ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 58 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ким Д.А., Вичев И.Ю.,
Соломянная А.Д., Грушин А.С.

THERMOS: моделирование нестационарной плазмы неона

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: THERMOS: моделирование нестационарной плазмы неона / Д.А.Ким [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 58. 16 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-58
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-58

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Д.А. Ким, И.Ю. Вичев, А.Д. Соломянная, А.С. Грушин

THERMOS: моделирование нестационарной плазмы неона

Москва — 2020

Ким Д.А., Вичев И.Ю., Соломянная А.Д., Грушин А.С.

THERMOS: моделирование нестационарной плазмы неона

В комплексе программ THERMOS реализован модуль для вычисления свойств нестационарной плазмы. С его помощью проведено моделирование малоплотной фотоионизованной плазмы неона, полученной в экспериментах. Представлено сравнение результатов расчётов населённостей ионов, скоростей элементарных процессов и спектров излучения с результатами, полученными другими научными группами.

Ключевые слова: нестационарная плазма, столкновительно-излучательное равновесие, фотоионизация, полые ионы, лазер на свободных электронах

Dmitrii Andreevich Kim, Ilia Yurievich Vichev, Anna Dmitrievna Solomyannaya, Alexander Sergeevich Grushin

THERMOS: Simulation of non-stationary neon plasma

The THERMOS toolkit was improved by a module for calculating the properties of the non-stationary plasma. Using it, a low-density photoionized neon plasma obtained in experiments was simulated. Calculations of the ion populations, the rates of elementary processes, and the radiation spectra were compared with the results obtained by other scientific groups.

Key words: non-stationary plasma, collisional-radiative equilibrium, photoionization, hollow ions, X-ray free-electron laser facility

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00485. Расчёты производились на суперкомпьютерах "МВС-10П" (МСЦ РАН) и "К-100" (ИПМ РАН).

Оглавление

Введение 3
Постановка задачи 4
Нестационарный модуль 5
Результаты расчётов и обсуждение 7
Заключение 15
Список литературы 15

Введение

Одним из передовых направлений современной физики является исследование свойств вещества под воздействием ультракоротких рентгеновских импульсов на установках XFEL (X-ray Free Electron Laser – лазер на свободных электронах) [1–5]. Характерные времена воздействия таких импульсов составляют десятки и сотни фемтосекунд, при этом скорости элементарных процессов в образующейся плазме могут быть существенно медленнее, чем скорости изменения термодинамических величин. Такая плазма не может быть описана в рамках стационарных моделей столкновительно-излучательного равновесия (СИР), в том числе локального термодинамического равновесия (ЛТР). При данных условиях требуется решать нестационарную систему уравнений поуровневой кинетики.

Изучение свойств плазмы, даже в рамках стационарных моделей, не является тривиальной задачей. Несмотря на кажущуюся простоту, эти модели содержат целый ряд неопределённостей в приближениях для описания сил осцилляторов, сечений и скоростей элементарных процессов, а используемый набор квантовых состояний ионов должен соответствовать спектру излучения, имеющему свою специфику в каждом конкретном случае. Учёт нестационарности приводит к появлению дополнительных сложностей в вычислениях.

С 1996 года проводится специализированный международный семинар NLTE [6], на котором сравниваются результаты расчётов свойств излучающей плазмы, полученные различными научными группами. Зачастую различия в вычислениях, проведённых по схожим моделям, существенны [7–14]. Такие сравнения, обсуждения и анализ позволяют определить достоинства и недостатки тех или иных методов и приближений, используемых в кодах. В данной работе мы представляем возможности кода THERMOS [15] по моделированию нестационарной малоплотной фотоионизованной плазмы неона на примере тестовых задач, предложенных на очередном десятом международном семинаре NLTE [14], прошедшем в 2017 году в Сан Диего, США (далее NLTE10).

Постановка задачи

На семинаре NLTE10 были предложены три задания для численного исследования нестационарной малоплотной фотоионизованной плазмы неона, основанные на экспериментах [1], проведённых в Стэнфордском университете на XFEL установке Linac Coherent Light Source. Малоплотная плазма неона облучалась ультракороткими (сотни фемтосекунд) почти монохроматическими пучками рентгеновских лучей с интенсивностями в районе ~ 10^{17} – 10^{18} Вт/см^2. Рассматривались энергии фотонов в диапазоне от 800 до 2000 эВ. Точные параметры пучков, используемые при моделировании, приведены в таб. 1. В каждом из трёх случаев рассматривается однородная по пространству плазма с постоянной плотностью ионов ($N_i = 10^{18}$ см$^{-3}$). Температура электронов меняется со временем под воздействием внешнего излучения начиная со значения $T(\mathrm{t}=0) =$ 1 эВ. Зависимости температуры электронов от времени были получены с помощью кода SCFLY [16] и предложены организаторами семинара NLTE10 в качестве вводных данных (см. рис. 1). Чтобы определить начальные значения населённостей ионов, был проведен расчёт по стационарной модели СИР без поля излучения. Полученное с помощью THERMOS соответствующее значение среднего заряда $Z_0(\mathrm{t}=0) = 2{,}6\times10^{-3}$ близко к значениям других участников NLTE10 [14]. Требуется определить населенности и средний заряд в каждый момент времени и интегральные спектры излучения.

Таблица 1

Параметры рентгеновских пучков

Наименование	NeTD1	NeTD2	NeTD3
Энергия фотонов, эВ	800	1050	2000
Ширина, эВ	4	4	4
Поток, Вт/см^2	$2{,}35\times10^{17}$	$2{,}86\times10^{17}$	$3{,}48\times10^{17}$
Интенсивность, Дж/(см^2×с×Гц×ср)	19,4	23,5	28,6
Длительность, с	$3{,}4\times10^{-13}$	$2{,}8\times10^{-13}$	$2{,}3\times10^{-13}$

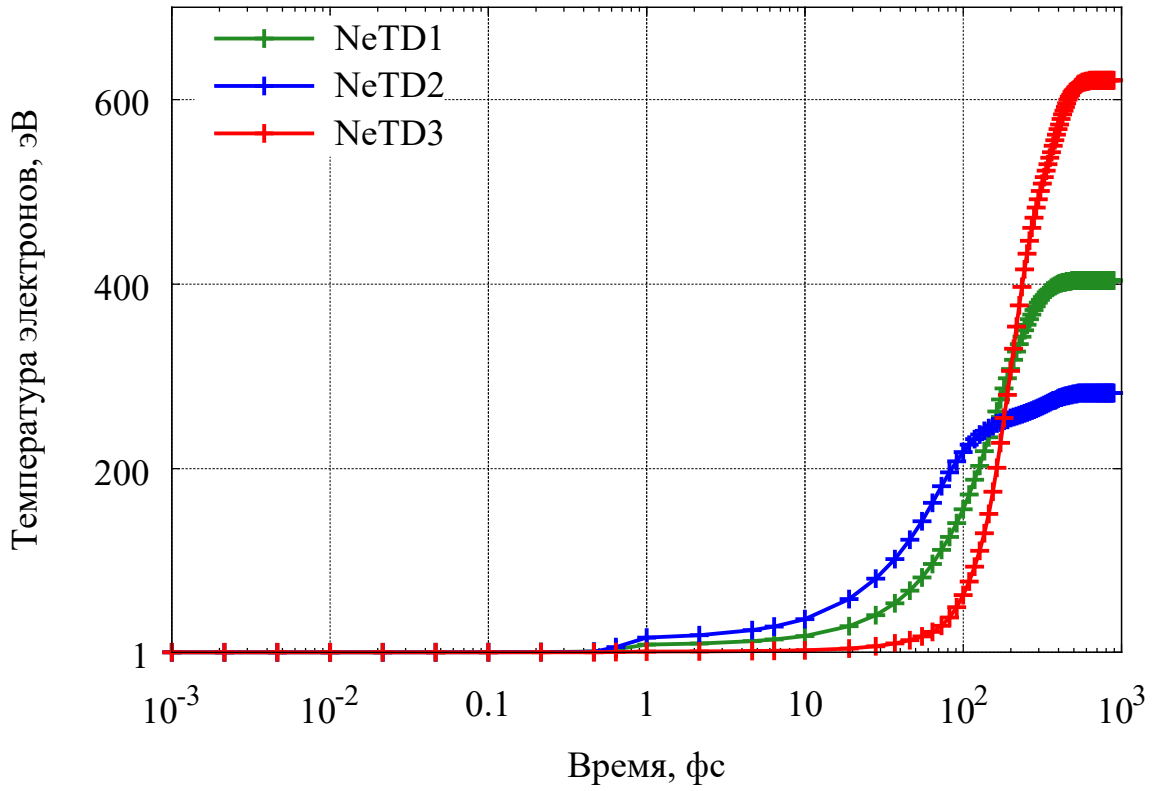

Рис. 1. Зависимости температуры электронов в плазме неона от времени. Расчёт получен с помощью кода SCFLY [16]

Нестационарный модуль

Для решения поставленной задачи авторами использовался комплекс программ THERMOS [15], разработанный и поддерживаемый в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Комплекс THERMOS предназначен для расчётов свойств излучающей плазмы в том или ином физическом приближении. Для получения атомных данных неона (набора квантовых состояний ионов, энергетического спектра, сил осцилляторов, положений линий поглощения и порогов фотоионизации) использовался модуль, основанный на модели изолированного иона [17]. Силы осцилляторов и положения линий поглощения уточнялись с помощью программы FAC [18]. При составлении базы атомных данных было учтено, что в рассматриваемой постановке задачи в плазме неона имеет место фотоионизация K-электронов с образованием автоионизационных состояний. Предварительный анализ и сопоставление энергий переходов с базой данных NIST [19] показали, что для передачи основных особенностей спектра излучения достаточно учесть состояния с главным квантовым числом $n_{\max} \le 6$, в том числе с возбуждённой $1s$ оболочкой.

Для определения населённости x_{ks} ионов кратности k в квантовом состоянии s в каждый момент времени t необходимо решать нестационарную систему уравнений поуровневой кинетики:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_{ks}}{dt} = \psi_{ks}\left(\vec{x}\right) - \varphi_{ks} \times x_{ks}, \\ &\sum_{ks} x_{ks} = 1, \ \sum_{ks} k x_{ks} = Z_0, \ k = 0...Z, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\psi_{ks}\left(\vec{x}\right) = \sum_{s'<s} \alpha^{ex/abs}_{ks' \to ks} \times x_{ks'} + \sum_{s'>s} \alpha^{dex/em}_{ks' \to ks} \times x_{ks'} + \sum_{s'} \alpha^{ion/phi/ai}_{k-1s' \to ks} \times x_{k-1s'} + \sum_{s'} \alpha^{rec/phr/dr}_{k+1s' \to ks} \times x_{k+1s'},$$

$$\varphi_{ks} = \sum_{s'} \alpha^{ion/phi/ai}_{ks \to k+1s'} + \sum_{s'} \alpha^{rec/phr/dr}_{ks \to k-1s'} + \sum_{s'<s} \alpha^{dex/em}_{ks \to ks'} + \sum_{s'>s} \alpha^{ex/abs}_{ks \to ks'},$$

α – скорость столкновительных или радиационных элементарных процессов. Учитываются процессы, как приводящие к изменению кратности иона k (столкновительная ионизация (*ion*) и рекомбинация (*rec*), фотоионизация (*phi*) и фоторекомбинация (*phr*), автоионизация (*ai*) и диэлектронная рекомбинация (*dr*)), так и не изменяющие заряд иона (возбуждение электронным ударом (*ex*) и гашение (*dex*), поглощение (*abs*) и излучение (*em*)) (см. рис. 2). Z_0 – средний заряд, Z – атомный номер.

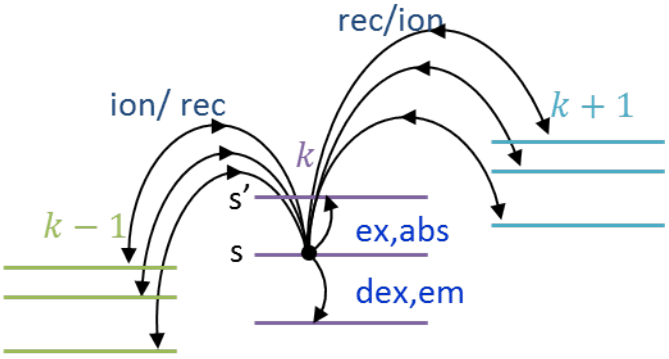

Рис. 2. Схематическая иллюстрация возможных вариантов переходов из некоторого квантового состояния s иона кратности k и в него из других состояний

Особенностью задачи является большая размерность системы уравнений поуровневой кинетики. Даже с учётом того, что использовалась база атомных данных с эффективным усреднением конфигураций ионов по методике RUSAM [20], количество рассматриваемых конфигураций составляет ~ 4×10^3, а возможных переходов ~ 2×10^5. Для решения данной системы нестационарных уравнений в комплексе THERMOS был реализован отдельный модуль с

применением специальной схемы второго порядка [21], хорошо справляющейся с решением, несмотря на то что матрица коэффициентов сверхжёсткая.

Для скоростей элементарных процессов использовались известные приближения – для столкновительной ионизации формула Лотца [22], для столкновительного возбуждения формула Ван Режемортера [23,24], для фотоионизации формула Крамерса [25], для диэлектронной рекомбинации формула из [26].

Результаты расчётов и обсуждение

Основной целью данного исследования было проверить работоспособность нестационарного модуля комплекса THERMOS посредством сравнения с другими нестационарными кодами. Продемонстрируем результаты расчётов основных параметров плазмы неона для рассматриваемых случаев. На рис. 3-5 показаны зависимости среднего заряда от времени, вычисленные с помощью THERMOS и полученные другими участниками NLTE10 [14]. Здесь и далее мы приводим результаты участников NLTE10 одним цветом в обезличенном виде в соответствии с политикой конфиденциальности и сохранения авторских прав, принятой на семинаре. Из рисунков видно, что результаты THERMOS и других кодов хорошо согласуются.

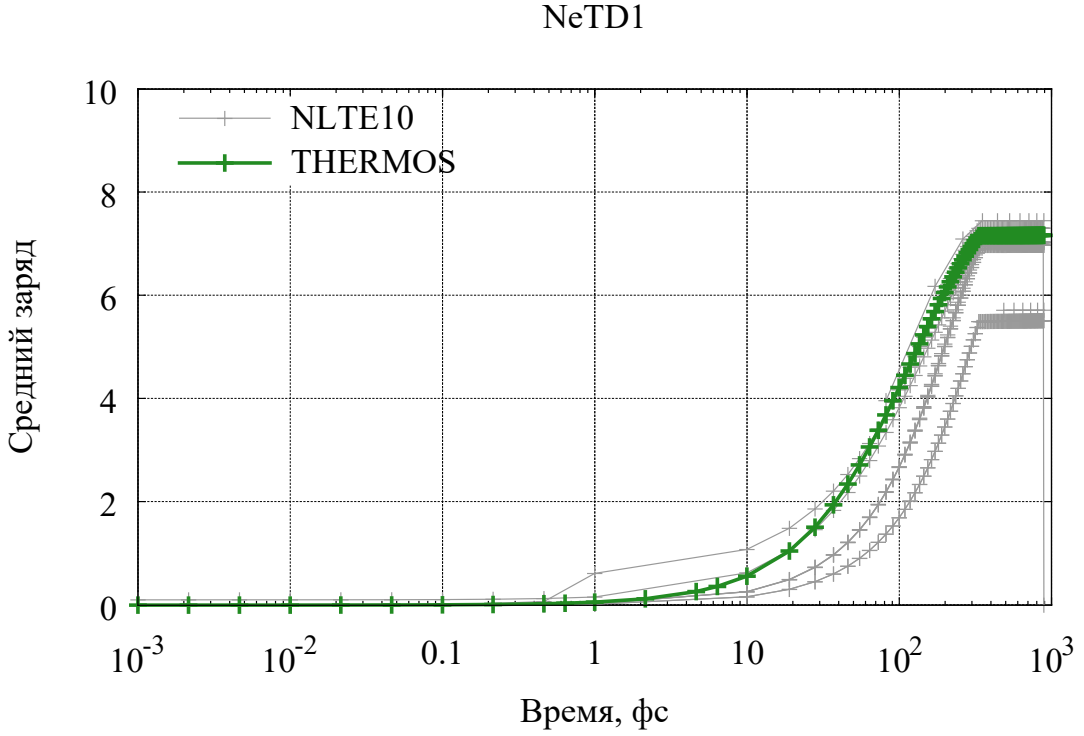

Рис. 3. Изменение среднего заряда в плазме неона с течением времени в результате воздействия рентгеновского пучка для случая NeTD1

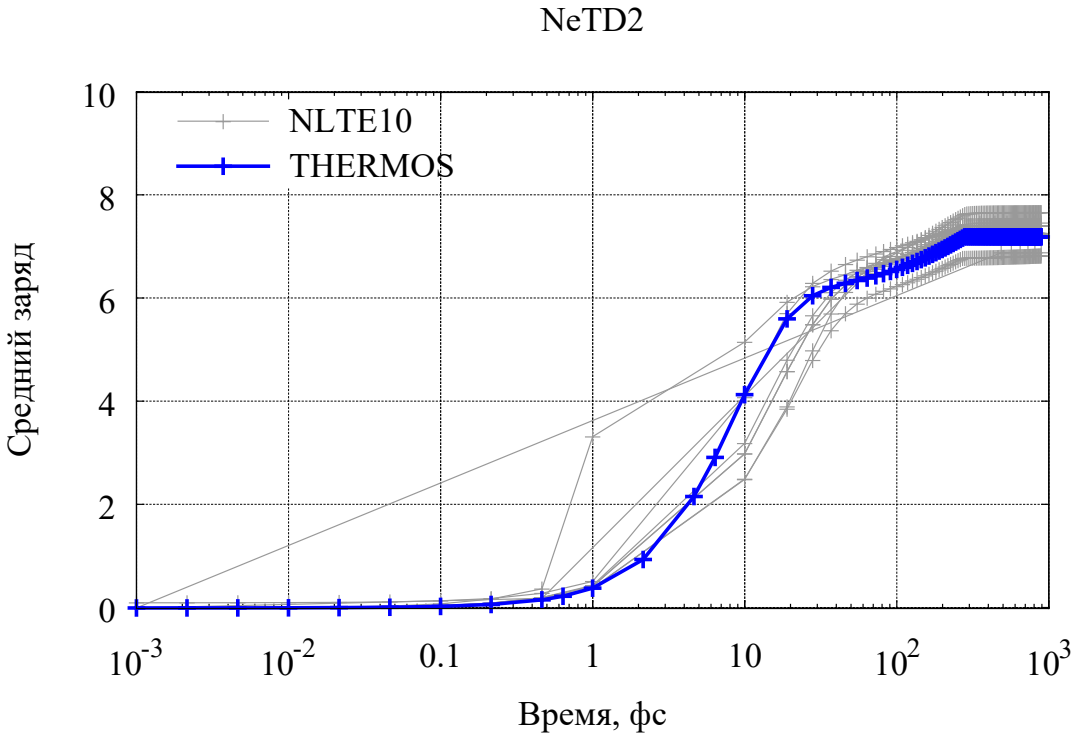

Рис. 4. Изменение среднего заряда в плазме неона с течением времени в результате воздействия рентгеновского пучка для случая NeTD2

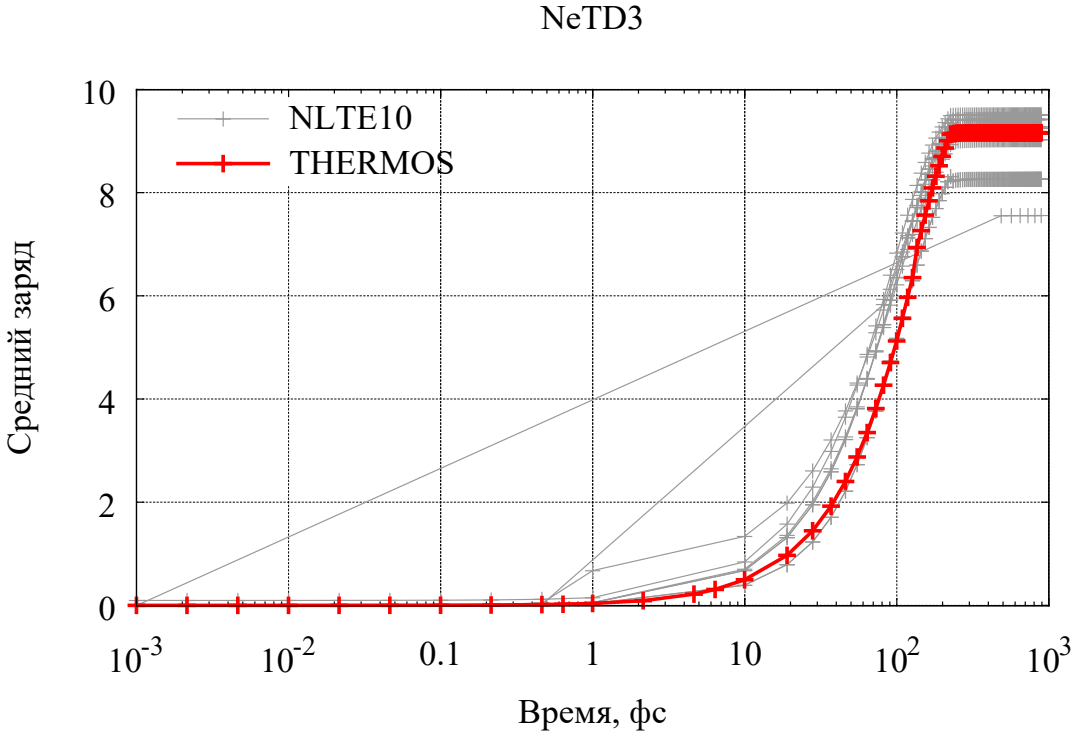

Рис. 5. Изменение среднего заряда в плазме неона с течением времени в результате воздействия рентгеновского пучка для случая NeTD3

Подавляющее количество расчётов излучающей плазмы производится в рамках стационарных моделей СИР. Для конкретного рассматриваемого случая плазмы неона, получившейся в результате воздействия сверхкороткого рентгеновского импульса, такой подход не применим. Если использовать стационарную модель СИР, для которой $dx_{ks}/dt = 0$, то населённости ионов на любом временном шаге будут кардинально отличаться от приведённых результатов, полученных в нестационарном приближении. Фактически утверждение $dx_{ks}/dt = 0$ соответствует такому состоянию плазмы, при котором она бесконечное время находится под влиянием внешнего источника излучения при постоянной температуре и плотности. В таком случае система всегда выходит на стационарное решение вне зависимости от характерных времён элементарных процессов.

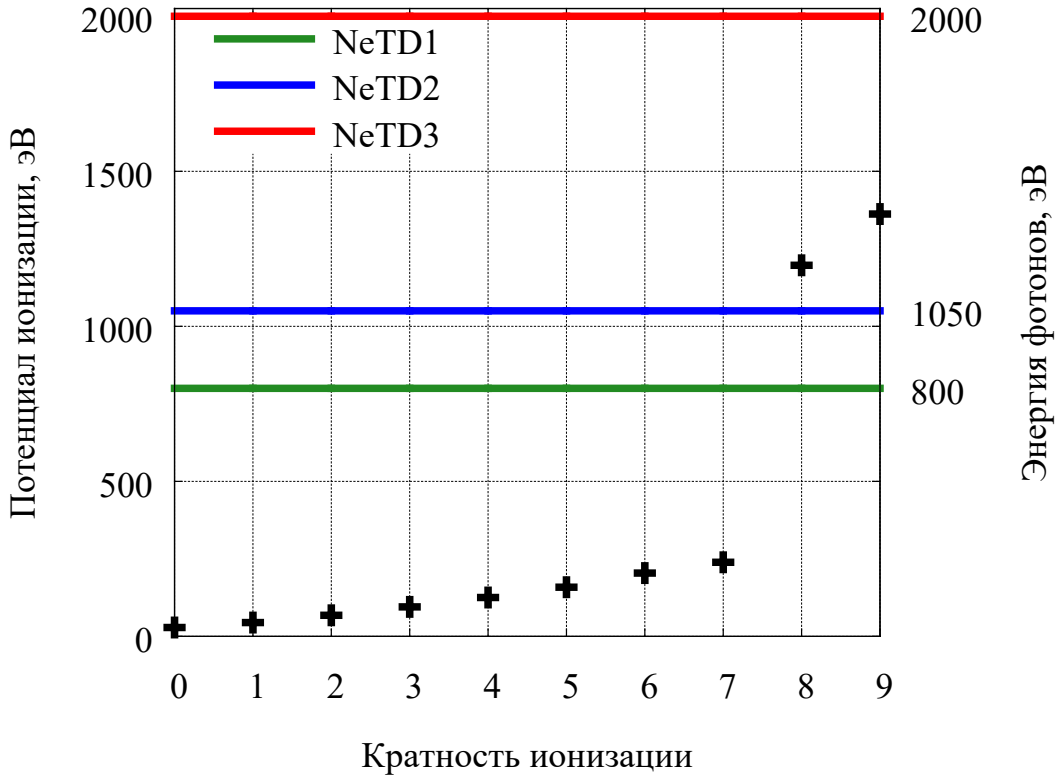

Рис. 6. Потенциалы ионизации основных состояний ионов неона (чёрные крестики) и энергии фотонов падающего рентгеновского излучения для трёх рассматриваемых случаев

Наиболее вероятный процесс, определяющий изменение среднего заряда – фотоионизация, так как плазма малоплотная, и скорости столкновительной ионизации на порядки ниже. При этом важным параметром является энергия фотонов падающего рентгеновского излучения. Если энергия фотонов превышает энергию ионизации иона кратности k, то за бесконечное время он

полностью ионизуется. На рис. 6 изображены энергии ионизации основных состояний ионов неона, полученные с помощью кода THERMOS. Из рисунка видно, что в случаях NeTD1 и NeTD2 энергии фотонов внешнего излучения, равные 800 и 1050 эВ соответственно, превышают энергии ионизации всех ионов вплоть до 8-го, а в случае NeTD3, где энергия падающих фотонов равна 2000 эВ, превышены все значения. Таким образом, за достаточное время при включённом поле излучения плазма неона ионизуется до значения среднего заряда, равного 8, в случаях NeTD1 и NeTD2, а в случае NeTD3 плазма ионизуется полностью. Расчёты с помощью стационарного модуля THERMOS, основанного на модели СИР, выдают именно такие значения среднего заряда: 8, 8 и 10 для трёх соответствующих энергий фотонов. Скорость фотоионизации нейтрального неона для случая NeTD3 $\alpha^{phi} \sim 3\times10^{13}$ с$^{-1}$, то есть характерное время ионизации нейтрального неона порядка 30 фемтосекунд. На рис. 5 видно, что примерно к этому времени средний заряд достигает значения $Z_0 \sim 1$. Отличие от величины $Z_0 = 10$, получаемой в стационарной постановке при таких же параметрах, разительное. Это демонстрирует необходимость использовать нестационарную модель поуровневой кинетики для подобных классов задач, где характерные времена внешних воздействий меньше или сопоставимы с характерными временами элементарных процессов.

Интересной особенностью рассматриваемых случаев является фотоионизация электронов K-оболочки. Для удаления $1s$-электрона в нейтральном атоме неона требуется энергия, равная 870 эВ [19]. В случае NeTD1 (см. таб. 1) энергии фотонов не хватает для выбивания K-электронов, поэтому увеличение среднего заряда идёт за счёт последовательной фотоионизации электронов внешней оболочки. В случаях NeTD2 и NeTD3 энергия фотонов больше 870 эВ и преобладает уже фотоионизация электронов внутренних оболочек, что приводит к появлению автоионизационных состояний. В результате для ионов нечётной кратности вероятность автоионизации значительно возрастает. Это отражается на распределении населённостей ионов по кратностям ионизации. Вместо привычного куполообразного распределения имеет место пилообразное, с существенным дефицитом ионов Ne^{+1}, Ne^{+3}, Ne^{+5} и Ne^{+7}. Этот эффект наблюдается в эксперименте [1] и предсказывается расчётами всех участников NLTE10 (см. рис. 7). С течением времени средний заряд растёт, а максимум распределения сдвигается в сторону полностью ионизованного неона. После отключения рентгеновского пучка пилообразное распределение исчезает.

Спектр излучения плазмы – важнейшая наблюдаемая величина. По нему можно косвенно восстановить такие параметры плазмы, как температура, плотность и средний заряд, присутствие тех или иных квантовых состояний. На рис. 8-10 приведены интегральные по времени спектры излучения плазмы неона, полученные с помощью кода THERMOS, а также другими участниками семинара NLTE10.

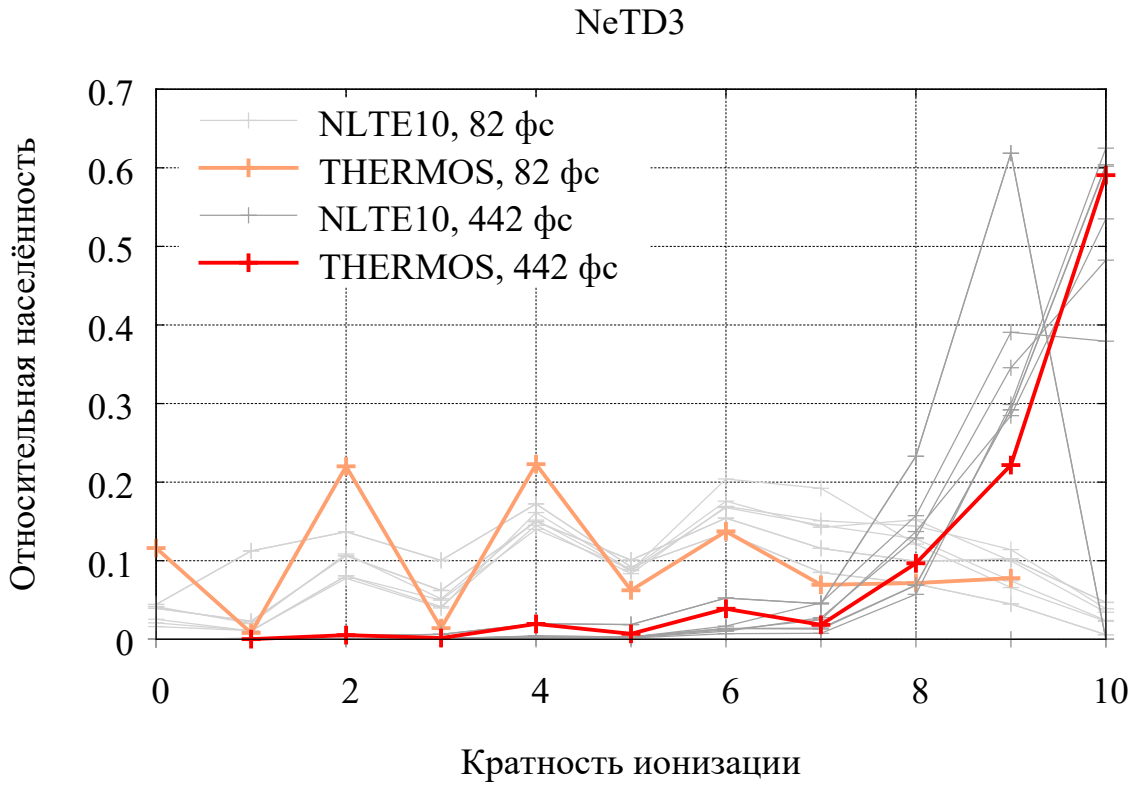

Рис. 7. Распределение населённостей по кратностям ионизации в плазме неона для случая NeTD3 в момент времени 82 фс (поле излучения действует) и в момент времени 442 фс (поле излучения выключено)

Модель, заложенная в код THERMOS, воспроизводит основные характеристики спектров и находится в хорошем согласии с другими кодами-участниками (наличие и положение основных линий излучения, абсолютная величина). Отличия в основном объясняются различными вариантами детализации атомных данных. Мы использовали эффективную методику усреднения конфигураций, поэтому некоторые группы линий описаны одной общей огибающей. Некоторые коды используют более детальную базу атомных данных (fine-structure) и, соответственно, воспроизводят более детальный спектр.

Для проведения сравнения рассматривался спектральный диапазон, соответствующий переходам на 1s. Излучение с XFEL позволяет создавать экзотические состояния вещества, выбивая электроны с K-оболочки, образуя так называемые полые ионы. Такие состояния, распадаясь, производят линии излучения в характерных участках спектра. В частности, в случаях NeTD2 и NeTD3 это линии излучения в диапазоне 930 - 1000 эВ. В первом же варианте NeTD1 таких линий нет, так как энергии недостаточно для выбивания K-электрона.

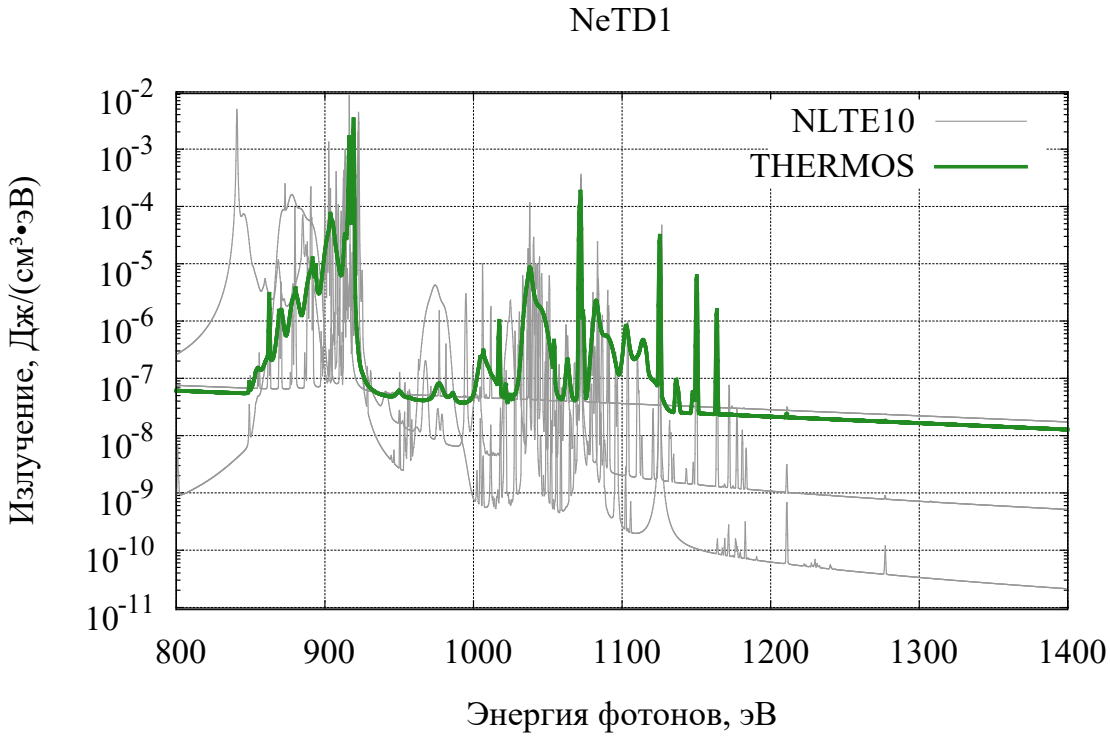

Рис. 8. Интегральный спектр излучения в плазме неона для случая NeTD1

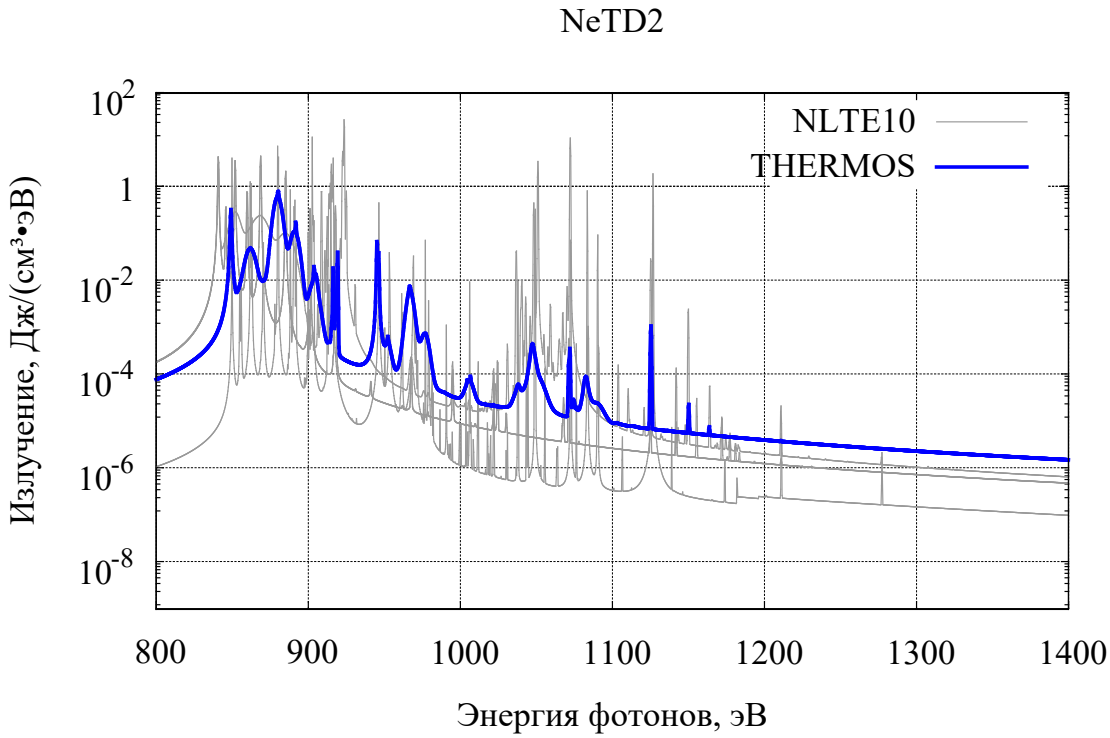

Рис. 9. Интегральный спектр излучения в плазме неона для случая NeTD2

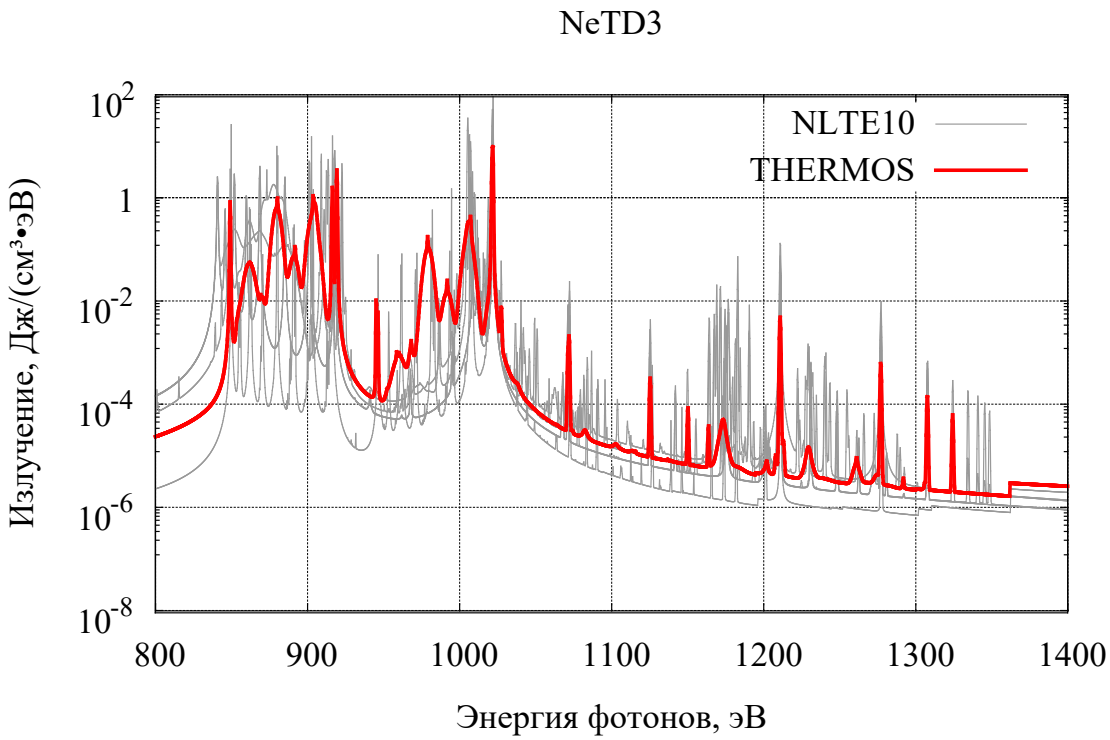

Рис. 10. Интегральный спектр излучения в плазме неона для случая NeTD3

Следует сделать важное замечание, что рассматриваемые случаи воздействия рентгена на малоплотную плазму неона очень чувствительны к выбору приближения для расчёта скоростей фотоионизации, так как это определяющий процесс в данном случае. В комплексе THERMOS используется приближение Крамерса, которое, как известно, даёт хорошие результаты для водородоподобных ионов. В случаях NeTD2 и NeTD3, где идёт ионизация с внутренней $1s$ оболочки, для этих электронов потенциал близок к водородоподобному и формула Крамерса хорошо работает. При этом скорость процессов $1s^m 2s^2 2p^n \to 1s^{m-1} 2s^2 2p^n$ на 1-2 порядка выше скоростей процессов $1s^2 2s^2 2p^n \to 1s^2 2s^2 2p^{n-1}$. В случае NeTD1 ситуация принципиально другая, $1s$ электроны не могут быть ионизованы и основные реакции – это реакции вида $1s^2 2s^2 2p^n \to 1s^2 2s^2 2p^{n-1}$. Для скоростей этих процессов формула Крамерса даёт неверные результаты. Для сравнения мы провели расчёты скоростей фотоионизации с использованием сечений, полученных с помощью кода FAC. Из рис. 11 (сверху) видно, насколько существенно отличие между скоростями, полученными по формуле Крамерса и из кода FAC для кейса NeTD1. При этом чем меньше электронов в ионе, тем ближе потенциал к водородоподобному и тем лучше согласие между двумя приближениями. Учитывая такое большое

рассогласование в скоростях фотоионизации для случая NeTD1, было принято решение использовать для расчётов скоростей фотоионизации сечения, полученные с помощью кода FAC. В случаях NeTD2 и NeTD3 возможно ограничиться использованием приближения Крамерса. На рис. 11 (снизу) показано сравнение скоростей фотоионизации, рассчитанных в приближении Крамерса, с результатами других участников NLTE10.

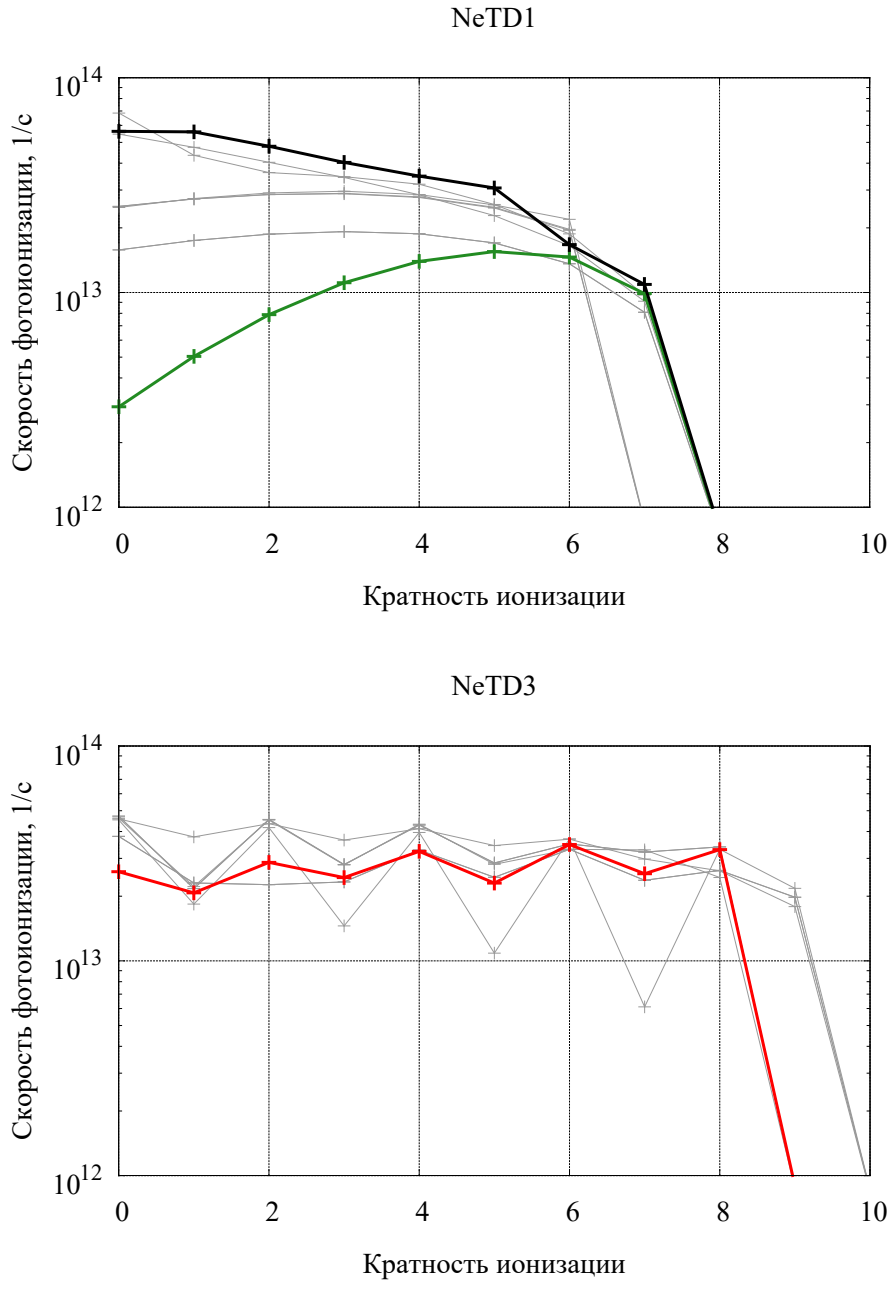

Рис. 11. Скорости фотоионизации в плазме неона для случаев NeTD1 и NeTD3. Зелёная и красная кривые – расчёт по формуле Крамерса, чёрная кривая – с использованием сечений фотоионизации из кода FAC

Заключение

В данной работе мы представили возможности нового модуля программного комплекса THERMOS для моделирования свойств нестационарной плазмы на примере заданий, предложенных на семинаре NLTE10. Рассматривалась малоплотная плазма неона, облучаемая монохроматическим рентгеновским излучением. Длительность воздействия рентгеновских импульсов составляла несколько сотен фемтосекунд, что сопоставимо с характерными временами процессов фотоионизации и автоионизации. Именно эти процессы играют основную роль в эволюции рассматриваемой плазмы.

Сравнение с результатами расчётов других научных групп, участвовавших в семинаре, показало работоспособность нестационарной модели, заложенной в THERMOS. Полученные значения среднего заряда, населённости и спектры излучения имеют хорошее согласие с результатами других участников.

Список литературы

1. Young L. et al. Femtosecond electronic response of atoms to ultra-intense X-rays // Nature. 2010. Vol. 466, № 7302. P. 56–61. doi:10.1038/nature09177
2. Nagler B. et al. Turning solid aluminium transparent by intense soft X-ray photoionization // Nat. Phys. 2009. Vol. 5, № 9. P. 693–696. doi:10.1038/nphys1341
3. Vinko S.M. et al. Creation and diagnosis of a solid-density plasma with an X-ray free-electron laser // Nature. 2012. Vol. 482, № 7383. P. 59–62. doi:10.1038/nature10746
4. Waldrop M.M. X-ray science: The big guns // Nature. 2014. Vol. 505, № 7485. P. 604–606. doi:10.1038/505604a
5. Mimura H. et al. Generation of 10^{20} Wcm^{-2} hard X-ray laser pulses with two-stage reflective focusing system // Nat. Commun. 2014. Vol. 5, № 1. P. 1–5. doi:10.1038/ncomms4539
6. Ralchenko Y. Code Comparison Workshop. [Online]. https://nlte.nist.gov/
7. Lee R.W., Nash J.K., Ralchenko Y. Review of the NLTE kinetics code workshop // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 1997. Vol. 58, № 4–6. P. 737–742. doi:10.1016/s0022-4073(97)00079-4
8. Bowen C. et al. Review of the NLTE emissivities code comparison virtual workshop // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2003. Vol. 81, № 1–4. P. 71–84. doi:10.1016/s0022-4073(03)00061-x
9. Bowen C., Lee R.W., Ralchenko Y. Comparing plasma population kinetics codes: Review of the NLTE-3 Kinetics Workshop // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2006. Vol. 99, № 1–3. P. 102–119. doi:10.1016/j.jqsrt.2005.05.008
10. Rubiano J.G. et al. Review of the 4th NLTE Code Comparison Workshop // High Energy Density Phys. 2007. Vol. 3, № 1–2. P. 225–232. doi:10.1016/j.hedp.2007.02.027

11. Fontes C.J. et al. Review of the NLTE-5 kinetics workshop // High Energy Density Phys. 2009. Vol. 5, № 1–2. P. 15–22. doi:10.1016/j.hedp.2009.02.004
12. Chung H.-K. et al. Comparison and analysis of collisional-radiative models at the NLTE-7 workshop // High Energy Density Phys. 2013. Vol. 9, № 4. P. 645–652. doi:10.1016/j.hedp.2013.06.001
13. Piron R. et al. Review of the 9th NLTE code comparison workshop // High Energy Density Phys. 2017. Vol. 23. P. 38–47. doi:10.1016/j.hedp.2017.02.009
14. Hansen S.B. et al. Review of the 10th Non-LTE Code Comparison Workshop // High Energy Density Phys. 2019. Vol. 35. P. 100693. doi:10.1016/j.hedp.2019.06.001
15. Vichev I.Yu. et al. On certain aspects of the THERMOS toolkit for modeling experiments // High Energy Density Phys. 2019. Vol. 33. P. 100713. doi:10.1016/j.hedp.2019.100713
16. Chung H.K., Chen M.H., Lee R.W. Extension of atomic configuration sets of the Non-LTE model in the application to the Kα diagnostics of hot dense matter // High Energy Density Phys. 2007. Vol. 3, № 1–2. P. 57–64. doi:10.1016/j.hedp.2007.02.001
17. KIAM_DB: база атомных данных для расчётов спектральных свойств плазмы. И.Ю. Вичев, А.С. Грушин, В.Г. Новиков, А.Д. Соломянная. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. — 94 с. http://keldysh.ru/e-biblio/vichev
18. Gu M.F. The flexible atomic code // Can. J. Phys. NRC Research Press Ottawa, Canada, 2008. Vol. 86, № 5. P. 675–689. doi:10.1063/1.1824864
19. Ralchenko Yu., Kramida A.E., Reader J., Team NIST ASD. NIST Atomic Spectra Database (version 5.5.6). [Online]. 2018. http://physics.nist.gov/asd
20. Novikov V.G. Average Atom Approximation in Non-LTE Level Kinetics // Modern Methods in Collisional-Radiative Modeling of Plasmas. Springer S / ed. Ralchenko Y. 2016. P. 105–126. doi:10.1007/978-3-319-27514-7_5
21. Belov A.A., Kalitkin N.N., Kuzmina L. V. Modeling of chemical kinetics in gases // Math. Model. Comput. Simulations. 2017. Vol. 9, № 1. P. 24–39. doi:10.1134/s2070048217010057
22. Lotz W. Electron-impact ionization cross-sections for atoms up to Z=108 // Zeitschrift fur Phys. A Hadron. Nucl. 1970. Vol. 232, № 2. P. 101–107. doi:10.1007/bf01393132
23. Regemorter H. Rate of Collisional Excitation in Stellar Atmospheres // Astrophys. J. 1962. Vol. 136. P. 906. doi:10.1086/147445
24. Вайнштейн Л.А., Собельман И.И., Юков Е.А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука, 1979.
25. Kramers H.A. On the theory of X-ray absorption and of the continuous X-ray spectrum // London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci. Taylor & Francis Group, 1923. Vol. 46, № 275. P. 836–871. doi:10.1080/14786442308565244
26. Жданов В.П. Диэлектронная рекомбинация // Вопросы теории плазмы. 1982. Том. 12. С. 79–93.