



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 45 за 2020 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Конев С.А.

В-ряды для полного
(m,k)-метода

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Конев С.А. В-ряды для полного (m,k)-метода // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 45. 29 с.
<http://doi.org/10.20948/prepr-2020-45>
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-45>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

С.А. Конев

B-ряды для полного (m, k) -метода

Москва — 2020

Конев С.А.

B-ряды для полного (m, k) -метода

В работе получено символическое представление производных численного решения полного (m, k) -метода. При записи производных активно применены обозначения теории корневых деревьев Бутчера. Результат получен с помощью техники раскрашивания стадий. Описаны возможные приложения полученных результатов.

Ключевые слова: жёсткие системы, деревья Бутчера, методы Розенброка, (m, k) -методы, условия порядка.

Stanislav Andreevich Konev

B-series for complete (m, k) -method

Symbolic expression for derivatives of numerical solution of the complete (m, k) -method are constructed. The expressions are described with Butcher rooted trees. The concept of stages "color" is actively used in proof of the main theorem. The possible applications of obtained results are discussed.

Key words: stiff systems, Butcher trees, Rosenbrock methods, (m, k) -methods, order conditions.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-01-00252, № 18-31-20020 и № 19-01-00602).

Введение

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

$$u' = f(t, u), \quad (0.1)$$

где вектор-функция $u = u(t)$ — точное решение задачи, а $f(t, u)$ — вектор-функция правой части, возникают при решении многих задач математической физики. Такие системы могут как сами являться объектом исследования (например, при моделировании процессов химической кинетики [1, 2]), так и быть вспомогательным инструментом при решении больших задач для уравнений математической физики в частных производных [3, 4].

Часто получаемые в приложениях задачи Коши для систем уравнений (0.1) являются жёсткими. Понятие жёсткости не имеет общепринятой трактовки, но часто под этим понимают наличие сильной разномасштабности скоростей протекания описываемых системой процессов. Попытка формализовать это свойство приводит к следующему определению [5, §5.4].

Определение 1. Задача Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$u' = f(u), \quad 0 < t \leq T, \quad (0.2a)$$

$$u(0) = u_0, \quad (0.2b)$$

где $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^d(t))^T$ — точное решение задачи, $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^d)^T$ — вектор начальных условий, $f = (f^1(u), \dots, f^d(u))$ — вектор-функция правой части, называется жёсткой, если число S , определяемое по формуле

$$S = \sup_{t \in (0, T]} \left(\max_{1 \leq i \leq d} |\operatorname{Re} \lambda_i(t)| / \min_{1 \leq i \leq d} |\operatorname{Re} \lambda_i(t)| \right), \quad (0.3)$$

где $\{\lambda_i(t)\}_{i=1}^d$ — собственные значения матрицы Якоби $J = f_u(u)$, вычисленной на точном решении $u(t)$, велико (пишут $S \gg 1$).

Замечание 1. Переход от задачи для системы (0.1) к задаче для автономной системы (0.2) не вызывает проблем, поскольку к любой неавтономной системе можно применить процедуру автономизации [6, §1.1].

Замечание 2. Обычно при решении конкретных задач становится ясно, что означает требование $S \gg 1$ и когда оно реализуется. Существуют и другие определения жёсткости [6, §1.2], [7, глава 9], отличные от представленного, но все они опираются на общую идею о различии скоростей протекания описываемых процессов.

Данная работа посвящена исследованию семейства (m, k) -методов интегрирования жёстких систем, впервые представленных в работе [8], и продолжает тематику предыдущей работы автора [9], в которой представлен вывод условий порядка для упрощённого (m, k) -метода с использованием теории

корневых деревьев Бутчера. В данной работе представлено обобщение этого инструментария на случай *полного* (m, k) -метода.

Работа имеет следующую структуру: в разделе 1 представлена терминология и основные результаты предыдущей работы. В разделах 2 и 3 соответственно рассмотрены случаи однополосной и двухполосной раскрасок таблиц коэффициентов (m, k) -метода. Раздел 4 посвящён доказательству общего случая, когда количество различных полос в таблице произвольно. В разделе 5 представлены следствия из основной теоремы и описаны возможные приложения полученных результатов в теории численных методов решения ОДУ. В заключении подведены итоги работы.

1. Известные результаты

В разделе представлены основные определения и результаты предыдущей работы. Здесь и далее для исключения неоднозначности (m, k) -метод называется (s, p) -методом интегрирования жёстких систем.

Определение 2. Численный метод интегрирования задачи Коши для системы ОДУ (0.2) называется (s, p) -методом, если один его шаг можно записать в виде

$$y_1 = y_0 + \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (1.1a)$$

$$k_i = hf(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j) + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} k_j + hJ \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j, \quad i \in M_{s,p}^{(0)}, \quad (1.1b)$$

$$k_i = k_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} k_j + hJ \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j, \quad i \in M_{s,p}^{(1)}, \quad (1.1c)$$

где s — число стадий метода, h — шаг численного интегрирования, $\{b_i\}_{i=1}^s$, $\{\alpha_{ij}\}_{i=1,j=1}^{s,s}$, $\{r_{ij}\}_{i=1,j=1}^{s,s}$, $\{\gamma_{ij}\}_{i=1,j=1}^{s,s}$ — коэффициенты метода, $M_{s,p}^{(0)}$ и $M_{s,p}^{(1)}$ — множества индексов, определяемые по следующим правилам:

$$M_s = \{1, 2, \dots, s\} \subset \mathbb{N}$$

— номера всех стадий метода,

$$M_{s,p}^{(0)} = \{s_i \in M_s : s_1 = 1, s_{i-1} < s_i, 2 \leq i \leq p\}$$

— номера стадий, на которых происходит вычисление значений функции f правой части,

$$M_{s,p}^{(1)} = M_s \setminus M_{s,p}^{(0)}$$

— номера остальных стадий, на которых вычисления значений функции f не происходит.

Если все $r_{ij} = 0$, то метод (1.1) называется **упрощённым (s, p) -методом**, иначе — **полным (s, p) -методом**.

Как и в предыдущей работе, каждая стадия (s, p) -метода наделена дополнительной характеристикой — цветом.

Определение 3. Скажем, что стадия i метода (1.1) имеет **чёрный цвет**, если $i \in M_{s,p}^{(0)}$. Иначе, если $i \in M_{s,p}^{(1)}$, то стадия i имеет **белый цвет**.

Помимо стадий $i \in M_s$, на которых вычисляются наклоны k_i — см. (1.1), — наделим цветом и коэффициенты, участвующие в вычислениях этих наклонов.

Определение 4. Коэффициенты α_{ij} , γ_{ij} и r_{ij} (s, p) -метода образуют в соответствующей таблице **чёрную строку**, если $i \in M_{s,p}^{(0)}$, или **белую строку**, если $i \in M_{s,p}^{(1)}$.

Также любой набор из n последовательных черных или белых строк таблицы коэффициентов, который не является подмножеством более широкого набора, назовём чёрной или белой **полосой** ширины n соответственно.

С помощью введённого понятия цвета и теории корневых деревьев Бутчера ([10, §II.2], [11, §IV.7], [12, §III.1], [13, глава 31], [14]) в работе [9] доказана следующая

Теорема 1 (Производные численного решения упрощённого (s, p) -метода). *В случае двухцветной раскраски таблиц коэффициентов упрощённого (s, p) -метода для численного решения верно*

$$k_j^{(q)} \Big|_{h=0} = \sum_{\tau \in T_q} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \Phi_j(\tau) \mathcal{F}(\tau)(y_0), \quad (1.2)$$

где элементарный вес $\Phi_j(\tau)$ определён не только видом дерева τ , но и множеством, в котором находится индекс j :

$$\Phi_j(\tau) = \begin{cases} \Psi_j^{(0)}(\tau), & \text{если } j \in M_{s,p}^{(0)}, \\ \Phi_{\eta(j)}(\tau) + \Psi_j^{(1)}(\tau), & \text{если } j \in M_{s,p}^{(1)}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Веса $\Psi_j^{(i)}(\tau)$, $i = 0, 1$, определяются по формулам:

$$\Psi_j^{(0)}(\tau) = \begin{cases} \sum_{k_1, \dots, k_m} \alpha_{jk_1} \Phi_{k_1}(\tau_1) \cdot \dots \cdot \alpha_{jk_m} \Phi_{k_m}(\tau_m), & \tau = [\tau_1, \dots, \tau_m], m \geq 2, \\ \sum_k \beta_{jk} \Phi_k(\tau_1), & \tau = [\tau_1], \end{cases} \quad (1.4)$$

— для чёрных стадий, где $\beta_{jk} = \alpha_{jk} + \gamma_{jk}$ и $j \in M_{s,p}^{(0)}$,

$$\Psi_j^{(1)}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau = [\tau_1, \dots, \tau_m], m \geq 2, \\ \sum_k \varphi_{jk} \Phi_k(\tau_1), & \tau = [\tau_1], \end{cases} \quad (1.5)$$

— для белых стадий, где $j \in M_{s,p}^{(1)}$. Функция $\eta(j)$ и коэффициенты φ_{jk} определены по формулам

$$\eta(j) = \max\{i \in M_{s,p}^{(0)} : i < j\}, \quad (1.6)$$

$$\varphi_{jk} = \sum_{\xi=\eta(j)+1}^j \gamma_{\xi,k}. \quad (1.7)$$

Для единичного дерева

$$\Phi_j(\bullet) = 1.$$

Теорема доказана в несколько этапов: первым рассмотрен случай двухполосной раскраски таблиц коэффициентов, за ним — случай трёхполосной раскраски; затем на основе полученных утверждений доказана общая теорема.

Целью данной работы является обобщение представленной теоремы на случай полного (s, p) -метода (1.1). Чтобы достигнуть этого, необходимо предварительно ввести соответствующие инструменты: формулу Лейбница [10, §II.2]

$$\left. \frac{d^q}{dh^q} [h\psi(h)] \right|_{h=0} = q \left. \frac{d^{q-1}}{dh^{q-1}} \psi(h) \right|_{h=0}, \quad (1.8)$$

где q — натуральное число, а $\psi(h)$ — достаточное число раз дифференцируемая функция, и формулу Фаа ди Бруно:

Лемма 2 (формула Фаа ди Бруно [10, §II.2], [14]). Пусть f — векторная функция векторного аргумента вида $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, а g — векторная функция скалярного аргумента h вида $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$. Тогда для функции $f \circ g$ верно

$$\left. \frac{d^{k-1}}{dh^{k-1}} f(g(h)) \right|_{h=0} = \sum_{\substack{u \in S_k \\ u = [\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_m]}} \alpha(u) f^{(m)}(g(0)) (g^{(\delta_1)}(0), \dots, g^{(\delta_m)}(0)), \quad (1.9)$$

где S_k — множество всевозможных корневых деревьев порядка k , имеющих ветвление только у корня, а m — натуральное число, такое, что

$$u = [\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_m], \quad |\hat{\tau}_i| = \delta_i, \quad |u| = 1 + \sum_{i=1}^m \delta_i,$$

где $|\tau|$ — порядок дерева τ , а $\hat{\tau}_i$, $i = \overline{1, m}$ — высокие деревья порядка δ_i , не имеющие точек ветвления.

Помимо этого, введём следующие соглашения о коэффициентах метода (1.1):

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= 0, & \text{если } j > i, \\ r_{ij} &= 0, & \text{если } j \geq i, \\ \alpha_{ij} &= 0, & \text{если } j \geq i, \quad \text{или } i \in M_{s,p}^{(1)}.\end{aligned}$$

Из этого следует, что $\beta_{ij} = \alpha_{ij} + \gamma_{ij} = 0$ и $\varphi_{ij} = 0$ при $j > i$.

2. Однополосный случай

Начнём исследование полного (s, p) -метода с простейшего однополосного случая, т.е. когда все стадии метода являются чёрными. В таком случае расчётные формулы (1.1) приобретают вид

$$y_1 = y_0 + \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (2.1a)$$

$$k_i = hf(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j) + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} k_j + hJ \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j, \quad i = \overline{1, s}. \quad (2.1b)$$

Действие формулы Лейбница (1.8) на выражения (2.1b) даёт:

$$\begin{aligned}k_i^{(q)} \Big|_{h=0} &= qf(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j)^{(q-1)} \Big|_{h=0} + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} k_j^{(q)} \Big|_{h=0} + qf'(y_0) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j^{(q-1)} \Big|_{h=0}, \quad i = \overline{1, s}. \quad (2.2)\end{aligned}$$

Особенность полученных формул (2.2) состоит в том, что $k_i^{(q)}$ выражается через производные наклонов k_j , $j = \overline{1, i-1}$ того же порядка q — это существенное отличие по сравнению с упрощёнными (s, p) -методами [9]. Поэтому рассмотрим формулы (2.2) при фиксированных q и различных i .

Случай $q = 1$. При $q = 1$ формулы (2.2) упрощаются:

$$\begin{aligned}k_i' \Big|_{h=0} &= f(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j) \Big|_{h=0} + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} k_j' \Big|_{h=0} + \\ &+ f'(y_0) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j \Big|_{h=0} = f(y_0) + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} k_j' \Big|_{h=0}, \quad i = \overline{1, s}, \quad (2.3)\end{aligned}$$

где в последнем равенстве учтено, что $k_j = 0$ при $h = 0$. Полученные формулы (2.3) представляют собой рекуррентное соотношение вида

$$a_i = b + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} a_j, \quad i = \overline{1, s}, \quad (2.4)$$

решение которого даёт следующее

Утверждение 3. Для полного (s, p) -метода (2.1) в случае однополосной раскраски таблиц коэффициентов верно

$$k'_i \Big|_{h=0} = \Phi_i^{(0)}(\bullet) f(y_0), \quad (2.5)$$

где

$$\Phi_i^{(0)}(\bullet) = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} \Phi_j^{(0)}(\bullet), \quad i = \overline{1, s},$$

— элементарный вес, соответствующий единичному корневому дереву.

Замечание 3. Здесь и далее суммы, в которых верхний предел меньше нижнего, считаются равными нулю, поэтому при $i = 1$ имеем

$$\Phi_i^{(0)}(\bullet) = 1.$$

Доказательство проведём по индукции. При $i = 1$ истинность утверждения непосредственно следует из (2.3):

$$k'_1 \Big|_{h=0} = f(y_0).$$

Предположим, что утверждение истинно при некотором $m < s$, т.е.

$$k'_i \Big|_{h=0} = \Phi_i^{(0)}(\bullet) f(y_0), \quad i = \overline{1, m}.$$

Тогда при $i = m + 1 \leq s$, согласно (2.3), имеем:

$$\begin{aligned} k'_{m+1} \Big|_{h=0} &= f(y_0) + \sum_{j=1}^m r_{m+1,j} k'_j \Big|_{h=0} = \\ &= f(y_0) + \sum_{j=1}^m r_{m+1,j} \Phi_j^{(0)}(\bullet) f(y_0) = \Phi_{m+1}^{(0)}(\bullet) f(y_0), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Случай $q = 2$. При $q = 2$ в формуле (2.2) появляются дополнительные ненулевые члены:

$$\begin{aligned} k_i'' \Big|_{h=0} &= 2f(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j)' \Big|_{h=0} + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} k_j'' \Big|_{h=0} + 2f'(y_0) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j' \Big|_{h=0} = \\ &= 2f'(y_0) \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j' \Big|_{h=0} + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} k_j'' \Big|_{h=0} + 2f'(y_0) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j' \Big|_{h=0}, \quad i = \overline{1, s}, \end{aligned}$$

откуда с помощью (2.5) получаем:

$$\begin{aligned} k_i'' \Big|_{h=0} &= 2 \sum_{j=1}^i \beta_{ij} f'(y_0) k_j' \Big|_{h=0} + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} k_j'' \Big|_{h=0} = \\ &= 2 \sum_{j=1}^i \beta_{ij} \Phi_j^{(0)}(\bullet) f'(y_0) f(y_0) + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} k_j'' \Big|_{h=0}, \quad i = \overline{1, s}, \quad (2.6) \end{aligned}$$

где приняты обозначения $\beta_{ij} = \alpha_{ij} + \gamma_{ij}$ и соглашение $\alpha_{ij} = 0$, $j \geq i$. Получено рекуррентное соотношение вида

$$a_i = b_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} a_j, \quad i = \overline{1, s}, \quad (2.7)$$

подобное (2.4), поэтому по аналогии сформулируем

Утверждение 4. Для полного (s, p) -метода (2.1) в случае однополосной раскраски таблиц коэффициентов верно

$$k_i'' \Big|_{h=0} = \gamma(\bullet, \bullet) \Phi_i^{(0)}(\bullet, \bullet) f'(y_0) f(y_0), \quad (2.8)$$

где $\gamma(\bullet, \bullet) = 2$ и

$$\Phi_i^{(0)}(\bullet, \bullet) = \sum_{j=1}^i \beta_{ij} \Phi_j^{(0)}(\bullet) + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} \Phi_j^{(0)}(\bullet, \bullet), \quad i = \overline{1, s},$$

— элементарный вес, соответствующий корневому дереву $\tau_2 = \bullet, \bullet$.

Доказательство. Следуем той же идее, что и при доказательстве утверждения 3. При $i = 1$ согласно (2.6) имеем:

$$k_1'' \Big|_{h=0} = 2\beta_{11} f'(y_0) f(y_0),$$

что согласуется с формулой (2.8).

Допустим, утверждение доказано для всех $i \leq m$, где $m < s$, т.е.

$$k_i'' \Big|_{h=0} = 2\Phi_i^{(0)}(\bullet) f'(y_0) f(y_0), \quad i = \overline{1, m},$$

тогда при $i = m + 1$, согласно (2.6):

$$\begin{aligned} k_{m+1}'' \Big|_{h=0} &= 2 \sum_{j=1}^{m+1} \beta_{m+1,j} \Phi_j^{(0)}(\bullet) f'(y_0) f(y_0) + \sum_{j=1}^m r_{m+1,j} k_j'' \Big|_{h=0} = \\ &= 2 \sum_{j=1}^{m+1} \beta_{m+1,j} \Phi_j^{(0)}(\bullet) f'(y_0) f(y_0) + 2 \sum_{j=1}^m r_{m+1,j} \Phi_j^{(0)}(\bullet) f'(y_0) f(y_0) = \\ &= 2\Phi_{m+1}^{(0)}(\bullet) f'(y_0) f(y_0). \end{aligned}$$

Утверждение доказано. \square

Случай $q = 3$. По аналогии с предыдущими случаями можно доказать следующее

Утверждение 5. Для полного (s, p) -метода (2.1) в случае однополосной раскраски таблиц коэффициентов верно

$$k_j^{(3)} \Big|_{h=0} = \sum_{\tau \in T_3} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \Phi_j^{(0)}(\tau) \mathcal{F}(\tau)(y_0),$$

где $T_3 = \{\bullet \vee \bullet, \bullet \curvearrowright \bullet\}$ — двухэлементное множество элементарных корневых деревьев порядка 3, $\alpha(\tau)$ и $\gamma(\tau)$ — функции на T_3 . Значения элементарного веса $\Phi_j^{(0)}(\tau)$ на деревьях τ из T_3 равны

$$\begin{aligned} \Phi_j^{(0)}(\bullet \vee \bullet) &= \sum_{k_1, k_2} \alpha_{j, k_1} \Phi_{k_1}^{(0)}(\bullet) \alpha_{j, k_2} \Phi_{k_2}^{(0)}(\bullet) + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} \Phi_k^{(0)}(\bullet \vee \bullet), \\ \Phi_j^{(0)}(\bullet \curvearrowright \bullet) &= \sum_k \beta_{jk} \Phi_k^{(0)}(\bullet \curvearrowright \bullet) + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} \Phi_k^{(0)}(\bullet \curvearrowright \bullet). \end{aligned}$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательствам утверждений 3 и 4. Докажем более общее утверждение, верное для любого $q \in \mathbb{N}$, из которого утверждения 3, 4 и 5 выводятся в качестве следствий.

Утверждение 6. В случае однополосной раскраски таблиц коэффициентов полного (s, p) -метода (2.1) для численного решения верно

$$k_j^{(q)} \Big|_{h=0} = \sum_{\tau \in T_q} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \Phi_j^{(0)}(\tau) \mathcal{F}(\tau)(y_0), \quad (2.9)$$

где

$$\Phi_j^{(0)}(\tau) = \Psi_j^{(0)}(\tau) + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} \Phi_k^{(0)}(\tau), \quad (2.10)$$

— составной вес, содержащий в себе выражение для элементарного веса классического метода Розенброка:

$$\Psi_j^{(0)}(\tau) = \begin{cases} \sum_{k_1, \dots, k_m} \alpha_{jk_1} \Phi_{k_1}^{(0)}(\tau_1) \cdots \alpha_{jk_m} \Phi_{k_m}^{(0)}(\tau_m), & \tau = [\tau_1, \dots, \tau_m], m \geq 2, \\ \sum_k \beta_{jk} \Phi_k^{(0)}(\tau_1), & \tau = [\tau_1]. \end{cases}$$

Для единичного дерева

$$\Psi_j^{(0)}(\bullet) = 1.$$

Доказательство проведём индукцией по порядку производной q . Для $q = 1, 2$ утверждение фактически доказано (см. утверждения 3, 4). Докажем истинность индуктивного шага.

Предположим, что утверждение выполнено при всех $q \leq \rho - 1$, тогда из (2.2) при $q = \rho$ получим:

$$k_j^{(\rho)} \Big|_{h=0} = \rho \frac{d^\rho}{dh^\rho} f(g_j(h)) \Big|_{h=0} + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \rho \sum_{k=1}^j \gamma_{jk} f'(y_0) k_k^{(\rho-1)} \Big|_{h=0},$$

где

$$g_j(h) = y_0 + \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{jk} k_k,$$

— раскроем производную функции $f \circ g$ по формуле Фаа ди Бруно (1.9), получим:

$$k_j^{(\rho)} \Big|_{h=0} = \rho \sum_{\substack{u \in S_\rho \\ u = [\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_m]}} \alpha(u) f^{(m)}(g_j|_{h=0}) \left(g_j^{(\delta_1)} \Big|_{h=0}, g_j^{(\delta_2)} \Big|_{h=0}, \dots, g_j^{(\delta_m)} \Big|_{h=0} \right) + \\ + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \rho \sum_{k=1}^j \gamma_{jk} f'(y_0) k_k^{(\rho-1)} \Big|_{h=0},$$

где $\hat{\tau}_i$, $i = \overline{1, m}$ — высокие корневые деревья порядка $|\hat{\tau}_i| = \delta_i$, не имеющие ветвлений, а $u = [\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_m]$ — специальное корневое дерево порядка ρ .

Из выражения для $g_j(h)$ получаем:

$$g_j^{(\delta_i)} \Big|_{h=0} = \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{jk} k_k^{(\delta_i)},$$

откуда, в силу полилинейности $f^{(m)}$,

$$\begin{aligned} k_j^{(\rho)} \Big|_{h=0} &= \rho \sum_{\substack{u \in S_\rho \\ u = [\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_m]}} \alpha(u) \sum_{k_1, \dots, k_m} \alpha_{j, k_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{j, k_m} \times \\ &\quad \times f^{(m)}(y_0) \left(k_{k_1}^{(\delta_1)} \Big|_{h=0}, k_{k_2}^{(\delta_2)} \Big|_{h=0}, \dots, k_{k_m}^{(\delta_m)} \Big|_{h=0} \right) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \rho \sum_{k=1}^j \gamma_{jk} f'(y_0) k_k^{(\rho-1)} \Big|_{h=0}. \end{aligned}$$

Из формулировки леммы 2 следует, что $\delta_i \leq |u| - 1 = \rho - 1$, $i = \overline{1, m}$, следовательно, для всех $k_j^{(\delta)}$ с $\delta \leq \rho - 1$ в правой части равенства верно предположение индукции:

$$\begin{aligned} k_j^{(\rho)} \Big|_{h=0} &= \rho \sum_{\substack{u \in S_\rho \\ u = [\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_m]}} \alpha(u) \sum_{\tau_1 \in T_{\delta_1}} \dots \sum_{\tau_m \in T_{\delta_m}} \alpha(\tau_1) \cdot \dots \cdot \alpha(\tau_m) \times \\ &\quad \times \gamma(\tau_1) \cdot \dots \cdot \gamma(\tau_m) \sum_{k_1, \dots, k_m} \alpha_{j, k_1} \Phi_{k_1}^{(0)}(\tau_1) \cdot \dots \cdot \alpha_{j, k_m} \Phi_{k_m}^{(0)}(\tau_m) \times \\ &\quad \times f^{(m)}(y_0) (\mathcal{F}(\tau_1)(y_0), \dots, \mathcal{F}(\tau_m)(y_0)) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \rho \sum_{k=1}^j \gamma_{jk} f'(y_0) \sum_{\sigma \in T_{\rho-1}} \alpha(\sigma) \gamma(\sigma) \Phi_k^{(0)}(\sigma) \mathcal{F}(\sigma)(y_0), \end{aligned}$$

где τ_i , $i = \overline{1, m}$ — обычные корневые деревья. Как и в работе [9], поставим во взаимно однозначное соответствие набору деревьев $(u, \tau_1, \dots, \tau_m)$ обычное корневое дерево $\tau = [\tau_1, \dots, \tau_m]$ порядка ρ , получим

$$\begin{aligned} \alpha(u) \alpha(\tau_1) \cdot \dots \cdot \alpha(\tau_m) &= \alpha(\tau), \\ \rho \gamma(\tau_1) \cdot \dots \cdot \gamma(\tau_m) &= \gamma(\tau), \\ f^{(m)}(y_0) (\mathcal{F}(\tau_1)(y_0), \dots, \mathcal{F}(\tau_m)(y_0)) &= \mathcal{F}(\tau)(y_0), \end{aligned}$$

поэтому выражение для $k_j^{(\rho)} \Big|_{h=0}$ можно упростить:

$$\begin{aligned} k_j^{(\rho)} \Big|_{h=0} &= \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \sum_{k_1, \dots, k_m} \alpha_{j, k_1} \Phi_{k_1}^{(0)}(\tau_1) \cdot \dots \cdot \alpha_{j, k_m} \Phi_{k_m}^{(0)}(\tau_m) \mathcal{F}(\tau)(y_0) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \rho \sum_{k=1}^j \gamma_{jk} f'(y_0) \sum_{\sigma \in T_{\rho-1}} \alpha(\sigma) \gamma(\sigma) \Phi_k^{(0)}(\sigma) \mathcal{F}(\sigma)(y_0). \end{aligned}$$

Если далее разделить множество T_ρ на множество одноногих деревьев

$$P_\rho = \{\tau \in T_\rho : \tau = [\tau_1], \tau_1 \in T_{\rho-1}\}$$

и множество $T_\rho \setminus P_\rho$ всех остальных деревьев, получим

$$k_j^{(\rho)} \Big|_{h=0} = \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \Psi_j^{(0)}(\tau) \mathcal{F}(\tau)(y_0) + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0}$$

— рекуррентное соотношение вида (2.7), поэтому, разрешая его так же, как и при доказательстве утверждений 3 и 4, докажем истинность выражения (2.9). Утверждение доказано. \square

3. Двухполосный случай

Перейдём к рассмотрению случая двухполосной таблицы коэффициентов, т.е. когда в таблице коэффициентов полного (s, p) -метода присутствуют ровно две различных по цвету полосы (чёрная и следующая за ней белая), тогда расчётные формулы (1.1) приобретают следующий вид:

$$y_1 = y_0 + \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (3.1a)$$

$$k_i = hf(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j) + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} k_j + hJ \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j, \quad i \in M_{s,p}^{(0)}, \quad (3.1b)$$

$$k_i = k_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ij} k_j + hJ \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j, \quad i \in M_{s,p}^{(1)}, \quad (3.1c)$$

где $M_{s,p}^{(0)} = \{1, \dots, n_1\}$, $M_{s,p}^{(1)} = \{n_1 + 1, \dots, s\}$.

Получим выражения для элементарных весов, аналогичные тем, что получены при доказательстве утверждения 6, но уже для случая метода (3.1). Докажем следующее

Утверждение 7. *В случае двухполосной раскраски таблицы коэффициентов полного (s, p) -метода (3.1) для численного решения верно*

$$k_j^{(q)} \Big|_{h=0} = \sum_{\tau \in T_q} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \Phi_j(\tau) \mathcal{F}(\tau)(y_0), \quad (3.2)$$

где вид веса $\Phi_j(\tau)$ меняется в зависимости от цвета номера стадии:

$$\Phi_j(\tau) = \begin{cases} \Phi_j^{(0)}(\tau), & \text{если } j \in M_{s,p}^{(0)}, \\ \Phi_j^{(1)}(\tau), & \text{если } j \in M_{s,p}^{(1)}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Значение веса $\Phi_j^{(0)}(\tau)$ определяется по формуле (2.10), а

$$\Phi_j^{(1)}(\tau) = \Phi_{\eta(j)}^{(0)}(\tau) + \Psi_j^{(1)}(\tau) + \sum_{k=1}^{j-1} \psi_{jk} \Phi_k(\tau), \quad (3.4)$$

— обновлённый вес упрощённого (s, p) -метода для чёрных стадий (см. формулы (1.3) теоремы 1), где

$$\Psi_j^{(1)}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau = [\tau_1, \dots, \tau_m], m \geq 2, \\ \sum_k \varphi_{jk} \Phi_k(\tau_1), & \tau = [\tau_1], \end{cases} \quad (3.5)$$

функции $\eta(j)$ и φ_{jk} определены по формулам (1.6) и (1.7) соответственно, функция ψ_{jk} — по формуле

$$\psi_{jk} = \sum_{\xi=\eta(j)+1}^j r_{\xi,k}. \quad (3.6)$$

Для единичного дерева

$$\Psi_j^{(0)}(\bullet) = 1, \quad \Psi_j^{(1)}(\bullet) = 0.$$

Для первых чёрных стадий утверждение фактически доказано (см. утверждение 6), поэтому перейдём к доказательству для следующих за ними белых стадий.

Доказательство, как и для утверждения 6, проведём индукцией по порядку производной q .

Случай $q = 1$. Однократное дифференцирование (3.1с) при $h = 0$ даёт

$$\begin{aligned} k'_j \Big|_{h=0} &= k'_{j-1} \Big|_{h=0} + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} k'_k \Big|_{h=0} + f'(y_0) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j \Big|_{h=0} = \\ &= k'_{j-1} \Big|_{h=0} + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} k'_k \Big|_{h=0} \end{aligned}$$

где учтено, что $k_j = 0$ при $h = 0$. Предположим, что $(j - 1)$ тоже является номером белой стадии, и повторно применим полученную формулу:

$$\begin{aligned} k'_j \Big|_{h=0} &= k'_{j-2} \Big|_{h=0} + \sum_{k=1}^{j-2} r_{j-1,k} k'_k \Big|_{h=0} + \sum_{k=1}^{j-1} r_{j,k} k'_k \Big|_{h=0} = \\ &= k'_{j-2} \Big|_{h=0} + \sum_{k=1}^{j-1} (r_{j-1,k} + r_{j,k}) k'_k \Big|_{h=0}, \end{aligned}$$

где учтено, что $r_{jk} = 0$ при $k \geq j$. Продолжая этот процесс до появления первой чёрной стадии с номером $\eta(j)$ — см. формулу (1.6), — получим

$$k'_j \Big|_{h=0} = k'_{\eta(j)} \Big|_{h=0} + \sum_{k=1}^{j-1} \left(\sum_{\xi=\eta(j)+1}^j r_{\xi,k} \right) k'_k \Big|_{h=0},$$

или, если определить ψ_{jk} по формуле (3.6),

$$k'_j \Big|_{h=0} = k'_{\eta(j)} \Big|_{h=0} + \sum_{k=1}^{j-1} \psi_{j,k} k'_k \Big|_{h=0}. \quad (3.7)$$

Поскольку $\eta(j)$ — чёрная стадия, утверждение для неё уже доказано, поэтому

$$k'_{\eta(j)} \Big|_{h=0} = \Phi_{\eta(j)}^{(0)}(\bullet) f(y_0).$$

Таким образом, выражение (3.7) имеет вид рекуррентного соотношения (2.4), поэтому случай доказательства утверждения для $q = 1$ аналогичен доказательству утверждения 3, откуда

$$k'_j \Big|_{h=0} = \left(\Phi_{\eta(j)}^{(0)}(\bullet) + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} \Phi_k(\bullet) \right) f(y_0),$$

что соответствует (3.2) с $\Psi^{(1)}(\bullet) = 0$ в (3.4).

Случай $q > 1$. Теперь предположим, что утверждение истинно при некотором $q = \rho - 1 < s$. Применим формулу Лейбница (1.8) при $q = \rho$ к (3.1с):

$$k_j^{(\rho)} \Big|_{h=0} = k_{j-1}^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \rho f'(y_0) \sum_{k=1}^j \gamma_{jk} k_k^{(\rho-1)} \Big|_{h=0},$$

как и в случае $q = 1$, с помощью повторного использования формулы спустимся до первой чёрной стадии $\eta(j)$, получим

$$\begin{aligned} k_j^{(\rho)} \Big|_{h=0} &= k_{\eta(j)}^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \\ &+ \sum_{k=1}^{j-1} \left(\sum_{\xi=\eta(j)+1}^j r_{\xi,k} \right) k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \rho f'(y_0) \sum_{k=1}^j \left(\sum_{\xi=\eta(j)+1}^j \gamma_{\xi,k} \right) k_k^{(\rho-1)} \Big|_{h=0} = \\ &= k_{\eta(j)}^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \sum_{k=1}^{j-1} \psi_{jk} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \rho f'(y_0) \sum_{k=1}^j \varphi_{jk} k_k^{(\rho-1)} \Big|_{h=0}. \end{aligned}$$

Поскольку $\eta(j)$ — чёрная стадия, $k_{\eta(j)}^{(\rho)}$ можно представить с помощью (3.2), в то же время для всех $k_j^{(\rho-1)}$ выполнено предположение индукции, поэтому

$$\begin{aligned}
k_j^{(\rho)} \Big|_{h=0} &= \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \Phi_{\eta(j)}^{(0)}(\tau) \mathcal{F}(\tau)(y_0) + \sum_{k=1}^{j-1} \psi_{jk} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \\
&+ \rho \sum_{\sigma \in T_{\rho-1}} \alpha(\sigma) \gamma(\sigma) \sum_{k=1}^j \varphi_{jk} \Phi_k(\sigma) f'(y_0) \mathcal{F}(\sigma)(y_0) = \\
&= \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \Phi_{\eta(j)}^{(0)}(\tau) \mathcal{F}(\tau)(y_0) + \sum_{k=1}^{j-1} \psi_{jk} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \\
&+ \sum_{\sigma \in T_{\rho-1}} \alpha([\sigma]) \gamma([\sigma]) \Psi_j^{(1)}([\sigma]) \mathcal{F}([\sigma])(y_0),
\end{aligned}$$

где учтено, что для дерева σ порядка $\rho - 1$:

$$\begin{aligned}
\alpha([\sigma]) &= \alpha(\sigma), \\
\gamma([\sigma]) &= \rho \gamma(\sigma), \\
\mathcal{F}([\sigma])(y_0) &= f'(y_0) \mathcal{F}(\sigma)(y_0), \\
\Psi_j^{(1)}([\sigma]) &= \sum_{k=1}^j \varphi_{jk} \Phi_k(\sigma).
\end{aligned}$$

Если, как и при доказательстве утверждения 6, разделить множество T_ρ на множество одноногих деревьев P_ρ и его дополнение $T_\rho \setminus P_\rho$, получим

$$\begin{aligned}
k_j^{(\rho)} \Big|_{h=0} &= \sum_{\tau \in T_\rho \setminus P_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \Phi_{\eta(j)}^{(0)}(\tau) \mathcal{F}(\tau)(y_0) + \sum_{k=1}^{j-1} \psi_{jk} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \\
&+ \sum_{\tau \in P_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \left(\Phi_{\eta(j)}^{(0)}(\tau) + \Psi_j^{(1)}(\tau) \right) \mathcal{F}(\tau)(y_0) = \\
&= \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \left(\Phi_{\eta(j)}^{(0)}(\tau) + \Psi_j^{(1)}(\tau) \right) \mathcal{F}(\tau)(y_0) + \sum_{k=1}^{j-1} \psi_{jk} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0}, \quad (3.8)
\end{aligned}$$

где учтено, что $\Psi_j^{(1)}(\tau) = 0$ при $\tau \in T_\rho \setminus P_\rho$ — см. определение (3.5).

Выражение (3.8) имеет вид рекуррентного соотношения (2.7), поэтому проведём дальнейшее доказательство индукцией по j при фиксированном q в (3.8).

Индукция по j . При $1 \leq j \leq n_1$ (номера чёрных стадий) формула (3.8) места не имеет, поэтому начинаем с $j = n_1 + 1$.

При $j = n_1 + 1$ получаем

$$k_{n_1+1}^{(\rho)} \Big|_{h=0} = \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \left(\Phi_{n_1}^{(0)}(\tau) + \Psi_{n_1+1}^{(1)}(\tau) \right) \mathcal{F}(\tau)(y_0) + \sum_{k=1}^{n_1} \psi_{n_1,k} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0},$$

где k в правой сумме пробегает множество индексов чёрных стадий, поэтому $k_k^{(\rho)}$, $k = \overline{1, n_1}$ можно представить с помощью формулы (3.2):

$$k_{n_1+1}^{(\rho)} \Big|_{h=0} = \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \left(\Phi_{n_1}^{(0)}(\tau) + \Psi_{n_1+1}^{(1)}(\tau) + \sum_{k=1}^{n_1} \psi_{n_1,k} \Phi_k^{(0)}(\tau) \right) \mathcal{F}(\tau)(y_0),$$

что согласуется с (3.2).

Теперь предположим, что утверждение доказано для всех j : $n_1 + 1 \leq j \leq i$ и $i < s$, тогда для $j = i + 1$:

$$\begin{aligned} k_{i+1}^{(\rho)} \Big|_{h=0} &= \\ &= \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \left(\Phi_{\eta(i+1)}^{(0)}(\tau) + \Psi_{i+1}^{(1)}(\tau) \right) \mathcal{F}(\tau)(y_0) + \sum_{k=1}^i \psi_{i+1,k} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} = \\ &= \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \left(\Phi_{n_1}^{(0)}(\tau) + \Psi_{i+1}^{(1)}(\tau) \right) \mathcal{F}(\tau)(y_0) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n_1} \psi_{i+1,k} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0} + \sum_{k=n_1+1}^i \psi_{i+1,k} k_k^{(\rho)} \Big|_{h=0}, \end{aligned}$$

— в предпоследней сумме индекс проходит по номерам $k \leq n_1$ чёрных стадий, поэтому выразим в ней $k_k^{(\rho)}$ по формуле (3.2). В последней сумме индекс проходит по номерам $k \leq i$ белых стадий, поэтому выразим в ней $k_k^{(\rho)}$ по предположению индукции:

$$\begin{aligned} k_{i+1}^{(\rho)} \Big|_{h=0} &= \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \left(\Phi_{n_1}^{(0)}(\tau) + \Psi_{i+1}^{(1)}(\tau) \right) \mathcal{F}(\tau)(y_0) + \\ &\quad + \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \sum_{k=1}^{n_1} \psi_{i+1,k} \Phi_k^{(0)}(\tau) \mathcal{F}(\tau)(y_0) + \\ &\quad + \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \sum_{k=n_1+1}^i \psi_{i+1,k} \Phi_k^{(1)}(\tau) \mathcal{F}(\tau)(y_0) = \\ &= \sum_{\tau \in T_\rho} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \left(\Phi_{n_1}^{(0)}(\tau) + \Psi_{i+1}^{(1)}(\tau) + \sum_{k=1}^i \psi_{i+1,k} \Phi_k(\tau) \right) \mathcal{F}(\tau)(y_0), \end{aligned}$$

что снова согласуется с (3.2).

Таким образом, при фиксированном $q = \rho$ выражение (3.2) имеет место при любом j — это следует из индукции по j . Поэтому утверждение имеет место при любом q , что следует из индукции по q . Утверждение доказано. \square

Пример 1. Рассмотрим следующий (4, 2)-метод, предложенный в [15, Формулы (22)]

$$y_1 = y_0 + \sum_{j=1}^4 b_j k_j, \quad (3.9a)$$

$$k_1 = hf(y_0) + \gamma h J k_1, \quad (3.9b)$$

$$k_2 = hf(y_0 + \alpha_{21} k_1) + r_{21} k_1 + \gamma h J k_2, \quad (3.9c)$$

$$k_3 = k_2 + r_{31} k_1 + \gamma h J k_3, \quad (3.9d)$$

$$k_4 = k_3 + r_{41} k_1 + \gamma h J k_4. \quad (3.9e)$$

Из формул (3.9) можно заключить, что множества чёрных и белых стадий соответственно равны:

$$M_{4,2}^{(0)} = \{1, 2\}, \quad M_{4,2}^{(1)} = \{3, 4\},$$

т.е., согласно определению 4, метод является двухполосным. Коэффициенты α_{ij} , β_{ij} и r_{ij} метода представлены в табл. 1, а построенные на их основе коэффициенты β_{ij} , φ_{ij} и ψ_{ij} — в табл. 2¹.

Таблица 1. Коэффициенты α_{ij} , γ_{ij} и r_{ij} метода (3.9)

(α_{ij})	(γ_{ij})	(r_{ij})												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="background-color: #cccccc;">0</td></tr> <tr><td>α_{21} 0</td></tr> <tr><td>0 0 0</td></tr> <tr><td>0 0 0 0</td></tr> </table>	0	α_{21} 0	0 0 0	0 0 0 0	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="background-color: #cccccc;">γ</td></tr> <tr><td>0 γ</td></tr> <tr><td>0 0 γ</td></tr> <tr><td>0 0 0 γ</td></tr> </table>	γ	0 γ	0 0 γ	0 0 0 γ	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="background-color: #cccccc;">0</td></tr> <tr><td>r_{21} 0</td></tr> <tr><td>r_{31} 0 0</td></tr> <tr><td>r_{41} 0 0 0</td></tr> </table>	0	r_{21} 0	r_{31} 0 0	r_{41} 0 0 0
0														
α_{21} 0														
0 0 0														
0 0 0 0														
γ														
0 γ														
0 0 γ														
0 0 0 γ														
0														
r_{21} 0														
r_{31} 0 0														
r_{41} 0 0 0														

Таблица 2. Коэффициенты β_{ij} , φ_{ij} и ψ_{ij} метода (3.9)

(β_{ij})	(φ_{ij})	(ψ_{ij})												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="background-color: #cccccc;">γ</td></tr> <tr><td>α_{21} γ</td></tr> <tr><td>0 0 γ</td></tr> <tr><td>0 0 0 γ</td></tr> </table>	γ	α_{21} γ	0 0 γ	0 0 0 γ	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="background-color: #cccccc;">×</td></tr> <tr><td>×</td></tr> <tr><td>0 0 γ</td></tr> <tr><td>0 0 γ γ</td></tr> </table>	×	×	0 0 γ	0 0 γ γ	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="background-color: #cccccc;">×</td></tr> <tr><td>×</td></tr> <tr><td>r_{31} 0 0</td></tr> <tr><td>$r_{31} + r_{41}$ 0 0 0</td></tr> </table>	×	×	r_{31} 0 0	$r_{31} + r_{41}$ 0 0 0
γ														
α_{21} γ														
0 0 γ														
0 0 0 γ														
×														
×														
0 0 γ														
0 0 γ γ														
×														
×														
r_{31} 0 0														
$r_{31} + r_{41}$ 0 0 0														

Выведем для данного метода условия четвёртого порядка. Согласно положениям общей теории [10, §II.2], если для численного решения одношагового

¹В обеих таблицах номер i соответствует номеру строки, отсчитываемому сверху вниз, а j — номеру столбца, отсчитываемому слева направо. Чёрные полосы в таблицах коэффициентов символически изображены в сером цвете. Значения коэффициентов φ_{ij} и ψ_{ij} определены только при $i \in M_{s,p}^{(1)}$, поэтому при $i \in M_{s,p}^{(0)}$ в соответствующих строках табл. 2 указаны знаки \times .

s -стадийного метода возможно построить разложение вида (3.2), то условия порядка p метода имеют вид

$$\sum_{j=1}^s b_j \Phi_j(\tau) = \frac{1}{\gamma(\tau)}, \quad (3.10)$$

где τ пробегает множество

$$T_{\leq p} = \{\tau : |\tau| \leq p\}$$

деревьев порядка не выше p .

Вычислим веса $\Phi_j(\tau)$ по формулам (2.10) и (3.4) для чёрных и белых стадий соответственно при всех $j = \overline{1,4}$ и $\tau \in T_{\leq 4}$, используя коэффициенты табл. 1, 2.

Дерево $\tau_1 = \bullet$. По определению $\Psi_j^{(0)}(\bullet) = 1$, поэтому для чёрных стадий

$$\Phi_1(\tau_1) = 1, \quad \Phi_2(\tau_1) = 1 + r_{21}.$$

Аналогично при $\Psi_j^{(1)}(\bullet) = 0$ для белых стадий

$$\Phi_3(\tau_1) = 1 + r_{21} + r_{31}, \quad \Phi_4(\tau_1) = 1 + r_{21} + r_{31} + r_{41}.$$

Из этого получим условие порядка (3.10) для $\tau_1 = \bullet$

$$b_1 + b_2(1 + r_{21}) + b_3(1 + r_{21} + r_{31}) + b_4(1 + r_{21} + r_{31} + r_{41}) = 1. \quad (3.11a)$$

Дерево $\tau_2 = \bullet \blacklozenge$. С учётом того, что теперь $\Psi_j^{(i)}(\bullet \blacklozenge) \neq 0$ при $i = 0, 1$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_2) &= \gamma, & \Phi_2(\tau_2) &= \alpha_{21} + \gamma(1 + 2r_{21}), \\ \Phi_3(\tau_2) &= \alpha_{21} + \gamma(2 + 3r_{21} + 2r_{31}), & \Phi_4(\tau_2) &= \alpha_{21} + \gamma(3 + 4r_{21} + 3r_{31} + 2r_{41}), \end{aligned}$$

откуда условие порядка (3.10) при $\tau_2 = \bullet \blacklozenge$ имеет вид

$$\begin{aligned} b_1\gamma + b_2(\alpha_{21} + \gamma(1 + 2r_{21})) + b_3(\alpha_{21} + \gamma(2 + 3r_{21} + 2r_{31})) + \\ + b_4(\alpha_{21} + \gamma(3 + 4r_{21} + 3r_{31} + 2r_{41})) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.11b)$$

Дерево $\tau_3 = \bullet \blacklozenge \blacklozenge$. В силу $\alpha_{11} = 0$ вес для первой чёрной стадии равен нулю, а веса всех белых стадий совпадают с весом последней чёрной стадии до них:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_3) &= 0, & \Phi_2(\tau_3) &= \alpha_{21}^2, \\ \Phi_3(\tau_3) &= \alpha_{21}^2, & \Phi_4(\tau_3) &= \alpha_{21}^2, \end{aligned}$$

поэтому условие порядка (3.10) при $\tau_3 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array}$ выглядит очень просто

$$\alpha_{21}^2(b_2 + b_3 + b_4) = \frac{1}{3}. \quad (3.11c)$$

Дерево $\tau_4 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array}$. Опираемся на результаты для $\tau_2 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array}$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_4) &= \gamma^2, \\ \Phi_2(\tau_4) &= \gamma(2\alpha_{21} + \gamma(1 + 3r_{21})), \\ \Phi_3(\tau_4) &= \gamma(3\alpha_{21} + \gamma(3 + 6r_{21} + 3r_{31})), \\ \Phi_4(\tau_4) &= \gamma(4\alpha_{21} + \gamma(6 + 10r_{21} + 6r_{31} + 3r_{41})). \end{aligned}$$

Условие порядка:

$$\begin{aligned} b_1\gamma^2 + b_2\gamma(2\alpha_{21} + \gamma(1 + 3r_{21})) + b_3\gamma(3\alpha_{21} + \gamma(3 + 6r_{21} + 3r_{31})) + \\ + b_4\gamma(4\alpha_{21} + \gamma(6 + 10r_{21} + 6r_{31} + 3r_{41})) = \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (3.11d)$$

Дерево $\tau_5 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array}$. Как и в случае $\tau_3 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array}$, всё упрощается благодаря $\alpha_{11} = 0$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_5) &= 0, & \Phi_2(\tau_5) &= \alpha_{21}^3, \\ \Phi_3(\tau_5) &= \alpha_{21}^3, & \Phi_4(\tau_5) &= \alpha_{21}^3. \end{aligned}$$

Условие порядка:

$$\alpha_{21}^3(b_2 + b_3 + b_4) = \frac{1}{4}. \quad (3.11e)$$

Дерево $\tau_6 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array}$. В силу наличия ветвления у корня, результаты подобны предыдущим для τ_5 :

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_6) &= 0, & \Phi_2(\tau_6) &= \alpha_{21}^2\gamma, \\ \Phi_3(\tau_6) &= \alpha_{21}^2\gamma, & \Phi_4(\tau_6) &= \alpha_{21}^2\gamma. \end{aligned}$$

Условие порядка:

$$\alpha_{21}^2\gamma(b_2 + b_3 + b_4) = \frac{1}{8}. \quad (3.11f)$$

Дерево $\tau_7 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array}$. Ситуация похожа на случай τ_6 , но отличается от него, поскольку ветвление происходит не в корне:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_7) &= 0, & \Phi_2(\tau_7) &= \alpha_{21}^2\gamma, \\ \Phi_3(\tau_7) &= 2\alpha_{21}^2\gamma, & \Phi_4(\tau_7) &= 3\alpha_{21}^2\gamma. \end{aligned}$$

Условие порядка:

$$\alpha_{21}^2 \gamma (b_2 + 2b_3 + 3b_4) = \frac{1}{12}. \quad (3.11g)$$

Дерево $\tau_8 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$. Используем результаты для $\tau_4 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_8) &= \gamma^3, \\ \Phi_2(\tau_8) &= \gamma^2(3\alpha_{21} + \gamma(1 + 4r_{21})), \\ \Phi_3(\tau_8) &= \gamma^2(6\alpha_{21} + \gamma(4 + 10r_{21} + 4r_{31})), \\ \Phi_4(\tau_8) &= \gamma^2(10\alpha_{21} + \gamma(10 + 20r_{21} + 10r_{31} + 4r_{41})). \end{aligned}$$

Условие порядка:

$$\begin{aligned} b_1 \gamma^3 + b_2 \gamma^2 (3\alpha_{21} + \gamma(1 + 4r_{21})) + b_3 \gamma^2 (6\alpha_{21} + \gamma(4 + 10r_{21} + 4r_{31})) + \\ + b_4 \gamma^2 (10\alpha_{21} + \gamma(10 + 20r_{21} + 10r_{31} + 4r_{41})) = \frac{1}{24}. \end{aligned} \quad (3.11h)$$

Полученные условия порядка (3.11) с точностью до обозначений совпадают с условиями в [15, Формулы (23)].

4. Общий случай

В двух предыдущих разделах доказаны утверждения для случаев однополосной и двухполосной раскрасок таблиц коэффициентов полного (s, p) -метода.

Доказательство аналогичного утверждения для трёхполосного случая будет повторять (с точностью до соответствующих замен) доказательство утверждения 6, поскольку случай двух полос уже рассмотрен.

Проведём аналогичные рассуждения в случае произвольного числа полос, получим следующую теорему:

Теорема 8 (Производные численного решения полного (s, p) -метода). *В случае произвольной двухцветной раскраски таблиц коэффициентов полного (s, p) -метода (1.1) для численного решения верно*

$$k_j^{(q)} \Big|_{h=0} = \sum_{\tau \in T_q} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \Phi_j(\tau) \mathcal{F}(\tau)(y_0), \quad (4.1)$$

где элементарный вес $\Phi_j(\tau)$ определён видом дерева τ и множеством $M_{s,p}^{(i)}$, в котором находится индекс j :

$$\Phi_j(\tau) = \begin{cases} \Phi_j^{(0)}(\tau), & \text{если } j \in M_{s,p}^{(0)}, \\ \Phi_j^{(1)}(\tau), & \text{если } j \in M_{s,p}^{(1)}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Веса $\Phi_j^{(i)}(\tau)$, $i = 0, 1$, определяются по формулам:

$$\Phi_j^{(0)} = \Psi_j^{(0)}(\tau) + \sum_{k=1}^{j-1} r_{jk} \Phi_k(\tau) \quad (4.3)$$

— для чёрных стадий при $j \in M_{s,p}^{(0)}$, где

$$\Psi_j^{(0)}(\tau) = \begin{cases} \sum_{k_1, \dots, k_m} \alpha_{jk_1} \Phi_{k_1}(\tau_1) \cdot \dots \cdot \alpha_{jk_m} \Phi_{k_m}(\tau_m), & \tau = [\tau_1, \dots, \tau_m], m \geq 2, \\ \sum_k \beta_{jk} \Phi_k(\tau_1), & \tau = [\tau_1], \end{cases}$$

— классический вес метода Розенброка, $\beta_{ij} = \alpha_{ij} + \gamma_{ij}$, а

$$\Phi_j^{(1)}(\tau) = \Phi_{\eta(j)}^{(0)} + \Psi_j^{(1)}(\tau) + \sum_{k=1}^{j-1} \psi_{jk} \Phi_k(\tau) \quad (4.4)$$

— для белых стадий при $j \in M_{s,p}^{(1)}$, где

$$\Psi_j^{(1)}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau = [\tau_1, \dots, \tau_m], m \geq 2, \\ \sum_k \varphi_{jk} \Phi_k(\tau_1), & \tau = [\tau_1], \end{cases}$$

— обновлённый вес упрощённого (s, p) -метода.

Функция $\eta(j)$ и коэффициенты φ_{jk} , ψ_{jk} определены в формулах (1.6), (1.7) и (3.6) соответственно. Для единичного дерева

$$\Psi_j^{(0)}(\bullet) = 1, \quad \Psi_j^{(1)}(\bullet) = 0.$$

Доказательство. Заметим, что доказательства утверждений 6 и 7 описывают переходы «из белой полосы в чёрную» и «из чёрной полосы в белую» соответственно. Поэтому, как и в работе [9], этих утверждений достаточно для доказательства теоремы в случае произвольного числа полос. \square

Пример 2. Рассмотрим семейство $(4, 2)$ -методов (см. [15, Формулы (29)] и [16, Формулы (4.2)]), хорошо показавших себя при решении жёстких задач [17]:

$$y_1 = y_0 + \sum_{j=1}^4 b_j k_j, \quad (4.5a)$$

$$k_1 = hf(y_0) + \gamma h J k_1, \quad (4.5b)$$

$$k_2 = k_1 + \gamma h J k_2, \quad (4.5c)$$

$$k_3 = hf(y_0 + \alpha_{31} k_1 + \alpha_{32} k_2) + r_{32} k_2 + \gamma h J k_3, \quad (4.5d)$$

$$k_4 = k_3 + r_{42} k_2 + \gamma h J k_4. \quad (4.5e)$$

В соответствии с принятой терминологией, множества чёрных и белых стадий соответственно равны

$$M_{4,2}^{(0)} = \{1, 3\}, \quad M_{4,2}^{(1)} = \{2, 4\},$$

т.е. метод является четырёхполосным. Коэффициенты метода представлены в табл. 3, 4 (обозначения те же, что и в табл. 1, 2).

Таблица 3. Коэффициенты α_{ij} , γ_{ij} и r_{ij} метода (4.5)

(α_{ij})	(γ_{ij})	(r_{ij})
0	γ	0
0 0	0 γ	0 0
α_{31} α_{32} 0	0 0 γ	0 r_{32} 0
0 0 0 0	0 0 0 γ	0 r_{42} 0 0

Таблица 4. Коэффициенты β_{ij} , φ_{ij} и ψ_{ij} метода (4.5)

(β_{ij})	(φ_{ij})	(ψ_{ij})
γ	×	×
0 γ	0 γ	0 0
α_{31} α_{32} γ	×	×
0 0 0 γ	0 0 0 γ	0 r_{42} 0 0

Для подтверждения истинности теоремы 8 выведем условия порядка метода (4.5) вплоть до четвёртого. Как и ранее, начнём с вычисления элементарных весов по формулам (4.2)–(4.4).

Дерево $\tau_1 = \bullet$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_1) &= 1, & \Phi_2(\tau_1) &= 1, \\ \Phi_3(\tau_1) &= 1 + r_{32}, & \Phi_4(\tau_1) &= 1 + r_{42}. \end{aligned}$$

Условие порядка (3.10) приобретает вид:

$$b_1 + b_2 + b_3(1 + r_{32}) + b_4(1 + r_{32} + r_{42}) = 1. \quad (4.6a)$$

Дерево $\tau_2 = \bullet \curvearrowright$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_2) &= \gamma, \\ \Phi_2(\tau_2) &= 2\gamma, \\ \Phi_3(\tau_2) &= \alpha_{31} + \alpha_{32} + \gamma(1 + 3r_{32}), \\ \Phi_4(\tau_2) &= \alpha_{31} + \alpha_{32} + \gamma(2 + 4r_{32} + 3r_{42}). \end{aligned}$$

Условие порядка:

$$b_1\gamma + 2b_2\gamma + b_3(\alpha_{31} + \alpha_{32} + \gamma(1 + 3r_{32})) + \\ + b_4(\alpha_{31} + \alpha_{32} + \gamma(2 + 4r_{32} + 3r_{42})) = \frac{1}{2}. \quad (4.6b)$$

Дерево $\tau_3 = \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array}$. Как и в случае метода (3.9), из-за $\alpha_{11} = 0$ первые два веса равны нулю, а остальные — совпадают.

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_3) &= 0, & \Phi_2(\tau_3) &= 0, \\ \Phi_3(\tau_3) &= (\alpha_{31} + \alpha_{32})^2, & \Phi_4(\tau_3) &= (\alpha_{31} + \alpha_{32})^2. \end{aligned}$$

Условие порядка:

$$(\alpha_{31} + \alpha_{32})^2(b_3 + b_4) = \frac{1}{3}. \quad (4.6c)$$

Дерево $\tau_4 = \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array}$. Используем результаты для τ_2 :

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_4) &= \gamma^2, \\ \Phi_2(\tau_4) &= 3\gamma^2, \\ \Phi_3(\tau_4) &= \gamma(2\alpha_{31} + 3\alpha_{32} + \gamma(1 + 6r_{32})), \\ \Phi_4(\tau_4) &= \gamma(3\alpha_{31} + 4\alpha_{32} + \gamma(3 + 10r_{32} + 6r_{42})). \end{aligned}$$

Условие порядка:

$$b_1\gamma^2 + 3b_2\gamma^2 + b_3\gamma(2\alpha_{31} + 3\alpha_{32} + \gamma(1 + 6r_{32})) + \\ + b_4\gamma(3\alpha_{31} + 4\alpha_{32} + \gamma(3 + 10r_{32} + 6r_{42})) = \frac{1}{6}. \quad (4.6d)$$

Дерево $\tau_5 = \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array}$. Результаты аналогичны случаю τ_3 :

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_5) &= 0, & \Phi_2(\tau_5) &= 0, \\ \Phi_3(\tau_5) &= (\alpha_{31} + \alpha_{32})^3, & \Phi_4(\tau_5) &= (\alpha_{31} + \alpha_{32})^3. \end{aligned}$$

Условие порядка:


$$(\alpha_{31} + \alpha_{32})^3(b_3 + b_4) = \frac{1}{4}. \quad (4.6e)$$

Дерево $\tau_6 = \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \searrow \\ \bullet \end{array}$. Как и в случаях τ_3, τ_5 , из-за наличия ветвления у корня первые веса равны нулю:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_6) &= 0, & \Phi_2(\tau_6) &= 0, \\ \Phi_3(\tau_6) &= \gamma(\alpha_{31} + \alpha_{32})(\alpha_{31} + 2\alpha_{32}), & \Phi_4(\tau_6) &= \gamma(\alpha_{31} + \alpha_{32})(\alpha_{31} + 2\alpha_{32}). \end{aligned}$$

Условие порядка:

$$\gamma(\alpha_{31} + \alpha_{32})(\alpha_{31} + 2\alpha_{32})(b_3 + b_4) = \frac{1}{8}. \quad (4.6f)$$

Дерево $\tau_7 =$ . Аналогично:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_4) &= 0, & \Phi_2(\tau_4) &= 0, \\ \Phi_3(\tau_4) &= \gamma(\alpha_{31} + \alpha_{32})^2, & \Phi_4(\tau_4) &= \gamma(\alpha_{31} + \alpha_{32})^2. \end{aligned}$$

Условие порядка:

$$\gamma(\alpha_{31} + \alpha_{32})^2(b_3 + b_4) = \frac{1}{12}. \quad (4.6g)$$

Дерево $\tau_8 =$ . Используем результаты для τ_4 :

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau_4) &= \gamma^3, \\ \Phi_2(\tau_4) &= 4\gamma^3, \\ \Phi_3(\tau_4) &= \gamma^2(3\alpha_{31} + 6\alpha_{32} + \gamma(1 + 10r_{32})), \\ \Phi_4(\tau_4) &= \gamma^2(6\alpha_{31} + 10\alpha_{32} + \gamma(4 + 20r_{32} + 10r_{42})). \end{aligned}$$

Условие порядка:

$$\begin{aligned} b_1\gamma^3 + 4b_2\gamma^3 + b_3\gamma^2(3\alpha_{31} + 6\alpha_{32} + \gamma(1 + 10r_{32})) + \\ + b_4\gamma^2(6\alpha_{31} + 10\alpha_{32} + \gamma(4 + 20r_{32} + 10r_{42})) = \frac{1}{24}. \end{aligned} \quad (4.6h)$$

Условия (4.6) с точностью до обозначений совпадают с условиями, полученными ранее в других работах (см. [15, Формулы (30)], [16]).

5. Следствия

Выше с помощью техники раскрашивания стадий доказана серия утверждений о виде элементарных весов для полных (s, p) -методов (1.1). В данном разделе представлены следствия и возможные приложения полученных утверждений.

В-ряды. Одним из вопросов, связанных с заданием алгебраической структуры на множестве одношаговых методов решения ОДУ, является задача о построении разложения численного решения по степеням шага h . В случае (s, p) -методов на данный вопрос отвечает следующее

Следствие 9. Для численного решения (1.1) имеет место формальное разложение по степеням шага h вида:

$$y_1 = y_0 + \sum_{\tau \in T} \frac{h^{|\tau|}}{|\tau|!} \alpha(\tau) \gamma(\tau) \sum_{j=1}^s b_j \Phi_j(\tau) \mathcal{F}(\tau)(y_0), \quad (5.1)$$

где суммирование идёт по множеству T всех возможных деревьев, а веса $\Phi_j(\tau)$ вычисляются по формулам (4.2)–(4.4).

Кроме того, если в разложении (5.1) ограничиться членами, соответствующими только деревьям из $T_{\leq k}$, для остаточного члена R_k будет выполнено

$$R_k = O(h^{k+1}),$$

если функция правой части f обладает непрерывными производными порядка $k + 1$ в окрестности точного решения.

Доказательство фактически представляет собой альтернативную формулировку теоремы о виде остаточного члена формулы Тейлора с учётом результатов теоремы 8. \square

Замечание 4. Представление численного решения в виде (5.1) называют B -рядом [18].

Другие методы. Представляется, что с помощью техники раскрашивания стадий возможно обобщить результаты теоремы 8 на случай методов с неточно заданной матрицей Якоби или задач с алгебраическими связями (например, как это сделано для методов Розенброка в [11, §IV.4] и [11, §VI.4] соответственно).

Упрощающие предположения. В теореме 8 установлена связь между (s, p) -методами и корневыми деревьями, поэтому теперь актуальна задача о виде упрощающих предположений для (s, p) -методов. Предполагается, что это позволит упростить построение и анализ (s, p) -методов высоких порядков (например, как в [19] для методов Розенброка).

Заключение

В работе рассмотрено семейство полных (s, p) -методов. С помощью техники раскрашивания стадий получено символическое представление производных наклонов k_i промежуточных стадий (s, p) -методов, и на её основе построены B -ряды для численного решения.

Показано, что, в отличие от случая упрощённых (s, p) -методов, производные $k_i^{(q)}$ наклонов промежуточных стадий выражаются через производные наклонов k_j того же порядка q . Поэтому при доказательстве основной теоремы применен принцип двойной индукции.

Представляется, что указанная техника раскрашивания стадий будет полезна исследователям в области численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность М.П. Галанину за ценные советы, рекомендации и поддержку.

Список литературы

- [1] *Аджиев С.З., Веденяпин В.В., Филиппов С.С.* Об H -теореме для систем химической кинетики с непрерывным и дискретным временем и о системах уравнений нуклеосинтеза // ЖВМиМФ. 2018. Т. 58. № 9. С. 1517–1530. DOI:10.31857/S004446690002530-4
- [2] *Галанин М.П., Исаев А.В., Конев С.А.* О моделировании образования сажи при диффузионном горении углеводородных топлив //Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 110. 32 с. DOI:10.20948/prepr-2019-110
- [3] *Rang J., John V.* Adaptive time step control for the incompressible Navier–Stokes equations //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2010. V. 199. 15 January 2010. pp. 514–524. DOI:10.1016/j.cma.2009.10.005
- [4] *Rang J.* Improved traditional Rosenbrock–Wanner methods for stiff ODEs and DAEs //J. Comput. and Appl. Math. 2015. V. 286. 1 October 2015. pp. 128–144. DOI:10.1016/j.cam.2015.03.010
- [5] *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2010. 591 с.
- [6] Численные методы. В 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики /Н.Н. Калиткин, П.В. Корякин. М.: Издательский центр «Академия». 2013. 304 с.
- [7] *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний. 2006. 523 с.
- [8] *Новиков Е.А., Шитов Ю.А., Шокин Ю.И.* О классе (m, k) -методов решения жёстких систем //ЖВМ и МФ. 1989. Т. 29. № 2. с. 194–201. DOI:10.1016/0041-5553(89)90057-8
- [9] *Конев С.А.* Расширение теории корневых деревьев Бутчера для упрощённого (m, k) -метода //Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 23. 26 с. DOI:10.20948/prepr-2019-23

- [10] *Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. Berlin. Springer. 1993. 528 p. DOI:10.1007/978-3-540-78862-1
[Имеется перевод: *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи. М.: Мир. 1990. 512 с.]
- [11] *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin. Springer. 2010. 614 p. DOI:10.1007/978-3-642-05221-7
[Имеется перевод: *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир. 1999. 685 с.]
- [12] *Hairer E., Lubich C., Wanner G.* Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag. 2006. xvi+644 p. DOI:10.1007/3-540-30666-8
- [13] *Butcher J.C.* Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Chichester. John Wiley & Sons, Ltd. 2016. xxiv+519 p. DOI:10.1002/9781119121534
- [14] *Johnson W.P.* The Curious History of Faà di Bruno's Formula //Amer. Math. Month. 2002. V. 109. № 3. pp. 217–234. DOI:10.2307/2695352
- [15] *Новиков Е.А.* Исследование $(m, 2)$ -методов решения жёстких систем //Вычислительные технологии. 2007. Т. 12. № 5. с. 103–113. URL: <http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1035>
- [16] *Новиков Е.А.* L -устойчивый $(4, 2)$ -метод четвёртого порядка для решения жёстких задач //Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2011. Т. 89. № 8. с. 59–68. URL: <http://mi.mathnet.ru/vsgu124>
- [17] *Галантин М.П., Ходжаева С.Р.* Методы решения жёстких обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты тестовых расчётов //Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 98. 29 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-98>
- [18] *Hairer E., Wanner G.* On the Butcher group and general multi-value methods //Computing. 1974. № 13. pp. 1–15. DOI:10.1007/BF02268387
- [19] *Kaps P., Wanner G.* A Study of Rosenbrock-Type Methods of High Order //Numer. Math. 1981. № 38. pp. 279–298. DOI:10.1007/BF01397096

Содержание

Введение	3
1. Известные результаты	4
2. Однополосный случай	7
3. Двухполосный случай	13
4. Общий случай	21
5. Следствия	25
Заключение	26