



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 57 за 2020 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

[Лахно В.Д.](#)

Трансляционно-инвариантные  
биполярны и волны  
зарядовой плотности в  
высокотемпературных  
сверхпроводниках

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Лахно В.Д.  
Трансляционно-инвариантные биполярны и волны зарядовой плотности в  
высокотемпературных сверхпроводниках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 57. 13 с.  
<http://doi.org/10.20948/prepr-2020-57>  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-57>

**О р д е н а Л е н и н а**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В.Келдыша**  
**Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к**

**В.Д. Лахно**

**Трансляционно-инвариантные биполярны  
и волны зарядовой плотности  
в высокотемпературных сверхпроводниках**

**Москва — 2020**

*В.Д. Лахно*

## **Трансляционно-инвариантные биполярны и волны зарядовой плотности в высокотемпературных сверхпроводниках**

Установлена связь между теориями сверхпроводимости, основанными на представлении о волнах зарядовой плотности (ВЗП), и трансляционно-инвариантной (ТИ) биполяронной теорией. Показано, что ВЗП формируются в псевдощелевой фазе из биполяронных состояний за счет коновской аномалии, образуя волну плотности пар (ВПП), при волновых векторах, соответствующих нестингу. Образуюсь в псевдощелевой фазе, ВЗП при температуре ниже температуры сверхпроводящего перехода сосуществуют со сверхпроводимостью, а их амплитуда уменьшается при образовании бозе-конденсата из ТИ-биполяронов, обращаясь в ноль при температуре, равной нулю.

**Ключевые слова:** спаренные состояния, масса ТИ-биполярона, переход Пайерлса, аномалия Кона.

*V.D. Lakhno*

## **Translation Invariant Bipolarons and Charge Density Waves in High-Temperature Superconductors**

A correlation is established between the theories of superconductivity based on the concept of charge density waves (CDW) and the translation invariant (TI) bipolaron theory. It is shown that CDW are originated from TI-bipolaron states in the pseudogap phase due to Kohn anomaly and form a pair density wave (PDW) for wave vectors corresponding to nesting. Emerging in the pseudogap phase, CDW coexist with superconductivity at temperatures below that of superconducting transition while their wave amplitudes decrease as a Bose condensate is formed from TI- bipolarons, vanishing at zero temperature.

**Key words:** paired states, TI - bipolaron mass, Peierls transition, Kohn anomaly.

## Оглавление

1	Введение	3
2	Общие соотношения для спектра движущегося ТИ-биполярона	4
3	ТИ-биполяроны и волны зарядовой плотности	5
4	Сравнение с экспериментом	7
5	Приложение	9
6	Литература	10

### 1. Введение

В настоящее время отсутствует единое мнение о микроскопической природе высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП). Вместе с тем, имеются феноменологические модели, такие как модель Гинзбурга-Ландау [1], модель волн зарядовой плотности (ВЗП) или волн парной плотности (ВПП), а также волн спиновой плотности, позволяющие описывать многочисленные эксперименты ВТСП [2]. В этих моделях ничего не говорится о природе спаренных состояний, участвующих в СП. В работах [3-6] под спаренными состояниями понимаются трансляционно-инвариантные (ТИ) биполяронные состояния, образуемые сильным электрон-фононным взаимодействием, аналогичные куперовским парам. Согласно [3-6], ТИ-биполяроны представляют собой плоские волны с малой корреляционной длиной, способные образовывать конденсат Бозе-Эйнштейна с высокой температурой перехода, обладающий СП свойствами. Связь теории Бардина-Купера-Шриффера [7] (БКШ) с теорией Гинзбурга-Ландау была установлена в [8]. Цель данной работы – установить связь между ТИ-биполяронной теорией СП и ВЗП (ВПП).

## 2. Общие соотношения для спектра движущегося ТИ-биполярона

Согласно [3]- [6], ТИ-биполяроны образуются при температуре  $T^*$ , значительно более высокой, чем температура СП перехода  $T_c$ . При  $T_c < T < T^*$  и в отсутствие поверхности Ферми с резкой границей ансамбль ТИ-биполяронов представлял бы собой идеальный газ, частицы которого обладали бы спектром  $s = \{v_k^2(\mathcal{P})\}$ , определяемым дисперсионным уравнением [3]- [6]:

$$1 = \frac{2}{3} \sum_k \frac{k^2 |f_k|^2 \omega_k}{s - \omega_k^2}, \quad (1)$$

$$\omega_k = \omega_0(\vec{k}, \vec{\mathcal{P}}) - \frac{\vec{k} \vec{\mathcal{P}}}{M} + \frac{k^2}{2M} - \frac{\vec{k}}{M} \sum_{k'} \vec{k}' |f_{k'}|^2,$$

$f_k = f_k(\vec{k}, \vec{\mathcal{P}})$  – параметры, определяющие энергию основного состояния ТИ-биполярона  $E_{bp}(\vec{\mathcal{P}})$ ,  $\vec{\mathcal{P}}$  – полный импульс ТИ-биполярона,  $M = 2m$ , где  $m$  – масса зонного электрона (дырки),  $\omega_0(\vec{k}, \vec{\mathcal{P}})$  – фононная частота в электронном газе, в окружении которого находятся ТИ-биполяроны (см. Приложение).

Волновая функция ТИ-биполярона с волновым вектором  $\vec{\mathcal{P}}$  будет иметь вид:

$$|\Psi(\vec{\mathcal{P}})\rangle_{bp} = e^{i\vec{\mathcal{P}}\vec{R}} |\Psi(0)\rangle_{bp}, \quad (2)$$

где  $\vec{R}$  – координаты центра масс биполярона. Явный вид волновой функции  $|\Psi(0)\rangle_{bp}$  с нулевым импульсом приведен в [9]. Выражение для  $\vec{\mathcal{P}}$  можно получить, вычисляя математическое ожидание оператора полного импульса  $\hat{\mathcal{P}}$ :

$$\vec{\mathcal{P}} = \langle \Psi(\vec{\mathcal{P}}) | \hat{\mathcal{P}} | \Psi(\vec{\mathcal{P}}) \rangle = M\vec{u} + \sum_k \vec{k} |f_k|^2, \quad (3)$$

где  $\vec{u}$  – скорость ТИ-биполярона. Полагая  $\vec{\mathcal{P}} = M_{bp}\vec{u}$ , где  $M_{bp}$  – масса биполярона, для  $M_{bp}$  из (3) получим:

$$M_{bp} = \frac{M}{1 - \eta}, \quad \eta = \frac{\vec{\mathcal{P}}}{\mathcal{P}^2} \sum_{\vec{k}} \vec{k} |f_{\vec{k}}|^2. \quad (4)$$

С использованием (4) выражение для  $\omega_{\vec{k}}$  из (1) можно переписать в виде

$$\omega_{\vec{k}} = \omega_0(\vec{k}, \vec{\mathcal{P}}) + \frac{k^2}{2M} - \frac{\vec{k} \vec{\mathcal{P}}}{M_{bp}}. \quad (5)$$

Из (4) следует, что в случае слабой и промежуточной связи (когда ТИ-биполяронные состояния при  $\vec{\mathcal{P}} = 0$  метастабильны), точный вид  $f_{\vec{k}}(\vec{k}, \vec{\mathcal{P}})$  известен и выражение для эффективной массы ТИ-биполярона будет иметь простой вид:  $M_{bp} = M(1 + \alpha/6)$ , где  $\alpha$  – константа электрон-фононной связи, то есть масса  $M_{bp}$  равна сумме масс индивидуальных поляронов. При больших  $\alpha$  хорошие аппроксимации для  $f_{\vec{k}}$  имеются только для  $\vec{\mathcal{P}} = 0$ . По этой причине расчет эффективной массы ТИ-биполярона сильной связи представляет большие трудности.

### 3. ТИ-биполяроны и волны зарядовой плотности

При наличии Ферми-поверхности с резкой границей рассматриваемый ТИ-биполяронный газ будет иметь особенности. Так, если на этой поверхности существуют достаточно большие фрагменты, которые можно совместить посредством переноса одного из фрагментов на вектор  $\vec{\mathcal{P}}$ , то при достаточной величине этих фрагментов связь между ними будет достаточно сильной, что приведет к пайерлсовской деформации решетки в направлении такого нестинга. Проигрыш в энергии, связанный с деформацией решетки, будет компенсироваться выигрышем в энергии биполяронного газа, образующего волну зарядовой плотности с волновым вектором  $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}_{CDW}$ . Наличие выигрыша в энергии ТИ-биполярона вытекает из уравнения (1), решение которого приводит к спектру ТИ-биполярона  $s = \{v_{\vec{k}}^2(\vec{\mathcal{P}})\}$ , где:

$$v_k(\vec{\mathcal{P}}) = \begin{cases} E_{bp}(\vec{\mathcal{P}}), & k = 0; \\ E_{bp}(\vec{\mathcal{P}}) + \omega_0(\vec{\mathcal{P}}, \vec{k}) + \frac{k^2}{2M} - \frac{\vec{k}\vec{\mathcal{P}}}{M_{bp}}, & k \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Выигрыш в энергии обусловлен так называемой аномалией Кона [10], согласно которой при  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{CDW}$  происходит смягчение фоновой частоты (в 1D – металле  $\mathcal{P}_{CDW} = 2k_F$ ,  $\omega_0(2k_F) = 0$ , где  $k_F$  – импульс Ферми)  $\omega_0(\mathcal{P}_{CDW}, k) = \omega_{CDW}$  и, как следствие, большое понижение в энергии  $E_{bp}$  ввиду резкого возрастания константы электрон-фононного взаимодействия  $\alpha \sim 1/\omega_{CDW}^{1/2}$  (см. Приложение). При  $\omega_{CDW} \rightarrow 0$ ,  $\alpha_{CDW} \rightarrow \infty$ , соответственно,  $M_{bp} \rightarrow \infty$  и  $CDW$  оказывается практически неподвижной.

Выражение для  $E_{bp}(\vec{\mathcal{P}})$  в общем случае сложно, и даже в случае  $\vec{\mathcal{P}} = 0$  для него имеются только вариационные оценки [9]. Можно предположить, что общий вид зависимости  $E_{bp}$  от  $\mathcal{P}$  будет  $\delta$ -образным, в котором  $\delta$ -образному минимуму будет соответствовать  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{CDW}$  (рис. 1).

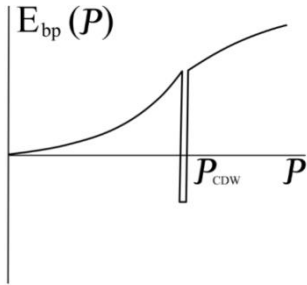


Рис.1

При таком спектре ТИ-биполярны будут переходить в состояние с минимумом энергии  $E_{bp}(\mathcal{P}_{CDW})$ , образуя единую волну зарядовой плотности, состоящую из спаренных состояний, определяемую выражением (2).

Отсюда следует, что при  $T_{CDW}, T_{bp} > T_C$ , где

Спектр ТИ-биполярна для волны зарядовой плотности  $T_{CDW} = |E_{bp}(\mathcal{P}_{CDW}) - E_{bp}(0)|$ ,  $T_{bp} = |E_{bp}(0) - 2E_p(0)|$ ,  $E_p(0)$  – энергия основного состояния полярона, псевдощель предшествует СП.

Если при этом выполняется условие  $T_{CDW} > T_{bp}$ , то псевдощель представляет собой когерентную псевдофазу, а при  $T_{bp} > T_{CDW}$ , когерентной псевдофазе предшествует некогерентная фаза свободных пар. Если неравенство  $T_{CDW}, T_{bp} > T_C$  не выполняется, то достигается равенство  $T_C$  наименьшей из величин  $T_{CDW}$  или  $T_{bp}$ . В любом случае сверхпроводящая фаза сосуществует с

псевдощелевой, которая исчезает при  $T = 0$ , когда все пары находятся в бозе-конденсате и ВЗП амплитуда обращается в ноль.

Образование ВЗП приводит к нарушению трансляционной инвариантности вплоть до температуры, равной температуре сверхпроводящего перехода  $T_c$ . При  $T < T_c$  неоднородное состояние с ВЗП перестает быть термодинамически выгодным и образуется трансляционно-инвариантная фаза с восстановленной симметрией и переходом ТИ-биполяронов в бозе-конденсатное состояние. Энергетическая выгодность такой фазы вытекает из выражений (5), (6), согласно которым однородный бозе-конденсат обладает более низкой энергией при условии

$$\mathcal{P} < M_{bp} \sqrt{2\omega_0(\mathcal{P}, k)}/M. \quad (7)$$

Отметим, что рассмотренная картина во многих отношениях близка к модели сверхпроводимости Фрелиха [11]. В модели Фрелиха полагалось, что два электрона с противоположными импульсами (как в БКШ) на поверхности Ферми связаны взаимодействием с фононом с волновым вектором  $\mathcal{P}_{CDW}$  ( $2k_F$  в  $1D$  случае), образуя тем самым заряженный фонон. Будучи бозонами, такие фононы могут в макроскопическом числе находиться в одном состоянии с волновым вектором  $\mathcal{P}_{CDW}$ , образуя ВЗП (зарядовую волну Фрелиха). Такая волна, однако, не будет сверхпроводящей, поскольку всегда имеющийся в реальных кристаллах пиннинг или ее рассеяние нормальными носителями будут тормозить такую волну. Главное отличие ТИ-биполярного описания от подхода Фрелиха состоит в образовании бозе-конденсата из ТИ-биполяронов (образующих волну заряженных фононов Фрелиха), который и отвечает за сверхпроводимость.

#### 4. Сравнение с экспериментом

Для конкретности рассмотрим случай такого ВТСП, как YBCO. Вектор CDW в YBCO лежит в  $ab$ -плоскости и имеет два равновозможных направления:



вдоль оси  $a$  ( $\vec{\mathcal{P}}_{CDW,x}$ ) и вдоль оси  $b$  ( $\vec{\mathcal{P}}_{CDW,y}$ ), соответствующие антинодальным направлениям. При  $T_c < T < T^*$  этим направлениям  $\vec{\mathcal{P}}_{CDW}$  соответствуют отличные от нуля мягкие фононные моды  $\omega_0(\mathcal{P}_{CDW}, k)$ . Наличие ВЗП в этих направлениях в YBCO было установлено в большом количестве экспериментов, в том числе по ядерному магнитному резонансу [12-14], резонансному неупругому рассеянию рентгеновских лучей [15-17], резонансному рассеянию и дифракции жестких рентгеновских лучей [18-19]. Соответствующее смягчение фононных мод при образовании ВЗП наблюдалось в [20].

Еще большего смягчения фононных мод можно ожидать при  $T < T_c$ . Соответствующая нодальному направлению фононная мода может обращаться в ноль, что соответствует отсутствию щели в нодальном направлении. Экспериментальное подтверждение этому было получено [18] для такого соединения, как  $Bi_2Sr_{2-x}La_xCuO_{6+\delta}$  (Bi2201) с использованием комбинированных методов резонансного рассеяния рентгеновских лучей, сканирующей туннельной микроскопии и методов фотоэмиссионной спектроскопии с угловым разрешением. В случае YBCO с  $\omega_0(\mathcal{P}_{CDW}, k) = \Delta_0 |\cos k_x a - \cos k_y a|$  (абсолютная величина параметра порядка ВЗП или энергия щели [21], [22], которая в ТИ-биполярной теории [3]-[6] является частотой перенормированного фонона) согласно (7) любое значение  $\mathcal{P}_{CDW}$  приводит к неустойчивости ВЗП и формированию в этом направлении СП фазы с сохранением в антинодальном направлении псевдощелевого состояния.

Отметим, что в изложенном подходе различие между ВЗП и ВПП теориями исчезает и  $\mathcal{P}_{CDW} = \mathcal{P}_{PDW}$  [23] (с современным состоянием вопроса по теории и эксперименту с ВПП в высокотемпературных сверхпроводниках, ультрахолодных атомных газах, мезоскопических устройствах можно ознакомиться по обзору [24]).

## Приложение

При описании аномалии Кона обычно исходят из гамильтониана Фрелиха вида [25]

$$H = \sum_{\vec{k}} \varepsilon(\vec{k}) c_{\vec{k}}^+ c_{\vec{k}} + \sum_{\vec{q}} \hbar \tilde{\omega}(\vec{q}) b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} + \sum_{\vec{k}, \vec{q}} g(\vec{q}) c_{\vec{k}+\vec{q}}^+ c_{\vec{k}} (b_{-\vec{q}}^+ + b_{\vec{q}}), \quad (\text{П1})$$

где первый член соответствует свободному электронному газу;  $c_{\vec{k}}^+, c_{\vec{k}}$  – операторы рождения и уничтожения электрона с энергией  $\varepsilon(\vec{k})$ . Второй член соответствует гамильтониану решетки;  $b_{\vec{q}}^+, b_{\vec{q}}$  – операторы рождения и уничтожения колебаний решетки с энергией  $\tilde{\omega}(\vec{q})$ . Третий член описывает взаимодействие электронов с решеткой;  $g(\vec{q})$  – матричный элемент взаимодействия.

Перенормировка фононных частот, соответствующая (П1), согласно [25] определяется выражением:

$$\omega^2(\vec{q}) = \tilde{\omega}(\vec{q})^2 + 2\tilde{\omega}(\vec{q}) |g(\vec{q})|^2 \text{Re}[\chi(\vec{q})], \quad (\text{П2})$$

где  $\omega(\vec{q})$  – фононы, перенормированные взаимодействием с электронным газом, поляризуемость которого определяется  $\chi(\vec{q})$ .

Аномалия Кона описывает обращение перенормированных фононных мод  $\omega(\vec{q})$  в ноль при  $\vec{q} = \vec{P}_{CDW}$ .

В ТИ-биполярной теории СП [3]-[6] полагается, что биполяроны погружены в электронный газ. Свойства таких биполяронов описываются также гамильтонианом Фрелиха вида (П1), но с полем уже перенормированных фононов с энергиями  $\omega(\mathcal{P}, q)$  и, соответственно, матричным элементом взаимодействия  $V(\vec{q})$  вместо  $g(\vec{q})$ .

Отметим, что спектральное уравнение (1) от вида  $V(\vec{q})$  не зависит.

Экспериментальным доказательством наличия перенормированных фононов с нулевой энергией в слоистых купратных ВТСП служит отсутствие у них щели в нодальном направлении, которая по определению в ТИ-биполяронной теории СП является фононной частотой.

## Литература

- [1] Larkin A., Varlamov A. Theory of fluctuations in superconductors (Oxford University Press, Oxford 2005)
- [2] Grüner G., Density waves in Solids, Addison-Wesley, Reading (1994)
- [3] Lakhno V.D., Superconducting properties of 3D Low-Density Translation-Invariant Bipolaron Gas, Adv. Cond. Matt. Phys. 2018, 1380986 (2018); DOI: <https://doi.org/10.1155/2018/138096>
- [4] Lakhno V.D., Superconducting properties of a nonideal bipolaron gas, Phys. C Supercond. Its Appl., 561, 1-8, (2019); DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physc.2018.10.009>
- [5] V.D. Lakhno, Superconducting properties of 3D Low-Density TI-Bipolaron Gas in Magnetic Field, Condensed Matter 4, 43, (2019); doi: <https://doi.org/10.3390/condmat4020043>
- [6] Lakhno V.D., Translational-Invariant Bipolarons and Superconductivity, Condensed Matter, 5, 30, (2020); doi: <https://doi.org/10.3390/condmat5020030>
- [7] Bardeen J., Cooper L.N., Schrieffer J.R. Theory of superconductivity, Phys. Rev., 108, 1175, (1957); DOI: <https://doi.org/10.1103/Phys.Rev.108.1175>
- [8] Gor'kov L.H., Microscopic Derivation of the Ginsburg-Landau Equations in the Theory of Superconductivity. JETP (1959), 9, 1364
- [9] Lakhno V.D., Pekar's ansatz and the strong coupling problem in polaron theory, Phys. Usp. (2015), 58, 295-308, [GrossRef]
- [10] Kohn W., Image of the Fermi Surface in the Vibration Spectrum of a Metal", Phys. Rev. Lett 2, 393-394, (1959); doi: 10.1103/PhysRevLett2.393

- [11] Fröhlich, On the Theory of superconductivity: The one dimensional case, Proceedings of the Royal Society A, 223, (1154): 296-305, (1954);  
<https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0116>
- [12] Wu T., Mayaffre H., Krämer S., Horvatič M., Berthier C., Hardy W.N., Liang R., Bonn D.A., Marc-Henri Julien, Magnetic-field-induced charge-stripe order in the high temperature superconductor  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_4$ , Nature 477, 191-194, (2011);  
<https://doi.org/10.1038/nature10345>
- [13] Wu T., Mayaffre H., Krämer S., Horvatič M., Berthier C., Kuhns P.L., Reyes A.P., Liang R., Hardy W.N., Bonn D.A., Julien M-H, Emergence of charge order from the vortex state of high temperature superconductor, Nat. Commun., 4, 2113, (2013);  
doi: 10.1038/ncomms3113
- [14] Wu T., Mayaffre H., Krämer S., Horvatič M., Berthier C., Hardy W.N., Liang R., Bonn D.A., Marc-Henri Julien, Incipient charge order observed by NMR in the normal state of  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_4$ , Nat. Commun., 6, 6438 (2015); DOI:  
10.1038/ncomms7438 | [www.nature.com/naturecommunications](http://www.nature.com/naturecommunications)
- [15] Ghiringhelli G., Le Tacon M., Minola M., Blanco-Canosa S., Mazzoli C., Brookes N.B., Luca G.M., Frano A., Hawthorn D.G., He F., Loew T., Moretti Sala M., Peeters D.C., Salluzzo M., Schierle E., Sutarto R., Sawatzky C.A., Weschke E., Keimer B., Braicovich L., Long-range incommensurate charge fluctuations in (Y,Nd)  $\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$ , Science, 337, 821-825 (2012); DOI: 10.1126/science.1223532
- [16] Achkaz A.J., Sutarto R., Mao X., He F., Frano A., Blanco-Canosa S., Le Tacon M., Ghiringhelli G., Braicovich L., Minola M., Moretti Sala M., Mazzoli C., Liang R., Bonn D.A., Hardy W.N., Keimer B., Sawatzky G.A., Hawthorn D.G., Distinct charge orders in the planes and chains of ortho-III ordered  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+x}$  identified by resonant elastic X-ray scattering, Phys. Rev. Lett. 109, 167001, (2012); DOI:  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.167001>
- [17] Blackburn E., Chang J., Hücker M., Holmes A.T., Christensen N.B., Liang R., Bonn D.A., Hardy W.N., Rütt U., Gutowski O., Zimmermann M.V., Forgan E.M., Hayden S.M., X-ray diffraction observations of a charge-density-wave order in

- superconducting ortho-II  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.54}$  single crystals in zero magnetic field, *Phys. Rev. Lett.*, 110, 137004 (2013); DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.137004>
- [18] Comin R., Frano A., Yee M.M., Yoshida Y., Esaki H., Schierle E., Weschke E., Sutarto R., He F., Soumyanarayanan, Yang He, Tacon M.Le., Efimov I.S., Hoffman J.E., Sawatzky G.A., Keimer B., Damascelli A., Charge order driven by Fermi-arc instability in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_{2-x}\text{La}_x\text{CuO}_{6+5}$ , *Science*, 343, 390 (2014); Doi: 10.1126/science.1242996
- [19] Chang J., Blackburn E., Holmes A.T., Christensen N.B., Larsen J., Mesot J., Liang R., Bonn D.A., Hardy W.N., Watenphul A., Zimmermann M.V., Forgan E.M., Hayden M., Direct observation of competition between superconductivity and charge density wave order in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.67}$ , *Nat. Phys.*, 8, 871-876, (2012); DOI: 10.1038/NPHYS2456
- [20] Le Tacon V., Bosak A., Souliou S.M., Dellea G., Loew T., Heid R., Bohnen K-P., Chiringhelli G., Krisch M., Keimer B., Inelastic X-ray scattering in  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.6}$  reveals giant phonon anomalies and elastic central peak due to charge-density wave formation, *Nat. Phys.*, 10, 52-58, (2014); <https://doi.org/10.1038/nphys2805>
- [21] Comin R., Sutarto R., He F., de Silva Neto E.H., Chanviere L., Frano A., Liang R., Hardy W. N., Bonn D.A., Yoshida Y., Eisaki H., Achkar A.J., Hawthorn D.G., Keimer B., Sawatzky G. A., Damascelli A., Symmetry of charge order in cuprates, *Nature materials*, v.14, p. 796-800, (2015); <https://doi.org/10.1038/nmat4295>
- [22] Chowdhury D., Sachdev S., Density-wave instabilities of fractionalized Fermi liquids, *Phys. Rev. B* 90, 245136, (2014); DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.90.245136>
- [23] Hamidian M.N., Edkins S.D., Sang Hyun Joo, Kostin A., Eisaki H., Uchida S., Lawler M.J., Kim E.-A., Mackenzie A.P., Fujita K., Lee Jinho, Seamus Davis J.C. Detection of a Cooper-pair density wave in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$ , *Nature*, 532, 343, (2016); DOI: <https://doi.org/10.1038/nature17411>

- [24] Agterberg D.F., Seamus Davis J.C., Edkins S.D., Fradkin E., Van Harlingen D.J., Kivelson S.A., Lee P.A., Radzihovskiy L., Tranquada J.M., Wang Y., The Physics of Pair-Density waves: Cuprate Superconductors and Beyond, Annual Review of Condensed Matter Physics, Vol.11,p.231-270, (2020);  
<https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050711>
- [25] Grimwall G., The electron-phonon Interaction in Metals, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, (1981)