ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 64 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Маслова И.И.

О классах сверхфункций на двухэлементном множестве

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Маслова И.И. О классах сверхфункций на двухэлементном множестве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 64. 29 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-64
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-64

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

И. И. Маслова

О классах сверхфункций на двухэлементном множестве

Москва — 2020

Маслова И. И.

О классах сверхфункций на двухэлементном множестве

Рассматриваются сверхфункции — множества булевых функций, зависящих от одних и тех же переменных. На множестве сверхфункций определяется операция замыкания. Для этой функциональной системы исследуются вопросы полноты и выразимости.

Ключевые слова: теория функциональных систем, булевы функции

Irina Igorevna Maslova

Clones of superfunctions on a two-element set

We consider superfunctions — sets of boolean functions, depending on the same variables. We define the closure operation on the set of superfunctions. Questions of completeness and expressibility are investigated for this functional system.

Key words: theory of functional systems, boolean functions

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00337 «Проблемы синтеза, сложности и надежности в теории управляющих систем»).

Оглавление

Введение

Работа относится к теории функциональных систем. Одной из классических функциональных систем является множество P_2 булевых функций со стандартной операцией замыкания. Для P_2 известно описание всех замкнутых классов функций ([1, 2], см. также [3, 4]), что позволяет полностью решить задачу о выразимости булевых функций. В данной работе рассматриваются обобщения булевых функций, называемые в работе сверхфункциями. *Сверхфункция* — это произвольное непустое множество булевых функций, зависящих от одних и тех же переменных. Для сверхфункций вводятся операция суперпозиции (как объединение всевозможных суперпозиций булевых функций, входящих в данные сверхфункции), операции введения и удаления фиктивных переменных и операция перехода к подмножеству и определяется замыкание множества сверхфункций относительно этих операций. Отметим, что сверхфункции можно рассматривать как обобщение понятия гиперфункций — функций, определенных на множестве $\{0, 1\}$ и принимающих значения из множества $\{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ (см. [5, 6, 7]), так как при суперпозиции гиперфункций берется объединение булевых функций, полученных всевозможными заменами значения $\{0, 1\}$ гиперфункций на значения 0 и 1, то есть фактически каждой гиперфункции при суперпозиции сопоставляется некоторое множество булевых функций.

Для рассматриваемой функциональной системы сверхфункций с операцией замыкания в работе изучаются вопросы полноты и выразимости. Получен критерий полноты произвольной системы сверхфункций в терминах описания предполных классов. Построены некоторые фрагменты решетки замкнутых классов сверхфункций. В частности, получено полное описание подклассов класса $\mathbf{L}$ сверхфункций, все компоненты которых являются линейными функциями, и класса $\mathbf{D}$ сверхфункций, все компоненты которых являются дизъюнкциями; показано, что в первом случае семейство подклассов является конечным, а во втором — счетным.

Обозначения замкнутых классов булевых функций, используемые в работе, соответствуют работам [3, 4]. Конец доказательства отмечается знаком $\square$.

1. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть $F = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\}$ — множество булевых функций, зависящих от одних и тех же переменных. Назовем это множество *сверхфункцией*. Функции $f_1, \ldots, f_m$ будем называть *компонентами* сверхфункции F и писать $f_i \in F$. Через $\mathbf{P}_2$ обозначим множество всех сверхфункций. Булевы функции можно рассматривать как однокомпонентные сверхфункции; в этом случае при обозначении сверхфункций скобки $\{\}$ будем иногда опускать.

Будем называть переменную *существенной для сверхфункции*, если найдется компонента, для которой эта переменная является существенной; *фиктивной для сверхфункции*, если для всех компонент эта переменная является фиктивной.

Определим следующие операции над сверхфункциями.

(1) *Добавление фиктивной переменной* к сверхфункции: добавление одинаковой фиктивной переменной ко всем компонентам.

(2) *Удаление фиктивной переменной* из сверхфункции: удаление одинаковой фиктивной переменной из всех компонент.

(3) *Суперпозиция сверхфункций.* Понятие формулы над множеством сверхфункций определяется так же, как для булевых функций (см. [3, 4]). Если сверхфункция F реализуется формулой над множеством сверхфункций $\{G_1, \ldots, G_k\}$, то будем говорить, что она получена в результате суперпозиции сверхфункций $G_1, \ldots, G_k$. При этом, если

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_0(F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_p(x_1, \ldots, x_n)),$$

тогда полагаем

$$F = \bigcup_{f_i \in F_i} f_0(f_1, \ldots, f_p).$$

Частными случаями операции суперпозиции являются операции перестановки, переименования и отождествления переменных сверхфункции; указанные операции применяются одновременно ко всем компонентам сверхфункции.

(4) *Операция перехода к подмножеству:* пусть $F \in \mathbf{P}_2, G \subset F$, тогда говорим, что сверхфункция G получена из F в результате перехода к подмножеству.

На множестве $\mathbf{P}_2$ определим *операцию замыкания*: пусть $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{P}_2$, тогда замыкание множества $\mathbf{F}$ (обозначение $[\mathbf{F}]$) — это множество всех сверхфункций, которые получаются из $\mathbf{F}$ применением операций (1)-(4). $\mathbf{F}$ — замкнутый класс сверхфункций, если $[\mathbf{F}] = \mathbf{F}$. Легко видеть, что для этой операции замыкания выполняются основные свойства замыкания (см. [3], [4]), в частности, для любого $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{P}_2$ выполняется $[[\mathbf{F}]] = [\mathbf{F}]$.

Далее при доказательстве замкнутости классов сверхфункций проверку замкнутости относительно операций (1), (2), (4) будем опускать.

Введем следующее обозначение для сверхфункции, состоящей из n селекторных функций:

$$E_n(x_1, \ldots, x_n) = \{e_1^n(x_1, \ldots, x_n), \ldots, e_n^n(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Пусть $F_1, \ldots, F_n$ — сверхфункции, зависящие от одних и тех же переменных $x_1, \ldots, x_l$. Рассмотрим следующую суперпозицию:

$$E_n(F_1, \ldots, F_n) = \bigcup_{e_i^n \in E_n} e_i^n(F_1, \ldots, F_n) = \bigcup_{i \in \{1, \ldots, n\}} F_i.$$

То есть сверхфункцию E_n можно рассматривать как операцию объединения n сверхфункций, зависящих от одних и тех же переменных.

Лемма 1. *$E_k \in [E_2]$ для всех $k \geqslant 2$.*

Доказательство. Докажем индукцией по k. Для $E_2(x_1, x_2)$ утверждение верно. Пусть верно для всех $i < k$. Тогда

$$E_k(x_1, \ldots, x_k) = E_2(E_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}), x_k).$$

Значит, $E_k \in [E_2]$. □

Пусть A — множество булевых функций. Обозначим через $\mathbf{A}$ множество всех сверхфункций, компоненты которых лежат в A, через $\mathbf{A}^{(1)}$ — множество однокомпонентных сверхфункций из $\mathbf{A}$.

Лемма 2. *Если A — замкнутый класс булевых функций, то $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{(1)}$ — замкнутые классы сверхфункций.*

Доказательство. Проверим замкнутость только относительно суперпозиции. Пусть $F_0, F_1, \ldots, F_p$ — сверхфункции из $\mathbf{A}$. Рассмотрим их суперпозицию:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_0(F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_p(x_1, \ldots, x_n)) = \bigcup_{f_i \in F_i} f_0(f_1, \ldots, f_p).$$

Пусть компонента f сверхфункции F получена в результате суперпозиции $f_0(f_1, \ldots, f_p)$, где $f_i \in F_i$. Поскольку функции $f_0, f_1, \ldots, f_p$ принадлежат замкнутому классу A, то $f \in A$. Таким образом, все компоненты сверхфункции F принадлежат классу A, поэтому $F \in \mathbf{A}$.

Пусть $F_0 = \{f_0\}, F_1 = \{f_1\}, \ldots, F_p = \{f_p\}$ — сверхфункции из $\mathbf{A}^{(1)}$. Их суперпозиция

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_0(F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_p(x_1, \ldots, x_n)) = \{f_0(f_1, \ldots, f_p)\}$$

снова будет однокомпонентной сверхфункцией из класса $\mathbf{A}$. $\square$

Лемма 3. *Пусть A — замкнутый класс булевых функций, содержащий селекторы, B — порождающая система для A. Тогда $[\mathbf{B}^{(1)}, E_2] = \mathbf{A}$.*

Доказательство. Будем доказывать включение $\mathbf{A} \subseteq [\mathbf{B}^{(1)}, E_2]$, обратное включение очевидно. Рассмотрим произвольную сверхфункцию из $\mathbf{A}$:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \{f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_l(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Поскольку все компоненты $f_1, \ldots, f_l$ принадлежат классу A и $[B] = A$, то $f_1, \ldots, f_l \in [B]$, и поэтому $\{f_1\}, \ldots, \{f_l\} \in [\mathbf{B}^{(1)}]$. Остается использовать сверхфункцию $E_l \in [E_2]$ для объединения l компонент сверхфункции F. Получаем, что $F \in [\mathbf{B}^{(1)}, E_2]$. $\square$

Пусть A и B — замкнутые классы сверхфункций, $A \subseteq B$. Обозначим через $\mathcal{I}(A, B)$ семейство всех замкнутых подклассов класса B, содержащих A.

Лемма 4. *Для любого замкнутого класса сверхфункций B найдется замкнутый класс булевых функций A, такой, что $\mathbf{A}^{(1)} \subseteq B \subseteq \mathbf{A}$.*

Доказательство. Через A обозначим множество всех компонент сверхфункций из B. Ясно, что A — замкнутый класс булевых функций, иначе класс B был бы не замкнут. Все сверхфункции из $\mathbf{A}^{(1)}$ получаются из сверхфункций класса B переходом к подмножеству, поэтому $\mathbf{A}^{(1)} \subseteq B$. Если бы в B нашлась сверхфункция не из $\mathbf{A}$, то хотя бы одна из компонент этой сверхфункции не лежала бы в A (по определению класса $\mathbf{A}$), что невозможно по построению класса A. Значит, $B \subseteq \mathbf{A}$. $\square$

Следствие. *Для поиска замкнутых классов сверхфункций достаточно ограничиться рассмотрением классов, лежащих в интервале $\mathcal{I}(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A})$ для каждого замкнутого класса A из P_2.*

Пусть A и B — замкнутые классы сверхфункций, $B \subset A$. Класс B называется предполным классом в A, если для любой сверхфункции $F \in A \setminus B$ выполняется $A = [F, B]$.

Лемма 5. *Пусть A — замкнутый класс булевых функций, содержащий селекторы, $B_1, \ldots, B_n$ — все предполные классы в A и $B_1, \ldots, B_n$ содержат селекторы. Тогда*

1) $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ — предполные классы в $\mathbf{A}$;

2) пусть $F_1 \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}_1, \ldots, F_n \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}_n$. Тогда $\mathbf{A}^{(1)} \subseteq [F_1, \ldots, F_n]$.

Доказательство. 1) Для каждого $i = 1, \ldots, n$ рассмотрим $F_i \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}_i$. Среди компонент F_i найдется функция $f_i \in A \setminus B_i$. Так как B_i — предполный класс в A, то $[\{f_i\}, \mathbf{B}_i^{(1)}] = \mathbf{A}^{(1)}$. По лемме 3 $\mathbf{A} = [E_2, \mathbf{A}^{(1)}]$. По условию $E_2 \in \mathbf{B}_i$. Значит, $\mathbf{A} = [\{f_i\}, \mathbf{B}_i] = [F_i, \mathbf{B}_i]$. Таким образом, $\mathbf{B}_i$ — предполный класс в $\mathbf{A}$.

2) Для каждого $i = 1, \ldots, n$ выберем среди компонент F_i функцию $f_i \in A \setminus B_i$. Так как $B_1, \ldots, B_n$ — это все предполные классы в A, то $[f_1, \ldots, f_n] = A$. Поэтому $\mathbf{A}^{(1)} \subseteq [F_1, \ldots, F_n]$. □

Следствие. *Пусть A — замкнутый класс булевых функций, содержащий селекторы, $B_1, \ldots, B_n$ — все предполные классы в A, $B_1, \ldots, B_n$ содержат селекторы, и пусть $\mathbf{A}^{(1)}$ — предполный класс в $\mathbf{A}$. Тогда $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$, $\mathbf{A}^{(1)}$ — предполные классы в $\mathbf{A}$ и других нет.*

Доказательство. Пусть $F_1 \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}_1, \ldots, F_n \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}_n$. По предыдущему утверждению $\mathbf{A}^{(1)} \subseteq [F_1, \ldots, F_n]$.

Так как $\mathbf{A}^{(1)}$ — предполный в $\mathbf{A}$, то для произвольной сверхфункции $F \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}^{(1)}$ выполняется $[\mathbf{A}^{(1)}, F] = \mathbf{A}$, а значит, $[F, F_1, \ldots, F_n] = \mathbf{A}$. □

2. Критерии полноты для классов сверхфункций $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{T_0}$, $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_{01}}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M_0}$, $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_{01}}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{SM}$, $\mathbf{S_{01}}$

При описании предполных классов в классах сверхфункций будем использовать следующее рассуждение: пусть $\mathbf{A}$ — замкнутый класс сверхфункций, $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_t$ — попарно различные не вложенные друг в друга замкнутые подклассы класса $\mathbf{A}$. $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_t$ — это все предполные классы в $\mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда для любых сверхфункций $F_1 \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}_1, \ldots, F_t \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}_t$ выполняется $[F_1, \ldots, F_t] = \mathbf{A}$.

Будем доказывать включение $\mathbf{A} \subseteq [F_1, \ldots, F_t]$, обратное включение очевидно, и его проверку будем опускать. Проверку того, что классы $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_t$ различны и не являются вложенными, также будем опускать.

Лемма 6. *Пусть A — замкнутый класс булевых функций, содержащий xy и $x \vee y$. Тогда $\mathbf{A}^{(1)}$ является предполным классом в $\mathbf{A}$.*

Доказательство. Пусть $F \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}^{(1)}$. Без ограничения общности (применив, если необходимо, операцию перехода к подмножеству) будем считать, что $F = \{f_1, f_2\}$, где $f_1 \neq f_2$. Покажем, что из этой сверхфункции и функций xy, $x \vee y$ можно получить $E_2(x, y)$. Рассмотрим три случая.

I. Пусть $f_1(\tilde{0}) \neq f_2(\tilde{0})$, без ограничения общности будем считать, что $f_1(\tilde{0}) = 0$, $f_2(\tilde{0}) = 1$. Тогда $F(x, \ldots, x) \vee x = \{x, 1\}$ и

$$\{1, x\} \cdot \{1, y\} = \{1, x, y, xy\} \supset \{x, y\} = E_2(x, y).$$

II. Пусть $f_1(\tilde{1}) \neq f_2(\tilde{1})$, без ограничения общности будем считать, что $f_1(\tilde{1}) = 0$, $f_2(\tilde{1}) = 1$. Тогда $F(x, \ldots, x) \cdot x = \{0, x\}$ и

$$\{0, x\} \vee \{0, y\} = \{0, x, y, x \vee y\} \supset \{x, y\} = E_2(x, y).$$

III. Пусть $f_1(\tilde{0}) = f_2(\tilde{0})$ и $f_1(\tilde{1}) = f_2(\tilde{1})$ и существует набор $\tilde{a} \neq \tilde{0}, \tilde{1}$, такой, что $f_1(\tilde{a}) \neq f_2(\tilde{a})$. Будем считать, что $\tilde{a} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-k})$, пусть $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 1$. Отождествим переменные сверхфункции $F(x_1, \ldots, x_n)$: положим $x_1 = \ldots = x_k = x$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = y$. Получаем сверхфункцию $G(x, y) = \{g_1(x, y), g_2(x, y)\}$, где

$$\begin{aligned} g_1(0,0) &= c, & g_2(0,0) &= c, \\ g_1(0,1) &= 0, & g_2(0,1) &= 1, \\ g_1(1,0) &= p, & g_2(1,0) &= q, \\ g_1(1,1) &= d, & g_2(1,1) &= d, \end{aligned}$$

$c, d, p, q \in \{0, 1\}$.

Положим $H(x, y) = G(x, y) \cdot y \vee x$. Тогда $H(x, y) = \{h_1(x, y), h_2(x, y)\}$, где компоненты $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$ принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} h_1(0,0) &= 0, & h_2(0,0) &= 0, \\ h_1(0,1) &= 0, & h_2(0,1) &= 1, \\ h_1(1,0) &= 1, & h_2(1,0) &= 1, \\ h_1(1,1) &= 1, & h_2(1,1) &= 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $H(x, y) = \{x, x \vee y\}$. И теперь $E_2(x, y)$ получается из сверхфункции

$$\{x, x \vee y\} \cdot \{y, y \vee x\} = \{xy, x, y, x \vee y\}$$

путем перехода к подмножеству.

Таким образом, во всех трех случаях получили, что $E_2(x, y) \in [F, \mathbf{A}^{(1)}]$, а значит, по лемме 3 $[F, \mathbf{A}^{(1)}] = \mathbf{A}$. Следовательно, $\mathbf{A}^{(1)}$ — предполный класс в $\mathbf{A}$. $\square$

Следствие 1. *(Критерий полноты в $\mathbf{P}_2$) Система сверхфункций* $\mathbf{F}$ *полна в* $\mathbf{P}_2$ *тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов* $\mathbf{P}_2^{(1)}$, $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{L}$.

Доказательство. Необходимость следует из того, что перечисленные классы не совпадают с $\mathbf{P}_2$.

Достаточность следует из того, что T_0, T_1, S, M, L — это все предполные классы в P_2, из леммы 6 и следствия из леммы 5. □

Следствие 2. *Пусть* A *— один из классов* T_0, T_1, T_{01}, M, M_0, M_1, M_{01}. *Пусть* $B_1, \ldots, B_t$ *— все предполные классы в* A. *Тогда все предполные классы в классе* $\mathbf{A}$ *сверхфункций — это* $\mathbf{A}^{(1)}$, $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_t$.

Через $m(x, y, z)$ обозначим функцию $xy \vee xz \vee yz$.

Лемма 7. *Пусть* $F = \{f_1, f_2\}$, $f_1, f_2 \in S$. *Тогда* $E_2 \in [m(x, y, z), F]$.

Доказательство. Так как $f_1 \neq f_2$, то найдется набор, на котором эти функции принимают различные значения. Рассмотрим два случая.

I. Пусть $f_1(\tilde{0}) \neq f_2(\tilde{0})$, без ограничения общности будем считать, что $f_1(\tilde{0}) = 0$, $f_2(\tilde{0}) = 1$. Положим $G(x) = F(x, \ldots, x)$. Из самодвойственности функций f_1 и f_2 следует, что $G(x) = \{x, \overline{x}\}$. Тогда

$$m(G(x), x, y) = G(x) \cdot x \vee G(x) \cdot y \vee xy = \{x, y\}.$$

II. Пусть теперь $f_1(\tilde{0}) = f_2(\tilde{0})$ и существует набор $\tilde{a} \neq \tilde{0}, \tilde{1}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) \neq f_2(\tilde{a})$. Будем считать, что $\tilde{a} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-k})$, пусть $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 1$. Отождествим переменные сверхфункции $F(x_1, \ldots, x_n)$: положим $x_1 = \ldots = x_k = x$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = y$. Получим сверхфункцию $G(x, y) = \{g_1(x, y), g_2(x, y)\}$ (используем самодвойственность функций f_1 и f_2), где

$$\begin{aligned}
g_1(0,0) &= b, & g_2(0,0) &= b,\\
g_1(0,1) &= 0, & g_2(0,1) &= 1,\\
g_1(1,0) &= 1, & g_2(1,0) &= 0,\\
g_1(1,1) &= \overline{b}, & g_2(1,1) &= \overline{b},
\end{aligned}$$

$b \in \{0, 1\}$. Если $b = 0$, то $G(x, y) = \{x, y\} = E_2(x, y)$. Если $b = 1$, то $G(x, y) = \{\overline{y}, \overline{x}\}$. Во втором случае $E_2(x, y) = G(\overline{x}, \overline{y})$. □

Следствие 1. *Пусть* A *— замкнутый класс булевых функций,* $A \subseteq S$, $m(x, y, z) \in A$. *Тогда* $\mathbf{A}^{(1)}$ *— предполный класс в* $\mathbf{A}$.

Следствие 2. *Пусть* A *— один из классов* S, SM, S_{01}. *Пусть* $B_1, \ldots, B_t$ *— все предполные классы в* A. *Тогда все предполные классы в классе* $\mathbf{A}$ *сверхфункций — это* $\mathbf{A}^{(1)}$, $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_t$.

3. Классы линейных сверхфункций

Интервал $\mathcal{I}(\mathbf{L}_{01}^{(1)}, \mathbf{L}_{01})$

Утверждение 1. *Классы* $\mathbf{L}_{01}^{(1)}$, $\mathbf{U}_{01}$ *— предполные в* $\mathbf{L}_{01}$*, и других нет.*

Доказательство. U_{01} — единственный предполный класс в L_{01}. Поэтому в силу следствия из леммы 5 достаточно доказать, что $\mathbf{L}_{01}^{(1)}$ — предполный класс в $\mathbf{L}_{01}$.

Пусть $F \in \mathbf{L}_{01} \setminus \mathbf{L}_{01}^{(1)}$. Покажем, что $E_2 \in [\mathbf{L}_{01}^{(1)}, F]$.

Без ограничения общности пусть $F = \{f_1, f_2\}$. Найдется набор $\tilde{a}$, на котором компоненты принимают разные значения, причем $\tilde{a} \neq \tilde{0}$ и $\tilde{a} \neq \tilde{1}$, так как обе компоненты из L_{01}. Без ограничения общности будем считать, что $\tilde{a} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-k})$, и пусть $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 1$. Отождествим переменные сверхфункции $F(x_1, \ldots, x_n)$: положим $x_1 = \ldots = x_k = x$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = y$. Получим сверхфункцию $G(x, y) = \{g_1(x, y), g_2(x, y)\}$, компоненты которой принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} g_1(0,0) &= 0, & g_2(0,0) &= 0,\\ g_1(0,1) &= 0, & g_2(0,1) &= 1,\\ g_1(1,0) &= b, & g_2(1,0) &= c,\\ g_1(1,1) &= 1, & g_2(1,1) &= 1, \end{aligned}$$

где $b, c \in \{0, 1\}$. Функции f_1 и f_2 — линейные, а значит, g_1 и g_2 тоже линейные. Поэтому $b = 1$, $c = 0$ и $G(x, y) = \{x, y\} = E_2(x, y)$. Таким образом, $E_2 \in [\mathbf{L}_{01}^{(1)}, F]$. По лемме 3 $[\mathbf{L}_{01}^{(1)}, E_2] = \mathbf{L}_{01}$, значит, $[\mathbf{L}_{01}^{(1)}, F] = \mathbf{L}_{01}$, то есть $\mathbf{L}_{01}^{(1)}$ — предполный в $\mathbf{L}_{01}$. □

Интервал $\mathcal{I}(\mathbf{L}_{1}^{(1)}, \mathbf{L}_{1})$

Утверждение 2. *Классы* $\mathbf{L}_{1}^{(1)}$, $\mathbf{L}_{01}$, $\mathbf{U}_{1}$ *— предполные в* $\mathbf{L}_{1}$*, и других нет.*

Доказательство. U_1, L_{01} — все предполные классы в L_1. Поэтому в силу следствия из леммы 5 достаточно доказать, что $\mathbf{L}_{1}^{(1)}$ — предполный класс в $\mathbf{L}_1$.

Пусть $F \in \mathbf{L}_1 \setminus \mathbf{L}_{1}^{(1)}$. Покажем, что $E_2 \in [\mathbf{L}_{1}^{(1)}, F]$. Отсюда в силу леммы 3 будет следовать, что $\mathbf{L}_{1}^{(1)}$ — предполный класс в $\mathbf{L}_1$.

Без ограничения общности пусть $F = \{f_1, f_2\}$. Найдется набор $\tilde{a}$, на котором компоненты принимают разные значения, причем $\tilde{a} \neq \tilde{1}$, так как обе компоненты из L_1. Будем считать, что $\tilde{a} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k},\underbrace{1,\ldots,1}_{n-k})$, и пусть $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 1$. Отождествим переменные сверхфункции $F(x_1,\ldots,x_n)$: положим $x_1 = \ldots = x_k = x$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = 1$. Тогда $F(x,\ldots,x,1\ldots,1) = \{x,1\}$. Так как $x \oplus y \oplus 1 \in L_1$, то в $[\mathbf{L}_1^{(1)}, F]$ лежит сверхфункция

$$\{x,1\} \oplus \{y,1\} \oplus 1 = \{x,y,x \oplus y \oplus 1, 1\}.$$

Взятием подмножества из этой сверхфункции получим $E_2(x,y)$, что и требовалось. $\square$

Интервал $\mathcal{I}(\mathbf{L}_0^{(1)}, \mathbf{L}_0)$

Из соображений двойственности получаем:

Утверждение 3. *Классы* $\mathbf{L}_0^{(1)}$, $\mathbf{L}_{01}$, $\mathbf{U}_0$ — *предполные в* $\mathbf{L}_0$, *и других нет.*

Интервал $\mathcal{I}(\mathbf{SL}^{(1)}, \mathbf{SL})$

Через $\mathbf{SL}^-$ обозначим множество всех однокомпонентных сверхфункций из $\mathbf{SL}$ и двухкомпонентных сверхфункций вида $\{f, \overline{f}\}$, где $f \in SL$.

Утверждение 4. $\mathbf{SL}^-$ — *замкнутый класс сверхфункций.*

Доказательство. Пусть $F_0, F_1, \ldots, F_n \in \mathbf{SL}^-$. Рассмотрим суперпозицию

$$F = F_0(F_1,\ldots,F_n) = \bigcup_{f_i \in F_i} f_0(f_1,\ldots,f_n).$$

Заметим, что если x_i — существенная переменная для линейной функции f, то выполняется равенство:

$$f(x_1,\ldots,x_i \oplus 1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n) \oplus 1.$$

Поэтому $f_0^{a_0}(f_1^{a_1},\ldots,f_n^{a_n}) \in \{f_0(f_1,\ldots,f_n), f_0(f_1,\ldots,f_n) \oplus 1\}$ для любых $a_0,\ldots,a_n \in \{0,1\}$ (через f^a обозначается функция равная f, если $a = 1$, и $\overline{f}$, если $a = 0$). Таким образом,

$$\bigcup_{f_i \in F_i} f_0(f_1,\ldots,f_n) \subseteq \{f_0(f_1,\ldots,f_n), f_0(f_1,\ldots,f_n) \oplus 1\}.$$

Значит, $F \in \mathbf{SL}^-$. $\square$

Положим $\mathbf{SU}^{\#} = \mathbf{SL}^{-} \cap \mathbf{U} = \{\{x\}, \{\overline{x}\}, \{x, \overline{x}\}, \{y\}, \{\overline{y}\}, \{y, \overline{y}\}, \ldots\}$. $\mathbf{SU}^{\#}$ является замкнутым классом сверхфункций как пересечение замкнутых классов.

Утверждение 5. $\mathbf{SL}^{(1)}$, $\mathbf{SU}^{\#}$ *— предполные классы в* $\mathbf{SL}^{-}$*, и других нет.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathbf{SL}^{-} \setminus \mathbf{SU}^{\#}$, $F \in \mathbf{SL}^{-} \setminus \mathbf{SL}^{(1)}$. Покажем, что $\mathbf{SL}^{-} = [F, G]$.

Сверхфункция F имеет вид $\{f, \overline{f}\}$. Отождествлением всех ее переменных получим сверхфункцию $\{x, \overline{x}\}$.

Сверхфункция G содержит компоненту с не менее чем двумя существенными переменными. Отождествлением переменных из нее получим $x \oplus y \oplus z \oplus 1$ или $x \oplus y \oplus z$. Во втором случае с помощью отрицания получим $x \oplus y \oplus z \oplus 1$.

Так как функция $x \oplus y \oplus z \oplus 1$ — базис класса SL, то с помощью сверхфункции $\{x, \overline{x}\}$ можно получить любую сверхфункцию из класса $\mathbf{SL}^{-}$, значит, $[F, G] = \mathbf{SL}^{-}$. $\square$

Утверждение 6. *Классы* $\mathbf{SU}$*,* $\mathbf{L}_{01}$*,* $\mathbf{SL}^{-}$ *— предполные в* $\mathbf{SL}$*, и других нет.*

Доказательство. Пусть $F \in \mathbf{SL} \setminus \mathbf{SL}^{-}$, $G \in \mathbf{SL} \setminus \mathbf{SU}$, $H \in \mathbf{SL} \setminus \mathbf{L}_{01}$.

Классы SU и L_{01} — это все предполные классы в SL, поэтому по лемме 5 $\mathbf{SU}$, $\mathbf{L}_{01}$ — предполные классы в $\mathbf{SL}$ и $\mathbf{SL}^{(1)} \subseteq [H, G]$.

Покажем, что $[F, \mathbf{SL}^{(1)}] = \mathbf{SL}$. Без ограничения общности, $F = \{f_1, f_2\}$, где $f_1 \neq f_2$ и $f_1 \neq \overline{f}_2$. Это значит, что найдется набор, на котором значения f_1 и f_2 совпадают (будем считать, что они равны 0, иначе возьмем отрицание F), и набор, на котором значения f_1 и f_2 не совпадают. Пусть без ограничения общности

$$\begin{aligned}
f_1(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 1, \ldots, 1) &= 0, \\
f_1(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1) &= 0, \\
f_2(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 1, \ldots, 1) &= 1, \\
f_2(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k_1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_3}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_4}) &= 0.
\end{aligned}$$

Положим $T(x, y) = F(\underbrace{x, \ldots, x}_{k_1}, \underbrace{\overline{y}, \ldots, \overline{y}}_{k_2}, \underbrace{y, \ldots, y}_{k_3}, \underbrace{\overline{x}, \ldots, \overline{x}}_{k_4})$ (если некоторые из k_1, k_2, k_3, k_4 равны 0, то рассуждения аналогичны). Тогда $T = \{t_1, t_2\}$, где компоненты t_1 и t_2 принимают следующие значения:

$$\begin{aligned}
t_1(0, 0) = 0, \quad t_2(0, 0) = 0, \\
t_1(0, 1) = 0, \quad t_2(0, 1) = 1.
\end{aligned}$$

Используя самодвойственность функций f_1 и f_2, получаем, что $T(x,y) = \{x,y\} = E_2(x,y)$. Таким образом, $E_2 \in [F, \mathbf{SL}^{(1)}]$.

По лемме 3 $[E_2, \mathbf{SL}^{(1)}] = \mathbf{SL}$, а значит, $[F, \mathbf{SL}^{(1)}] = \mathbf{SL}$. Таким образом, $\mathbf{SL} = [F, G, H]$. $\square$

Интервал $\mathcal{I}(\mathbf{L}^{(1)}, \mathbf{L})$

Обозначим через $\mathbf{L}^-$ множество всех однокомпонентных сверхфункций из $\mathbf{L}$ и двухкомпонентных сверхфункций вида $\{f, \overline{f}\}$, где $f \in L$.

Утверждение 7. $\mathbf{L}^-$ — *замкнутый класс сверхфункций.*

Доказательство. Аналогично доказательству замкнутости $\mathbf{SL}^-$. $\square$

Положим

$$\mathbf{U}^- = \mathbf{L}^- \cap \mathbf{U} = \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{x\}, \{\overline{x}\}, \{x, \overline{x}\}, \{y\}, \{\overline{y}\}, \{y, \overline{y}\}, \ldots\}.$$

$\mathbf{U}^-$ — замкнутый класс как пересечение замкнутых классов.

Утверждение 8. $\mathbf{L}^{(1)}$*,* $\mathbf{U}^-$*,* $\mathbf{SL}^-$ — *все предполные классы в* $\mathbf{L}^-$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathbf{L}^- \backslash \mathbf{U}^-$, $F \in \mathbf{L}^- \backslash \mathbf{L}^{(1)}$, $H \in \mathbf{L}^- \backslash \mathbf{SL}^-$. Покажем, что $\mathbf{L}^- = [F, G, H]$.

Сверхфункция F имеет вид $\{f, \overline{f}\}$. Отождествим все ее переменные. Получим одну из сверхфункций $\{0,1\}$, $\{x, \overline{x}\}$. Во втором случае рассмотрим H: она содержит несамодвойственную компоненту. Из несамодвойственной функции и отрицания можем получить константы 0 и 1. Подставляя константу в $\{x, \overline{x}\}$, получим $\{0,1\}$. Таким образом, $\{0,1\} \in [F, H]$.

Сверхфункция G содержит компоненту с не менее чем двумя существенными переменными. Подстановкой нулей и единиц можем получить $x \oplus y$ или $x \oplus y \oplus 1$. То есть получили базис в классе $\mathbf{L}^{(1)}$.

И далее с помощью сверхфункции $x \oplus \{0,1\} = \{x, \overline{x}\}$ получим все сверхфункции из класса $\mathbf{L}^-$. $\square$

Утверждение 9. $\mathbf{SL}$*,* $\mathbf{L}_1$*,* $\mathbf{L}_0$*,* $\mathbf{U}$*,* $\mathbf{L}^-$ — *все предполные классы в* $\mathbf{L}$.

Доказательство. Пусть $F_1 \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{SL}$, $F_2 \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{U}$, $F_3 \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{L}_1$, $F_4 \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{L}_0$, $F \in \mathbf{L} \backslash \mathbf{L}^-$. Классы SL, L_0, L_1, U — это все предполные классы в L, поэтому по лемме 5 $\mathbf{SL}$, $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{U}$ — предполные классы в $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^{(1)} \subseteq [F_1, F_2, F_3, F_4]$.

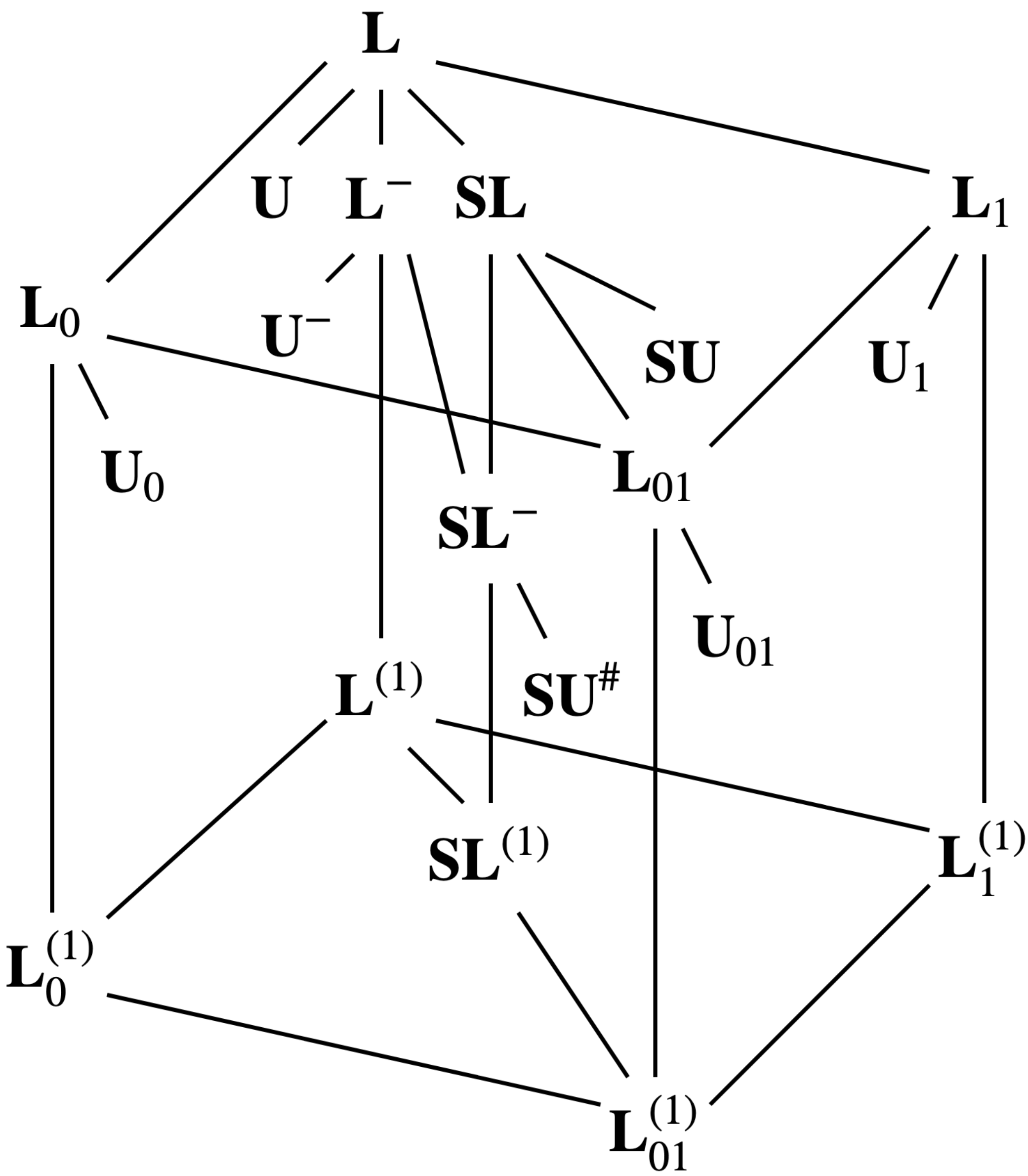
Покажем, что $E_2(x,y) \in [\mathbf{L}^{(1)}, F]$. Без ограничения общности пусть $F = \{f_1, f_2\}$, причем $f_1 \neq f_2 \oplus 1$ и $f_1 \neq f_2$. Так как $x \oplus y \in \mathbf{L}^{(1)}$, то в $[\mathbf{L}^{(1)}, F]$

лежит сверхфункция $F \oplus f_1 = \{0, f_1 \oplus f_2\}$. В силу ограничений на компоненты F функция $f_1 \oplus f_2$ не является константой. Отождествлением переменных этой функции можно получить линейную функцию $g(x, y)$ от одной или двух переменных, то есть одну из функций x, $x \oplus y$, $x \oplus 1$, $x \oplus y \oplus 1$. Через $G(x, y) = \{0, g(x, y)\}$ обозначим полученную сверхфункцию. Подстановкой нуля, единицы или отрицания вместо переменных во всех четырех случаях можем получить сверхфункцию $\{0, x\}$. Тогда

$$E_2(x, y) = \{x, y\} \subset \{0, x\} \oplus \{0, y\} = \{0, x, y, x \oplus y\}.$$

Таким образом, $E_2 \in [\mathbf{L}^{(1)}, F]$. По лемме 3 $[E_2, \mathbf{L}^{(1)}] = \mathbf{L}$. Значит, $[F_1, F_2, F_3, F] = \mathbf{L}$. $\square$

Результаты этого параграфа позволяют построить решетку подклассов линейных сверхфункций.



4. Классы сверхфункций $\mathbf{QO}^m$

Будем говорить, что сверхфункция $F = \{f_1, \ldots, f_l\}$ принадлежит классу $\mathbf{QO}^m$, $m = 2, 3, \ldots, \infty$, если выполняется одно из условий:

1. Конъюнкция всех ее компонент принадлежит классу O^m (напомним, что булева функция f принадлежит классу O^m, $m = 2, 3, \ldots$, если любые m наборов, на которых f принимает значение 0, имеют общую нулевую компоненту; f принадлежит классу O^∞, если все наборы, на которых f принимает значение 0, имеют общую нулевую компоненту).

2. Пусть $\mathcal{A}$ — множество всех наборов, на которых хотя бы одна компонента из F принимает значение 0. Тогда любые m наборов из $\mathcal{A}$ содержат общую нулевую компоненту. Отметим, что для класса $\mathbf{QO}^\infty$ это условие эквивалентно тому, что все компоненты сверхфункции F не меньше некоторой общей переменной x_i.

3. Пусть $\mathcal{A}^{up}$ — множество всех верхних нулей всех компонент сверхфункции F. Тогда любые m наборов из $\mathcal{A}^{up}$ содержат общую нулевую компоненту (напомним, что верхним нулем функции f называется такой набор $\tilde{a}$, что $f(\tilde{a}) = 0$ и $f(\tilde{b}) = 1$ для любого набора $\tilde{b}$, который строго больше набора $\tilde{a}$).

Лемма 8. *Условия 1-3 из определения класса $\mathbf{QO}^m$ эквиваленты.*

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 2$. Множество $\mathcal{A}$ совпадает с множеством наборов, на которых $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_l$ принимает значение 0.

$2 \Rightarrow 3$. Следует из включения $\mathcal{A}^{up} \subseteq \mathcal{A}$.

$3 \Rightarrow 2$. Пусть любые m наборов из $\mathcal{A}^{up}$ содержат общую нулевую компоненту. Пусть $\tilde{a}^1, \ldots, \tilde{a}^m$ произвольные наборы из $\mathcal{A}$. Для каждого набора $\tilde{a} \in \mathcal{A}$ найдется набор $\tilde{a}^{up} \in \mathcal{A}^{up}$, такой, что $\tilde{a} \leqslant \tilde{a}^{up}$, то есть каждой нулевой компоненте набора $\tilde{a}^{up}$ соответствует нулевая компонента набора $\tilde{a}$. Так как $(\tilde{a}^1)^{up}, \ldots, (\tilde{a}^m)^{up}$ — m наборов из $\mathcal{A}^{up}$, то они имеют общую нулевую компоненту. А значит, и наборы $\tilde{a}^1, \ldots, \tilde{a}^m$ имеют общую нулевую компоненту. $\square$

Утверждение 10. *Для $m = 2, 3, \ldots, \infty$ $\mathbf{QO}^m$ — замкнутый класс сверхфункций.*

Доказательство. Пусть $m \geqslant 2$ и пусть $F_0, F_1, \ldots, F_n \in \mathbf{QO}^m$. Рассмотрим суперпозицию

$$F = F_0(F_1 \ldots, F_n) = \{f_1, \ldots, f_l\}.$$

Возьмем произвольные m наборов $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m$, на каждом из которых хотя бы одна из компонент F равна нулю. Это значит, что найдутся такие компоненты f^i_j сверхфункций F_j, что выполняются равенства

$$f^i_0(f^i_1(\tilde{\alpha}_i), \ldots, f^i_n(\tilde{\alpha}_i)) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Так как $F_0 \in \mathbf{QO}^m$, то у наборов

$$(f^i_1(\tilde{\alpha}_1), \ldots, f^i_n(\tilde{\alpha}_1)), \ldots, (f^m_1(\tilde{\alpha}_m), \ldots, f^m_n(\tilde{\alpha}_m))$$

найдется общая нулевая компонента, пусть

$$f^1_j(\tilde{\alpha}_1) = 0, \ \ldots, \ f^m_j(\tilde{\alpha}_m) = 0.$$

$F_j \in \mathbf{QO}^m$, поэтому у наборов $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m$ тоже найдется общая нулевая компонента. Получаем, что выполнено условие 2 из определения класса $\mathbf{QO}^m$, а значит, $F \in \mathbf{QO}^m$.

Для класса $\mathbf{QO}^\infty$ рассуждения проводятся аналогично. □

Введем следующее обозначение: $D_\infty(x, y) = \{x, x \vee y\}$. Заметим, что $D_\infty \in \mathbf{QO}^\infty$.

Лемма 9. *Пусть $A \subseteq O^\infty$ — замкнутый класс булевых функций, содержащий дизъюнкцию; $B = \{f_1, \ldots, f_l\}$ — полная система функций в A. Тогда $\mathbf{A} \cap \mathbf{QO}^\infty$ порождается множеством сверхфункций $C = \{D_\infty, \{f_1\}, \ldots, \{f_l\}\}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную сверхфункцию

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \{g_1, \ldots, g_l\} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{QO}^\infty.$$

Так как B — полная система в A, то из функций системы B можем получить все однокомпонентные сверхфункции из $\mathbf{A}^{(1)}$, в том числе и все компоненты G. Без ограничения общности будем считать, что $g_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant x_1$, $i = 1, \ldots, l$.

Для каждого $i = 1, \ldots, l$ рассмотрим

$$D_\infty(x_1, g_i(x_1, \ldots, x_n)) = \{x_1, x_1 \vee g_i(x_1, \ldots, x_n)\} = \{x_1, g_i(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

И далее возьмем дизъюнкцию этих сверхфункций

$$\{x_1, g_1(x_1, \ldots, x_n)\} \vee \{x_1, g_2(x_1, \ldots, x_n)\} \vee \ldots \vee \{x_1, g_l(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Если в i-й сверхфункции выбрать компоненту g_i, а в остальных x_1, то получится g_i. То есть получили сверхфункцию, содержащую G в качестве своего подмножества. Значит, $G \in [C]$. Таким образом, $\mathbf{A} \cap \mathbf{QO}^\infty \subseteq [C]$. □

5. Классы сверхфункций, содержащиеся в D

Интервал $\mathcal{I}(\mathbf{D}_{01}^{(1)}, \mathbf{D}_{01})$

Лемма 10. *Пусть* $F(x_1, \ldots, x_n) = \{f_1, f_2\}$ *— сверхфункция из* $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{\infty}$. *Тогда* $D_{\infty}(x, y) \in [F]$.

Доказательство. Так как компоненты сверхфункции F — различные функции, то найдется набор $\tilde{a}$, такой что $f_1(\tilde{a}) \neq f_2(\tilde{a})$. В силу того, что компоненты лежат в классе T_{01}, $\tilde{a} \neq \tilde{0}, \tilde{1}$. Без ограничения общности будем считать, что $\tilde{a} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-k})$, и пусть $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 1$. Отождествим переменные сверхфункции $F(x_1, \ldots, x_n)$: положим $x_1 = \ldots = x_k = x$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = y$. Получим сверхфункцию $G(x, y) = \{g_1(x, y), g_2(x, y)\}$, компоненты которой принимают следующие значения:

$$\begin{gathered}
g_1(0,0) = 0, \;\; g_2(0,0) = 0, \\
g_1(0,1) = 0, \;\; g_2(0,1) = 1, \\
g_1(1,0) = b, \;\; g_2(1,0) = c, \\
g_1(1,1) = 1, \;\; g_2(1,1) = 1,
\end{gathered}$$

$b, c \in \{0, 1\}$. Так как полученная сверхфункция лежит в $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{\infty}$, то имеется единственный вариант: $G(x, y) = \{x, x \vee y\} = D_{\infty}(x, y)$. $\square$

Утверждение 11. $\mathbf{D}_{01}^{(1)}$ *— единственный предполный класс в* $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{\infty}$.

Доказательство. Пусть $F \in (\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{\infty}) \setminus \mathbf{D}_{01}^{(1)}$. Тогда сверхфункция F содержит хотя бы две компоненты. По предыдущей лемме $D_{\infty} \in [F]$. По лемме 9 в силу того, что $D_{01} = [x \vee y]$, сверхфункция D_{∞} порождает класс $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{\infty}$. Таким образом, $[F] = \mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{\infty}$. $\square$

Утверждение 12. $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{2}$, $\mathbf{U}_{01}$ *— все предполные классы в* $\mathbf{D}_{01}$.

Доказательство. Пусть $H \in \mathbf{D}_{01} \setminus \mathbf{U}_{01}$, $F \in \mathbf{D}_{01} \setminus \mathbf{QO}^{2}$. U_{01} — единственный предполный класс в D_{01}, и он содержит селекторы. Поэтому по лемме 5 $\mathbf{D}_{01}^{(1)} \subseteq [H]$. Покажем, что $E_2 \in [\mathbf{D}_{01}^{(1)}, F]$.

Пусть $F = \{f_1, \ldots, f_l\}$. Так как $F \in \mathbf{D}_{01} \setminus \mathbf{QO}^{2}$, то F содержит по крайней мере две компоненты. $F \notin \mathbf{QO}^{2}$, поэтому найдутся два набора $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$, такие что $f_i(\tilde{a}_1) = 0$, $f_j(\tilde{a}_2) = 0$ для некоторых i и j (возможно, $i = j$), и у этих наборов нет общей нулевой компоненты. Без ограничения общности

$$\begin{gathered}
\tilde{a}_1 = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 1, \ldots, 1), \\
\tilde{a}_2 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k_2}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_3}),
\end{gathered}$$

причем $k_1, k_2 \neq 0$. Положим

$$G(x,y) = F(\underbrace{x,\dots,x}_{k_1}, \underbrace{y,\dots,y}_{k_2}, \underbrace{x\vee y,\dots,x\vee y}_{k_3}).$$

Пусть компоненты $g_i(x,y)$ и $g_j(x,y)$ сверхфункции G получены из f_i и f_j. Тогда эти функции принимают следующие значения:

$$\begin{array}{ll} g_i(0,0)=0, & g_j(0,0)=0,\\ g_i(0,1)=0, & g_j(0,1)=c,\\ g_i(1,0)=b, & g_j(1,0)=0,\\ g_i(1,1)=1, & g_j(1,1)=1, \end{array}$$

где $b, c \in \{0,1\}$. Ясно, что $g_i(x,y)$ и $g_j(x,y)$ — это разные компоненты G, иначе эта компонента была бы конъюнкцией, что невозможно, так как $F \in \mathbf{D}$. Тогда имеется единственный вариант: $g_i(x,y) = x$, $g_j(x,y) = y$.

Получили, что $E_2(x,y) = \{x,y\} \subseteq G(x,y)$, а значит, $E_2(x,y) \in [\mathbf{D}_{01}^{(1)}, F]$. По лемме 3 $[\mathbf{D}_{01}^{(1)}, E_2] = \mathbf{D}_{01}$. Следовательно, $\mathbf{D}_{01} = [F, H]$. □

Введем обозначения для следующих сверхфункций.

$D_m(x_1,\dots,x_m)$, $m \geqslant 2$ — сверхфункция, состоящая из всевозможных дизъюнкций ровно $m-1$ переменных:

$$D_m(x_1,\dots,x_m) = \bigcup_{i=1}^{m} \{\bigvee_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} x_j\}.$$

$$D_\infty^l(x,x_1,\dots,x_l) = \{x, x\vee x_1,\dots,x\vee x_l\},\ \ l \geqslant 2.$$

Свойства сверхфункций D_m и D_∞^l

1. $D_m \in \mathbf{QO}^{m-1}$ и $D_m \notin \mathbf{QO}^m$. Действительно, рассмотрим конъюнкцию всех компонент D_m:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} (\bigvee_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} x_j) = \bigvee_{1\leqslant i<j\leqslant m} x_i x_j = d_m(x_1,\dots,x_m).$$

   Легко убедиться (см. [3], [4]), что $d_m(x_1,\dots,x_m) \in O^{m-1} \setminus O^m$.

2. $D_2(x_1,x_2) = \{x_1,x_2\} = E_2(x_1,x_2)$ — следует из определения D_2 .

3. $D_\infty(x,y) = D_m(y,x,\ldots,x)$ для любого $m \geqslant 3$.

4. $D^l_\infty(x,x_1,\ldots,x_l) \in [D_\infty]$ при всех $l \geqslant 2$. Действительно, легко видеть, что
$$\{x, x\vee x_1,\ldots,x\vee x_l\} \subseteq \{x,x\vee x_1\}\vee\{x,x\vee x_2\}\vee\ldots\vee\{x,x\vee x_l\}.$$

5. $D_{m+1} \in [D_m]$, $m \geqslant 3$. Действительно, рассмотрим следующую суперпозицию:
$$F(x_1,\ldots,x_{m+1}) = D^2_\infty(D_m,x_1,x_{m+1}) = \{D_m, D_m\vee x_1, D_m\vee x_{m+1}\}.$$
Среди компонент сверхфункции $D_m\vee x_1$ находится дизъюнкция $x_1\vee\ldots\vee x_m$, а $D_m\vee x_{m+1}$ состоит из дизъюнкций $x_{m+1}\vee\bigvee\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} x_j$, $j=1,\ldots,m$. Поэтому $D_{m+1}\subseteq F$, откуда в силу свойств 3 и 4 получаем $D_{m+1}\in[D_m]$.

Пусть $F(x_1,\ldots,x_n) = \{f_1,\ldots,f_l\} \notin \mathbf{QO}^\infty$, пусть $f = f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_l$. Из условия $F\notin\mathbf{QO}^\infty$ следует, что $f\notin O^\infty$. Это значит, что найдется $m\geqslant 2$, такое что $f\in O^{m-1}\setminus O^m$ (для $m=2$ $f\notin O^2$). Такое m будем обозначать через $m(F)$.

Лемма 11. *Пусть* $F(x_1,\ldots,x_n)=\{f_1,\ldots,f_l\}\in\mathbf{D}_{01}\setminus\mathbf{QO}^\infty$, $m(F)=m$. *Тогда*

1) выполняются неравенства $m\leqslant n$, $m\leqslant l$;

2) перестановкой переменных и компонент сверхфункции F можно получить сверхфункцию $G(x_1,\ldots,x_n)=\{g_1,\ldots,g_l\}$, *такую что*
$$g_i(x_1,\ldots,x_n) = (\bigvee_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} x_j)\vee b^i_{m+1}x_{m+1}\vee\ldots\vee b^i_n x_n,\quad i=1,\ldots,m,$$
где $b^t_j\in\{0,1\}$, *причем* $\overline{b}^1_{m+i}\vee\overline{b}^2_{m+i}\ldots\vee\overline{b}^m_{m+i}=1$, $i=1,\ldots,n-m$.

Доказательство. Пусть $f=f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_l$. По условию $f\in O^{m-1}\setminus O^m$ (для $m=2$ $f\notin O^2$). Значит, найдутся m наборов, на которых f принимает значение 0 и которые не имеют общей нулевой компоненты, и никакое множество из s наборов, где $s<m$, этим свойством не обладает. Обозначим это множество наборов через $\mathcal{A}=\{\tilde a^1,\ldots,\tilde a^m\}$. Будем считать, что $\tilde a^i=(a^i_1,\ldots,a^i_n)$. Легко видеть, что $m\leqslant n$.

Заметим, что все наборы $\tilde{a}^1, \ldots, \tilde{a}^m$ можно считать верхними нулями функции f. В самом деле, если каждый набор $\tilde{a}^i$ заменить верхним нулем $\tilde{c}^i$, такой что $\tilde{c}^i \geqslant \tilde{a}^i$, то легко видеть, что наборы $\tilde{c}^1, \ldots, \tilde{c}^m$ различны (в силу минимальности $|\mathcal{A}|$) и не имеют общей нулевой компоненты.

Покажем, что любая компонента сверхфункции F может принимать значение 0 не более чем на одном наборе из множества $\mathcal{A}$. Действительно, пусть для некоторых $\tilde{a}^i$ и $\tilde{a}^k$ из $\mathcal{A}$ и некоторой компоненты $f_j \in F$ выполняется равенство $f_j(\tilde{a}^i) = f_j(\tilde{a}^k) = 0$. Так как все компоненты функции F являются дизъюнкциями, то получаем:

$$f(a_1^i \vee a_1^k, \ldots, a_n^i \vee a_n^k) \leqslant f_j(a_1^i \vee a_1^k, \ldots, a_n^i \vee a_n^k) = 0,$$

что противоречит тому, что $\tilde{a}^i$ и $\tilde{a}^k$ — верхние нули функции f. Из доказанного следует, что $m \leqslant l$.

Заметим, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}$$

не содержит нулевых столбцов, но после удаления любой строки такой столбец появляется. Поэтому можно так переставить столбцы, что образуется матрица вида

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{m+1}^1 & \ldots & b_n^1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{m+1}^2 & \ldots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{m+1}^m & \ldots & b_n^m \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $G(x_1, \ldots, x_n)$ сверхфункцию, которая получается из F в результате соответствующей перестановки переменных. Компоненты G будем обозначать через $\{g_1, \ldots, g_l\}$, положим $g = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_l$. Через $\tilde{b}^s$ будем обозначать s-ю строку матрицы B. Легко видеть, что $\tilde{b}^1, \ldots, \tilde{b}^m$ — это верхние нули функции g.

В матрице B нет нулевых столбцов, значит, $b_{m+i}^1 \vee \ldots \vee b_{m+i}^m = 1$. Для каждой строки $\tilde{b}^i$ найдется хотя бы одна компонента $g_j \in G$, принимающая значение 0 на этой строке. Перенумеруем компоненты G таким образом, чтобы $g_i(\tilde{b}^i) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, а остальные компоненты занумеруем произвольным образом от $m+1$ до l.

Рассмотрим функцию g_1. На наборе $\tilde{b}^1 = (1, 0, \ldots, 0, b_{m+1}^1, \ldots, b_n^1)$ она принимает значение 0. В силу того что $\tilde{b}^1$ — верхний ноль для g, этот набор будет верхним нулем и для g_1. Так как $g_1 \in D_{01}$, то у нее есть единственный верхний ноль и функция однозначно восстанавливается по этому набору:

$$g_1 = x_2 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_m \vee \overline{b}^1_{m+1} x_{m+1} \vee \ldots \vee \overline{b}^1_n x_n.$$

Аналогичным образом получаем для каждого $i = 1, \ldots, m$:

$$g_i = (\bigvee_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} x_j) \vee \overline{b}^i_{m+1} x_{m+1} \vee \ldots \vee \overline{b}^i_n x_n,$$

что и требовалось. □

Лемма 12. *Пусть* $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{D}_{01} \setminus \mathbf{QO}^\infty$ *и пусть* $m(F) > 2$. *Тогда* $D_{m(F)} \in [F]$.

Доказательство. Пусть $F = \{f_1, \ldots, f_l\}$. Пусть $m(F) = m$. Из условия следует, что $n \geqslant 2$. По лемме 11 можем считать, что для $i = 1, \ldots, m$ компонента f_i сверхфункции F имеет вид

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = (\bigvee_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} x_j) \vee b^i_{m+1} x_{m+1} \vee \ldots \vee b^i_n x_n,$$

где $b^t_j \in \{0, 1\}$ и $\overline{b}^1_{m+i} \vee \overline{b}^2_{m+i} \ldots \vee \overline{b}^m_{m+i} = 1$, $i = 1, \ldots, m$.

По условию $m > 2$, поэтому каждая из первых m компонент F является дизъюнкцией не менее чем двух переменных. Таким образом, $x \vee y \in [F]$. Рассмотрим следующие дизъюнкции:

$$t_i(x_1, \ldots, x_m) = \overline{b}^1_{m+i} x_1 \vee \overline{b}^2_{m+i} x_2 \vee \ldots \vee \overline{b}^m_{m+i} x_m, \ \ i = 1, \ldots, n-m.$$

Каждая из них не тождественный ноль, так как $\overline{b}^1_{m+i} \vee \overline{b}^2_{m+i} \vee \ldots \vee \overline{b}^m_{m+i} = 1$. Поэтому $t_i \in [x \vee y]$. Теперь рассмотрим сверхфункцию

$$H(x_1, \ldots, x_m) = F(x_1, \ldots, x_m, t_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, t_{n-m}(x_1, \ldots, x_m)).$$

Пусть компонента h_i получилась в результате суперпозиции с f_i:

$$\begin{aligned} h_i(x_1, \ldots, x_m) &= f_i(x_1, \ldots, x_m, t_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, t_{n-m}(x_1, \ldots, x_m)) = \\ &= (\bigvee_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} x_j) \vee b^i_{m+1} t_1(x_1, \ldots, x_m) \vee \ldots \vee b^i_n t_{n-m}(x_1, \ldots, x_m). \end{aligned}$$

После подстановки вместо t_i соответствующих функций, раскрытия скобок и перегруппировки переменных получим

$$h_i(x_1, \ldots, x_m) = (\bigvee_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} x_j) \vee b^i_{m+1}\overline{b}^i_{m+1}x_i \vee \ldots \vee b^i_n\overline{b}^i_n x_i = \bigvee_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} x_j.$$

Перебирая все h_i, $i = 1, \ldots, m$, получим все компоненты сверхфункции D_m. □

Лемма 13. *Пусть* $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{D}_{01} \setminus \mathbf{QO}^{\infty}$. *Тогда* $F \in [D_{m(F)}, D_\infty]$.

Доказательство. Пусть $F = \{f_1, \ldots, f_l\}$. Пусть $m(F) = 2$. Тогда $D_2 = E_2$, $\{x \vee y\} \in [D_\infty]$ и по лемме 3 $[E_2, \{x \vee y\}] = \mathbf{D}_{01}$. Таким образом, в случае $m(F) = 2$ утверждение леммы доказано.

Пусть теперь $m(F) > 2$. По лемме 11 можем считать, что для каждого $i = 1, \ldots, m(F)$ компонента f_i сверхфункции F имеет вид

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = (\bigvee_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m(F)} x_j) \vee g_i(x_{m(F)+1}, \ldots, x_n),$$

где $g_i(x_{m(F)+1}, \ldots, x_n) = b^i_{m(F)+1}x_{m(F)+1} \vee \ldots \vee b^i_n x_n$, все $b^t_j \in \{0, 1\}$ и $\overline{b}^1_{m(F)+i} \vee \ldots \vee \overline{b}^{m(F)}_{m(F)+i} = 1$. Заметим, что если g_i не тождественно равна 0, то $g_i \in [D_\infty]$. Также заметим, что $m(F) \leqslant l$ (см. доказательство леммы 11). Далее рассмотрим два случая.

1. Пусть $m(F) = l$.

Положим $F_0 = D_{m(F)}$, для $i = 1, \ldots, m(F)$ положим $F_i = D_\infty(F_{i-1}, g_i)$, если $g_i \not\equiv 0$, и $F_i = F_{i-1}$ иначе. Тогда сверхфункция F_i содержит в качестве своих компонент функции $f_1, \ldots, f_i$. Поэтому $F \subseteq F_{m(F)}$.

2. Пусть $m(F) < l$.

Докажем утверждение индукцией по числу компонент сверхфункции F. Базу индукции составляет случай выше.

Индуктивный переход. Предположим, что для любой сверхфункции $G \in \mathbf{D}_{01} \setminus \mathbf{QO}^{\infty}$, имеющей r компонент, где $r < l$, доказано, что $G \in [D_{m(G)}, D_\infty]$, и рассмотрим сверхфункцию $F = \{f_1, \ldots, f_l\}$, $l > m(F)$.

Рассмотрим $m(F)$ сверхфункций:

$$H_i = \bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{l} \{f_j\}, \quad i = 1, \ldots, m(F).$$

Если для какого-то i $H_i \in \mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^\infty$, то по лемме 9 и свойству 3 сверхфункций D_m $H_i \in [D_\infty] \subset [D_{m(F)}]$.

Пусть теперь $H_i \in \mathbf{D}_{01} \setminus \mathbf{QO}^\infty$. Тогда по индуктивному предположению $H_i \in [D_{m(H_i)}, D_\infty]$. Заметим, что $m(H_i) \geqslant m(F)$. По свойству 5 $[D_{m(H_i)}, D_\infty] \subseteq [D_{m(F)}, D_\infty]$. Таким образом, $H_i \in [D_{m(F)}, D_\infty]$.

Покажем, что функция f_j, $j = 1, \ldots, l$, является компонентой сверхфункции $D_{m(F)}(H_1, \ldots, H_{m(F)})$. Для $j = 1, \ldots, m(F)$

$$D_{m(F)}(H_1, \ldots, H_{m(F)}) \supset H_1 \vee \ldots \vee H_{j-1} \vee H_{j+1} \vee \ldots \vee H_{m(F)} \supset f_j \vee \ldots \vee f_j = f_j.$$

Для $j = m(F) + 1, \ldots, l$

$$D_{m(F)}(H_1, \ldots, H_{m(F)}) \supset H_1 \vee H_2 \ldots \vee H_{m(F)-1} \supset f_j \vee \ldots \vee f_j = f_j.$$

Таким образом, $\{f_1, \ldots, f_l\} \subset D_{m(F)}(H_1, \ldots, H_{m(F)})$. Индуктивный переход установлен. Лемма доказана. □

Следствие. *Для каждого* $m = 2, 3, \ldots$ $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^m = [D_{m+1}]$.

Доказательство. Пусть $F \in \mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^m$, $m \geqslant 2$. Покажем, что $F \in [D_{m+1}]$. Если $F \in \mathbf{QO}^\infty$, то по лемме 9 $F \in [D_\infty]$, и $D_\infty \in [D_{m+1}]$ по свойству 3 сверхфункций D_m. Если $F \notin \mathbf{QO}^\infty$, то $m(F) \geqslant m + 1$ и по лемме 13 $F \in [D_m(F), D_\infty]$. По свойствам 3 и 5 $[D_m(F), D_\infty] \in [D_{m+1}]$. Значит, $F \in [D_{m+1}]$. □

Утверждение 13. *В* $\mathbf{D}_{01}$ *содержится счетная цепочка вложенных замкнутых классов вида* $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^m$*,* $m = 2, 3, \ldots, \infty$*, причем* $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^k$ *— единственный предполный класс в* $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{k-1}$ *для* $k = 3, 4, \ldots$ *Других замкнутых классов в интервале* $\mathcal{I}(\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^\infty, \mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^2)$ *нет.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^m \subsetneq \mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{m-1}$ для каждого $m = 3, 4, \ldots$.

Пусть $F \in \left(\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{m-1}\right) \setminus \mathbf{QO}^m$, $m > 2$. По лемме 12 $D_{m(F)} \in [F]$, причем $m(F) = m$. По следствию из леммы 13 $[D_{m(F)}] = \mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{m-1}$. Значит, $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^m$ — единственный предполный класс в $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{m-1}$.

Покажем, что в интервале $[\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^\infty, \mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^2]$ нет других замкнутых классов. Пусть A — замкнутый класс сверхфункций, такой что $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^\infty \subset A \subset \mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^2$. В классе A найдутся сверхфункции, не лежащие в $\mathbf{QO}^\infty$. Выберем такую сверхфункцию F, для которой $m(F)$ минимальное. По доказанному выше $[F] = \mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{m(F)-1}$, следовательно, $A = \mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^{m(F)-1}$. □

Интервал $\mathcal{I}(\mathbf{D}_0^{(1)}, \mathbf{D}_0)$

Утверждение 14. $\mathrm{D}_0^{(1)}$, D_{01}, U_0 — *все предполные классы в* D_0.

Доказательство. Так как классы D_{01} и U_0 — это все предполные классы в D_0, то по следствию из леммы 5 достаточно доказать, что $\mathbf{D}_0^{(1)}$ — предполный класс в $\mathbf{D}_0$.

Пусть $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{D}_0 \setminus \mathbf{D}_0^{(1)}$. Сверхфункция F содержит хотя бы две компоненты. Пусть $F = \{f_1, f_2\}$. Так как $f_1 \neq f_2$, то найдется набор $\tilde{a}$, на котором они принимают разные значения. Без ограничения общности $\tilde{a} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-k})$, $f_1(\tilde{a}) = 0$, $f_2(\tilde{a}) = 1$. Заметим, что $k \neq n$ в силу того, что компоненты F лежат в T_0.

Подставим в сверхфункцию F вместо первых k переменных нули, вместо остальных — x. Получим сверхфункцию $G(x) = \{0, x\}$. Тогда

$$G(x) \vee G(y) = \{0, x\} \vee \{0, y\} = \{0, x, y, x \vee y\} \supset \{x, y\} = E_2(x, y).$$

Получили, что $E_2 \in [\mathbf{D}_0^{(1)}, F]$, а значит, по лемме 3, $[\mathbf{D}_0^{(1)}, F] = \mathbf{D}_0$, что и требовалось. $\square$

Интервал $\mathcal{I}(\mathbf{D}_1^{(1)}, \mathbf{D}_1)$

Обозначим через $\mathbf{D}_1^*$ множество всех однокомпонентных сверхфункций из $\mathbf{D}_1$ и двухкомпонентных сверхфункций вида $\{x_1 \vee \ldots \vee x_n, 1\}$, $n \geqslant 1$.

Утверждение 15. $\mathbf{D}_1^*$ — *замкнутый класс сверхфункций.*

Доказательство. Пусть $F_0, F_1, \ldots, F_n \in \mathbf{D}_1^*$. Рассмотрим суперпозицию:

$$F = F_0(F_1, \ldots, F_n) = \bigcup_{f_i \in F_i} f_0(f_1, \ldots, f_n).$$

Объединение в правой части можно разбить на два множества следующим образом:

$$\bigcup_{f_i \in F_i} f_0(f_1, \ldots, f_n) = \left\{ \bigcup_{\forall i \ f_i \neq 1} f_0(f_1, \ldots, f_n) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{\exists i \ f_i = 1} f_0(f_1, \ldots, f_n) \right\}.$$

Остается заметить, что выбрать все $f_i \neq 1$ можно не более чем одним способом, а все суперпозиции во втором множестве дадут константу 1.

Таким образом, получаем либо однокомпонентную, либо двухкомпонентную сверхфункцию, содержащую в качестве компоненты единицу. Значит, $F \in \mathbf{D}_1^*$. □

Утверждение 16. $\mathbf{D}_1^* = [\{x \vee y, 1\}]$.

Доказательство. Следует из равенства

$$\{x_1 \vee \ldots \vee x_n, 1\} = \{x_1 \vee x_1, 1\} \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n.$$

□

Положим

$$\mathbf{U}_1^\# = \mathbf{D}_1^* \cap \mathbf{U} = \{\{1\}, \{x_1\}, \{x_1, 1\}, \{x_2\}, \{x_2, 1\}, \ldots\}.$$

Утверждение 17. $\mathbf{D}_1^{(1)}$*,* $\mathbf{U}_1^\#$ *— предполные классы в* $\mathbf{D}_1^*$*, и других нет.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathbf{D}_1^* \setminus \mathbf{U}_1^\#$, $F \in \mathbf{D}_1^* \setminus \mathbf{D}_1^{(1)}$. Сверхфункция G содержит хотя бы одну компоненту с не менее чем двумя существенными переменными, отождествлением переменных из нее получим $x \vee y$.

Сверхфункция F имеет вид $\{x_1 \vee \ldots \vee x_n, 1\}$, $n \geqslant 1$. Тогда

$$F(x, \ldots, x) \vee y = \{x, 1\} \vee y = \{x \vee y, 1\}.$$

Получили полную систему в $\mathbf{D}_1^*$. □

Утверждение 18. $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^\infty$*,* $\mathbf{D}_1^*$ *— предполные классы в* $\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^\infty$*, и других нет.*

Доказательство. Пусть $G \in (\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^\infty) \setminus \mathbf{D}_{01}$, $F \in (\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^\infty) \setminus \mathbf{D}_1^*$.

Сверхфункция G содержит компоненту $g \notin T_0$. Тогда $g(0, \ldots, 0) = 1$ и $g(x, \ldots, x) = 1$.

Сверхфункция F содержит хотя бы две компоненты f_1 и f_2, обе из которых не равны тождественно 1. Тогда $\{f_1, f_2\} \in \mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^\infty$ и по лемме 10 в замыкании сверхфункции $\{f_1, f_2\}$ содержится сверхфункция $D_\infty(x, y) = \{x, x \vee y\}$. А по лемме 9, в силу того что $D_1 = [x \vee y, 1]$, получаем $[D_\infty, 1] = \mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^\infty$. Следовательно, $[F, G] = \mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^\infty$. □

Лемма 14. *Пусть* $F \in \mathbf{D}_1 \setminus \mathbf{QO}^\infty$*,* $m(F) > 2$*. Тогда* $D_{m(F)} \in [F]$.

Доказательство. Очевидно, что F содержит по крайней мере две компоненты. Если есть компонента, тождественно равная константе 1, то положим $\widehat{F} = F \setminus 1$, если нет, то $\widehat{F} = F$. Легко видеть, что

$$F \in \mathbf{D}_1 \setminus \mathbf{QO}^\infty \Leftrightarrow \widehat{F} \in \mathbf{D}_{01} \setminus \mathbf{QO}^\infty,$$

причем $m(F) = m(\widehat{F})$. Поэтому утверждение следует из леммы 12. □

Утверждение 19. *Пусть* $F \in \mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^m$, $m = 2, 3, \ldots$, *пусть* F_1 *получается из* F *добавлением константы* 1 *в качестве компоненты. Тогда* $F_1 \in [1, D_\infty, F]$.

Доказательство. Следует из равенства $F_1 = D_\infty(F, 1)$. □

Лемма 15. *Пусть* $F \in \mathbf{D}_1 \setminus \mathbf{QO}^m$, *тогда* $F \in [1, D_{m(F)}, D_\infty]$.

Доказательство. Следует из утверждения 19 и леммы 13. □

Следствие. *Для* $m = 2, 3, \ldots$ $\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^m = [D_{m+1}, 1]$.

Доказательство. Следует из утверждения 19 и следствия из леммы 13. □

Утверждение 20. *Для* $k = 2, 3, \ldots$ *классы* $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^k$, $\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^{k+1}$ — *все предполные в* $\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^k$. *В* $\mathbf{D}_1$ *содержится счетная цепочка вложенных замкнутых классов вида* $\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^m$, $m = 2, 3, \ldots, \infty$. *Других замкнутых классов в интервале* $\mathcal{I}(\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^\infty, \mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^2)$ *нет.*

Доказательство. Пусть $F \in (\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^m) \setminus \mathbf{D}_{01}$, $G \in (\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^m) \setminus \mathbf{QO}^{m+1}$.

Заметим, что сверхфункция F содержит константу 1 в качестве компоненты. Рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве утверждения 13, с использованием лемм 14, 15 и следствия из леммы 15 нетрудно показать, что $[F, G] = \mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^m$, то есть $\mathbf{D}_{01} \cap \mathbf{QO}^m$ и $\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^{m+1}$ — это все предполные классы в $\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^m$ и что других замкнутых классов сверхфункций в указанном интервале нет. □

Утверждение 21. $\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{QO}^2$, $\mathbf{D}_{01}$, $\mathbf{U}_1$ — *все предполные классы в* $\mathbf{D}_1$.

Доказательство. Пусть $F_1 \in \mathbf{D}_1 \setminus \mathbf{D}_{01}$, $F_2 \in \mathbf{D}_1 \setminus \mathbf{U}_1$, $F \in \mathbf{D}_1 \setminus \mathbf{QO}^2$.

D_{01}, U_1 — все предполные классы в D_1. Поэтому по лемме 5 классы $\mathbf{D}_{01}$, $\mathbf{U}_1$ — предполные в $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_1^{(1)} \subseteq [F_1, F_2]$.

Так же, как в доказательстве утверждения 12, можно показать, что $E_2 \in [\mathbf{D}_1^{(1)}, F]$. Отсюда в силу леммы 3 следует, что $[F, F_1, F_2] = \mathbf{D}_1$. □

Интервал $\mathcal{I}(\mathrm{D}^{(1)}, \mathrm{D})$

Обозначим через $\mathbf{D}^*$ множество всех однокомпонентных сверхфункций из $\mathbf{D}$ и двухкомпонентных сверхфункций вида $\{x_1 \vee \ldots \vee x_n, 1\}$ и $\{0, 1\}$.

Утверждение 22. $\mathbf{D}^*$ — *замкнутый класс сверхфункций.*

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 15. □

Утверждение 23. $\mathbf{D}^* = [\{x \vee y, 1\}, \{0\}]$.

Доказательство. Следует из соотношений

$$\{0,1\} = \{0 \vee 0, 1\}, \quad \{x_1 \vee \ldots \vee x_n, 1\} = \{x_1 \vee x_1, 1\} \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n.$$

□

Положим

$$\mathbf{MU}_1^{\#} = \mathbf{D}^* \cap \mathbf{U} = \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{x_1\}, \{x_1, 1\}, \{x_2\}, \{x_2, 1\}, \ldots\}.$$

Утверждение 24. $\mathbf{D}^{(1)}$*,* $\mathbf{MU}_1^{\#}$*,* $\mathbf{D}_1^*$ *— предполные классы в* $\mathbf{D}^*$*, и других нет.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathbf{D}^* \setminus \mathbf{MU}_1^{\#}$, $F \in \mathbf{D}^* \setminus \mathbf{D}^{(1)}$, $F_1 \in \mathbf{D}^* \setminus \mathbf{D}_1^*$.

Сверхфункция G содержит компоненту с не менее чем двумя существенными переменными, т.е. $x_1 \vee \ldots \vee x_m$, $m \geqslant 2$. Отождествлением переменных получим $x \vee y$.

Сверхфункция F_1 содержит константу 0 в качестве компоненты.

Сверхфункция F имеет вид $\{x_1 \vee \ldots \vee x_n, 1\}$, $n \geqslant 0$ (если $n = 0$, то $F = \{0, 1\}$). Рассмотрим суперпозицию

$$x \vee y \vee F(0, \ldots, 0) = x \vee y \vee \{0, 1\} = \{x \vee y, 1\}.$$

Получили, что $\{\{x \vee y, 1\}, \{0\}\} \in [G, F, F_1]$. Осталось заметить, что $[\{x \vee y, 1\}, \{0\}] = \mathbf{D}^*$ по предыдущему утверждению. □

Утверждение 25. $\mathbf{D}^*$*,* $\mathbf{D}_1$*,* $\mathbf{D}_0$*,* $\mathbf{MU}$ *— предполные классы в* $\mathbf{D}$*, и других нет.*

Доказательство. Пусть $F \in \mathbf{D} \backslash \mathbf{D}^*$, $F_1 \in \mathbf{D} \backslash \mathbf{D}_0$, $F_2 \in \mathbf{D} \backslash \mathbf{MU}$, $F_3 \in \mathbf{D} \backslash \mathbf{D}_1$.

Классы D_1, MU, D_0 — это все предполные классы в D, поэтому по лемме 5 классы $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{MU}$, $\mathbf{D}_0$ — предполные в $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}^{(1)} \subseteq [F_1, F_2, F_3]$.

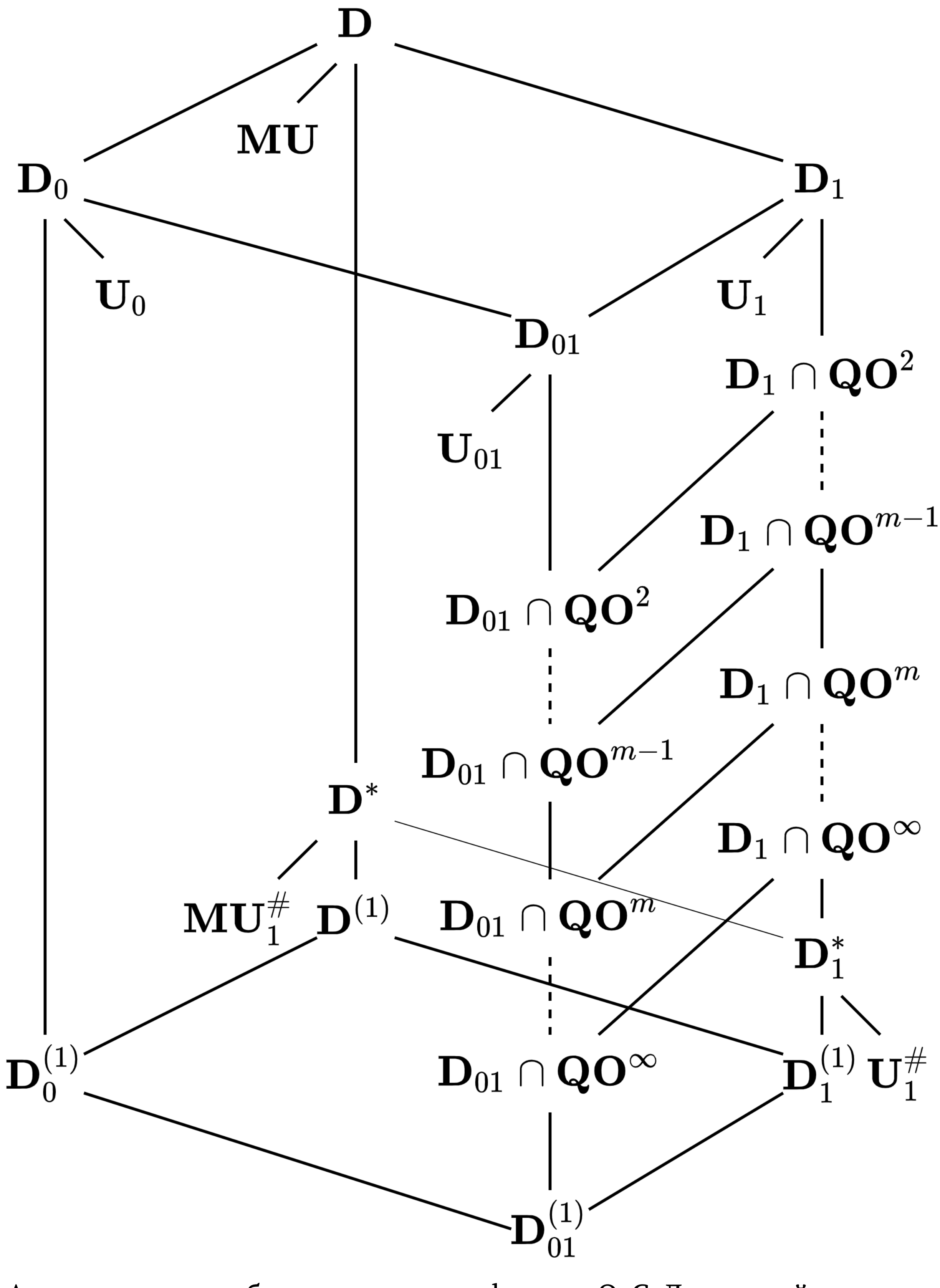
Покажем, что $E_2 \in [\mathbf{D}^{(1)}, F]$. Сверхфункция $F(x_1, \ldots, x_n)$ содержит хотя бы две компоненты, обе из которых не равны тождественно 1, а поэтому на нулевом наборе равны нулю (так как это дизъюнкции). Пусть $F = \{f_1, f_2\}$. Без ограничения общности будем считать, что $f_1(\tilde{a}) \neq f_2(\tilde{a})$, где $\tilde{a} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-k})$.

Подставим в сверхфункцию F вместо первых k переменных нули, вместо остальных — x. Получим сверхфункцию $G(x) = \{0, x\}$. Тогда

$$G(x) \vee G(y) = \{0, x\} \vee \{0, y\} = \{0, x, y, x \vee y\} \supset E_2(x, y).$$

Значит, $[\mathbf{D}^{(1)}, E_2] \subseteq [\mathbf{D}^{(1)}, F] \subseteq [F, F_1, F_2, F_3]$. По лемме 3 $[\mathbf{D}^{(1)}, E_2] = \mathbf{D}$. Таким образом, $\mathbf{D} = [F, F_1, F_2, F_3]$. □

Результаты этого параграфа позволяют построить решетку подклассов сверхфункций, лежащих в D.



Автор выражает благодарность к. ф.-м. н. О. С. Дудаковой за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

Литература

1. *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. 43, № 3. P. 163–185.

2. *Post E. L.* The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press. 1941. 5.

3. *Марченков С. С., Угольников А. Б.* Замкнутые классы булевых функций. М.: Инст. Прикл. Матем. им. М. В. Келдыша, 1990. 148 с.

4. *Марченков С. С.* Основы теории булевых функций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 136 с.

5. *Тарасов В. В.* Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 30. С. 319–325.

6. *Machida H.* Hyperclones on a two-element set // Mult.-Valued Log. 8 (4) (2002). P. 495–501.

7. *Čolić Oravec J., Machida H., Pantović J., Vojvodić G.* From Clones to Hyperclones // Zbornik radova 18 (26) (2015). Selected Topics in Logic in Computer Science. P. 111–144.