

ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека Препринты ИПМ • Препринт № 48 за 2020 г.



ISSN 2071-2898 (Print) ISSN 2071-2901 (Online)

Алексеев М.В., Савенков Е.Б., Воронин Ф.Н.

Численное решение уравнений Баера-Нунциато разрывным методом Галеркина

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Алексеев М.В., Савенков Е.Б., Воронин Ф.Н. Численное решение уравнений Баера-Нунциато разрывным методом Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 48. 23 с. <u>http://doi.org/10.20948/prepr-2020-48</u> URL: <u>http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-48</u>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М. В. КЕЛДЫША

М.В. Алексеев, Е.Б. Савенков, Ф.Н. Воронин

Численное решение уравнений Баера-Нунциато разрывным методом Галеркина

Москва, 2020

М.В. Алексеев, Е.Б. Савенков, Ф.Н. Воронин, Численное решение уравнений Баера-Нунциато разрывным методом Галеркина

Аннотация

В работе рассматривается применение разрывного метода Галеркина для решения уравнений модели Баера-Нунциато, описывающей течения в многофазных средах в рамках многоскоростной полностью неравновесной постановки. Для представления решения используется алгебраическое восполнение решения до второго порядка включительно. Монотонность схемы обеспечивается применением геометрического лимитера WENO-S. Представлены результаты одномерных и двумерных тестовых расчетов. В качестве численных потоков используются потоки Лакса-Фридрихса и Русанова. Приведены примеры численных расчетов одномерных и двумерных задач.

Ключевые слова: модель Баера-Нунциато, многофазные течения, разрывный метод Галеркина

*M.V. Alekseev, E.B. Savenkov, F.N. Voronin, Numerical solution of Baer-*Nunziato model with discontinuous Galerkin method

Abstract

The paper presents the discontinuous Galerkin method for solving the equations of the Baer-Nunziato model, that describes flows in multiphase media in the framework of completely non-equilibrium formulation. The algebraic completion of the solution up to the second order is used. The monotony of the numerical scheme is ensured by the use of the WENO-S geometric limiter. The results of one-dimensional and two-dimensional test calculations are presented. Lax-Friedrichs and Rusanov flows are used as numerical fluxes. Examples of numerical calculations of one-dimensional and two-dimensional problems are given.

Key words and phrases: Baer-Nunziato model, multiphase flows, RKDG

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00582 A)

1 Введение

В настоящее время существует значительный интерес к разработке средств и методов математического моделирования для анализа высокоинтенсивных ударно-волновых процессов в неоднородных конденсированных средах (твердых телах и жидкостях). Для решения таких задач традиционно используются модели, основанные на лагранжевом описании среды. Их достоинством является возможность разработки эффективных вычислительных алгоритмов и простота отслеживания границ раздела материалов с различными термодинамическими и реологическими свойствами.

Трудностью в применении таких методов в случае больших перемещений и деформаций среды является сильное возмущение расчетной сетки в эйлеровых координатах: в ходе расчета могут появляться ячейки, геометрия которых несовместна с моделью деформации среды. Например, в ходе расчета может возникать «перехлест» граней ячеек сетки или их вырождение. Это привело к разработке методов на основе смешанного эйлерово-лагранжевого (СЭЛ) метода описания среды. На основе этих подходов созданы такие коды, как Allegra [1] и BLAST [2].

Однако использование СЭЛ-подхода также вызывает ряд технических сложностей, связанных с устойчивой реализацией соответствующего класса алгоритмов. Так, алгоритмы генерации и перестройки адаптивных сеток в ходе расчета и корректная интерполяция на них физических полей являются вычислительно затратными и сложными в реализации процедурами. Одновременно с этими теоретическими трудностями использования СЭЛ-подходов они сложны для реализации в случаях, когда в модели присутствуют динамические границы (например, фазовых переходов или фронтов химических реакций), большое число несвязных подобластей (например, гранулированные среды), взаимодействие границ (например, упругий контакт) или фрагментация среды (например, разлет «осколков»).

По этой причине в настоящее время для решения задач с большими деформациями все больший интерес вызывают методы, основанные на эйлеровом подходе. Одной из центральных проблем, связанных с применением моделей такого типа, является необходимость описания динамики межфазных границ (в том числе границ расчетной области). При этом использование чисто эйлеровых подходов позволяет успешно решать задачи с динамическими границами, указанные выше. Примеры эйлеровых подходов для подобных задач приведены, например, в [3,4]. Примерами моделей многоматериальных (multimaterial) и многофазных сред, основанных на эйлеровом описании, являются модели гидродинамики суспензий или эмульсий с прямым разрешением структуры как дисперсной, так и диспергирующей сред, в том числе при решении задач радиационно-индуцированных термомеханических эффектов в гетерогенных полидисперсных средах [5].

Описанные выше достоинства и общность эйлеровых подходов делают перспективным их использование для решения сложных комплексных задач математического моделирования поведения многофазных сред при высокоинтенсивном и импульсном нагружении. Вместе с тем эффективное применение эйлеровых подходов требует разработки новых вычислительных алгоритмов. В настоящей работе рассматривается многофазная многоскоростная модель Баера-Нунциато и разрывный метод Галеркина, который применяется для ее численного решения. Модель Баера-Нунциато впервые предложена в работе [6] для анализа процесса перехода дефлаграции в детонацию. В дальнейшем она применялась для решения целого ряда задач и в настоящее время может рассматриваться как базовая модель для целого ряда обобщений. В частности, модели типа Баера-Нунциато могут применяться для анализа ударно-волновых процессов в средах с границами раздела фаз [3].

Вычислительным алгоритмам для модели Баера-Нунциато посвящено множество работ. В настоящей работе используется разрывный метод Галеркина с использованием метода Рунге-Кутты (RK/DG, Runge-Kutta/Discontinuous Galerkin method [7]). Мотивация такого выбора связана с тем, что разрывный метод Галеркина допускает более или менее формальные обобщения на случай уравнений высокого порядка, к которым сводится ряд обобщений модели Баера-Нунциато (например, при необходимости учета сил поверхностного натяжения, действующих на межфазных границах [8]). Отметим, что данный метод применялся для решения рассматриваемой задачи и ранее [9].

Однако основной тематикой этих работ является построение эффективных схем, максимально полно учитывающих особенности задачи. В рамках настоящей работы модель Баера-Нунциато рассматривается в качестве базовой, представляющей собой основу для дальнейших обобщений. В силу этого используются алгоритмы, максимально отвечающие идее «physics-free», то есть минимально учитывающие особенности задачи, но вместе с тем пригодные для получения конечных результатов с приемлемой точностью.

В заключение авторы выражают благодарность В. В. Лукину (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН) за полезные советы и обсуждения.

2 Математическая модель Баера-Нунциато

Модель Баера-Нунциато без релаксационных слагаемых может быть записана в случае двух фаз в виде следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \alpha_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \boldsymbol{u}_{\mathbf{I}} \cdot \nabla \alpha_{k} = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \alpha_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} \boldsymbol{u}_{\mathbf{k}}) = 0, \tag{1b}$$

$$\frac{\partial \alpha_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} \boldsymbol{u}_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} \boldsymbol{u}_{\mathbf{k}} \otimes \boldsymbol{u}_{\mathbf{k}}) + \nabla (\alpha_{\mathbf{k}} P_{\mathbf{k}}) - P_{I} \nabla \alpha_{k} = 0, \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \alpha_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\alpha_{\mathbf{k}} \left(\rho_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} + P_{\mathbf{k}} \right) \boldsymbol{u}_{\mathbf{k}} \right) - P_{I} \boldsymbol{u}_{I} \nabla \alpha_{k} = 0, \tag{1d}$$

где индекс k = 1, 2 соответствует номеру фазы. Уравнения соответствуют (сверху вниз) балансу объема фазы, закону сохранения массы, импульса и энергии. Правые части этих уравнений представляют собой обменные слагаемые, определяющие межфазное взаимодействие. Здесь α_k , ρ_k , u_k , P_k , E_k – объемная доля, плотность, скорость, статическое давление и полная энергия k-ой фазы. В системе уравнений Баера-Нунциато u_I и P_I – скорость и давление на межфазных границах, которые принимаются за скорость и давление *смеси* фаз. В приведенных выше уравнениях полная энергия фазы k равна:

$$E_{\rm k} = \mathcal{U}_{\rm k} + \frac{\boldsymbol{u}_{\rm k} \cdot \boldsymbol{u}_{\rm k}}{2},\tag{2}$$

 \mathcal{U}_{k} – внутренняя энергия. Термодинамические параметры для каждой из фаз связаны с соответствующим уравнением состояния $\mathcal{U}_{k} = \mathcal{U}_{k} (P_{k}, \rho_{k})$. Отметим недивергентные слагаемые, пропорциональные $P_{I} \nabla \alpha_{k}$, вид которых характерен для всех многофазных моделей [10].

Для замыкания системы уравнений (1a)-(1d) используются различные выражения для $u_{\rm I}$ и $P_{\rm I}$. Выбор этих выражений влияет на взаимодействие фаз.

В работе [6] предлагается следующий вариант:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{u}_{1}, \\ P_{\mathrm{I}} = P_{2}, \end{cases}$$
(3)

где фаза 1 является газовой фазой, а фаза 2 – твердой. Когда обе фазы сжимаемые, можно использовать полностью симметричные уравнения [11]

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{\mathrm{I}} = \sum_{k=1}^{2} \alpha_{\mathrm{k}} \rho_{\mathrm{k}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{k}} / \sum_{k=1}^{2} \alpha_{\mathrm{k}} \rho_{\mathrm{k}}, \\ P_{\mathrm{I}} = \sum_{k=1}^{2} \alpha_{\mathrm{k}} P_{\mathrm{k}}. \end{cases}$$
(4)

В данной работе используются оба варианта. Вид определяющих соотношений для **u**_I и *P*_I является важной частью модели [12]. Выбор скорости и давления на межфазных границах является важной составляющей итоговой модели и влияет на структуру волн, представленных в модели [13].

3 Разрывный метод Галеркина

В данном разделе будет кратко представлена схема разрывного метода Галеркина [7] для одномерного варианта гиперболического закона сохранения в консервативной форме.

Разрывный метод Галеркина для гиперболических уравнений в консервативной форме. Рассмотрим закон сохранения в виде гиперболического уравнения в консервативной форме в области $\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}\left(x,t\right)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}\left(\boldsymbol{Q}\left(x,t\right)\right)}{\partial x} = 0.$$
(5)

Введем разбиение $\{\omega_i\}_{i=0}^{i=N}$ области Ω и обозначим ячейку сетки (конечный элемент) $\omega_i = \begin{bmatrix} x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}, 1 \leq i \leq N$. Обозначим $\mathcal{V}_h^k(\Omega)$ пространство элементов из $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$ с проекцией ω_i , принадлежащей векторному пространству $\mathcal{P}^k(\omega_i)$ полиномов степени k:

$$\mathcal{V}_{h}^{k} = \left\{ v : v|_{\omega_{i}} \in \mathcal{P}^{k}(\omega_{i}) ; 1 \leq i \leq N \right\}.$$

Определим элементы пространства $\mathcal{P}^{k}(\omega_{i})$ как набор линейно независимых ортонормированных полиномов Лежандра $\left\{\psi_{i}^{(l)}\right\}_{l=0}^{l=k}$ и представим решение $\boldsymbol{Q}(x,t)$ в ячейке ω_{i} конечномерной аппроксимацией

$$\boldsymbol{Q}_{h}(x,t)|_{\omega_{i}} = \sum_{l=0}^{k} \psi_{i}^{(l)}(x) \, \boldsymbol{Q}_{i}^{(l)}(t) \,.$$
(6)

Для получения полудискретной системы уравнений для $Q_h(x,t)$ умножим уравнение (5) на пробную функцию $v_h \in V_h^k$, проинтегрируем по области ω_i и применим формулу Грина:

$$\int_{\omega_{i}} \frac{\partial \boldsymbol{Q}_{h}(x,t)}{\partial t} v_{h}(x) dx + \int_{\omega_{i}} \mathcal{F}\left(\boldsymbol{Q}_{h}(x,t)\right) \frac{\partial v_{h}(x)}{\partial x} dx + \sum_{e \in \partial \omega_{i}} \int_{e} \hat{\mathcal{F}}\left(\boldsymbol{Q}_{h}(x,t)\right) v_{h}(x) d\Gamma = 0.$$
(7)

В уравнении (7) аналитический поток $\mathcal{F}\left(\boldsymbol{Q}_{h}\left(x,t\right)\right)$ заменяется численным $\hat{\mathcal{F}}\left(\boldsymbol{Q}_{h}\left(x,t
ight)
ight)$ в поверхностном интеграле, поскольку на границе ячеек решение терпит разрыв и не определено. В одномерном случае получаем:

$$\sum_{e \in \partial \omega_i} \int_e \hat{\mathcal{F}} v_h \, d\Gamma = \hat{\mathcal{F}}_{i+1/2} v_h \left(x_{i+1/2}^+ \right) - \hat{\mathcal{F}}_{i-1/2} v_h \left(x_{i-1/2}^- \right).$$

Здесь $\hat{\mathcal{F}}_{i\pm 1/2}$ – численный поток в точке границы $x \in \partial \omega_i$.

$$\hat{\mathcal{F}}_{i\pm 1/2} = \hat{\mathcal{F}}\left(oldsymbol{Q}_{i\pm 1/2}^+,oldsymbol{Q}_{i\pm 1/2}^-
ight),$$

где $\boldsymbol{Q}_{i\pm 1/2}^+$ и $\boldsymbol{Q}_{i\pm 1/2}^-$ левые и правые предельные значения \boldsymbol{Q}_h в точках $x \in \partial \omega_i$. Различные виды численных поток известны для многофазных моделей [14]. В данной работе они не рассматриваются. В настоящей работе используются следующие виды потоков:

1. поток Лакса-Фридрихса:

$$\hat{\mathcal{F}}_{i\pm1/2}^{\mathrm{LF}} = \frac{1}{2} \left[\mathcal{F} \left(\boldsymbol{Q}_{i\pm1/2}^{+} \right) + \mathcal{F} \left(\boldsymbol{Q}_{i\pm1/2}^{-} \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \left(\boldsymbol{Q}_{i\pm1/2}^{+} - \boldsymbol{Q}_{i\pm1/2}^{-} \right); \quad (8)$$

2. поток Русанова:

$$\hat{\mathcal{F}}_{i\pm1/2}^{\mathrm{RS}} = \frac{1}{2} \left[\mathcal{F} \left(\boldsymbol{Q}_{i\pm1/2}^{+} \right) + \mathcal{F} \left(\boldsymbol{Q}_{i\pm1/2}^{-} \right) \right] - \frac{1}{2} \Lambda \left(\boldsymbol{Q}_{i\pm1/2}^{+} - \boldsymbol{Q}_{i\pm1/2}^{-} \right).$$
(9)

Здесь

$$\Lambda = \Lambda \left(\boldsymbol{Q}_{i\pm 1/2}^+, \boldsymbol{Q}_{i\pm 1/2}^- \right) = \max \left(|\lambda_{i\pm 1/2}^+|, |\lambda_{i\pm 1/2}^-| \right),$$

где $\lambda^{\pm}_{i\pm 1/2}$ – максимальные собственные значения якобиана $J(oldsymbol{Q})$ =

 $\partial \mathcal{F}(\mathbf{Q}) / \partial \mathbf{Q}$ в соответствующих точках, см. [15]). После определения $v_h(x) = \left\{\psi_i^{(l)}\right\}_{l=0}^{l=k}$ получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для степеней свободы решения $\left\{ oldsymbol{Q}_{i}^{\left(l
ight)}
ight\}$:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{Q}}}{dt} = \mathbf{M}(\hat{\boldsymbol{Q}}). \tag{10}$$

Для интегрирования по времени системы (10) далее используется вариант метода Рунге-Кутты TVD/RK3 [7]) с соответствующим лимитированием на каждом шаге метода. Данная схема применяется к системе уравнений к каждому уравнению отдельно от остальных.

Общий вид схемы для неконсервативного уравнения. Опишем теперь особенности применения разрывного метода Галеркина для решения системы гиперболических уравнений с неконсервативными слагаемыми, которую запишем для области $\Omega = [0, L]$ в виде:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{A}}(x, \boldsymbol{Q}) \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial x} = 0, \qquad (11)$$

где $Q = Q(x,t) = [q_1, \ldots, q_n]$, $\mathcal{A}(x, Q) \neq \partial \mathcal{F}/\partial Q$ для какого-либо \mathcal{F} . Обобщенное решение данной задачи для консервативных систем (в случае, когда $\mathcal{A}(x, Q) = \partial \mathcal{F}/\partial Q$) ищется в классе классических обобщенных функций. Решения данной системы нелинейных гиперболических уравнений в общем случае разрывны. Для неконсервативных систем обобщенное решение не может быть найдено в классе обобщенных функций, поскольку невозможно корректно поставить задачу Римана на границе ячеек. Для решения этой проблемы существуют разные подходы. В настоящей работе используется распространенный подход, основанный на применении теории DLM (Dal Maso-Le Floch-Murat, [16]). Данный подход был описан в предыдущей работе авторов [17].

Для получения численной схемы рассмотрим сначала консервативную систему уравнений:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{Q})}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$
(12)

и, в слабой форме,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{Q}(x,t)}{\partial t} v(x) \, dx + \int_{\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}}(\boldsymbol{Q}(x,t))}{\partial x} v(x) \, dx = 0, \tag{13}$$

где $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^N$ – пробные функции, $\mathcal{D}(\mathbb{R})^N$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

Рассмотрим теперь эту систему в терминах борелевской меры и введем

$$\left\langle \left[\frac{\partial \mathcal{F}\left(\boldsymbol{Q}\left(,t\right)\right)}{\partial x}\right],v\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \mathcal{F}\left(\boldsymbol{Q}\left(x,t\right)\right)}{\partial x}v\left(x\right)\,dx + \sum_{d}\left(\mathcal{F}\left(\boldsymbol{Q}_{d}^{+}\right) - \mathcal{F}\left(\boldsymbol{Q}_{d}^{-}\right)\right)v\left(x_{d}\right), \quad (14)$$

 $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^N$. В таком случае обобщенная функция $[\partial \mathcal{F}(\mathbf{Q}(\mathbf{t}))/\partial x]$ может быть рассмотрена как борелевская мера, которая по теореме Лебега о разложении меры состоит из двух слагаемых $\mu = \mu_a + \mu_s$:

$$\mu_{a}\left(\mathbb{E}\right) = \int_{\mathbb{E}} \frac{\partial \mathcal{F}\left(\boldsymbol{Q}\left(x,t\right)\right)}{\partial x} \, dx,\tag{15}$$

непрерывного для каждого открытого борелевского множества \mathbb{E} , и дискретной меры Дирака в точках $x = x_d(t)$

$$\mu_{s} = \sum_{d} \left(\mathcal{F} \left(\mathbf{Q}_{d}^{+} \right) - \mathcal{F} \left(\mathbf{Q}_{d}^{-} \right) \right) \delta \left(x - x_{d} \left(t \right) \right).$$
(16)

Таким образом, уравнение (13) можно переписать в виде:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} v \, dx + \left\langle \left[\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}} \left(\boldsymbol{Q} \left(, t \right) \right)}{\partial x} \right], v_{\Omega} \right\rangle = 0.$$
(17)

Рассмотрим теперь неконсервативный случай. Введем отображение Ψ : [0,1] × Ω × Ω \mapsto Ω , которое будем называть путем, который «соединяет» левое значение решения в точке разрыва с правым [17]. Тогда для неконсервативного слагаемого в (11) можно определить борелевскую меру как

$$\left\langle \left[\boldsymbol{\mathcal{A}} \left(\boldsymbol{Q} \left(, t \right) \right) \frac{\partial \boldsymbol{Q} \left(, t \right)}{\partial x} \right]_{\Psi}, v \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\mathcal{A}} \left(\boldsymbol{Q} \left(x, t \right) \right) \frac{\partial \boldsymbol{Q} \left(x, t \right)}{\partial x} v \left(x \right) \, dx + \\ + \sum_{d} \left(\int_{0}^{1} \boldsymbol{\mathcal{A}} \left(\Psi \left(\boldsymbol{Q}_{d}^{+}, \boldsymbol{Q}_{d}^{-}, s \right) \right) \frac{\partial \Psi}{\partial s} \left(\boldsymbol{Q}_{d}^{+}, \boldsymbol{Q}_{d}^{-}, s \right) \, ds \right) v \left(x_{d} \right).$$
(18)

Как и ранее, мера $\mu = \mu_a + \mu_s$ состоит из двух слагаемых:

$$\mu_{a}^{\Psi}\left(\mathbb{E}\right) = \int_{\mathbb{E}} \mathcal{A}\left(\boldsymbol{Q}\left(x,t\right)\right) \frac{\partial \boldsymbol{Q}\left(x,t\right)}{\partial x} \, dx,\tag{19}$$

$$\mu_{s}^{\Psi} = \sum_{d} \left(\int_{0}^{1} \boldsymbol{\mathcal{A}} \left(\Psi \left(\boldsymbol{Q}_{d}^{+}, \boldsymbol{Q}_{d}^{-}, s \right) \right) \frac{\partial \Psi}{\partial s} \left(\boldsymbol{Q}_{d}^{+}, \boldsymbol{Q}_{d}^{-}, s \right) \, ds \right) \delta \left(x - x_{d} \left(t \right) \right). \tag{20}$$

Данные меры могут быть рассмотрены как обобщения полученных ранее мер (15), (16) для консервативного случая. В случае, когда \mathcal{A} является якобианом какого-либо потока \mathcal{F} , полученные меры не зависят от выбранного пути и совпадают с полученными ранее [18].

Обобщенное условие Гюгонио имеет вид:

$$\int_{0}^{1} \left(\xi \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\mathcal{A}} \left(\Psi \left(\boldsymbol{Q}^{-}, \boldsymbol{Q}^{+}; s \right) \right) \right) \frac{\partial \Psi}{\partial s} \left(\boldsymbol{Q}^{-}, \boldsymbol{Q}^{+}; s \right) ds = 0, \quad (21)$$

где ξ – скорость разрыва, Q^-, Q^+ – значения слева и справа (предельные) от разрыва соответственно. Постановка задачи Римана для соответствующей

неконсервативной системы представлена в [18]. В силу того, что задача Римана теперь является корректно поставленной, на основе сделанных выше построений могут быть выведены соответствующие схемы типа Годунова. В частности, численная схема для разрывного метода Галеркина с неконсервативными слагаемыми может быть записана в виде:

$$\int_{I_i} \frac{\partial \boldsymbol{Q}_h}{\partial t} v_h(x) \, dx + \int_{I_i} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{Q}_h) \frac{\partial \boldsymbol{Q}_h}{\partial x} v_h(x) \, dx + \left(\left[v_h\left(x_{i+1/2}\right) \right]^- \boldsymbol{D}_{i+1/2}^- + \left[v_h\left(x_{i+1/2}\right) \right]^+ \boldsymbol{D}_{i-1/2}^+ \right) = 0,$$

где $D_{i+1/2}^{-}, D_{i-1/2}^{+}, [v_h(x_{i+1/2})]$ определены на границах соответствующих ячеек. В этом случае

$$\boldsymbol{D}_{i+1/2}^{-} = \int_{0}^{1} \boldsymbol{\mathcal{A}} \left(\Psi \left(\boldsymbol{Q}_{i+1/2}^{-}, \hat{\boldsymbol{Q}}_{i+1}; s \right) \right) \frac{\partial \Psi}{\partial s} \left(\boldsymbol{Q}_{i+1/2}^{-}, \hat{\boldsymbol{Q}}_{i+1}; s \right) ds, \qquad (22)$$

$$\boldsymbol{D}_{i+1/2}^{+} = \int_{0}^{1} \boldsymbol{\mathcal{A}} \left(\Psi \left(\hat{\boldsymbol{Q}}_{i+1}, \boldsymbol{Q}_{i+1/2}^{+}; s \right) \right) \frac{\partial \Psi}{\partial s} \left(\hat{\boldsymbol{Q}}_{i+1}, \boldsymbol{Q}_{i+1/2}^{+}; s \right) ds, \qquad (23)$$

где $\hat{\boldsymbol{Q}}_{i+1}$ – решение задачи Римана на границе ячеек Пусть выбран линейный путь $\Psi\left(\boldsymbol{Q}^{-}, \boldsymbol{Q}^{+}; s\right) = \boldsymbol{Q}_{d}^{-} + s\left(\boldsymbol{Q}_{d}^{+} - \boldsymbol{Q}_{d}^{-}\right)$. Тогда в точках разрыва $x_d = x_{i\pm 1/2}$:

$$\boldsymbol{D}_{d}^{\pm} = A_{d}^{\pm} \left(\boldsymbol{Q}_{d}^{+} - \boldsymbol{Q}_{d}^{-} \right), \ A_{d}^{\pm} = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \left(\boldsymbol{\mathcal{A}} \left(\boldsymbol{Q}_{d}^{-} \pm s \left(\boldsymbol{Q}_{d}^{+} - \boldsymbol{Q}_{d}^{-} \right) \right) \pm \boldsymbol{V}_{d} \right) \, ds, \quad (24)$$

где $oldsymbol{V}_d$ – так называемая матрица диссипации. Аналогично консервативному случаю (8) – (9) можно определить:

• классический метод Лакса-Фридрихса:

$$A_d^{\pm} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\boldsymbol{\mathcal{A}} \left(\boldsymbol{Q}_d^- + s \left(\boldsymbol{Q}_d^+ - \boldsymbol{Q}_d^- \right) \right) \pm \mathbb{I} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) ds, \tag{25}$$

который соответствует выбору $V_d = \mathbb{I}\Delta x / \Delta t$, \mathbb{I} – единичная матрица.

• метод Русанова:

$$A_d^{\pm} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\boldsymbol{\mathcal{A}} \left(\boldsymbol{Q}_d^- + s \left(\boldsymbol{Q}_d^+ - \boldsymbol{Q}_d^- \right) \right) \pm \mathbb{I} |\lambda_{max}| \right) ds,$$
(26)

где λ_{max} – максимальное собственное значение матрицы $\mathcal{A}(\mathbf{Q}_d^- + s(\mathbf{Q}_d^+ - \mathbf{Q}_d^-))$. В данном случае матрица диссипации выбрана как $V_d = \mathbb{I}|\lambda_{max}|$.

4 Лимитеры

Для рассматриваемого метода Рунге-Кутты (TVD/RK3) численное решение не будет монотонным для случая разрывных решений. Традиционный способ обеспечить монотонность решения заключается в добавлении в схему численной диссипации. Она может быть введена в аппроксимации разрывного метода Галеркина различными способами, среди которых известны методы на основе геометрических лимитеров, явного введения дополнительных диссипативных слагаемых и алгоритмов на основе фильтрации высокочастотных компонент решения [19]. В работах [20, 21] описан способ монотонизации метода RK/DG путем явного введения в схему искусственной вязкости типа Неймана-Рихтмайера. В работах [22] описан один из наиболее популярных лимитеров, построенных на использовании функции minmod (TVB minmod limiter). Помимо этого, существуют лимитеры, основанные на последовательном ограничении степеней свободы начиная с высшей (например, моментный лимитер Криводоновой [23]).

В настоящей работе используется лимитер WENO-S (simple WENO), в котором лимитированное решение в ячейке строится как линейная комбинация полиномиальных представлений решения непосредственно в рассматриваемой ячейке и ее ближайших соседях.

Последовательность действий для лимитирования решения имеет вид:

1. Определение ячеек, в которых необходимо применение лимитера. Обозначим среднее значение решения в ячейке как

$$\overline{q}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{I_i} q dx.$$
(27)

Скачки на границе ячейки обозначим как $\tilde{q}_i = q_{i+1/2}^- - \overline{q}_i$, $\tilde{\tilde{q}}_i = \overline{q}_i - q_{i-1/2}^+$. В каждой ячейке рассмотрим:

$$\tilde{q}_i^{(mod)} = \operatorname{minmod}\left(\tilde{q}_i, \overline{q}_{i+1} - \overline{q}_i, \overline{q}_i - \overline{q}_{i-1}\right), \qquad (28)$$

$$\tilde{\tilde{q}}_{i}^{(mod)} = \operatorname{minmod}\left(\tilde{\tilde{q}}_{i}, \overline{q}_{i+1} - \overline{q}_{i}, \overline{q}_{i} - \overline{q}_{i-1}\right),$$
(29)

где

minmod
$$(a_1, \ldots, a_N) = \begin{cases} smin(a_1, \ldots, a_N), & ecли \ s = sign(a_1) = \ldots = sign(a_N) \\ 0 & иначе. \end{cases}$$

Решение в ячейке i подлежит лимитированию, если (28) возвращает не первый аргумент. Далее опишем процесс построения решения в ячейке, если оно подлежит лимитированию.

2. Модификация решения в соседних ячейках. Обозначим полином решения в ячейках с индексами i-1, i, i+1 как $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ соответственно. Решения в соседних ячейках модифицируются следующим образом:

$$\tilde{p}_0(x) = p_0 - \overline{\bar{p}}_0 + \overline{\bar{p}}_1, \quad \tilde{p}_2(x) = p_2 - \overline{\bar{p}}_2 + \overline{\bar{p}}_1, \quad (30)$$

где

$$\overline{\overline{p}}_{i} = \frac{1}{\Delta x_{i}} \int_{I_{i}} p_{i}(x) dx.$$
(31)

3. *Расчет индикатора гладкости для каждой из ячеек*. Индикатор гладкости β_i имеет вид:

$$\beta_{i} = \sum_{l=1}^{k} \int_{I_{j}} \Delta x_{j}^{2l-1} \left(\frac{\partial^{l}}{\partial x^{l}} p_{j}(x) \right)^{2} dx, \qquad (32)$$

где k – порядок полинома решения в ячейке.

4. *Расчет весов для каждой из ячеек*. Нормированные веса ω_i для каждой из ячеек имеют вид:

$$\omega_i = \frac{\overline{\omega}_i}{\sum_n \overline{\omega}_n}, \quad \overline{\omega}_n = \frac{\gamma_n}{(\varepsilon + \beta_n)^r}.$$
(33)

Здесь γ_n – линейный вес, $\varepsilon = 10^{-6}$, r = 2. Линейные веса должны обладать следующими свойствами:

$$\sum_{n} \gamma_n = 1.0,$$

$$\gamma_1 \gg \gamma_0, \gamma_1 \gg \gamma_2.$$

5. Расчет лимитированного решения:

$$p_1^{\text{new}}(x) = \omega_0 \tilde{p}_0(x) + \omega_1 p_1(x) + \omega_2 \tilde{p}_2(x).$$
 (34)

Применение лимитера может быть обобщено на многомерный случай (последовательное применение по каждому из направлений) и случай системы уравнений.

5 Результаты численных экспериментов для тестовых задач

В настоящей работе многомерные уравнения Баера-Нунциато представлены следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q})}{\partial y} + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{Q})\frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Q})\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 0, \quad (35)$$

где

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \alpha_{1} \\ \alpha_{1}\rho_{1} \\ \alpha_{1}\rho_{1}u_{1} \\ \alpha_{1}\rho_{1}u_{1} \\ \alpha_{1}\rho_{1}v_{1} \\ \alpha_{1}\rho_{1}v_{1} \\ \alpha_{1}\rho_{1}w_{1} \\ \alpha_{1}\rho_{1}E_{1} \\ \alpha_{2} \\ \alpha_{2}\rho_{2} \\ \alpha_{2}\rho_{2}u_{2} \\ \alpha_{2}\rho_{2}v_{2} \\ \alpha_{2}\rho_{2}v_{2}v_{2} \\ \alpha_{2}v_{2}(\rho_{2}E_{2}+P_{2}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} u_{I} \\ 0 \\ -P_{I} \\ 0 \\ 0 \\ -P_{I} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -V_{I}P_{I} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{I}P_{I} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}(\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} v_{I} \\ 0 \\ -P_{I} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{I}P_{I} \end{bmatrix},$$

где (u_I, v_I) , P_I – компоненты скорости и давление на межфазной границе, определенные в (3) и (4). Здесь α_k , ρ_k , \boldsymbol{u}_k , P_k , E_k – объемная доля, плотность, скорость, давление и полная энергия k-ой фазы, которая соответствует:

$$E_{\rm k} = \mathcal{U}_{\rm k} + \frac{\boldsymbol{u}_{\rm k} \cdot \boldsymbol{u}_{\rm k}}{2},\tag{36}$$

,

 \mathcal{U}_k – внутренняя энергия, заданная для каждой фазы через уравнение состояния следующего вида:

$$\mathcal{U}_{\mathbf{k}} = \frac{P_{\mathbf{k}} + \gamma_{\mathbf{k}} P_{\infty,\mathbf{k}}}{(\gamma_{\mathbf{k}} - 1)\,\rho_{\mathbf{k}}}.\tag{37}$$

Численному решению задачи (35), в том числе разрывным методом Галеркина, посвящен целый ряд работ [24, 25]. Особенностью данной работы является применение максимально простых численных потоков и лимитера WENO-S. Данный подход был выбран для проверки применимости рассмотренных алгоритмов на тестовых задачах. В дальнейшем планируется использование настоящего подхода к более сложным задачам, для которых более сложные численные потоки, например типа HLL/HLLC, неизвестны либо вычислительно затратны.

Тест с контактной границей. В данном тесте решение для жидкой фазы состоит из левой волны разрежения, правой ударной волны и правым движущимся контактным разрывом. Решение для газовой фазы состоит из левой волны разрежения, контактного разрыва и правой ударной волны. Начальные данные заданы в таблице 1. Значениям слева от точки разрыва соответствуют величины с индексом L, справа – с индексом R.

Таблица 1. Начальные данные для теста с контактной границей

	$\alpha_{\rm L}$	$ ho_{ m L}$	$u_{\rm L}$	$p_{\rm L}$	$\alpha_{ m R}$	$ ho_{ m R}$	$u_{\rm R}$	$p_{\rm R}$
Фаза 1	0.8	1.0	0.0	1.0	0.3	1,0	0.0	1.0
Фаза 2	0.2	0.2	0.0	0.3	0.7	1.0	0.0	1.0

Параметры уравнения состояния заданы в таблице 2. Расчеты проводи-Таблица 2. Параметры уравнений состояния для теста с контактной границей

	γ	P_{∞}
Фаза 1	1.4	0.0
Фаза 2	1.4	0.0

лись в области с размером $L_x = 1$ м. Шаг по времени составил 10^{-3} с. Число ячеек $N_x = 100$. Расчеты проводились до времени 0.15 с. Результаты приведены для схемы с алгебраическим восполнением решения нулевого порядка (константы в каждой расчетной ячейке) и первого порядка (кусочно-линейное решение в каждой расчетной ячейке). Для второго случая используется лимитирование WENO-S. Из рисунков 1 видно, что техника лимитирования дает осцилляции на консервативном поле скоростей.



Рис. 1. Тест с контактной границей

Тест с двумя волнами разрежения. В данном тесте две волны разрежения расходятся от центра расчетной области в противоположные стороны. Область между волнами близка к вакууму – в ней образуется почти нулевое давление. Таким образом, в данном тесте анализируется способность схемы

сохранять положительность некоторых физических полей (например, давления в случае, когда его значение близко к нулю). Начальные данные приведены в таблице 3. Параметры уравнения состояния заданы в таблице 4.

Таблица 3. Начальные даннные для теста с двумя волнами разрежения

	$\alpha_{\rm L}$	$ ho_{ m L}$	$u_{\rm L}$	$p_{\rm L}$	$\alpha_{ m R}$	$ ho_{ m R}$	$u_{\rm R}$	$p_{\rm R}$
Фаза 1	0.8	1.0	-2.0	0.4	0.5	1.0	2.0	0.4
Фаза 2	0.2	1.0	-2.0	0.4	0.5	1.0	2.0	0.4

Таблица 4. Параметры уравнений состояния для теста с двумя волнами разрежения

	γ	P_{∞}
Фаза 1	1.4	0.0
Фаза 2	1.4	0.0



Рис. 2. Тест с двумя волнами разрежения

Расчеты проводились в области с размером $L_x = 1$ м. Шаг по времени составил 10^{-4} с. Число ячеек $N_x = 100$. Расчеты проводились до времени

t = 0.01 с. Для представленной в работе численной схемы давление в данном тесте остается положительным на протяжении всего расчета, что видно из представленных рисунков 2. Таким образом, данная численная схема корректно работает в случае значений, близких к нулевым.

Двухфазная волна в двумерном случае. Для данного теста было проведено две серии расчетов. В одной серии расчетов в качестве базиса использовалось полное тензорное произведение одномерных полиномов Лежандра. Во второй серии расчетов в качестве базиса бралось тензорное произведение полиномов Лежандра за исключением членов порядка выше одного. Таким образом, в каждой из ячеек решение имело вид, как представлено в таблице 5. В дальнейших обозначениях будем считать базис из первой строки таблицы 5 базисом под номером 1, а базис из второй строки – под номером 2. Расчеты

Таблица 5. Представление решения φ в ячейке в локальных координатах

1	$\varphi(x, y, z, t) = \phi_0(t) + \varphi_1(t) x + \varphi_2(t) y + \varphi_3(t) z + \varphi_4(t) xy + \varphi_5(t) xz + \varphi_6(t) yz + \varphi_7(t) xyz$
2	$\varphi \left(x, y, z, t \right) = \varphi_0 \left(t \right) + \varphi_1 \left(t \right) x + \varphi_2 \left(t \right) y + \varphi_3 \left(t \right) z$

проводились в области с размерами $L_x = 1$ м, $L_y = 1$ м. Шаг по времени составил 10^{-4} с. Число ячеек по каждому направлению $N_x = 50$, $N_y = 50$. В данном расчете начальное возмущение двигалось по диагонали, таким образом, можно наблюдать, что вдоль осей появляется осцилляция решения. Видно, что в первой серии расчетов данный эффект отсутствует. Начальные условия представлены в таблице 6.

	тт					1		
Гарлица р	Начальные	панные	ппя	TRVMP	пнои.	TRVVd	DASHON.	BOTHE
raominga o.	11a landididi	данные	для	друмс	phon	друлч	pasnon	DOMID

	$u_{\rm L}$	$v_{\rm L}$	p_{L}	$u_{\rm R}$	u_{R}	$p_{\rm R}$
Фаза 1	10.0	10.0	1.0	10.0	10.0	1.0
Фаза 2	10.0	10.0	1.0	10.0	10.0	1.0

Объемные доли задаются формулой:

 $\alpha_1 = 0.6 + \begin{cases} 3 \exp\left(\frac{1}{10(r_{\alpha} - 0.2)(r_{\alpha} + 0.2)}\right) & r_{\alpha} < 0.2\\ 0 & r_{\alpha} \ge 0.2 \end{cases}$

$$\alpha_2 = 0.4 - \begin{cases} 3 \exp\left(\frac{1}{10(r_\alpha - 0.2)(r_\alpha + 0.2)}\right) & r_\alpha < 0.2\\ 0 & r_\alpha \ge 0.2 \end{cases}$$

Плотности задаются как:

$$\rho_{1} = 1.0 + 5 \cdot \begin{cases} 10^{8} (r_{\rho_{1}} - 0.1)^{4} (r_{\rho_{1}} + 0.1)^{4} & r_{\rho_{1}} < 0.1 \\ 0 & r_{\rho_{1}} \ge 0.1 \end{cases}$$

$$\rho_{2} = 0.001 + 0.003 \cdot \begin{cases} 10^{8} (r_{\rho_{2}} - 0.1)^{4} (r_{\rho_{2}} + 0.1)^{4} & r_{\rho_{2}} < 0.1 \\ 0 & r_{\rho_{2}} \ge 0.1 \end{cases}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$r_{\alpha} = \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2};$$

$$r_{\rho_1} = \sqrt{(x - 0.4)^2 + (y - 0.5)^2};$$

$$r_{\rho_2} = \sqrt{(x - 0.6)^2 + (y - 0.5)^2}.$$

Параметры уравнения состояния заданы в таблице 7.

Таблица 7. Параметры уравнения состояния для двумерной двухфазной волны

	γ	P_{∞}
Фаза 1	1.4	0.0
Фаза 2	1.648	0.0

Результаты расчета представлены на рисунках 3, 4, 5, 6, 7, 8 для разных моментов расчета.

Tect Shock bubble interaction 2D. Рассматривается задача о взаимодействии распространяющейся по жидкости ударной волны с расположенным в ней «пузырем» из газа. В результате ударная волна разделяет газ с существенно отличными свойствами. На поздних этапах расчета появляются неустойчивости Рихтмайера-Мешкова. Начальные данные во внешней области представлены в таблице 8.

Начальные данные внутри пузыря заданы в таблице 9.

Параметры уравнения состояния заданы в таблице 10.

Расчеты проводились в прямоугольной области с размерами $L_x = 3.5$ м и $L_y = 1.5$ м. Шаг по времени составил 10^{-7} с. Число ячеек по каждому направлению $N_x = 800$, $N_y = 345$. На рисунках 9, 10, 11, 12 справа для данного теста представлено значение численного шлирена по формуле

$$\psi = \exp\left[-\left(10\alpha_1 + 60\alpha_2\right)\frac{\|\nabla\rho\|}{\rho}\right].$$
(38)

	$\alpha_{\rm L}$	$ ho_{ m L}$	$u_{\rm L}$	$v_{\rm L}$	$p_{ m L}$	$\alpha_{ m R}$	$ ho_{ m R}$	u_{R}	$v_{\rm L}$	p_{R}
Фаза 1	0.75	2000.0	50.0	0.0	500000.0	0.75	1000.0	0.0	0.0	1.0
Фаза 2	0.25	1.0	0.0	0.0	1.0	0.25	1.0	0.0	0.0	1.0

Таблица 8. Начальные данные для теста Shock bubble interaction 2D

Таблица 9. Начальные данные внутри пузыря для теста Shock bubble interaction 2D

	α	ρ	u	v	p
Фаза 1	0.25	1000.0	0.0	0.0	1.0
Фаза 2	0.75	1.0	0.0	0.0	1.0

Таблица 10. Параметры уравнения состояния для теста Shock bubble interaction 2D

	γ	P_{∞}
Фаза 1	3.0	100.0
Фаза 2	1.4	0.0



Рис. 3. Сравнение плотности фазы 1 для базиса 1 (слева) и базиса 2 (справа) в момент времени t=0



Рис. 4. Сравнение плотности фазы 1 для базиса 1 (слева) и базиса 2 (справа) в момент времениt=0.5

Распределение концентрации фазы 1 в разные моменты времени показано на рисунках 9, 10, 11, 12 слева. Результаты данного теста носят качественный характер и показывают устойчивость представленных выше вычислительных алгоритмов для задач, предполагающих наличие интенсивных ударных волн в жидкостях с существенно отличающимися свойствами. Стоит отметить, что в данном тесте использовалась полная неравновесная система уравнений Баера-Нунциато без учета релаксационных слагаемых и межфазных сил, поэтому сравнение с экспериментальными данными не представляется возможным.



Рис. 5. Сравнение плотности фазы 1 для базиса 1 (слева) и базиса 2 (справа) в момент времениt=1.0



Рис. 6. Сравнение концентрации фазы 1 для базиса 1 (слева) и базиса 2 (справа) в момент времениt=0



Рис. 7. Сравнение концентрации фазы 1 для базиса 1 (слева) и базиса 2 (справа) в момент времениt=0.5



Рис. 8. Сравнение концентрации фазы 1 для базиса 1 (слева) и базиса 2 (справа) в момент времени t=1.0



Рис. 9. Тест Shock bubble interaction, момент времени t = 0



Рис. 10. Тест Shock bubble interaction, момент времени t = 0.5



Рис. 11. Тест Shock bubble interaction, момент времени t = 1.0



Рис. 12. Тест Shock bubble interaction, момент времени t = 1.5

6 Заключение

В данной работе представлена математическая модель Баера-Нунциато для динамики многофазных сред и соответствующие численные схемы. Используется разрывный метод Галеркина, обобщенный на случай систем с неконсервативными слагаемыми. В качестве численных потоков выбраны классический поток Лакса-Фридрихса и поток Русанова. Для интегрирования по времени используется метод Рунге-Кутты TVD/RK3. Для монотонизации решения используется лимитер WENO-S. Представлены результаты численных экспериментов для одномерных и двумерных расчетов.

Совместное применение разрывного метода Галеркина с простыми потоками и лимитером WENO-S является новым подходом к решению задач на основе модели Баера-Нунциато.

Полученные результаты показывают, что настоящий подход с использованием простых видов численных потоков является перспективным для дальнейшего применения в более сложных задачах. Лимитер WENO-S продемонстрировал возможность обобщения на многомерный случай и универсальность, поскольку показал хорошие результаты для широкого класса тестов.

Список литературы

- [1] Alegra Sandia National Laboratories, 2019(1 декабря 2019 г.). http: //www.cs.sandia.gov/ALEGRA/Alegra_Home.html.
- [2] BLAST Computing LLNL, 2019(1 декабря 2019 г.). https:// computation.llnl.gov/projects/blast.
- [3] Saurel R., Petitpas F., Berry R. Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures // Journal of Computational Physics. - 2009. - Vol. 228, no. 5. - P. 1678-1712.
- [4] Favrie N., Gavrilyuk S., Saurel R. Solid-fluid diffuse interface model in cases of extreme deformations // Journal of Computational Physics. - 2009. - Vol. 228, no. 16. - P. 6037-6077.
- [5] Модель радиационно-индуцированных термомеханических эффектов в гетерогенных мелкодисперсных материалах / В. А. Егорова, Ф. Н. Воронин, М. Е. Жуковский и др. // Математическое моделирование. — 2020. — Т. 32, № 1. — С. 85–99.
- [6] Baer M., Nunziato J. Theory for deflagration-to-detonation transition (DDT) in granular explosives. - 1983.
- [7] Cockburn B., Shu C.-W. The Runge-Kutta local projection-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. - 1991. - Vol. 25, no. 3. -P. 337-361.
- [8] Perigaud G., Saurel R. A compressible flow model with capillary effects // Journal of Computational Physics. 2005. Vol. 209, no. 1. P. 139-178.
- [9] Franquet E., Perrier V. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for the approximation of Baer and Nunziato type multiphase models // Journal of Computational Physics. - 2012. - 06. - Vol. 231. - P. 4096-4141.
- [10] Нигматулин Р. И. Механика сплошной среды. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2014.
- [11] Saurel R., Abgrall R. A simple method for compressible multifluid flows // SIAM Journal on Scientific Computing. - 1999. - Vol. 21, no. 3. - P. 1115-1145.

- [12] Daude F., Berry R., Galon P. A Finite-Volume method for compressible non-equilibrium two-phase flows in networks of elastic pipelines using the Baer-Nunziato model // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. - 2019. - Vol. 354. - P. 820-849.
- [13] Andrianov N., Warnecke G. The Riemann problem for the Baer–Nunziato two-phase flow model // Journal of Computational Physics. - 2004. - Vol. 195, no. 2. - P. 434-464.
- [14] Balsara D., Dumbser M., Abgrall R. Multidimensional HLLC Riemann solver for unstructured meshes-with application to Euler and MHD flows // Journal of Computational Physics. - 2014. - Vol. 261. - P. 172-208.
- [15] Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: Физматлит, 2001.
- [16] Dal Maso G., Lefloch P., Murat F. Definition and weak stability of nonconservative products // Journal de mathématiques pures et appliquées. -1995. -Vol. 74, no. 6. P. 483–548.
- [17] Алексеев М. В., Савенков Е. Б. Применение разрывного метода Галеркина для решения одномерных гиперболических задач гиперупругости в неоднородной среде // Препринты Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. — 2019. — № 88. — С. 20.

- [20] Persson P.-O. and Peraire J. Sub-cell shock capturing for discontinuous Galerkin methods // 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. — 2006. — P. 112.
- [21] Diffusion-based limiters for discontinuous galerkin methods-part I: onedimensional equations / R. Moura, R. Affonso, A. da Silva, M. Ortega // 22nd International Congress of Mechanical Engineering. - 2013. - P. 3-7.

- [22] Zhong X., Shu C.-W. A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods // Journal of Computational Physics. - 2013. - Vol. 232, no. 1. - P. 397-415.
- [23] Krivodonova L. Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods // Journal of Computational Physics. -2007. Vol. 226, no. 1. P. 879–896.
- [24] Upwind methods for the Baer–Nunziato equations and higher-order reconstruction using artificial viscosity / F. Fraysse, C. Redondo, G. Rubio, E. Valero // Journal of Computational Physics. - 2016. - Vol. 326. - P. 805– 827.
- [25] Murrone A., Guillard H. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems // Journal of Computational Physics. – 2005. – Vol. 202, no. 2. – P. 664–698.

Содержание

1	Введение	3
2	Математическая модель Баера-Нунциато	5
3	Разрывный метод Галеркина	6
4	Лимитеры	11
5	Результаты численных экспериментов для тестовых задач	13
6	Заключение	24