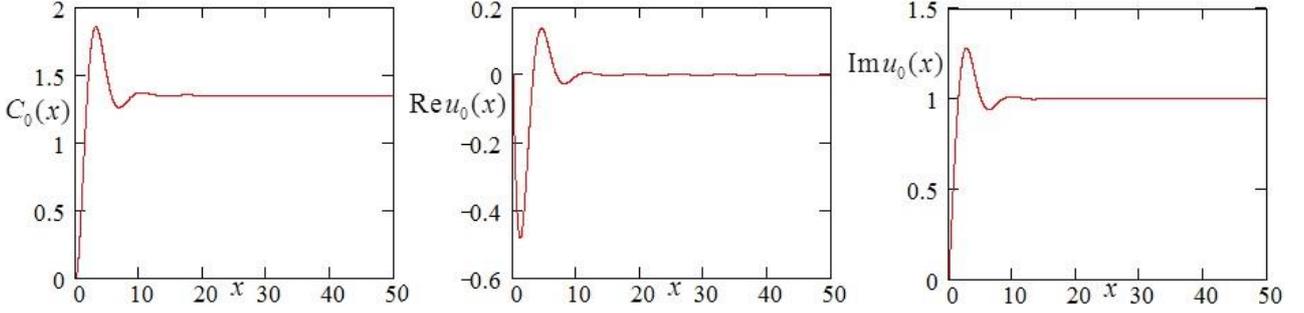


Рис. 1. Графики функций $C_0(x)$, $\text{Re}u_0(x)$, $\text{Im}u_0(x)$ с граничным условием $u(0) = 0$, $u(\infty) = i$, $C(0) = 0$.

Численные расчёты показали справедливость сформулированного утверждения для $\varepsilon = 0.01$. Более того, отклонения (12) имеют порядок $|a|$ в том смысле, что $\max_{0 \leq x < \infty} |u_a(x) - u_0(x)| \leq K|a|$, $\max_{0 \leq x < \infty} |C_a(x) - C_0(x)| \leq K|a|$ для всех $|a| < 0.01$, где константа $K > 0$ не зависит от a . Поэтому имеют место равенства:

$$u_a(x) = u_0(x) + O(a), \quad C_a(x) = C_0(x) + O(a), \quad a \rightarrow 0, \quad (13)$$

где вторые слагаемые в правых частях (13) имеют порядок $O(a)$ при $a \rightarrow 0$ равномерно по $x \in [0, +\infty)$: $|O(a)| \leq K|a|$ для всех $|a| < 0.01$ и всех $x \in [0, +\infty)$, где $K > 0$ не зависит от a и x . Из **Теоремы 2** и формул (13) теперь следует, что

$$\begin{aligned} u(z) &= \Gamma^{1/2} \left[u_0 \left(z \Gamma^{1/4} R^{1/2} \right) + O \left(\Gamma^{-1/2} \right) \right], \quad \Gamma \rightarrow +\infty, \\ C(z) &= \Gamma^{1/4} R^{-1/2} \left[C_0 \left(z \Gamma^{1/4} R^{1/2} \right) + O \left(\Gamma^{-1/2} \right) \right], \quad \Gamma \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (14)$$

для *любого* решения краевой задачи (7), (8) с ограниченными заданной константой, не зависящей от Γ , левым граничным условием u_0 . Весьма важно, что главный член разложения (14) не зависит от u_0 . Из (14) вытекает ряд прикладных формул. Выделим две из них. Во-первых, имеет место асимптотическое (эквивалентность в смысле матанализа) равенство

$$C(\infty) \sim \Gamma^{1/4} R^{-1/2} C_0(\infty) = 1.35 \Gamma^{1/4} R^{-1/2}, \quad \Gamma \rightarrow +\infty,$$

где учтены результаты расчётов, представленные на Рис. 1, $C_0(\infty) \cong 1.35$. В частности, $C(\infty)$ растёт пропорционально $\Gamma^{1/4}$ при $\Gamma \rightarrow +\infty$. Во-вторых, пусть x_∞ – высота, на которой решения $u_0(x)$, $C_0(x)$ выходят на константы. По результатам расчётов, представленных на Рис. 1, $x_\infty \cong 15$. Тогда $u(z)$, $C(z)$ существенно меняются только в погранслое $0 \leq z \leq x_\infty \Gamma^{-1/4} R^{-1/2} = 15 \Gamma^{-1/4} R^{-1/2}$, премыкающем к поверхности Земли, а вне погранслоя они приближённо равны константам $u(z) \cong \sqrt{\Gamma} u_0(\infty) = i \sqrt{\Gamma}$, $C(z) \cong C_0(\infty) \Gamma^{1/4} R^{-1/2} = 1.35 \Gamma^{1/4} R^{-1/2}$.

Для более точного вычисления вторых слагаемых в квадратных скобках (14) будем искать функции $u_a(\tau, x)$, $C_a(\tau, x)$, являющиеся решением системы (11) со знаком “+” со стационарными краевыми условиями $u(0) = a$, $u(\infty) = i$, $C(0) = 0$ посредством теории возмущений по параметру $a = (a_1, a_2) = a_1 + ia_2$, в качестве которого берётся величина $a = u_0 \Gamma^{-1/2}$:

$$u_a(\tau, x) = \sum_{\alpha} u_{\alpha}(\tau, x) a^{\alpha}, \quad C_a(\tau, x) = \sum_{\alpha} C_{\alpha}(\tau, x) a^{\alpha}, \quad (15)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ – мультииндекс, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ – целые, $a^{\alpha} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $u_{\alpha}(\tau, x)$ – комплексные, $C_{\alpha}(\tau, x)$ – вещественные функции и суммирование в (15) ведётся по всем мультииндексам α . Подставляя разложения (15) в уравнения системы (11) для знака “+”, выполняя действия, приводя подобные члены и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях a^{α} , получим, что $u_a(\tau, x)$, $C_a(\tau, x)$ являются решением указанной выше краевой задачи тогда и только тогда, когда $u_{(0,0)}(\tau, x) = u_0(\tau, x)$, $C_{(0,0)}(\tau, x) = C_0(\tau, x)$ (здесь $u_0(\tau, x)$, $C_0(\tau, x)$ – нестационарное решение системы (11) со знаком “+”, удовлетворяющее стационарным краевым условиям $u(0) = 0$, $u(\infty) = i$, $C(0) = 0$, в частности, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} u_0(\tau, x) = u_0(x)$, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} C_0(\tau, x) = C_0(x)$, где $u_0(x)$, $C_0(x)$ – функции, определённые выше), а $u_a(\tau, x)$, $C_a(\tau, x)$ для $|\alpha| > 0$ являются решениями следующей *линейной* краевой задачи со стационарными граничными условиями:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \tau} + C_0 \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} + C_{\alpha} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{\alpha}}{\partial x^2} + 2u_0 u_{\alpha} + \\ & + \sum_{0 < \beta < \alpha} \left(u_{\beta} u_{\alpha-\beta} + C_{\beta} \frac{u_{\alpha-\beta}}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial C_{\alpha}}{\partial x} = -2 \operatorname{Re} u_{\alpha}, \\ & u_{\alpha}(0) = u_{\alpha}(\infty) = 0, \quad C_{\alpha}(0) = 0, \quad |\alpha| > 1, \\ & \left. \begin{aligned} u_{(1,0)}(0) = 1, \quad u_{(1,0)}(\infty) = 0, \quad C_{(1,0)}(0) = 0, \\ u_{(0,1)}(0) = i, \quad u_{(0,1)}(\infty) = 0, \quad C_{(0,1)}(0) = 0, \end{aligned} \right\} |\alpha| = 1, \end{aligned} \quad (16)$$

где для мультииндексов неравенство $\beta = (\beta_1, \beta_2) < \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ означает $\beta_1 \leq \alpha_1$, $\beta_2 \leq \alpha_2$ и хотя бы одно неравенство строгое, $(0,0) = 0$. Согласно (16), цепочка уравнений для нахождения коэффициентов u_{α} , C_{α} , $|\alpha| > 0$, расцепляется, а дифференциальный оператор для нахождения u_{α} , C_{α} один и тот же для всех $|\alpha| > 0$ и линеен. В частности, для нахождения стационарных решений $u_a(x)$, $C_a(x)$ соответствующих краевых задач необходимо последовательно решить краевые задачи (16) на установление и найти в необходимом количестве

функции u_α , C_α , позволяющие сколь угодно точно аппроксимировать функции $u_\alpha(x)$ и $C_\alpha(x)$ и, согласно **Теореме 2**, сколь угодно точно аппроксимировать решение краевой задачи (7), (8) при $\sqrt{\Gamma} / |u_0| \gg 1$.

Формулы (14) дают нулевое приближение разложений (15). Первое приближение с учётом $u_0 = (a_1 + ia_2)\Gamma^{1/2}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} u(z) &= \Gamma^{1/2} [u_0(x) + a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + O(a)], \quad a \rightarrow 0, \\ C(z) &= \Gamma^{1/4} R^{-1/2} [C_0(x) + a_1 C_1(x) + a_2 C_2(x) + O(a)], \quad a \rightarrow 0, \\ x &= z\Gamma^{1/4} R^{1/2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $u_i(x)$, $C_i(x)$, $i=1,2$ – стационарные решения краевых задач на полупрямой $[0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial \tau} + C_0 \frac{\partial u_i}{\partial x} + C_i \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + 2u_0 u_i &= 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial x} = -2\text{Re}u_i, \\ u_1(0) = 1, \quad u_1(\infty) = 0, \quad C_1(0) = 0, \\ u_2(0) = i, \quad u_2(\infty) = 0, \quad C_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Следующие приближения легко выписываются, исходя из формул (16), но выражения для них становятся всё более громоздкими.

Как показали расчёты, краевые задачи (18) имеют стационарные решения $u_i(x)$, $C_i(x)$, $i=1,2$, где функции $u_i(x)$, $C_i(x)$, $i=1,2$ приведены на Рис. 2а.

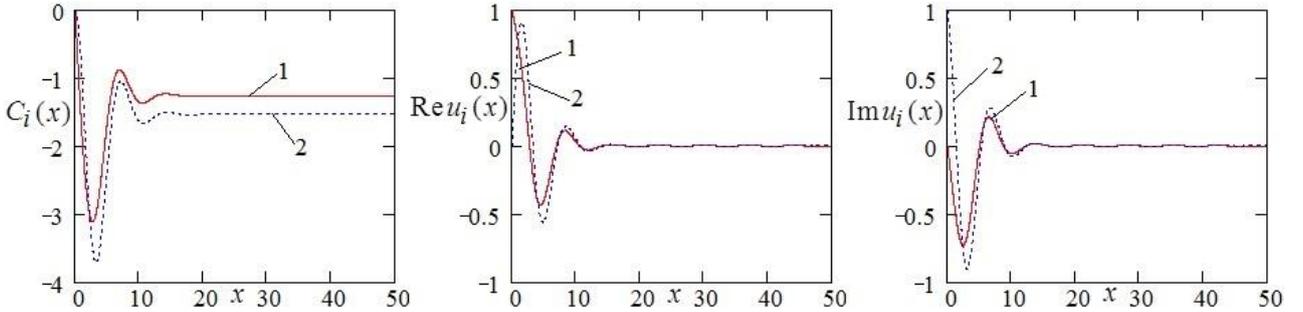


Рис. 2а. Графики функций $u_i(x)$, $C_i(x)$, для $1 - i=1$, $2 - i=2$.

Численный эксперимент показал, что краевые задачи (16) для $\alpha = (2,0)$, $\alpha = (0,2)$, $\alpha = (1,1)$ имеют стационарные решения, приведённые на Рис. 2б. Функции $C_\alpha(x)$, $u_\alpha(x)$ для указанных α позволяют найти приближённо $u(z)$, $C(z)$ для мощного торнадо с точностью до членов $\sim |u_0|^3 / \Gamma^{3/2}$, которые для мощного торнадо пренебрежимо малы (и, быть может, зависят от t):

$$u(z) = \Gamma^{1/2} \left[u_0(x) + a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + a_1^2 u_{20}(x) + a_1 a_2 u_{11}(x) + a_2^2 u_{02}(x) + O(|a|^3) \right],$$

$$C(z) = \Gamma^{1/4} R^{-1/2} \left[C_0(x) + a_1 C_1(x) + a_2 C_2(x) + a_1^2 C_{20}(x) + a_1 a_2 C_{11}(x) + a_2^2 C_{02}(x) + O(|a|^3) \right],$$

$$x = z \Gamma^{1/4} R^{1/2}, \quad u_0 = (a_1 + i a_2) \Gamma^{1/2}, \quad a \rightarrow 0.$$

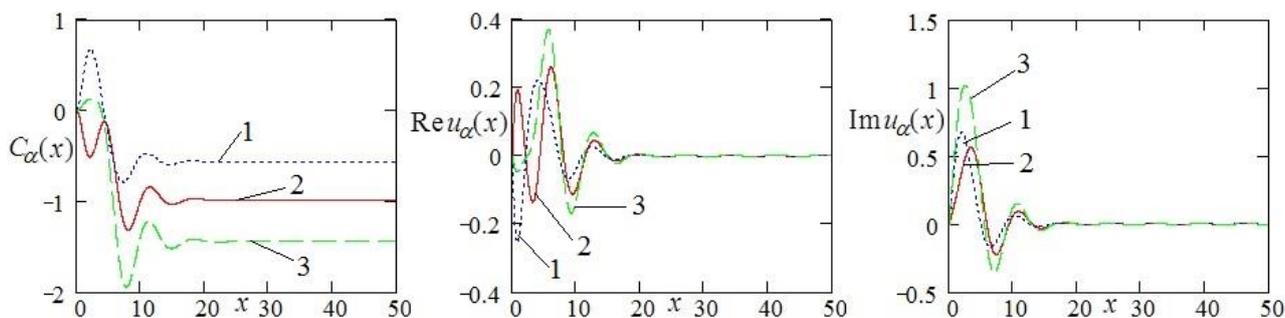


Рис. 2б. Графики функций $u_\alpha(x)$, $C_\alpha(x)$ для 1 – $\alpha = (2,0)$, 2 – $\alpha = (0,2)$, 3 – $\alpha = (1,1)$.

Вероятно, область применимости изложенного выше подхода достаточно велика. На это указывает следующее рассуждение. Несложно оценить угловую скорость ω вращения воздушных потоков вблизи поверхности Земли, обусловленного силой Кориолиса, $\omega = -\Omega_3 \sin \varphi$, где $\Omega_3 = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси, φ – широта местности, где возникает торнадо. Тогда $\sqrt{\Gamma} = |\Omega / \omega| = (\Omega / \Omega_3) |\sin \varphi|^{-1}$ и условие $\sqrt{\Gamma} \gg 1$ выполняется даже для слабых атмосферных вихрей в материнском облаке (особенно на экваторе, где $\varphi \cong 0$) с небольшой угловой скоростью вращения воздушных масс Ω . Таким образом, теоретические построения, относящиеся к слабым торнадо с небольшими значениями Ω достаточно сложны, но имеют в основном академический интерес, а для разрушительных мощных торнадо применима изложенная выше конструкция, позволяющая определить их параметры с любой необходимой точностью, сводя все вычисления к решению нескольких эталонных краевых задач.

4. Нахождение границы торнадо

Из наблюдений [1, 5] известно, что торнадо в атмосферном воздухе имеет вид воронки, граница которой определяет геометрическую форму торнадо. Эта граница определяется условием равенства давлений воздуха в торнадо и в атмосфере Земли, не возмущённой движением воздушных масс. В предположении осевой симметрии указанная граница $r(z)$ (профиль торнадо) находится из уравнения

$$Qr^2 + \Phi(z) = p(z) \Leftrightarrow r = \left(\frac{p(z) - \Phi(z)}{Q} \right)^{1/2}, \quad (19)$$

где $p(z)$ – распределение давления невозмущённого атмосферного воздуха по высоте z . От вида функции $p(z)$ существенно зависит и профиль торнадо $r(z)$. В простейшем случае можно пренебречь изменением давления воздуха по высоте и считать $p(z) = \text{const}$. В более реалистичном случае, рассматриваемом ниже, в предположении адиабатической атмосферы имеем зависимость [6]:

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{zg}{c_s^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

где $c_s = (\gamma p_0 / \rho_0)^{1/2}$ – скорость звука, $\gamma > 1$ – показатель адиабаты, p_0, ρ_0 – давление и плотность воздуха у поверхности Земли при $z = 0$. В безразмерном виде

$$p(z) = \left(1 - \frac{zg_0}{M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad M = \frac{c_s}{U_0} \text{ – число Маха.} \quad (20)$$

Формула (20) справедлива для высот $0 \leq z \leq c_s^2 / g$, что даёт для значений $c_s = 330 \text{ м/с}$, $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ диапазон $0 \leq z \leq 11 \text{ км}$, что вполне достаточно для исследования торнадо, достигающих по высоте нескольких километров. Из соотношения (9) следует

$$\frac{C^2}{2} + \frac{2\text{Re}u}{R} + \frac{M^2}{\gamma} \Phi + g_0 z = \text{const},$$

а уравнение (19) в безразмерном виде даёт

$$\frac{\Gamma}{2} \frac{\gamma}{M^2} r^2 + \Phi(z) = p(z),$$

откуда получается окончательное выражение для профиля торнадо

$$r(z) = \left(\frac{2}{\Gamma} \right)^{1/2} \left\{ \frac{C(z)^2}{2} + \frac{2\text{Re}u(z)}{R} + \frac{M^2}{\gamma} \left(1 - \frac{zg_0}{M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + g_0 z + \text{const} \right\}^{1/2}. \quad (21)$$

Функции $C(z), u(z)$ получаются численным решением краевой задачи (7), (8) и тем самым зависят от выбора левого граничного условия u_0 . Величина const в (21) выбирается из физических соображений и так, чтобы подкоренное выражение в (21) было неотрицательным. Для мощных, в смысле §3, торнадо

влияние двух первых слагаемых под радикалом в (21) невелико, поскольку, согласно (14), основной вклад в их сумму даёт величина

$$\frac{C_0(z\Gamma^{1/4}R^{1/2})}{\Gamma^{1/2}R} + \frac{4\text{Re}u_0(z\Gamma^{1/4}R^{1/2})}{\Gamma^{1/2}R} \approx \frac{1}{\Gamma^{1/2}R}, \quad \Gamma \rightarrow +\infty,$$

что намного меньше порядка суммы остальных двух слагаемых

$$\frac{M^2}{\Gamma} \left\{ \frac{2}{\gamma} \left(1 - \frac{zg_0}{M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \frac{2g_0z}{M^2} \right\}^{1/2} \approx \frac{M^2}{\Gamma}, \quad \Gamma \rightarrow +\infty.$$

Действительно,

$$\frac{M^2}{\Gamma} \gg \frac{1}{\Gamma^{1/2}R} \Leftrightarrow \frac{M^2R}{\Gamma^{1/2}} = \frac{c_s^2 \rho}{\Omega \mu} \gg 1, \quad (22)$$

где Ω – угловая скорость вращения вихря в материнском облаке, $\Omega = (2Q/\rho)^{1/2}$. Учитывая значения скорости звука $c_s = 3.3 \cdot 10^4$ см/с и кинематической вязкости воздуха (при 20 °С [7]) $\mu/\rho = 0.15$ см²/с, заключаем, что условие (22) выполнено с большим запасом (даже если Ω станет равной угловой скорости вращения электрической дрели!). Итак, для мощных торнадо имеем приближённую формулу

$$r(z) \cong \frac{M}{\Gamma^{1/2}} \left\{ \frac{2}{\gamma} \left(1 - \frac{zg_0}{M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \frac{2g_0z}{M^2} + \text{const} \right\}^{1/2},$$

которая в размерном виде даёт

$$r(z) = \frac{c_s}{\Omega} \left\{ \frac{2}{\gamma} \left(1 - \frac{zg}{c_s^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \frac{2gz}{c_s^2} + \text{const} \right\}^{1/2}. \quad (23)$$

Дальнейшее исследование зависит от значения показателя адиабаты γ . Согласно представлениям статистической физики [8], $\gamma = 1 + 2/\ell$, где ℓ – число независимых переменных в выражении полной энергии молекул, из которых состоит газ, через обобщённые координаты и импульсы. Считая воздух газом, состоящим из одноатомных частиц с двумя ($\ell = 2$) или тремя ($\ell = 3$) степенями свободы, получим $\gamma = 2$ или $\gamma = 5/3$ соответственно. Если учесть, что в действительности воздух состоит преимущественно из двухатомных молекул азота и кислорода, то надо считать $\ell = 5$ (без учёта колебаний атомов в молекуле) или $\ell = 7$ (если такие колебания учитываются) [8]. Тогда получим

$\gamma = 7/5$ (для $\ell = 5$) или $\gamma = 9/7$ (для $\ell = 7$). Проблема нахождения реального показателя адиабаты γ усугубляется сложной структурой воздуха, состоящего, как известно, по объёму на 78.09% из азота и 20.95% кислорода и ничтожно малых объёмов других газов (0.93% аргона, 0.03% углекислого газа и т.д.). Как вычислить показатель газовой смеси по показателям адиабаты его компонент, особенно если эти показатели различны, до конца неясно. Возвращаясь к формуле (23), наиболее простое выражение получим для показателя $\gamma = 2$:

$$r(z) = \frac{c_s}{\Omega} \left\{ 1 + \frac{z^2 g^2}{c_s^4} + \text{const} \right\}^{1/2} = \left\{ r(0)^2 + \left(\frac{g}{c_s \Omega} \right)^2 z^2 \right\}^{1/2}. \quad (24)$$

Формула (24) задаёт воронку с радиусом $r(0)$ у поверхности Земли, изображённую на Рис. 3. Торнадо получается вращением графика на Рис. 3 вокруг оси z и качественно соответствует данным наблюдений.

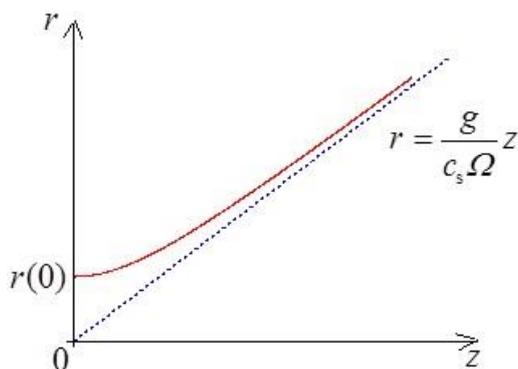


Рис. 3. График функции, вращение которого качественно определяет вид торнадо.

Для других показателей адиабаты получается схожая картина с тем отличием, что график на Рис. 3 обладает минимумом в точке $z_0 = (c_s^2 / g)[1 - (\gamma - 1)^{\gamma-1}]$ и, значит, воронка имеет перетяжку на высоте z_0 . При этом

$$r'(0) = -\frac{g}{\Omega^2 r(0)} \frac{2-\gamma}{\gamma-1}, \quad r(0) = \frac{c_s}{\Omega} \left(\frac{2}{\gamma} + \text{const} \right)^{1/2}.$$

Согласно наблюдениям [1, 5], радиус воронки у поверхности Земли $r(0)$ меняется в диапазоне от нескольких метров до километра, поэтому из полученного выражения следует, что $|r'(0)| \ll 1$ и, значит, граница торнадо у поверхности Земли почти ей перпендикулярна. Условие неотрицательности подкоренного выражения (23) равносильно его неотрицательности в точке минимума z_0 , т.е. когда

$$2\left(1 - \frac{(\gamma - 1)^{\gamma-1}}{\gamma}\right) + \text{const} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{r(0)\Omega}{c_s}\right)^2 \geq \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma} [(\gamma - 1)^{\gamma-2} - 1].$$

Отсюда следует ограничение (“соотношение неопределённости”), связывающее две величины $r(0)$ и Ω :

$$r(0)\Omega \geq (2(\gamma - 1) / \gamma)^{1/2} ((\gamma - 1)^{\gamma-2} - 1)^{1/2} c_s. \quad (25)$$

Например, для $\gamma = 5/3$ получим $r(0)\Omega \geq 0.34c_s$. Из соотношения неопределённости (25) следует, что чем меньше радиус воронки торнадо у поверхности Земли, тем с большей угловой скоростью вращаются воздушные массы вихря в материнском облаке, порождающего торнадо.

Соотношение (23) может быть переписано в виде

$$r(z) = \left\{ r(0)^2 + 2\frac{g}{\Omega^2} z + \left(\frac{c_s}{\Omega}\right)^2 \frac{2}{\gamma} \left[1 - \left(1 - \frac{zg}{c_s^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right] \right\}^{1/2}, \quad 0 \leq z \leq \frac{c_s^2}{g},$$

где $r(0)$ и Ω удовлетворяют неравенству (25).

Итак, простая модель торнадо, рассмотренная в [2, 3] и настоящей работе, позволяет качественно правильно предсказать воронкообразную геометрическую форму торнадо.

5. Элементарная теория циклонов и антициклонов

Циклонами и антициклонами называются, как известно, гигантские атмосферные вихри. В циклоне вертикальное движение воздуха восходящее, а давление в центре циклона меньше, чем на его периферии. В антициклоне, наоборот, вертикальное движение воздуха нисходящее, а давление в центре антициклона больше, чем на его периферии. Эти соображения мотивируют следующее определение.

Определение. Циклоном (антициклоном) называется стационарное решение системы (7) для $\Gamma > 0$ ($\Gamma < 0$), для которого имеет место асимптотическое (эквивалентность в смысле матанализа) равенство $S(z) \sim \alpha z^n$, $z \rightarrow +\infty$ для некоторых $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) и $n \geq 0$, зависящих от циклона (антициклона).

Показатели α и n характеризуют силу циклона и антициклона – чем больше $|\alpha|$ и n , тем мощнее эти воздушные течения. Это определение обобщается и на нестационарные циклоны и антициклоны. Циклоном является, например, любое торнадо (для него $\alpha > 0$ и $n = 0$, и, значит, торнадо – это циклон минимальной мощности). С другой стороны, антиторнадо не является ни циклоном, ни антициклоном.

Численные исследования приводят к следующим результатам.

I. Для любых $\Gamma < 0$, $R > 0$, $u_0 \in \mathbb{C}$, $u_0 \neq -\sqrt{|\Gamma|}$ не существует стационарного решения системы (7) с граничным условием

$$u(0) = u_0, \quad u(\infty) = -\sqrt{|\Gamma|}, \quad C(0) = 0.$$

При $u_0 = -\sqrt{|\Gamma|}$ система (7) с указанным граничным условием имеет стационарное аналитическое решение $u(t, z) \equiv -\sqrt{|\Gamma|}$, $C(t, z) = 2\sqrt{|\Gamma|}z$.

II. Существует стационарное решение системы (11) для знака “-” с граничным условием

$$u(0) = 0, \quad u(\infty) = 1, \quad C(0) = 0,$$

обозначаемое $u_0(x)$, $C_0(x)$, которое удовлетворяет асимптотическому равенству $C_0(x) \sim -2x$, $x \rightarrow +\infty$ и является антициклоном. (Графики функций $\operatorname{Re}u_0(x)$, $\operatorname{Im}u_0(x)$, $C_0(x)$ изображены на Рис. 4.)

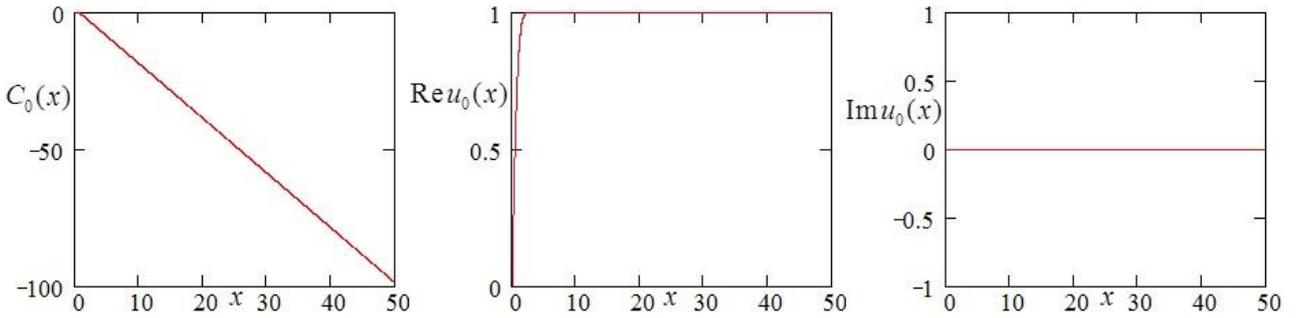


Рис. 4. Графики функций $\operatorname{Re}u_0(x)$, $\operatorname{Im}u_0(x)$, $C_0(x)$ с граничным условием $u(0) = 0$, $u(\infty) = 1$, $C(0) = 0$.

III. Найдётся $\varepsilon > 0$, такое, что для любого $|a| < \varepsilon$, $a \in \mathbb{C}$ существует стационарное решение системы (11) для знака “-” с граничным условием

$$u(0) = a, \quad u(\infty) = 1, \quad C(0) = 0,$$

обозначаемое $u_a(x)$, $C_a(x)$, для которых справедливы предельные соотношения (12) и равенства (13) при $\varepsilon = 0.01$ и замечания о порядке убывания, относящиеся к формулам (12), (13).

IV. Для $u_0 = e^{i\varphi}$, $u_0 \neq -1$ и любого $\Gamma < 0$ существует стационарное решение системы (7) с $R=1$ с граничным условием $u(0) = u_0$, $u(\infty) = \sqrt{|\Gamma|}$, $C(0) = 0$, являющееся антициклоном, для которого $C(z) \sim -2\sqrt{|\Gamma|}z$, $z \rightarrow +\infty$; для $u_0 = -1$ существует $\Gamma_{\text{кр}} \cong -1$, удовлетворяющее следующему условию: при $0 > \Gamma \geq \Gamma_{\text{кр}}$

не существует стационарного решения указанной выше краевой задачи для системы (7) с $R=1$, а для $\Gamma_{кр} > \Gamma$ такое решение существует, является антициклоном и $C(z) \sim -2\sqrt{|\Gamma|}z$, $z \rightarrow +\infty$.

Результат I согласуется со здравым смыслом. Действительно, если $\Gamma < 0$, то давление в центре осесимметричного воздушного потока больше, чем на его периферии, и, значит, воздух должен двигаться от оси потока к периферии, а не наоборот, поэтому с необходимостью должно выполняться условие $\text{Re}u > 0$. В частности, стационарных течений с условием $\text{Re}u(\infty) < 0$ быть не может. Исключением является неустойчивое физически нереализуемое решение $u = -2\sqrt{|\Gamma|}$, $C = 2\sqrt{|\Gamma|}z$.

Результат III означает ожидаемую непрерывную зависимость стационарного решения системы (11) для знака “–” от левого граничного условия. Результаты I, IV получены А.А. Таюрским (в печати).

Опираясь на Теорему 2 и результаты II и III, нетрудно построить по схеме §3 теорию мощных антициклонов, позволяющую сколь угодно точно восстановить решение системы (7) (в частности, стационарное или квазистационарное) для $\Gamma < 0$ с краевым условием $u(0) = u_0$, $u(\infty) = \sqrt{|\Gamma|}$, $C(0) = 0$ при $|u_0| / \sqrt{|\Gamma|} \ll 1$. Ключевым элементом построения – применение теории возмущений по комплексному параметру $a \in \mathbb{C}$ при нахождении решения нелинейной системы (11) со знаком “–”, подчинённой краевым условиям $u(0) = a$, $u(\infty) = \sqrt{|\Gamma|}$, $C(0) = 0$, с последующей конкретизацией $a = u_0 / \sqrt{|\Gamma|}$. Например, для любого стационарного решения системы (7) с $\Gamma < 0$, подчинённого краевым условиям $u(0) = u_0$, $u(\infty) = \sqrt{|\Gamma|}$, $C(0) = 0$, имеет место асимптотическая формула, аналогичная (14)

$$\begin{aligned} u(z) &= |\Gamma|^{1/2} \left[u_0 \left(z |\Gamma|^{1/4} R^{1/2} \right) + O\left(|\Gamma|^{-1/2} \right) \right], \quad |\Gamma| \rightarrow +\infty, \\ C(z) &= |\Gamma|^{1/4} R^{-1/2} \left[C_0 \left(z |\Gamma|^{1/4} R^{1/2} \right) + O\left(|\Gamma|^{-1/2} \right) \right], \quad |\Gamma| \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (26)$$

при условии, что левое граничное условие u_0 ограничено константой, не зависящей от Γ . При этом, что важно, главный член разложения (26) не зависит от левого граничного условия u_0 .

6. Магнитный торнадо

Под магнитным торнадо понимается обладающий огромной энергией закрученный вокруг некоторой оси поток проводящего электрический ток газа в магнитном поле. Такие потоки возникают, например, в солнечной плазме. Однако автоматически перенести развитые выше представления об

атмосферных воздушных потоках на солнечную плазму не удаётся. Прежде всего потому, что Солнце, представляющее собой огромный плазменный шар, не имеет атмосферы и солнечной поверхности. Поэтому необходимо уточнить, что понимается под магнитным торнадо. Ниже магнитным торнадо будем называть стационарное течение солнечной плазмы, гидродинамические параметры которого обладают осевой симметрией относительно некоторой вертикальной прямой, а вертикальная скорость имеет конечные и положительный предел при $z \rightarrow +\infty$. Здесь z – координата на вертикальной прямой, под которой понимается любая прямая, проходящая через центр Солнца, причём координата z отсчитывается от солнечного центра.

Рассмотрим динамику плазменной среды, подчинённой уравнениям классической МГД для несжимаемой вязкой плазмы с конечной проводимостью в постоянном гравитационном поле [9]

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \rho = \text{const},$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{Div} \left(\rho \mathbf{U} \mathbf{U} + \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) \mathbf{I}_3 - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}}{4\pi} \right) = 2\mu \operatorname{Div} \operatorname{def} \mathbf{U} + \rho \mathbf{g}, \quad (27)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \text{ (закон Фарадея)}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] \text{ (закон Ома)}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} \text{ (закон Ампера)},$$

где $\mu = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$ – гидродинамическая вязкость и проводимость плазмы, $\mathbf{g} = \text{const}$ – ускорение силы тяжести. Исключая \mathbf{j} и \mathbf{E} из числа неизвестных, получим уравнение для \mathbf{H} :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} (v_m \operatorname{rot} \mathbf{H} - [\mathbf{U}, \mathbf{H}]) = 0, \quad v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \quad (28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

где v_m – магнитная вязкость, причём последнее равенство в (28) есть ограничение только на начальное значение напряжённости магнитного поля \mathbf{H} .

В осесимметричном случае, $\partial / \partial \varphi = 0$, система (27) допускает частные решения вида:

$$\begin{aligned} U_r &= rA(t, z), & U_\varphi &= rB(t, z), & U_z &= C(t, z), \\ p &= r^2 Q(t, z) + \Phi(t, z), \\ H_r &= rP(t, z), & H_\varphi &= rS(t, z), & H_z &= G(t, z), \end{aligned} \quad (29)$$

где функции $A, B, C, P, S, G, Q, \Phi$ подлежат нахождению. Для их нахождения подставим соотношения (29) в систему (27). В [2] получен следующий результат.

Теорема 1. *В случае осевой симметрии функции (29) являются решением системы (27) тогда и только тогда, когда комплексные функции $u = A + iB$, $w = P + iS$ и вещественные функции C и G удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{G}{4\pi\rho} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 - \frac{w^2}{4\pi\rho} + \frac{2\gamma_0(t)}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + C \frac{\partial S}{\partial z} - G \frac{\partial B}{\partial z} - v_m \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial t} + C \frac{\partial G}{\partial z} - G \frac{\partial C}{\partial z} - v_m \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial C}{\partial z} = -2\operatorname{Re}u, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -2\operatorname{Re}w, \\ -\infty \leq z < +\infty, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\gamma_0(t)$ – произвольная вещественная функция. По решению системы (30) функция Q ищется из равенства

$$Q = \gamma_0(t) - \frac{|w|^2}{8\pi} = \gamma_0(t) - \frac{P^2 + S^2}{8\pi},$$

а функция Φ однозначно, с точностью до произвольной константы, из уравнения

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C^2}{2} + \frac{2\mu}{\rho} \operatorname{Re}u + \frac{\Phi}{\rho} + gz \right) = 0.$$

Здесь Re – символ вещественной части комплексного числа. #

Система (30) принимает компактный вид на подклассе решений, состоящих из функций u , w , C , G , для которых в некоторой точке z_0 тождественно по t выполнено равенство

$$\frac{\partial G}{\partial t} + v_m \frac{\partial P}{\partial z} - CP + AG \equiv 0. \quad (31)$$

Этот подкласс решений не зависит от выбора z_0 – можно показать, что если для решения системы (30) условие (31) выполнено в одной точке z_0 , то оно выполнено и в любой другой точке z_0 . Для решений указанного подкласса

второе и третье уравнения системы (30) равносильны одному комплексному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} + C \frac{\partial w}{\partial z} - v_m \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - G \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

а система (30) равносильна системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{G}{4\pi\rho} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 - \frac{w^2}{4\pi\rho} + \frac{2\gamma_0(t)}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + C \frac{\partial w}{\partial z} - v_m \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - G \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial C}{\partial z} = -2\operatorname{Re}u, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -2\operatorname{Re}w. \end{aligned} \quad (32)$$

В указанном подклассе решений системы (30) очевидно лежат решения, для которых в некоторой точке z_0 тождественно по t выполнены условия

$$G(t, z_0) \equiv \text{const}, \quad \left(v_m \frac{\partial P}{\partial z} - CP + AG \right) \Big|_{z=z_0} \equiv 0. \quad (33)$$

В (33) в качестве z_0 надо выбрать граничную точку области по z_0 , где решается система (30), однако такой выбор проблематичен, поскольку, как уже говорилось, у солнечной плазмы нет атмосферы и поверхности Солнца. Это в полной мере относится и к системам (30), (32), в частности, к мотивировке выбора граничной точке z_0 для расчётной области $z_0 \leq z < +\infty$ и граничных условий в точках z_0 и ∞ для этих систем. Даже равенство $C(z_0) = 0$, формализующее физическое условие непротекания, использованное выше в качестве граничного условия для вертикальной скорости на поверхности Земли, для солнечной плазмы ничем не мотивировано. Условие на бесконечности

$$u^2(\infty) - \frac{w^2(\infty)}{4\pi\rho} + \frac{2\gamma_0}{\rho} = 0$$

связывает величины $u(\infty)$ и $w(\infty)$, но не позволяет их вычислить без дополнительных предположений. Учитывая сказанное, рассмотрим влияние магнитного поля на течения типа торнадо, циклона или антициклона (которые при наличии магнитного поля определяются так же, как и выше) на двух конкретных примерах, в которых граничные условия вынужденно носят иллюстративный характер. Предварительно запишем систему (32) в безразмерном виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - M_A^2 G \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 - M_A^2 w^2 + \Gamma &= 0, \\
\frac{\partial w}{\partial t} + C \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{R_m} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - G \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial C}{\partial z} = -2 \operatorname{Re} u, \quad \frac{\partial G}{\partial z} = -2 \operatorname{Re} w, \\
0 \leq z < +\infty, \quad t \geq 0,
\end{aligned} \tag{34}$$

где $R = \rho L_0 U_0 / \mu$, $R_m = L_0 U_0 / \nu_m$ – гидродинамическое и магнитное числа Рейнольдса, $M_A = v_A / U_0$ – альфвеновское число Маха, $v_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho}$ – альфвеновская скорость, $\Gamma = \Gamma(t) = 2\gamma_0(t)t_0^2 / \rho$, L_0 , H_0 , U_0 , – характерные масштабы длины, напряжённости магнитного поля и скорости, причём считается $t_0 = L_0 / U_0$.

Пример 1. Рассмотрим решения системы (34) вида $w = iS$, $S = \text{const}$, $G = 0$. На таких решениях система (34) сводится к уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 - M_A^2 S^2 + \Gamma = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -2 \operatorname{Re} u, \tag{35}$$

которые позволяют изучить влияние на осесимметричные течения плазмы вида (29) азимутального магнитного поля $H_\varphi = rS$, $S = \text{const}$, порождаемого осевым однородным током. Указанные решения лежат, очевидно, в подклассе, определяемым условием (31), для которого системы (32) и (30) равносильны. Рассмотрим решения системы (35), удовлетворяющие краевым условиям

$$u(0) = i\omega, \quad \omega \geq 0, \quad u(\infty) = i\sqrt{\Gamma + M_A^2 S^2}, \quad C(0) = 0 \tag{36}$$

при $\Gamma + M_A^2 S^2 \geq 0$ и краевым условиям

$$u(0) = i\omega, \quad \omega \geq 0, \quad u(\infty) = \sqrt{|\Gamma + M_A^2 S^2|}, \quad C(0) = 0 \tag{37}$$

при $\Gamma + M_A^2 S^2 < 0$. Из результатов §3 и утверждения IV §5 следует, что стационарные решения для краевых условий (36) и (37) системы (35) существуют и относятся к типам торнадо, антиторнадо или антициклона в зависимости от значений Γ и S так, как это указано на Рис. 5.

На Рис. 5 приведены показатели антициклона α и n , парабола $\Gamma = -M_A^2 S^2$ относится к области антиторнадо, а парабола $\Gamma = \omega^2 - M_A^2 S^2$ не входит ни в область торнадо, ни в область антиторнадо и состоит из точек, задающих равномерное вращение плазмы вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω . Полученный результат приводит к трём важным выводам:

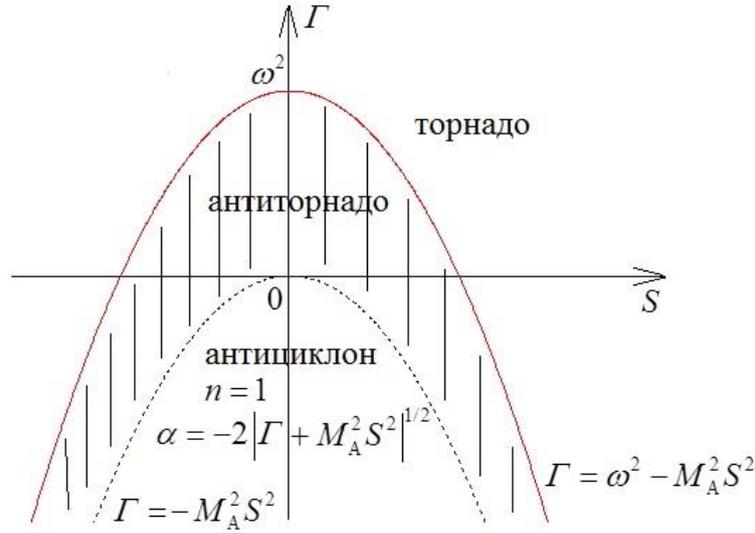


Рис. 5. Типы течений в зависимости от Γ и S .

- 1) азимутальное магнитное поле смещает в сторону уменьшения границы, разделяющей три типа течений – торнадо ($\Gamma > \Gamma_{кр} = \omega^2 - M_A^2 S^2$), антиторнадо ($\Gamma_{кр} > \Gamma \geq -M_A^2 S^2$) и антициклона ($\Gamma < -M_A^2 S^2$);
- 2) в сильном азимутальном поле $|S| > \omega / M_A$ течение типа торнадо возникает и для $\Gamma < 0$, т.е. когда суммарное (магнитное и гидродинамическое) давление в центре торнадо больше, чем на его периферии;
- 3) для торнадо при $\sqrt{\Gamma + M_A^2} / \omega \gg 1$ (мощный торнадо, см. §3) вертикальная скорость течения на бесконечности приближённо равна

$$C(\infty) \cong 1.34 (\Gamma + M_A^2 S^2)^{1/4} / \sqrt{R},$$

в частности, азимутальное магнитное поле вызывает увеличение вертикальной скорости торнадо на бесконечности. Из результатов §3 следует, что условие мощного торнадо выполнено при $\sqrt{\Gamma + M_A^2} / \omega > 100 \Leftrightarrow \Gamma > 10^4 \omega^2 - M_A^2 S^2$.

Пример 2. Известно [9], что интегрирование уравнений классической магнитной гидродинамики может быть сведено к интегрированию уравнений обычной гидродинамики в случае стационарных течений плазмы, когда магнитное поле и скорость параллельны друг другу. Рассмотрим стационарные решения системы (34) с $R_m = \infty$ (идеально проводящая плазма), для которых $w = ku$, $G = kC$, где k – произвольная вещественная константа. Для таких решений выполнено условие (31) и, значит, для них системы (30) и (32) равносильны. Для указанных решений система, с учётом $\partial / \partial t = 0$, сводится к виду:

$$(C - k^2 M_A^2) \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + u^2 (1 - k^2 M_A^2) + \Gamma = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -2 \operatorname{Re} u. \quad (38)$$

Комбинация $k^2 M_A^2$ характеризует роль магнитного поля в движении плазменного вещества и может быть названа *параметром замагниченности* плазмы. Нетрудно проверить, что $k^2 M_A^2$ равно отношению энергии магнитного поля к кинетической энергии плазмы, отнесённых к единице объёма. При $k^2 M_A^2 \rightarrow 0$ влияние магнитного поля на движение плазмы исчезающе мало. При $k^2 M_A^2 \rightarrow +\infty$ и, что самое важное, $k^2 M_A^2 \rightarrow 1$ это влияние резко возрастает. При $k^2 M_A^2 = 1$ система (38) решается аналитически

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2} R \Gamma z^2 + K_0 z + K_1, \quad K_0, K_1 \in \mathbb{C}, \\ C(z) &= -\frac{1}{3} R \Gamma z^3 - (\operatorname{Re} K_0) z^2 - 2(\operatorname{Re} K_1) z + K_3, \quad K_3 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (39)$$

где K_0, K_1, K_3 – произвольные константы. Формулы (39) задают пятимерное пространство атипичных циклонов или антициклонов с показателями $\alpha = R \Gamma / 3$, $n = 3$. Исследование краевых задач для системы (38) упрощается при помощи следующих преобразований.

При $k^2 M_A^2 < 1$ (слабое магнитное поле) система (38) заменой

$$C = \frac{\tilde{C}}{\sqrt{1 - k^2 M_A^2}}, \quad z = \frac{x}{\sqrt{1 - k^2 M_A^2}}, \quad \tilde{\Gamma} = \frac{\Gamma}{1 - k^2 M_A^2} \quad (40)$$

сводится к виду:

$$\tilde{C} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2 + \tilde{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = -2 \operatorname{Re} u, \quad (41)$$

который совпадает с системой (7) для $\partial / \partial t = 0$.

При $k^2 M_A^2 > 1$ (сильное магнитное поле) система (38) заменой переменных

$$C = -\frac{\tilde{C}}{\sqrt{k^2 M_A^2 - 1}}, \quad z = \frac{x}{\sqrt{k^2 M_A^2 - 1}}, \quad u = -\bar{v}, \quad \tilde{\Gamma} = \frac{\Gamma}{k^2 M_A^2 - 1}, \quad (42)$$

где черта означает комплексное сопряжение, сводится к виду:

$$\tilde{C} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v^2 - \tilde{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = -2 \operatorname{Re} v, \quad (43)$$

который совпадает с системой (7) для $\partial / \partial t = 0$, в которой Γ заменено на $-\Gamma$.

Согласно результатам §§3, 5, система (41) имеет решение для граничных условий

$$u(0) = i\omega, \quad \omega > 0, \quad \tilde{C}(0) = 0, \quad u(\infty) = \begin{cases} i\tilde{\Gamma}^{1/2}, & \tilde{\Gamma} \geq 0, \\ |\tilde{\Gamma}|^{1/2}, & \tilde{\Gamma} < 0, \end{cases}$$

а система (39) имеет решения для граничных условий

$$v(0) = i\omega, \quad \omega > 0, \quad \tilde{C}(0) = 0, \quad v(\infty) = \begin{cases} \tilde{\Gamma}^{1/2}, & \tilde{\Gamma} > 0, \\ i|\tilde{\Gamma}|^{1/2}, & \tilde{\Gamma} \leq 0, \end{cases}$$

принадлежащих к одному из трёх типов – торнадо, антиторнадо, антициклон. Применяя преобразования (40), (42), заключаем, что исследуемая система (38) имеет решения для краевых условий

$$u(0) = i\omega, \quad \omega > 0, \quad \tilde{C}(0) = 0, \quad u(\infty) = \begin{cases} i\left(\frac{\Gamma}{1-k^2M_A^2}\right)^{1/2}, & \frac{\Gamma}{1-k^2M_A^2} \geq 0, \\ \operatorname{sgn}(1-k^2M_A^2)\left|\frac{\Gamma}{1-k^2M_A^2}\right|^{1/2}, & \frac{\Gamma}{1-k^2M_A^2} < 0, \end{cases} \quad (44)$$

принадлежащих к одному из четырёх типов – торнадо, антиторнадо, циклон, антициклон, в зависимости от значений Γ и kM_A , как это показано на Рис. 6. Интервал $(-M_A^{-1}, M_A^{-1})$ на оси k входит в область антиторнадо, а бесконечные интервалы $(-\infty, -M_A^{-1})$, $(M_A^{-1}, +\infty)$ – в область торнадо, точки параболы $\Gamma = \omega^2(1-k^2M_A^2)$, не лежащие на оси k , соответствуют решениям системы (38), задающим вращение плазмы вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω .

При $|\Gamma / (1-k^2M_A^2)|^{1/2} / \omega \gg 1$ (мощное торнадо или антиторнадо, см. §3) бесконечности приближённо равна

$$\begin{aligned} C(\infty) &\cong 1.35\Gamma^{1/4}R^{-1/2}(1-k^2M_A^2)^{-3/4} - \text{для торнадо,} \\ C(\infty) &\cong -1.35|\Gamma|^{1/4}R^{-1/2}(k^2M_A^2-1)^{-3/4} - \text{для антиторнадо.} \end{aligned} \quad (45)$$

Из результатов §3 следует, что условие мощного торнадо или антиторнадо выполнено при

$$\left(\frac{\Gamma}{1-k^2M_A^2}\right)^{1.2} \omega^{-1} > 100 \Leftrightarrow \begin{cases} \Gamma > 10^4 \omega^2 (1-k^2M_A^2), & |kM_A| < 1, \\ \Gamma < 10^4 \omega^2 (1-k^2M_A^2), & |kM_A| > 1. \end{cases} \quad (46)$$

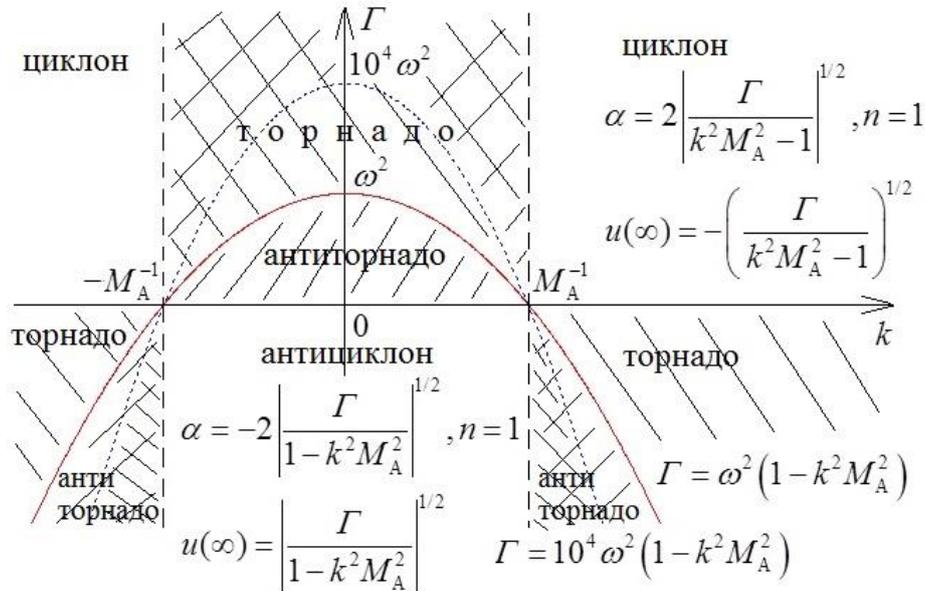


Рис. 6. Области течений на плоскости (Γ, k) .

Область мощных торнадо и антиторнадо, определённая неравенством (46), изображена двойной штриховкой на Рис. 6.

Представленные результаты приводят к трём важным выводам.

1) Существует критическое (бифуркационное) значение параметра замагниченности, равное 1, разделяющее типы течений плазмы – торнадо от циклонов, антиторнадо от антициклонов. Причём при стремлении точки (k, Γ) к бифуркационной прямой $k = \pm M_A^{-1}$ различия между указанными типами течений не стираются, а усиливаются, что выражается, согласно формулам (45), (46) в неограниченном возрастании скорости плазмы – вертикальной и угловой скорости вращения торнадо и антиторнадо, а также радиальной скорости и показателя α циклона и антициклона. В частности, существуют сверхмощные магнитные торнадо, в которых плазма течёт вдоль магнитного поля и имеет конечную замагниченность.

2) В сильном магнитном поле с параметром замагниченности, большим 1, существуют плазменные течения типа торнадо и для $\Gamma < 0$, т.е. когда суммарное (гидродинамическое и магнитное) давление в центре торнадо больше, чем на его периферии.

3) Для фиксированного или ограниченного Γ при стремлении параметра замагниченности к бесконечности, согласно формулам (40), (42), (44), скорость плазмы в циклонах и торнадо стремится к нулю, в частности, сильное магнитное поле препятствует возникновению торнадо и циклонов.

Дополнительные соображения см. в [10].

7. Заключительные замечания

Следует осторожно относиться к результатам §6, поскольку они основаны на классической МГД и, значит, частично, а может быть и полностью, могут

оказаться артефактами. Наиболее спорным является учёт гидродинамической вязкости в МГД-приближении. Известно [11], что МГД-уравнения получаются предельным переходом из первых принципов при $\sqrt{N_0} \rightarrow +\infty$, где $N_0 = n_0^2 L_0$ – характерное погонное число частиц плазмы. Роль гидродинамической вязкости определяется величиной числа Рейнольдса $R = \rho_0 U_0 L_0 / \mu = m / (t_0 \mu) \cdot n_0 L_0^2 \sim N_0$. Поэтому в МГД-пределе $\sqrt{N_0} \rightarrow +\infty$ очевидно $R \rightarrow +\infty$ и влияние гидродинамической вязкости ничтожно мало. С другой стороны, как отмечалось в [2], явление торнадо обусловлено прежде всего вязкими эффектами. Выход из этой ситуации в построении теории магнитного торнадо на базе двухжидкостной электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) плазмы [11], позволяющей учесть гидродинамические вязкости электронов и ионов, что в принципе возможно, поскольку ЭМГД-уравнения допускают решения типа (29). Однако получающиеся при подстановке выражений (29) в ЭМГД-систему уравнения в частных производных на функции A, B, \dots, S, G , называемые *уравнениями ЭМГД-торнадо*, существенно сложнее системы (30) и имеют более высокий порядок. При этом уравнения ЭМГД-торнадо, оказывается, не имеют решений типа рассмотренных в **Примерах 1, 2** из §6. Поэтому решения указанных примеров являются, самое большее, асимптотикой при неограниченном увеличении характерного погонного числа частиц существенно более сложным и пока неизвестных решений уравнений ЭМГД-торнадо. Последние уравнения здесь не выписываются, поскольку их рассмотрение выходит за рамки настоящей работы.

Уравнения торнадо (7) могут быть сведены к одному нелинейному уравнению относительно вертикальной скорости $C(t, z)$, которая связана с азимутальной компонентой векторного потенциала A поля скоростей $\mathbf{U} = \text{rot} A$ формулой $A_\varphi = rC / 2$. Чтобы получить это уравнение, перепишем систему (7) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + C \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + A^2 - B^2 + \Gamma &= 0, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + C \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + 2AB &= 0, \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= -2A, \quad u = A + iB. \end{aligned} \quad (47)$$

Выразим A через C из третьего уравнения (47) и подставим в первое, из которого найдём функцию B^2 :

$$B^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial z} - \frac{1}{2} C \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^3 C}{\partial z^3} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 + \Gamma. \quad (48)$$

Умножая второе уравнение системы (47) на B , получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{C}{2} \frac{\partial B^2}{\partial z} - \frac{1}{R} B \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + 2AB^2 = 0. \quad (49)$$

Теперь воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$B \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2} - \frac{1}{4B^2} \left(\frac{\partial B^2}{\partial z} \right)^2.$$

Подставляя его и выражение A через C в уравнение (49), имеем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} + \frac{C}{2} \frac{\partial B^2}{\partial z} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2} + \frac{1}{4RB^2} \left(\frac{\partial B^2}{\partial z} \right)^2 - B^2 \frac{\partial C}{\partial z} = 0. \quad (50)$$

Таким образом получили уравнение относительно функции B^2 , выражение (48) которой через C было получено выше. Подставляя (48) в (50), получим искомое уравнение относительно C :

$$B^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial z} + \frac{C}{2} \frac{\partial B^2}{\partial z} - \frac{1}{2R} \frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2} - B^2 \frac{\partial C}{\partial z} \right\} + \frac{1}{4R} \left(\frac{\partial B^2}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad (51)$$

$$B^2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial z} - \frac{1}{2} C \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^3 C}{\partial z^3} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 + \Gamma.$$

Результат подстановки нижнего уравнения (51) в верхнее упрощается, если воспользоваться равенствами

$$\frac{\partial B^2}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 C}{\partial t^2 \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \frac{1}{2} C \frac{\partial^3 C}{\partial t \partial z^2} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^4 C}{\partial t \partial z^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial z},$$

$$\frac{\partial B^2}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 C}{\partial t \partial z^2} - \frac{1}{2} C \frac{\partial^3 C}{\partial z^3} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^4 C}{\partial z^4},$$

$$\frac{\partial^2 B^2}{\partial z^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^4 C}{\partial t \partial z^3} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^5 C}{\partial z^5} - \frac{\partial C}{\partial z} \frac{\partial^3 C}{\partial z^3} - C \frac{\partial^4 C}{\partial z^4} \right\}.$$

Таким образом, (51) – это нелинейное уравнение пятого порядка в частных производных относительно C . Уравнение (51) решается на полупрямой $0 \leq z < +\infty$ с определёнными граничными условиями. Например, стационарные граничные условия (8) с учётом соотношения $u_0 = A_0 + iB_0$ дают:

$$C(0) = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z}(0) = -2A_0, \quad \frac{\partial^3 C}{\partial z^3}(0) = 2R(B_0^2 - A_0^2 - \Gamma),$$

$$\frac{\partial C}{\partial z}(\infty) = 0, \quad -C(\infty) \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}(\infty) + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 C}{\partial z^3}(\infty) = 0. \quad (52)$$

Отметим нелинейность правого граничного условия (52). Решение краевой задачи (50), (52) имеет физический смысл, если для всех $z \geq 0$, $t \geq 0$ верно неравенство

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial z} - \frac{1}{2} C \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^3 C}{\partial z^3} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 + \Gamma \geq 0.$$

Проведённое рассмотрение показывает, что вертикальная скорость в торнадо полностью определяет радиальную и азимутальную скорости, причём последнюю с точностью до знака. В свою очередь, радиальная и азимутальная скорости определяют вертикальную скорость только посредством своих значений на поверхности Земли и, быть может, на бесконечности.

Поиск стационарных решений уравнения (51) сводится к исследованию более простого уравнения

$$B^2 \left\{ \frac{C}{2} (B^2)' - \frac{1}{2R} (B^2)'' - B^2 C' \right\} + \frac{1}{4R} \left((B^2)' \right)^2 = 0, \quad (53)$$

$$B^2 = -\frac{C}{2} C'' + \frac{1}{2R} C''' + \frac{1}{4} (C')^2 + \Gamma,$$

причём

$$(B^2)' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{R} C^{(4)} - C C''' \right\}, \quad (B^2)'' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{R} C^{(5)} - C' C''' - C C^{(4)} \right\},$$

где штрих означает производную по z . Уравнение (53) решается на полупрямой $0 \leq z < +\infty$ и должно быть дополнено краевыми условиями, например, вида (52), где $\partial / \partial z$ заменено на d / dz . Физический смысл имеют только решения уравнения (53), для которых для всех $z \geq 0$ выполнено неравенство

$$-C C'' + \frac{1}{R} C''' + \frac{1}{2} (C')^2 + 2\Gamma \geq 0.$$

Выше считалось, по умолчанию, что $B^2 \neq 0$. Условие $B^2 = 0$ позволяет выделить класс частных решений уравнения (51), удовлетворяющих тождеству

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial t \partial z} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)^2 - \frac{C}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \frac{1}{2R} \frac{\partial^3 C}{\partial z^3} + \Gamma = 0. \quad (54)$$

Уравнение (54) описывает воздушные течения вида (1), для которых азимутальная скорость равна нулю. Оно имеет два стационарных решения при

$\Gamma = 0$: $C_1(z) = -4/(Rz)$, $C_2(z) = Kz^2$, где K – произвольная постоянная. Последнее решение удовлетворяет граничному условию $C(0) = 0$ и относится к типу циклон ($K > 0$) или антициклон ($K < 0$) с показателем $n = 2$ (см. §5).

Уравнения (51), (53), несмотря на свою громоздкость, могут оказаться полезными. Например, при $R = \infty$ (предел исчезающей вязкости) система (7) интегрируется в квадратурах, что было показано в [2] довольно искусственным образом с привлечением методов теории функций комплексного переменного. Исходя из уравнения (53), можно дать прямой простой способ интеграции. Действительно, при $R = \infty$ из (53) следует, что либо $B^2 = 0$, либо

$$\frac{C}{2}(B^2)' - B^2 C' = 0. \quad (55)$$

Второй случай, очевидно, содержит первый. Но из (55) следует наличие первого интеграла $B^2 = DC^2$, $D \geq 0$ – произвольная константа, причём $D = 0$ отвечает случаю $B^2 = 0$. Теперь из выражения (53) для B с учётом $R = \infty$ получается уравнение

$$DC^2 + \frac{C}{2}C'' = \frac{1}{4}(C')^2 + \Gamma.$$

Понижающая порядок уравнения подстановка $C' = F(C)$ даёт

$$DC^2 + \frac{C}{2}FF' = \frac{F^2}{4} + \Gamma,$$

что приводит к линейному дифференциальному уравнению относительно функции $Y(C) = F^2/4$:

$$DC^2 + CY' = Y + \Gamma,$$

которое легко интегрируется методом вариации произвольной постоянной. Окончательно получим $Y(C) = EC - DC^2 - \Gamma$, $F(C) = 2(EC - DC^2 - \Gamma)^{1/2}$, где E – произвольная постоянная. Теперь $C(z)$ ищется из уравнения $C' = F(C)$, которое для $D > 0$ даёт

$$C(z) = \frac{E}{2D} + S \sin\left(2\sqrt{D}z + \text{const}\right), \quad S^2 = \frac{E^2}{4D^2} - \frac{\Gamma}{D},$$

а при $D = 0$

$$C(z) = \frac{1}{E} \left[\Gamma + (Ez + \text{const})^2 \right]$$

нетрудно проверить, что эти решения, с точностью до обозначений, совпадают с полученными в [2].

Ещё один пример относится к поиску решений уравнения (51), для которых вертикальная скорость $C(t, z)$ линейно зависит от z , т.е. имеет вид:

$$C(t, z) = \alpha(t)z + \beta(t). \quad (56)$$

Для таких решений функция $\beta(t)$ – произвольная, а $\alpha(t)$ ищется подстановкой выражения (56) в уравнение (51), что даёт:

$$B^2 = -\frac{\dot{\alpha}}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + \Gamma, \quad B^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} B^2 - \alpha B^2 \right\} = 0,$$

где точка означает дифференцирование по t . Отсюда либо $B^2 = 0$, либо $(1/2)dB^2/dt - \alpha B^2 = 0$, причём второй случай включает первый и приводит к дифференциальному уравнению

$$-\frac{\ddot{\alpha}}{4} + \frac{3}{4}\alpha\dot{\alpha} - \frac{\alpha^3}{4} - \alpha\Gamma = 0. \quad (57)$$

Последнее уравнение в других переменных проинтегрировано в [2]. Общее решение, зависящее от двух произвольных констант P и S , имеет вид

$$\alpha(t) = \begin{cases} 2\sqrt{\Gamma} \frac{\sin(2\sqrt{\Gamma}t + P)}{\cos(2\sqrt{\Gamma}t + P) + S}, & \Gamma > 0, \\ -\frac{2(t + P)}{(t + P)^2 + S}, & \Gamma = 0, \\ -2\sqrt{|\Gamma|} \frac{\text{sh}(2\sqrt{|\Gamma|}t + P)}{\text{ch}(2\sqrt{|\Gamma|}t + P) + S}, & \Gamma < 0. \end{cases} \quad (58)$$

Функция $\alpha(t)$ определена для всех $t \in \mathbb{R}$ только при $\Gamma > 0$ и $|S| > 1$; $\Gamma = 0$ и $S > 0$; $\Gamma < 0$ и $S > -1$. Условие $B^2 = -\dot{\alpha}/2 + \alpha^2/4 + \Gamma \geq 0$ выполнено при $\Gamma > 0$ для $|S| \geq 1$, при $\Gamma = 0$ для $S \geq 0$ и при $\Gamma < 0$ для $|S| \leq 1$, что даёт физическое ограничение на произвольную постоянную S .

Уравнение (57) понижающей подстановкой $\dot{\alpha} = F(\alpha)$ сводится к виду $-FF' + 3\alpha F - \alpha^3 - 4\alpha\Gamma = 0$ и затем подстановкой $y = 1/F$ приводится к уравнению $y' + 3\alpha y^2 - (\alpha^3 + 4\alpha\Gamma)y^3 = 0$, которое является частным случаем уравнения Абеля первого рода и может быть проинтегрировано [12]. Однако из теоремы существования и единственности решения ОДУ легко установить, что формулы (58) для $\Gamma > 0$ и $\Gamma < 0$ дают общее решение уравнения (57). Для

$\Gamma = 0$ это неверно, но для решений, отличных от приведённого в (58) для $\Gamma = 0$, заведомо нарушается условие $B^2 = -\dot{\alpha} / 2 + \alpha^2 / 4 \geq 0$, поэтому они не имеют физического смысла и мы их не приводим.

Список литературы

1. Наливкин Д.В. Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность. – Л.: Наука, 1969. – 487 с.
2. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Простая математическая модель торнадо // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 42. 34 с. doi:10.20948/prepr-2019-42.
3. Gavrikov M.B., Taiurskii A.A. A Mathematical Model of Tornado // Journal of Physics: Conference Series. **1336**, 012001, 2019. doi:10.1088/1742-6596/1336/1/012001.
4. Sven Wedemeyer-Böhm, Eamon Scullion, Oskar Steiner, Luc Rouppe van der Voort, Jaime de la Cruz Rodriguez, Viktor Fedun & Robert Erdélyi. Magnetic tornadoes as energy channels into the solar corona // Nature. 2012. V. 486. p. 505–508. doi: 10.1038/nature11202.
5. Вараксин А.Ю., Роман М.Э., Копейцев В.Н. Торнадо. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 344 с.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976. 584 с.
9. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
10. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Математическая модель магнитного торнадо // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 42. 36 с. doi:10.20948/prepr-2020-42.
11. Гавриков М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика. М.: КРАСАНД. 2018. 584 с.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.