



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Стенина Т.В., [Елизарова Т.Г.](#),  
Крапошин М.В.

Регуляризованные  
уравнения гидродинамики в  
задаче моделирования  
дискового насоса и их  
реализация в рамках  
программного комплекса  
OpenFOAM

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Стенина Т.В., Елизарова Т.Г., Крапошин М.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче моделирования дискового насоса и их реализация в рамках программного комплекса OpenFOAM // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 66. 30 с. <http://doi.org/10.20948/prepr-2020-66>  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-66>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**Т.В. Стенина, Т.Г. Елизарова, М.В. Крапошин**

**Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче  
моделирования дискового насоса и их реализация  
в рамках программного комплекса OpenFOAM**

**Москва — 2020**

*Стенина Т.В., Елизарова Т.Г., Крапошин М.В.*

**Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче моделирования дискового насоса и их реализация в рамках программного комплекса OpenFOAM**

Создание эффективного насоса для поддержания кровообращения в сердце в соответствии с медицинскими показаниями является актуальной задачей. Работа посвящена численному моделированию такого насоса с целью оптимизации его параметров. Численный алгоритм основан на регуляризации исходных уравнений с применением метода конечных объемов. Расчеты проводятся в рамках открытого программного пакета OpenFOAM, установленного в ИСП РАН и ИПМ РАН. В результате проведенного вычислительного эксперимента получены гидродинамические поля скорости и давления в проточной части дискового насоса, исследованы зоны отрывов и зоны застоя, получены расходно-напорные характеристики прибора. Сделан прогноз значений вязких напряжений на поверхностях дискового насоса. Вычисленные значения вязких напряжений лежат в допустимом диапазоне, обеспечивающем безопасную работу системы поддержания кровообращения человека.

**Ключевые слова:** гидродинамика, регуляризованные уравнения, численное моделирование, дисковый насос, OpenFOAM, несжимаемые течения, тромбоз

*Stenina T.V., Elizarova T.G., Kraposhin M.V.*

**Regularized equations for disk pump simulation problems in OpenFOAM implementation.**

Creating an effective pump that is able to maintain blood circulation in a heart with appropriate medical indications is undoubtedly a crucial task. This work is devoted to a pump numerical simulations in order to optimize parameters. Equations of viscous incompressible fluid flow are used for this purpose. Implemented numerical algorithm is based on the regularization of the initial equations, which applies a finite volume method that avoids limiting procedures and includes them controlled numerical dissipation. Calculations are carried out within open software package OpenFOAM that is installed at ISP RAS and IPM RAS. Unsteady flow in the pump is studied. Hydrodynamic fields of velocity and pressure are obtained, separation zones and stagnation zones are studied, and flow-pressure characteristics and the estimations of viscous stresses on the surfaces of the pump are shown. The calculated values of viscous stresses lie in an acceptable range that ensures the safe operation of the human circulatory system.

**Key words:** hydrodynamics, regularized equations, numerical simulation, disk pump, OpenFOAM, incompressible flows, thrombosis

## Содержание

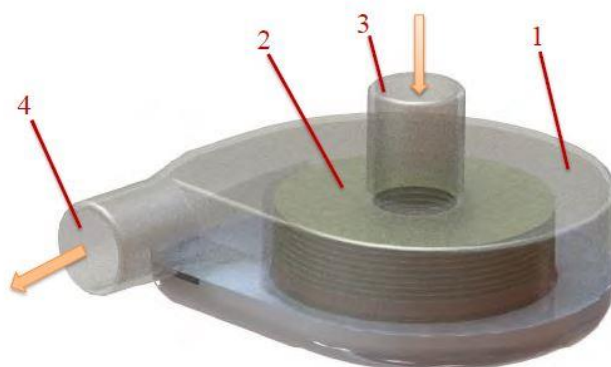
Введение .....	3
1. Система уравнений и ее регуляризованный вид .....	5
2. Численное решение задачи .....	8
3. Моделирование проточной части насоса с двумя дисками.....	10
4. Моделирование дискового насоса, состоящего из девяти дисков.....	17
5. Об оценках влияния реологических свойств крови на работу насоса .....	25
Заключение и основные результаты работы.....	27
Список литературы .....	29

### Введение

На основе десятилетнего опыта использования имплантируемых систем поддержания кровообращения в Новосибирском НИИ патологии кровообращения имени акад. Е.Н. Мешалкина, а также с учетом мирового опыта механической поддержки сердца к настоящему времени выполнен детальный анализ достоинств и недостатков существующих систем. Разработаны практические рекомендации и медико-биологические требования к вспомогательным насосам поддержки кровообращения. Практическое использование имплантируемых насосов выявило ряд острых проблем, таких как большие размеры и вес устройств и их высокая тромбогенность. Одним из основных недостатков существующих систем является также высокая стоимость.

Модели дискового насоса для поддержания работы сердца разрабатываются в ИТПМ СО РАН начиная с 2004 года. Имеются работающие стендовые модели и демонстрационные экземпляры. Требования к таким устройствам очень специфичны и заключаются в долговечности, малом весе, малом расходе энергии и малой стоимости по сравнению с зарубежными аналогами. Важным дополнительным требованием является обеспечение специфических характеристик прибора по расходу, давлению и величинам напряжения трения, которые должны соответствовать параметрам реального сердца. Превышение напряжением трения его характерных медицинских значений приводит к риску возникновения тромбов. Поэтому численное моделирование данного аппарата и выявление его оптимальных параметров является важной и актуальной практической задачей. На данный момент существуют

экспериментальные исследования, выполненные в ИТПМ СО РАН на образце, модель которого представлена на рис. 1.



*Рис. 1.* Модель дискового насоса для перекачивания крови

Опытный образец состоит из корпуса 1 и размещенного в нём ротора 2. При вращении ротора жидкость засасывается через входное отверстие 3 и, получив ускорение в роторе, выбрасывается через выходное отверстие 4.

Разработанный в ИТПМ СО РАН образец был исследован с помощью численных моделей, аналитических подходов и экспериментальных испытаний. Рассчитаны характеристики насоса: скорости потока, перепад давления, напряжения трения и гидравлический КПД насоса. Обнаружен локальный минимум давления в насосе, что приводит к снижению напорных характеристик и КПД насоса. Проведены оценки оптимальных параметров дискового насоса. Однако имеющиеся к настоящему времени результаты моделирования с использованием аналитических подходов и ограниченные попытки моделирования с применением коммерческих пакетов не позволяют разрешить многие проблемы, связанные с доработкой конструкции насоса.

Использование открытого программного комплекса OpenFOAM и включенного в него оригинального вычислительного ядра, основанного на регуляризованных уравнениях гидродинамики [1], позволит восполнить этот пробел. Прямое численное моделирование прибора даст возможность уточнить представление о механике движения жидкости в проточной части, исследовать уровень тромбообразования и оценить влияние нестационарности течения и реологии крови на характеристики прибора.

В работе представлено несколько этапов, связанных с построением математической модели дискового насоса, состоящего из двух дисков и девяти дисков, и их реализации в рамках комплекса OpenFOAM. Модели включают в себя задание пространственной области расчета, конфигурации которых соответствуют в упрощенном виде реальным параметрам дискового насоса, запись системы уравнений в лабораторной системе координат

совместно с граничными условиями. Показаны результаты расчетов для настройки численного алгоритма под поставленную задачу и его доработка для акцентирования анализа напряжений трения и специфических входных и выходных данных. Использовался открытый программный комплекс OpenFOAM, установленный в ИСП РАН и ИПМ РАН на многопроцессорной вычислительной системе K100.

## 1. Система уравнений и ее регуляризованный вид

Классическая система уравнений для решения задач гидродинамики – это система уравнений Навье-Стокса. Для изотермической вязкой несжимаемой жидкости в общепринятых обозначениях эта система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{u} = 0, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi_{NS}. \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Здесь  $\rho = \text{const} > 0$  – среднее значение плотности,  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$  – гидродинамическая скорость,  $p = p(\vec{x}, t)$  – давление, отсчитываемое от гидростатического,  $\Pi_{NS}$  – тензор вязких напряжений Навье-Стокса.

Существует много способов численного решения этой сложной нелинейной системы уравнений. Для численного моделирования гидродинамической задачи с использованием уравнений Навье-Стокса будем использовать метод с регуляризацией. Систему квазигидродинамических (КГид), или регуляризованных, уравнений ввел Юрий Владимирович Шеретов в 1993 г. Вид КГид системы уравнений приведен, например, в [Ошибка! Источник ссылки не найден.] и [Ошибка! Источник ссылки не найден.]:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{u} - \vec{w}) = 0, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div}((\vec{u} - \vec{w}) \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi. \end{cases} \quad (3)$$

(4)

Здесь  $\tau$  – параметр регуляризации. Тензор вязких напряжений  $\Pi$  и вектор  $\vec{w}$  вычисляются как

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho} [\rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p], \quad \Pi = \Pi_{NS} + \rho \vec{u} \otimes \vec{w}, \quad (5)$$

где

$$\Pi_{NS} = \eta \left[ (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T \right]. \quad (6)$$

Отметим, что  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости, связан с коэффициентом динамической вязкости  $\eta$  как

$$\eta = \nu \rho. \quad (7)$$

В [3] и многочисленных последующих работах автора, например, [4], показано, что КГид система тесно связана с исходной системой уравнений и, в частности, обладает следующими свойствами:

1. регуляризованная система имеет ряд общих точных решений, совпадающих с точными решениями исходной системы;
2. для стационарной задачи любое решение, являющееся точным решением задачи (1) – (2), является также и точным решением задачи (3) – (4);
3. при  $\tau = 0$  система (3) – (4) переходит в систему (1) – (2).

Регуляризованная, или КГид, система уравнений, позволяет строить новые эффективные методы численного решения задач гидродинамики, отличающиеся от методов, которые традиционно используются для численного решения системы уравнений Навье-Стокса, записанных в переменных скорость-давление. В частности, это касается вычисления давления, которое является неотъемлемой частью всей вычислительной процедуры в целом.

Система уравнений Навье-Стокса (1) - (2) включает в себя две искомые переменные – это скорость и давление, при этом уравнение для давления не выписано в явном виде. Уравнение для вычисления давления в форме уравнения Пуассона строится как следствие уравнения импульса (2) с учетом уравнения неразрывности (1). Действительно, преобразуем уравнение (2) к недивергентному виду с учетом уравнения (1):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nu \Delta \vec{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (8)$$

Вычисляя дивергенцию от уравнения (8) и учитывая справедливость уравнения (1), получаем уравнение Пуассона для определения давления:

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = -div[(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}]. \quad (9)$$

Способ получения уравнения Пуассона как следствие всей системы приводит к необходимости включения в численный алгоритм дополнительного этапа, на котором численное решение подправляется таким образом, чтобы для вычисленных скоростей с достаточной точностью выполнялось уравнение (1), которое является выражением закона сохранения массы в рассматриваемой задаче.

Граничные условия для системы (1) - (2) не включают в себя граничные условия для давления, которые необходимы для решения уравнения Пуассона. Граничные условия для давления выписываются на основе различных соображений либо вовсе не используются в численном расчете за счет записи разностных уравнений на разнесенных сетках. Указанные математические проблемы усложняют процедуру численного решения системы (1) - (2), делая ее многоэтапной.

Система регуляризованных уравнений (3) - (4) также определяет две искомые функции – скорость и давление, однако здесь уравнение Пуассона для давления непосредственно следует из уравнения (3) без привлечения уравнения импульса (4). Действительно, подставляя в (3) выражение для  $\vec{w}$  (5), сразу получаем уравнение для давления при постоянных значениях  $\rho$  и  $\tau$ :

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = -\text{div}[(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}] + \frac{1}{\tau} \text{div} \vec{u}. \quad (10)$$

Обратим внимание на то, что уравнение (10) отличается от уравнения (9) наличием слагаемого с коэффициентом  $1/\tau$  в правой части и не может быть сведено к уравнению (9) путем устремления  $\tau$  к нулю.

Граничные условия для давления в этом случае являются прямым следствием поставленных в задаче граничных условий для векторов скорости и потока массы  $\vec{j} = \vec{u} - \vec{w}$ . Например, для твердой непроницаемой стенки в качестве граничного условия можно поставить равенства нулю нормальной компоненты скорости  $u_n = 0$  и потока массы  $\vec{j} = 0$ . Из этих двух условий непосредственно следует граничное условие для давления в виде  $\vec{\nabla} p = 0$ .

Заметим, что выписанное выше условие на градиент давления часто используется при численном решении системы уравнений Навье-Стокса (1) - (2), хотя формально оно для этой системы не требуется.

Для проведения расчетов с применением регуляризованной системы необходимо подбирать параметр регуляризации  $\tau$ . Его величину удобно связать с характерным гидродинамическим временем задачи, которое обозначим  $\tau_0$ . Характерное время в задачах вынужденной конвекции



определяется через коэффициент кинематической вязкости  $\nu$  и характерную скорость  $\vec{u}$  в размерном виде как  $\tau_0 = \frac{\nu}{u^2}$  или в безразмерном виде с помощью числа Рейнольдса  $\tau_0 = \frac{1}{Re}$ .

Параметр  $\tau$  имеет порядок характерного времени  $\tau_0$ . Шаг интегрирования по времени, обеспечивающий условную устойчивость разностного алгоритма, не должен превосходить величину  $\tau$  и часто выбирается в виде  $\Delta t = \tau/2$ . При слишком больших значениях  $\tau$  слагаемые, пропорциональные этому коэффициенту (регуляризаторы), начинают доминировать, что приводит к разрушению численного решения. Если  $\tau$  слишком мало, то для устойчивости численного решения требуется неприемлемо малый шаг по времени. Как показывает опыт вычислений, начиная с некоторого значения уменьшение параметра  $\tau$  перестает влиять на точность численного решения. Поэтому выбор параметра регуляризации определяет устойчивость алгоритма, его точность и трудоемкость. Следовательно, в расчете необходимо подбирать оптимальное значение  $\tau$ .

Способ выбора параметра регуляризации для рассматриваемых задач изложен далее.

## 2. Численное решение задачи

Общая схема решения системы уравнений (3)-(4) представляет собой цикл, состоящий из двух основных этапов. На первом этапе, используя начальные условия, вычисляется скорость на следующем временном шаге по явной схеме согласно уравнению (4). На втором этапе по известным скоростям на новом слое вычисляется правая часть уравнения Пуассона (10), которое интегрируется до сходимости. Далее новое значение давления подставляется в уравнение (4) и повторяется первый этап.

Для интегрирования уравнения движения в OpenFOAM использован решатель QHDFoam. Используемая версия решателя расположена по ссылке [5].

Для решения системы уравнений для давления  $p$  в OpenFOAM был использован стандартный решатель PCG (метод сопряженных градиентов). Чтобы задать на каждой итерации новое начальное приближение, использовался решатель GAMG (многосеточный метод) со сглаживанием Гаусс-Зейделя. Данный метод описан в книге [6], а его применение и реализация в OpenFOAM представлено в работах [7] и [8]. Уравнение Пуассона интегрировалось с помощью метода сопряженных градиентов с точностью  $10^{-7}$ .

## 2.1. Выбор пространственной сетки

Известно, что качество пространственной сетки существенно влияет на качество получаемого решения, причем это влияние сводится не только к уточнению численного решения при увеличении числа узлов, но влияет и на устойчивость разностного алгоритма.

Опытным путем было установлено, что для эффективной работы КГид алгоритма требуется разрешение по сетке определенного пространственного масштаба, который тем меньше, чем больше число Рейнольдса. Если сеточное разрешение недостаточно, то в численном решении появляются незатухающие осцилляции. Устойчивость разностного алгоритма может нарушаться также в зонах расчетной области, где размеры соседних пространственных ячеек сильно отличаются.

В используемой версии программы, включенной в состав комплекса OpenFOAM, аккуратная аппроксимация  $\tau$  – слагаемых [9] выполнена только на ячейках правильной гексаэдральной формы. В ячейках неправильной формы (негексаэдральные, сильно вытянутые, перекошенные и пр.) эта аппроксимация не реализована, и КГид регуляризатор работает неэффективно, что приводит к вычислительной неустойчивости решения на таких ячейках. Поэтому было проведено выделение таких «неправильных» ячеек. Для аппроксимации конвективных слагаемых КГид уравнений в этих ячейках стеки использовалась более грубая, но при этом более устойчивая противопоточная схема. Общее число таких ячеек в описанных далее задачах не превышает 0.5%.

## 2.2. Ускорение расчета

Для течений с большими скоростями или малым коэффициентом вязкости характерное гидродинамическое время  $\tau_0$  оказывается достаточно малым, что влечет за собой необходимость использования в расчете малого шага по времени. Заметим, что для моделирования нестационарных или быстропеременных течений малый шаг по времени позволяет разрешить особенности нестационарного течения, поэтому его использование оправдано. Однако малые временные шаги увеличивают время расчета всей задачи в целом. Часто малые шаги по времени приходится использовать в начале расчета, когда задается разрывное начальное приближение. Например, такая ситуация возникает при задании начального условия в виде втекания потока в неподвижную среду.

Для устранения этой проблемы и ускорения расчета всей задачи в целом начальное условие задавалось с помощью серии последовательных приближений. Сначала выбиралось начальное приближение, которое

описывает ламинарное течение с числом  $Re$ , значительно меньшим, чем требуемое в поставленной задаче, и проводился расчет этой задачи с соответствующим достаточно большим значением коэффициента регуляризации  $\tau$  и шагом по времени. Далее полученное решение используется в качестве начального приближения для расчета с большим  $Re$ . С каждой итерацией значение  $Re$  увеличивается, пока не станет равным заданному. Заметим, что при этом шаг по времени сохранялся постоянным.

Значение числа  $Re$  можно варьировать с помощью изменения входной скорости или коэффициента кинематической вязкости среды. В приведенных далее расчетах оказалось удобным варьировать коэффициент вязкости.

### 3. Моделирование проточной части насоса с двумя дисками

Эта задача в упрощенной формулировке отражает характерные особенности задачи в полной постановке. Из-за сложности и трудоемкости полной задачи на представленном далее показательном тесте обрабатываются приемы, которые далее используются при численном моделировании сердечного насоса в реалистичной постановке.

#### 3.1. Геометрия и сетка в области между двумя дисками

В открытой интегрируемой платформе Salome была реализована модель проточной части насоса в виде области между двух дисков. Геометрия расчетной области приведена на рис. 2 и рис. 3. Модель представляет собой объем между двумя дисками, заключенный между двумя цилиндрическими поверхностями. Выделим несколько областей: проточная область между дисками; области вытекания и втекания жидкости (1 Exit) и (2 Inlet) соответственно, которые представлены на рис. 2; поверхности вращения дисков (3 Top) и (4 Bot), которые показаны на рис. 3.

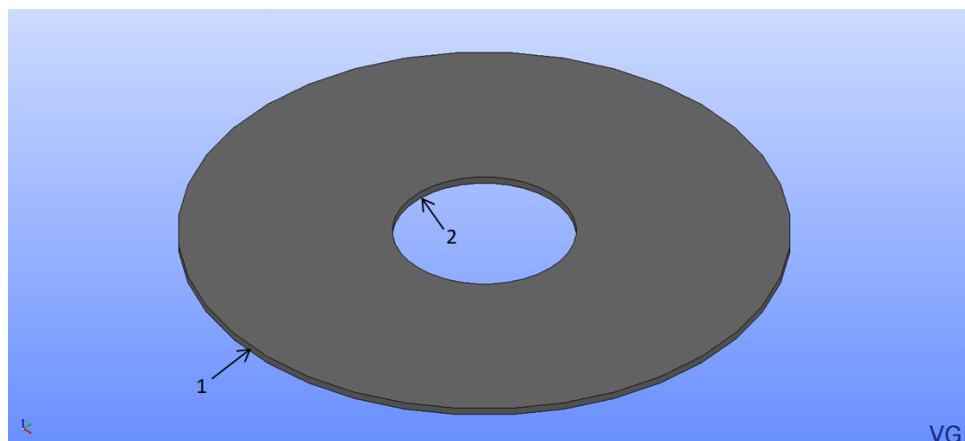


Рис. 2. Область зазора между двумя дисками, вид в объеме

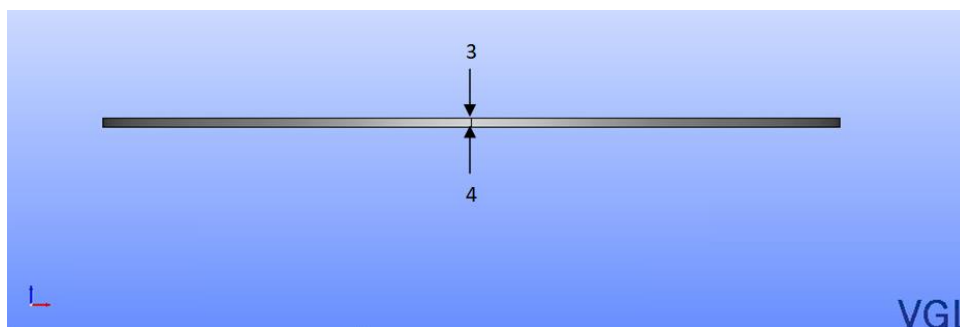


Рис. 3. Область зазора между двумя дисками, вид сбоку  
 1 – граница для вытекания (Exit), 2 – граница для втекания (Inlet),  
 3 – верхний диск (Top), 4 – нижний диск (Bot)

При попадании жидкости в область 2 за счет вязкого трения ей передается импульс от поверхностей дисков 3 и 4, движущихся с постоянной скоростью вращения  $\Omega$ . Поэтому жидкость закручивается, и при этом поток между дисков отбрасывается вследствие действия центробежных сил к цилиндрической границе 1, через которую жидкость покидает расчетную область.

Задача решается с применением регуляризованных уравнений гидродинамики (КГиД), которые выписаны в первом разделе.

Система уравнений (3) – (4) замыкается следующими граничными условиями: в области втекания жидкости 2 радиальная скорость  $u_r = const$ , которая рассчитывается из заданного объемного потока, и нормальная производная давления  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ ; в области вытекания жидкости 1 задаем полное давление  $p$  и условие на скорость  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ; на стенках 3 и 4 ставится условие непротекания, для этого задаем нормальную производную давления  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ , нормальную и касательную компоненты скорости, соответственно,  $u_n = 0$ ,  $u_\tau = \Omega \cdot r$ . Для полного описания модели необходимо определить начальные условия: жидкость находится в невозмущенном состоянии, следовательно, её скорости в начальный момент времени  $u = 0$ ; давление в начальный момент считаем постоянным  $p = 1$  Па.

### 3.2. Параметры расчетов

Пространственная сетка в расчетной области была построена с помощью автоматического генератора сетки пакета OpenFOAM – snappyHexMesh. Сетка представлена на рис. 4. Количество ячеек приблизительно равно  $3.4 \cdot 10^5$  с числом точек по радиусу  $r$ , высоте  $z$  и по углу  $\varphi$ :  $200 \times 17 \times 100$ .

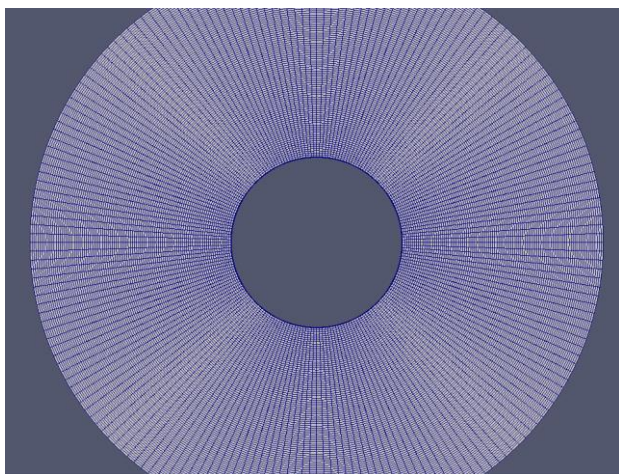


Рис. 4а. Сетка для расчета, вид вдоль оси z

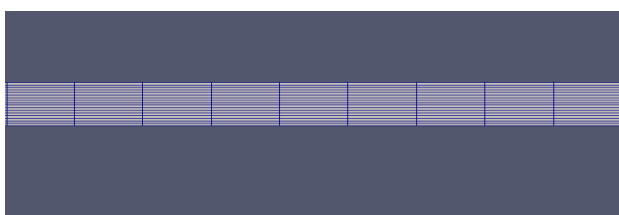


Рис. 4б. Сетка для расчета, вид сбоку, фрагмент

Используемые в расчетах параметры соответствуют данным, приведенным в монографии [10].

*Расчетные геометрические параметры задачи:* расстояние между дисками равно  $h$ . Внутренний и внешний радиусы дисков равны  $a$  и  $b$  соответственно. В данной задаче  $a = 6\text{мм}$ ,  $b = 20\text{мм}$ , зазор между дисками  $h = 0.5\text{мм}$ .

*Параметры модельной смеси (40% глицерина + 60% воды):* коэффициент динамической вязкости  $\eta = 3.7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}$ ; плотность  $\rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Соответственно, коэффициент кинематической вязкости жидкости  $\nu = 3.36 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ .

*Параметры насоса из 2 дисков:* скорость вращения дисков  $\Omega = 1500 \text{об/мин}$ , расход жидкости между дисками  $Q_1 = 0.27 \text{л/мин}$ .

Референсное значение коэффициента регуляризации  $\tau_0$  можно оценить как

$$\tau_0[c] = \frac{\nu}{u^2} \quad (11)$$

или в безразмерном виде через число Рейнольдса:

$$\tau_0 = \frac{1}{Re}, \quad Re = \frac{ul}{\nu}. \quad (12)$$

При этом размерное и безразмерное времена связаны как

$$\tau_0[c] = \tau_0 \frac{l}{u}, \quad (13)$$

где  $u$  – характерное значение скорости в задаче,  $l$  – характерный размер.

В качестве характерного размера выберем ( $l = b = 20\text{мм}$ ). В качестве характерной скорости можно выбрать среднюю скорость в сечении с радиусом  $r$ . Она рассчитывается по формуле  $u(Q) = \frac{Q_1}{S(r)} = \frac{Q_1}{2\pi rh}$ .

Другой характерной скоростью является скорость вращения обода диска:  $u(l) = \Omega \cdot l = 0.5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , ( $\Omega = 1500 \text{ об/мин} = 25 \text{ об/с}$ ,  $l = 20 \cdot 10^{-3}\text{м}$ ). Выбор характерной скорости влияет на значения референсной величины  $\tau_0$ .

Рассчитанные по этим скоростям значения чисел Рейнольдса и  $\tau_0$  приведены в таблице 1. На основании этих оценок в расчетах использовано значение  $\tau = 5 \cdot 10^{-5}\text{с}$ . Шаг по времени для устойчивости расчета составляет:

$$\Delta t = \frac{\tau}{2}. \quad (14)$$

Профиль входной скорости приведен на рис. 5.

Таблица 1

Значения характерных величин для модели из двух дисков

Величины	$Q_1 = 0.27 \text{ л/мин}$ $\Omega = 1500 \text{ об/мин}$
$u_r(a), \text{ м/с}$	См. рис. 5
$u(Q), \text{ м/с}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$
$u(l), \text{ м/с}$	0.5
$u(a), \text{ м/с}$	0.3
$Re(Q)$	160
$Re_{u(l)}$	3000
$Re_{u(a)}$	1800

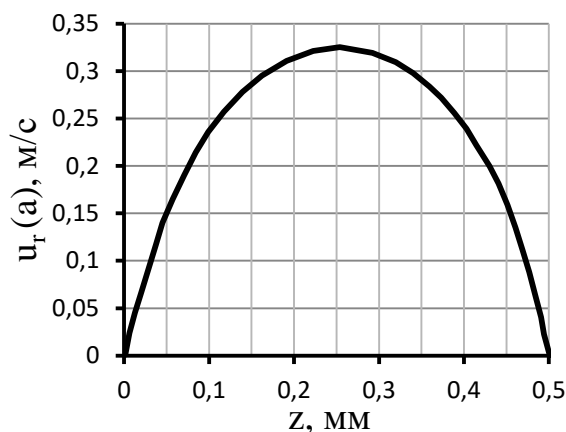


Рис. 5. График входного профиля скорости

### 3.3. Результаты расчетов

Рассмотрено течение в зазоре между вращающимися плоскими дисками применительно к дисковому насосу в виде ротора из двух дисков. Полученные результаты сопоставляются с аналитическим расчетом, который приведен в работе [10].

Таблица 2

#### Значения референсных параметров регуляризации $\tau_0$ [с]

Величины	$Q_1 = 0.27 \text{ л/мин}$ $\Omega = 1500 \text{ об/мин}$
$\tau_0$ , с, по скорости $u(Q)$	$4.6 \cdot 10^{-3}$
$\tau_{0,\Omega}$ , с, по скорости $u(l)$	$1.3 \cdot 10^{-5}$
$\tau$ , с, в расчете	$7.5 \cdot 10^{-5}$

В таблице 2 приведены оценки для выбора параметра регуляризации. На рис. 6 расположены графики, на которых изображены профили радиальных скоростей на входе в зазор между плоскими дисками ( $r = a$ ) и на выходе ( $r = b$ ) для скорости вращения дисков  $1500 \text{ об/мин}$ . На рис. 6(б) показана сеточная сходимость к аналитическому решению.

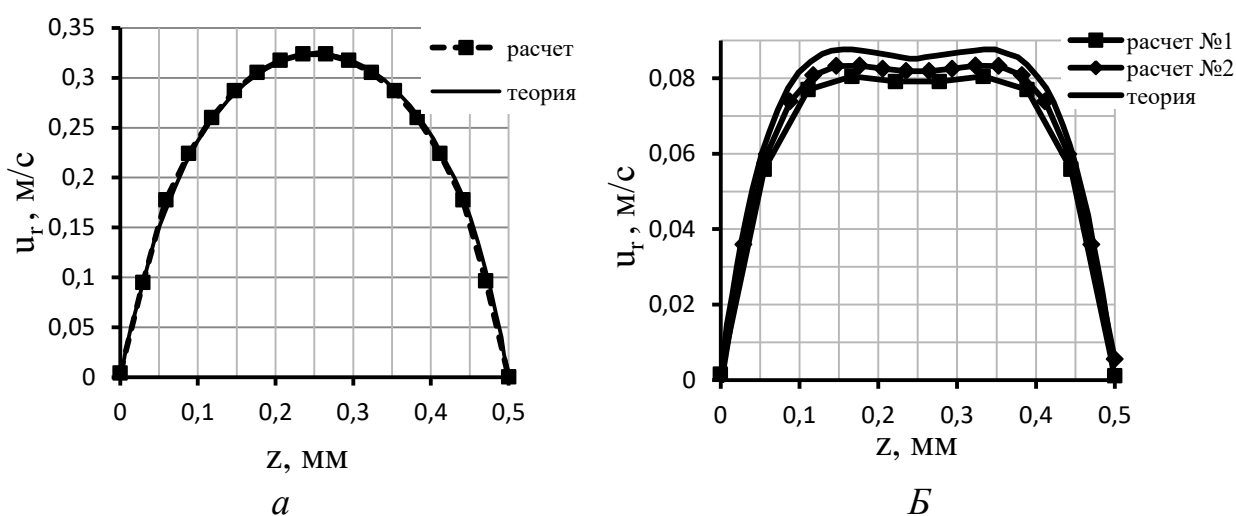


Рис. 6. Сравнение входных и выходных профилей радиальной скорости. а - вход, б – выход, скорость вращения диска  $\Omega = 1500 \text{ об/мин}$ . Сетка для расчета №1 состоит из  $2.88 \cdot 10^5$  ячеек, а для расчета №2 из  $3.4 \cdot 10^5$  ячеек

Для оптимизации параметров насоса необходимо уменьшить время нахождения крови в проточном тракте насоса. С этой целью в монографии [10] были проведены аналитические расчеты траекторий эритроцитов крови в зазоре между дисками. Численные расчеты также показывают, что при скорости вращения дисков  $\Omega = 1500 \text{ об/мин}$  целое количество оборотов частицы равно 2. Траектории обоих расчетов приведены на рис. 7.

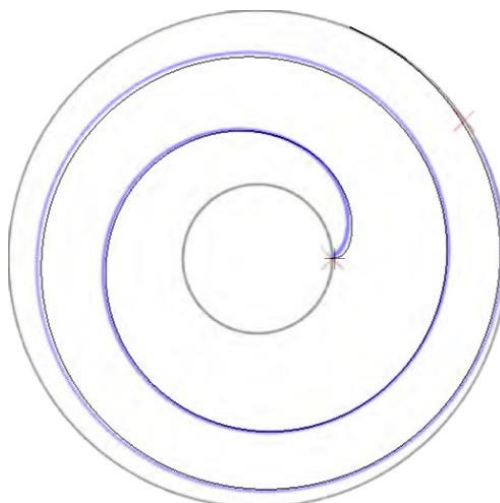


Рис. 7. Траектории движения частиц жидкости из аналитического расчета [10] (синий) и из численного эксперимента (черный)

Как видно на рис. 6 и рис. 7, численный расчет близко совпадает с аналитическим решением. Следовательно, имеется качественное и количественное соответствие между аналитическим решением и численным расчетом, который описывает движение жидкости в зазоре между двух дисков.

### 3.4. Расходно-напорная характеристика

Расходно-напорной характеристикой течения в канале или зазоре называется зависимость разницы давлений на входе и выходе канала от величины расхода. Эти характеристики определяют эффективность работы насоса.

Для построения расходно-напорной характеристики были проведены дополнительные расчеты для различных входных данных, представленных в таблице 3.

Таблица 3

Значения  $\Omega$  и  $Q_1$  для дополнительных расчетов

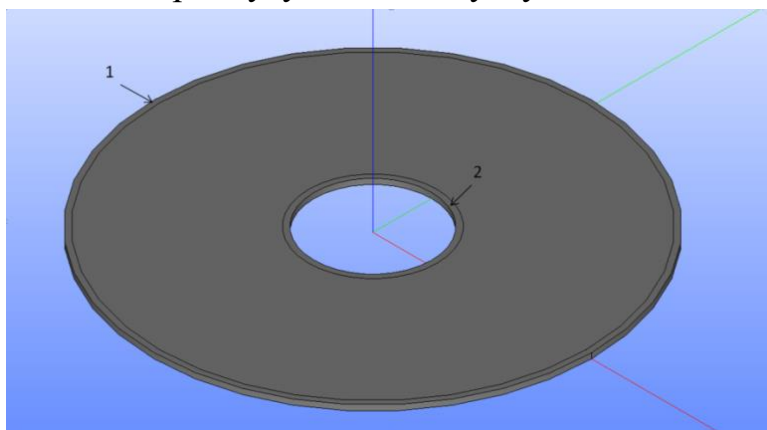
	$\Omega = 1500 \text{ об/мин}$		$\Omega = 2000 \text{ об/мин}$		
$Q_1 \text{ л/мин}$	0.25	0.1	0.45	0.25	0.1

В расчетах при большем расходе в области выхода между дисками возникает численная неустойчивость.

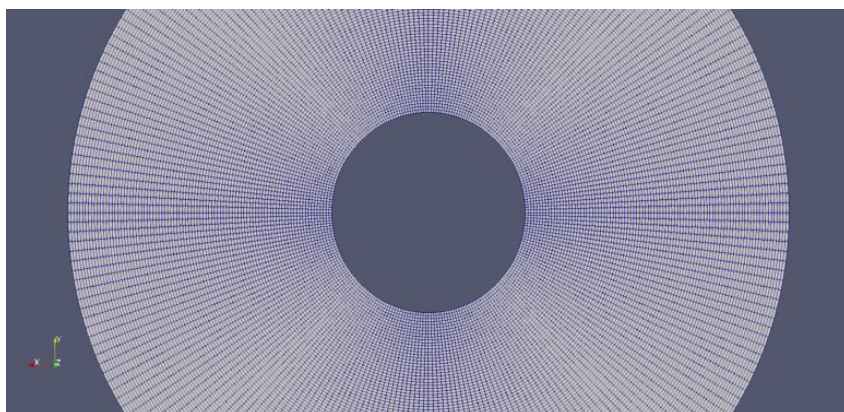
Чтобы решить эту проблему, были увеличены размеры расчетной области путем продления зон входа и выхода потока для сглаживания



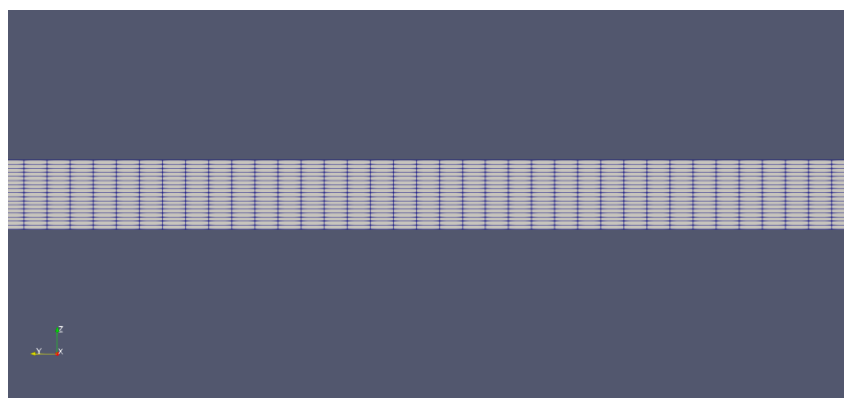
градиентов течения в этих зонах (рис. 8). Сетка данной области представлена на рис. 9. Число ячеек по радиусу, высоте и углу составило  $240 \times 17 \times 84$ .



*Рис. 8.* Вид новой расчетной области. 1 – область дополнительного выхода, 2 – область дополнительного входа



*Рис. 9а.* Вид новой сетки для расчетов



*Рис. 9б.* Фрагмент новой расчетной сетки

Однако сглаживание нефизичных градиентов решения путем увеличения числа узлов расчетной сетки оказалось недостаточным. Для получения устойчивого численного решения был использован прием, описанный в разделе 2 и связанный с заданием начальных условий с помощью серии более мягких начальных приближений с постепенно увеличивающимися числами Рейнольдса. Было проведено четыре дополнительных расчета с  $Re = 400, 2000$  и  $4000$ . Расчет с начальным

значением  $Re = 400$  использовался в качестве начального условия для следующего  $Re$ , и так далее. Для  $Re = 400$  и  $\Omega = 2000$  об/мин референсное значение коэффициента регуляризации  $\tau_{0,\Omega} = 7.5 \cdot 10^{-5}$  с. В расчетах с начальным числом Рейнольдса и последующими использовалось значение  $\tau = 7.5 \cdot 10^{-5}$ . Следовательно, шаг по времени оставался постоянным и равным начальному, соответствовавшему  $Re = 400$ , что сделало всю процедуру расчета экономичной.

Были вычислены значения градиента давления для значений числа оборотов дисков и расходов, приведенных в таблице 3. Полученные точки (рис. 10) с достаточной точностью укладываются на линейную зависимость, полученную в результате аналитических вычислений в [10]. Заметим, что в [10] расход измерялся в системе, состоящей из 12 параллельно работающих дисков, поэтому сравнение вычисленного расхода  $Q_1$  для системы из двух дисков сравнивалось с данными [10] для системы из 12 дисков в виде  $Q=11Q_1$ .

Тем самым результаты численного моделирования качественно и количественно соответствуют данным инженерных расчетов и измерений, что подтверждает адекватность применяемого численного алгоритма.

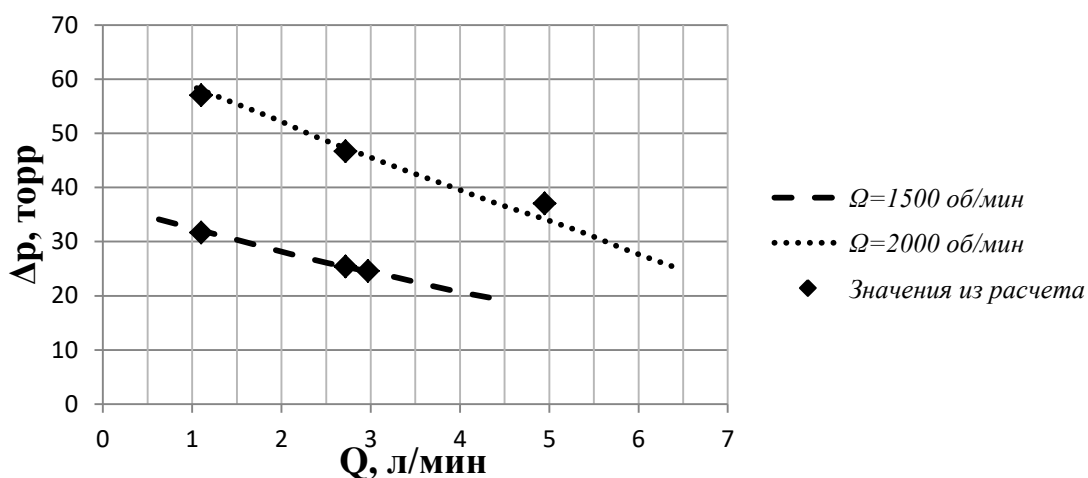


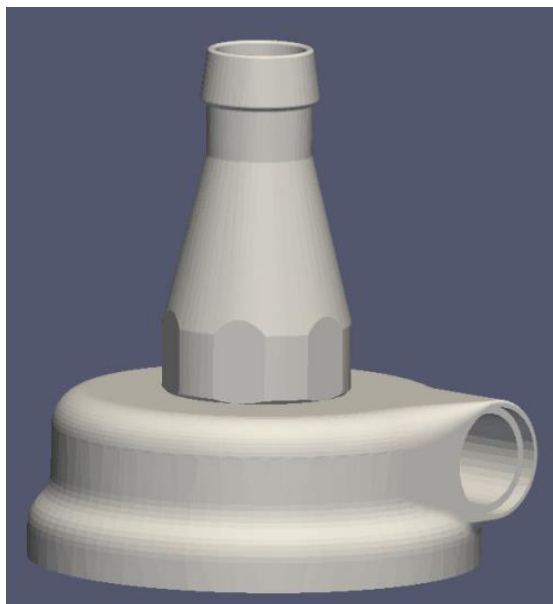
Рис. 10. Сравнение расходно-напорной характеристики, взятой из [10], для  $\Omega = 1500$  об/мин и  $2000$  об/мин со значениями из расчетов.  $Q = 11Q_1$ .

#### 4. Моделирование дискового насоса, состоящего из девяти дисков

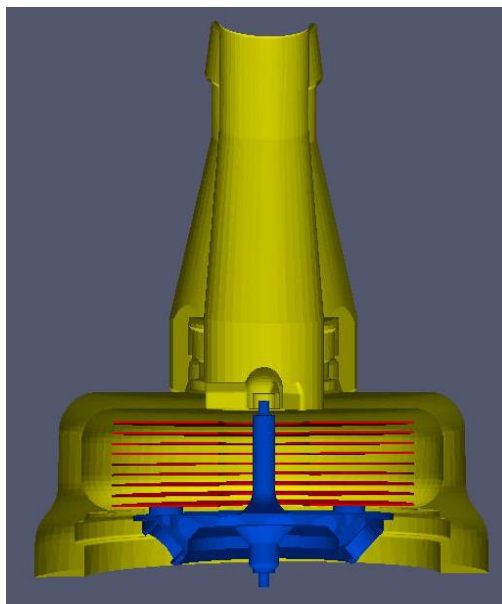
В приведенных далее расчетах используется опыт и приемы, сформулированные в предыдущем разделе, для расчета течения флюида в реалистичной геометрии насоса, состоящего из девяти дисков совместно с системами подвода и отвода рабочего вещества.

#### 4.1. Геометрия и сетка в расчетной области

Модель представляет собой корпус насоса, входной и выходной каналы, ротор, который состоит из 9 гладких дисков (рис. 11). Внешний радиус дисков – 20мм, внутренний – 6мм, толщина – 0.1мм, расстояние между дисками – 0.5мм. Диаметры входного и выходного отверстий совпадают и равны 12мм.



а

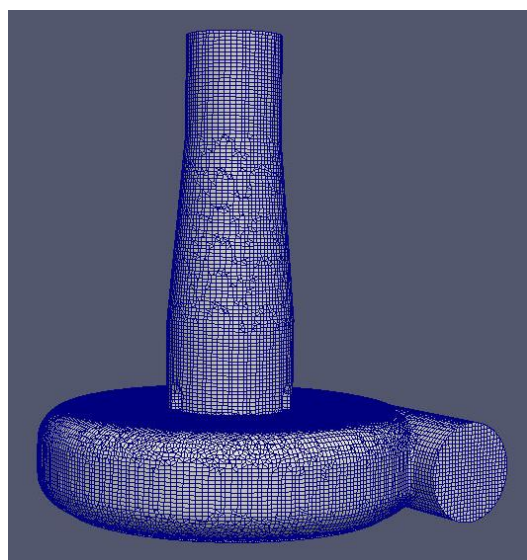


Б

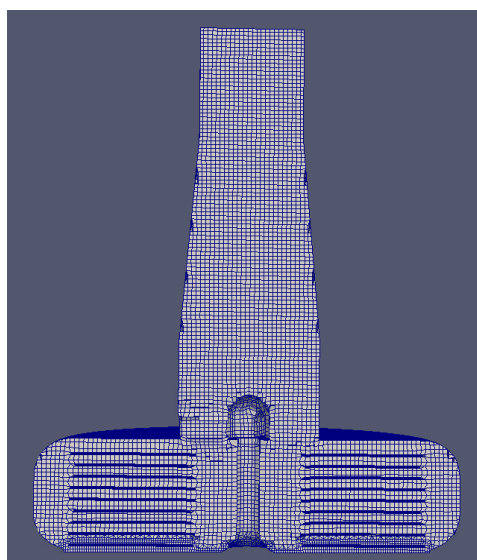
Рис. 11.  
а – вид  
сбоку,  
б – вид  
в срезе

Геометрия задачи очень сложна, и расчет требует больших вычислительных затрат, которые пропорциональны размерам вычислительной сетки. Поэтому первым этапом работы был выбор достаточной для адекватности расчета, и в то же время минимальной по числу узлов пространственной сетки.

Изначально была построена сетка, содержащая приблизительно  $4.2 \cdot 10^5$  ячеек, (рис. 12). Сетка включала в себя 2 расчетные точки между дисками, 145 точек по высоте прибора и 50 точек по радиусу. Данная сетка была построена с помощью автоматического генератора сетки snappyHexMesh на базе OpenFOAM.



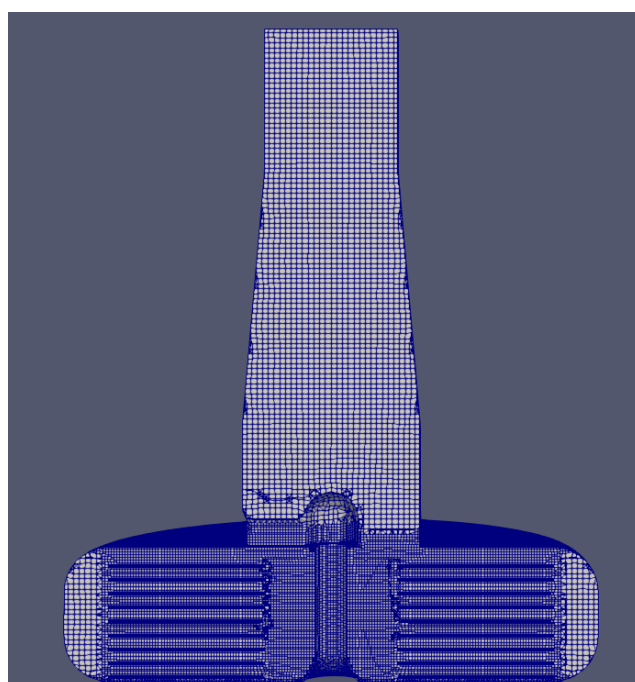
а



б

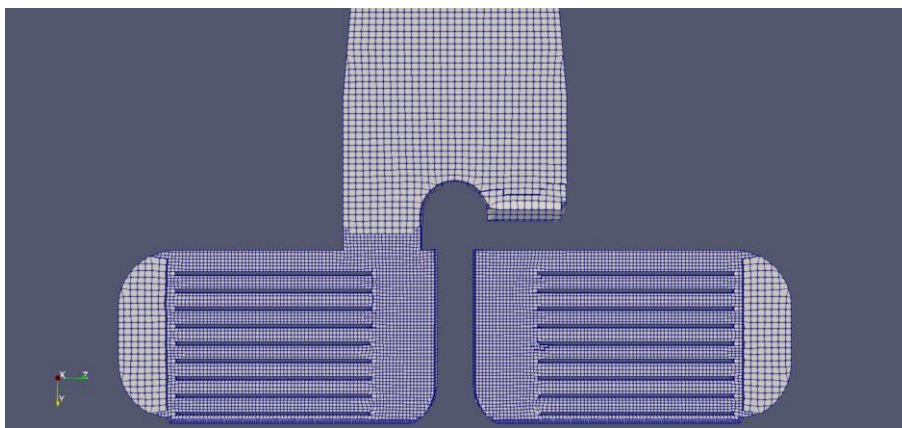
Рис. 12.а –  
область  
расчетов  
вид сбоку,  
б –  
область  
расчетов в  
срезе

Как и в предыдущей задаче, на рассматриваемой пространственной сетке появляются нефизические осцилляции, связанные с недостаточной подробностью сетки в областях между дисками. Поэтому была построена новая сетка с дополнительным сгущением в области дисков (рис. 13). Новая сетка по сравнению со старой обеспечивала меньший разброс в размерах ячеек сетки в зонах сопряжения междисковых пространств и зон вытекания флюида. При этом количество ячеек для всей конфигурации увеличилось приблизительно до  $1.3 \cdot 10^6$ . Сетка включала в себя 5 точек между дисками, 180 точек по высоте устройства и 90 точек вдоль радиуса. Данная пространственная сетка также была построена с помощью построителя сетки snappyHexMesh.



а

Рис. 13.а –  
область  
расчетов в  
срезе; б –  
фрагмент  
среза



б

При генерации сетки не удастся избежать некоторого количества расчетных ячеек, которые имеют негексаэдральный вид. В рассмотренной версии программы особенности реализации численного алгоритма предполагают использование ячеек правильной гексаэдральной формы, обеспечивающих требуемую аппроксимацию  $\tau$  – слагаемых. Поэтому как и в примере расчета течения между двумя дисками, вся сетка была разбита на два множества. Значения полей в ячейках, имеющих гексаэдральную структуру, рассчитывались с помощью центрально-разностной КГид схемы, а остальные вычислялись с помощью схемы с направленными разностями. Число негексаэдральных ячеек составляло примерно 0.5% от общего количества ячеек.

#### 4.2. Результаты расчетов

Расчеты производятся для параметров, приведенных в разделе 3, и значений, взятых из таблиц 4 и 5. Так же, как и в варианте с двумя дисками, расчет начинался с небольших значений числа  $Re$ , которое последовательно увеличивалось до нужной величины путем уменьшения коэффициента вязкости. В этих расчетах также шаг по времени выбирался в соответствии с первоначальным приближением и не уменьшался при увеличении числа Рейнольдса вплоть до его требуемого значения.

Таблица 4

#### Значения характерных величин для модели из девяти дисков

Величины	$Q = 4.07 \text{ л/мин}$ $\Omega = 1500 \text{ об/мин}$
$u_{вх}$ , м/с	0.6
$p_{вых}$ , Па	$10^4$
$Re$ по входному расходу	3000
$Re_{u(l)}$	10000
$u(l)$ по ободу диска, м/с	0.5

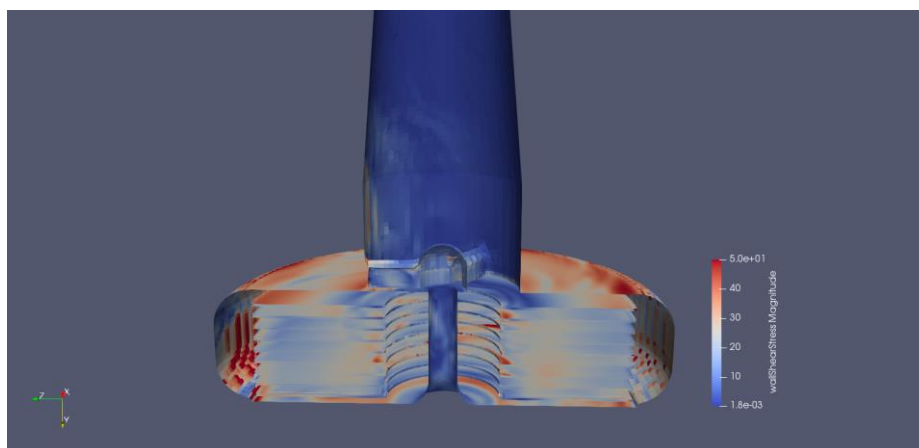
Как и в случае с двумя дисками, в данной задаче было проведено четыре дополнительных расчета для  $Re = 200, 1000, 2000$  и  $10000$ . Расчет с  $Re = 200$  использовался в качестве начального условия для следующего  $Re$ , и так далее. Для  $Re = 200$  и  $\Omega = 1500$  об/мин референсное значение коэффициента регуляризации  $\tau_0 = \tau_{0,\Omega} = 6.7 \cdot 10^{-4}$  с. За характерную скорость здесь принимается скорость вращения обода диска. В расчетах с начальным числом Рейнольдса и последующими использовалось значение  $\tau = 1 \cdot 10^{-4}$ . Шаг по времени также оставался неизменным  $\Delta t = \tau/2 = 0.5 \cdot 10^{-4}$ . Для варианта  $\Omega = 3000$  об/мин использовались такие же параметры расчета.

Таблица 5

**Значения референсных параметров регуляризации  $\tau_0$  [с] и параметров в расчетах для двух скоростей вращения**

	$\Omega = 1500$ об/мин	$\Omega = 3000$ об/мин
$\tau_0, \text{с}$	$6.7 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$
$\tau, \text{с, в расчете}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$

В результате численного моделирования полной задачи была получена нестационарная картина течения жидкости с зонами отрыва потока и застоя, что говорит о достаточно сложном характере движения жидкости в насосе.



а



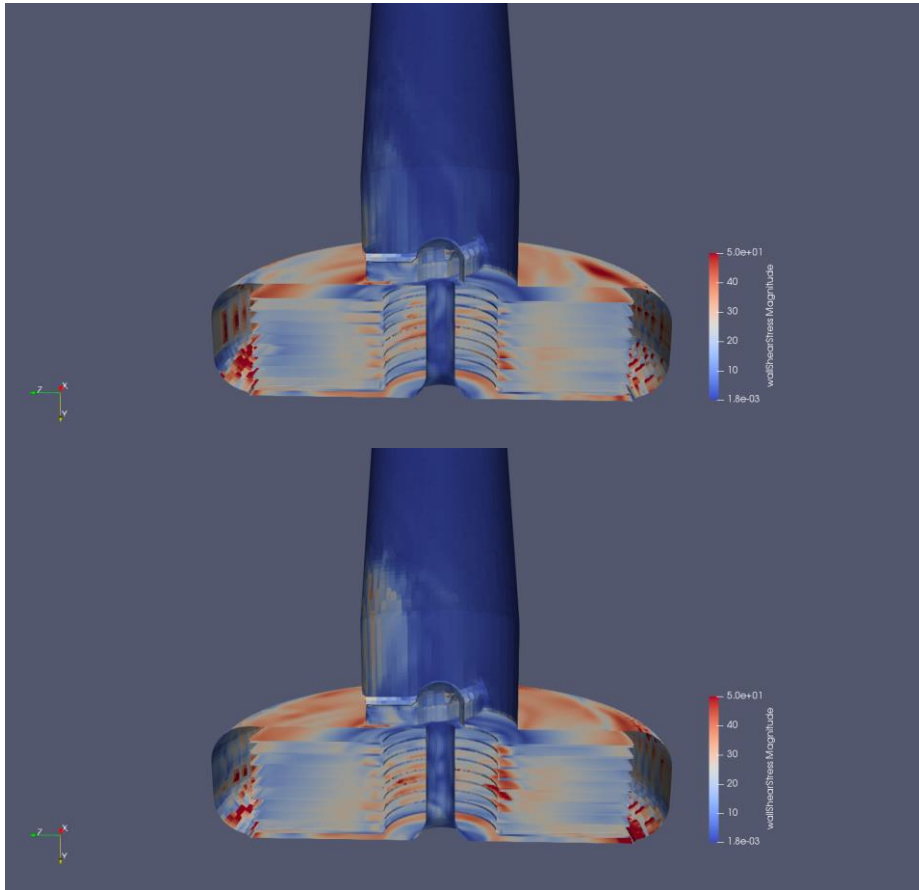
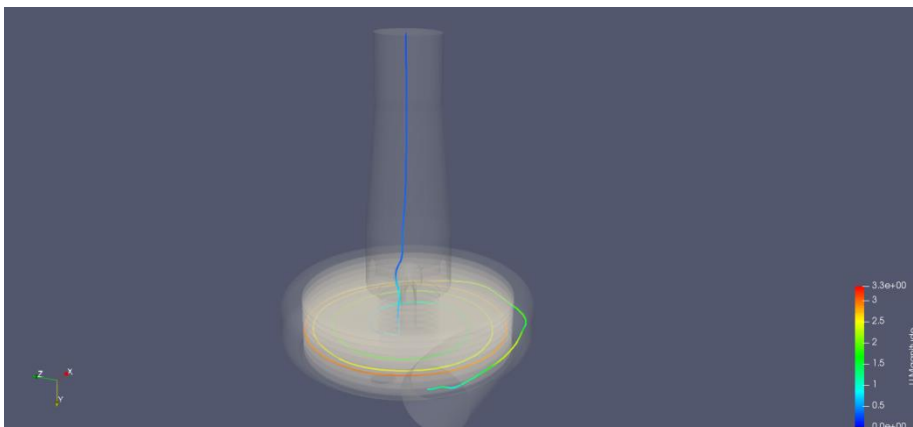


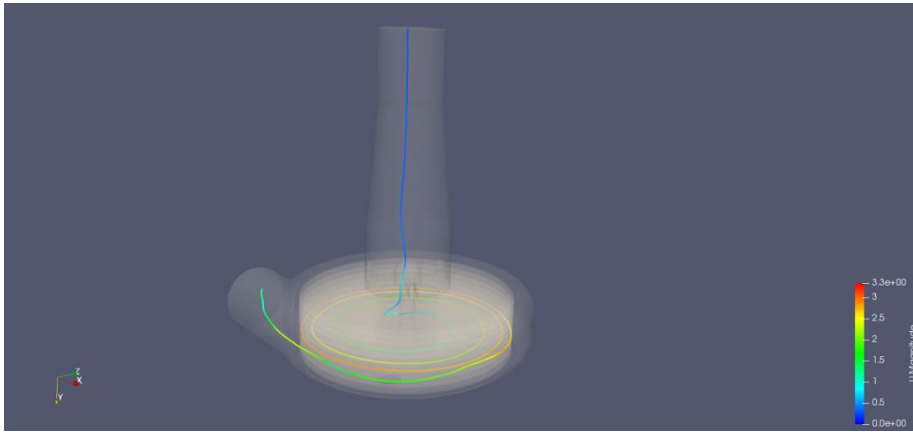
Рис. 14. Поле модуля напряжения сдвига на последовательные моменты времени,  $t_a < t_b < t_b$

На рис. 14 представлены результаты расчета варианта для  $\Omega = 1500$  об/мин при расходе  $Q = 3.63$  л/мин. Показаны значения поля модуля тензора вязких напряжений  $\Pi_{NS}$ , рассчитанных для внутренних поверхностей насоса для трёх различных моментов времени, с интервалами 0.14 сек и 0.05 сек. Известно [10], что безопасные для организма человека значения этого параметра, не вызывающие образование тромбов, находятся в пределах от 40 до 200 Па. В проведенных расчетах значения не выходят за этот предел.

Траектория движения частиц в дисковом насосе представлена на рис.15. Данный пример показывает движение частиц, не попадающих в зоны застоя и отрыва потока.

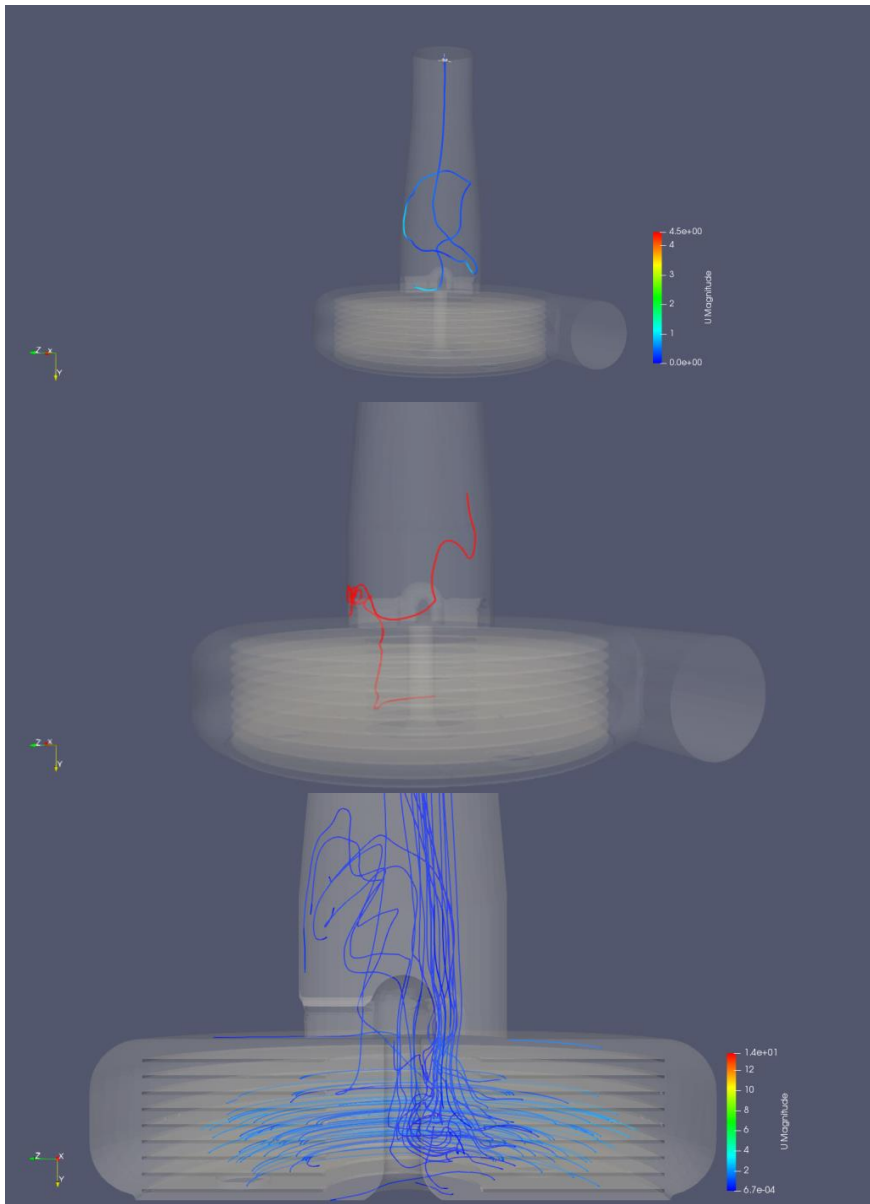


*a*



б

Рис. 15. Пример траектории движения частицы,  
 $\Omega = 1500 \text{ об/мин}$ ,  $Q = 3.63 \text{ л/мин}$

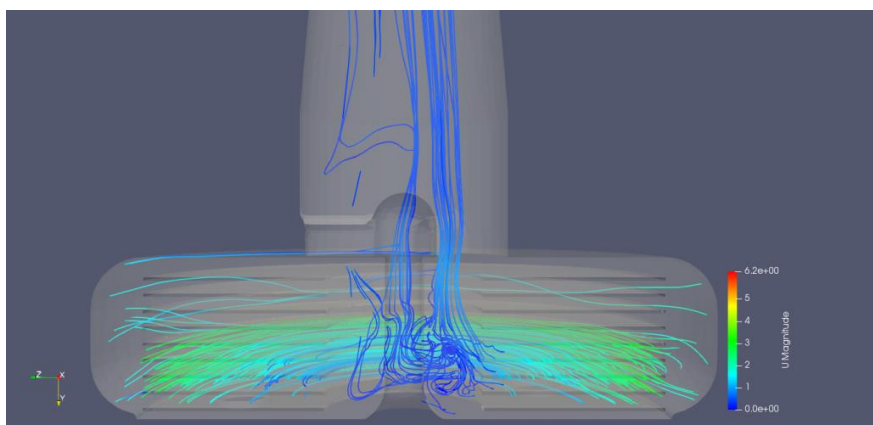


а

б

в





2

Рис. 16. Траектория движения частиц,  $\Omega = 1500 \text{ об/мин}$ ,  $Q = 3.63 \text{ л/мин}$  :  
а, б – движение одной частицы; в, г – для 50 частиц

В том же варианте расчета наблюдаются частицы, которые отклоняются от представленного выше движения и попадают в зоны застоя или зоны сложного нестационарного вихревого движения. Примеры таких траекторий представлены на рис. 16. Образование таких вихрей в различных областях насоса в дальнейшем могут привести к тромбообразованию, поэтому в разрабатываемом приборе зоны вихрей должны быть минимизированы.

В работе рассчитаны дополнительные варианты режимов для построения расходно–напорной характеристики (рис. 17). Соответствующий набор входных данных представлен в таблице 6.

Таблица 6

#### Значения $\Omega$ и $Q$ для дополнительных расчетов

	$\Omega = 1500 \text{ об/мин}$		$\Omega = 3000 \text{ об/мин}$		
$Q \text{ л/мин}$	1.5	2.75	3.73	5.0	6.5

Получено, что для двух выбранных значений числа оборота расходно–напорная характеристика имеет линейный вид (рис. 17), что соответствует инженерным результатам, представленным в [10], и тем самым подтверждает корректную работу программы и всей математической модели насоса в целом.

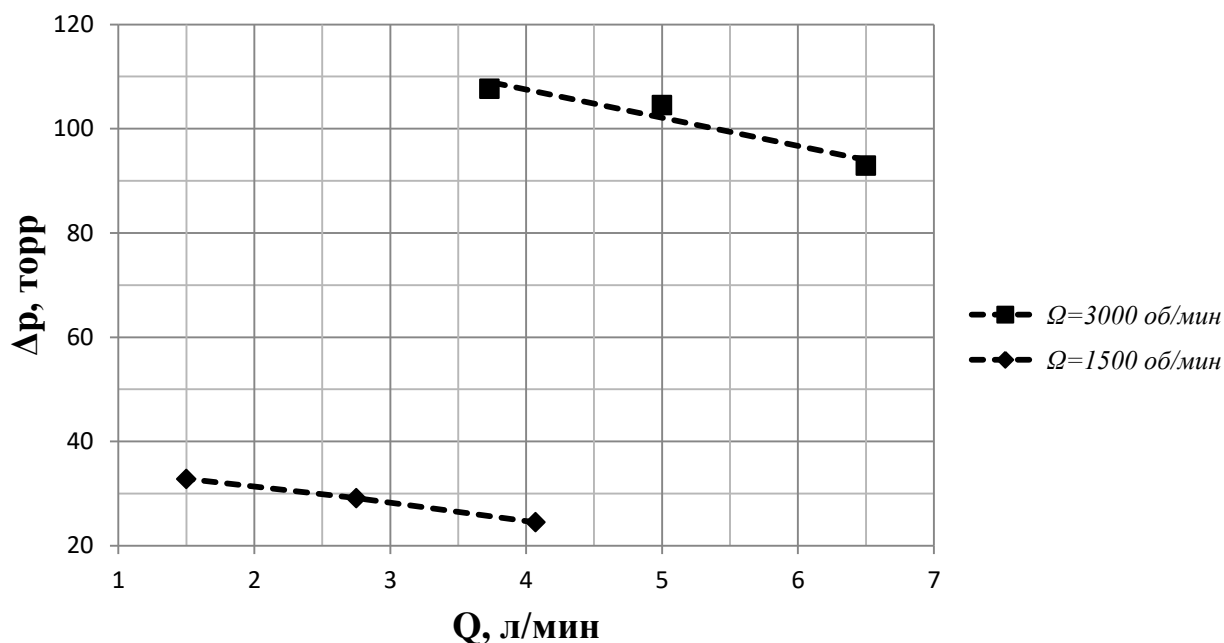


Рис. 17. Расходно-напорная характеристика для  $\Omega = 1500 \text{ об/мин}$   
и  $3000 \text{ об/мин}$

## 5. Об оценках влияния реологических свойств крови на работу насоса

Неньютоновской, или реологической, называется жидкость, коэффициент вязкости  $\nu$  которой зависит не только от природы вещества и температуры, но также и от условий течения жидкости, в частности от градиента скорости. Коэффициент вязкости в этом случае не является постоянным, и зависимость коэффициента вязкости от градиента скорости оказывается нелинейной. Примером такой жидкости является кровь.

Кровь – это неньютоновская жидкость, вязкость которой имеет сложный нелинейный характер и определяется, в частности, полем скоростей течения. Проводить натурный эксперимент с реальной кровью практически невозможно, однако влияние реологических свойств крови на характеристики насоса можно оценить в численном эксперименте.

Для оценки влияния этих эффектов на работу насоса и на величины вязких напряжений в нем в имеющийся решатель QHDFoam включена модель неньютоновской жидкости.

Широко используемыми неньютоновскими моделями являются модель степенного закона, модель Кассона и модель Карро [11] и [12]. Для моделирования течения крови часто используют степенную модель вязкости, которая имеет вид:

$$\nu = k\dot{\gamma}^{(n-1)},$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $k$  – индекс консистенции потока,  $\dot{\gamma}$  – скорость сдвига, а  $n$  – индекс степенного закона. Индекс степенного закона  $n$  определяет степень неньютоновского поведения течения. Индексы  $k$  и  $n$  зависят от таких компонентов крови, как гематокрит, фибриноген, холестерин и т.д. Тогда тензор вязких напряжений имеет вид:

$$\Pi_{NS} = \nu(\dot{\gamma}) \left[ (\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T \right].$$

В OpenFOAM величина  $\dot{\gamma}$  безразмерная, размерность индекса  $k$  считается равной  $[m^2/c]$ . Для расчета вязкости  $\nu(\dot{\gamma})$  все однофазные решатели в OpenFOAM используют класс `singlePhaseTransportModel`.

Чтобы проверить правильность работы нового решателя, предназначенного для неньютоновской жидкости, рассматривалось течение между двумя параллельными пластинами. На входе задавался профиль аналитического решения, на выходе его вид не должен измениться. Формула для аналитического решения имеет вид [13]:

$$V_x(y) = \frac{Q}{B(n, h)} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{n}+1} - \left| \frac{h}{2} - y \right|^{\frac{1}{n}+1} \right],$$

где  $B(n, h) = 2(n+1) \left( \frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{n}+2} \frac{1}{2n+1}$ .

Полученные численные результаты в выходном сечении канала с высокой точностью совпадают с аналитическими (рис. 18), что подтверждает правильность работы модели для реологической жидкости. Расчеты полной конфигурации насоса с неньютоновскими характеристиками флюида находятся в стадии реализации.

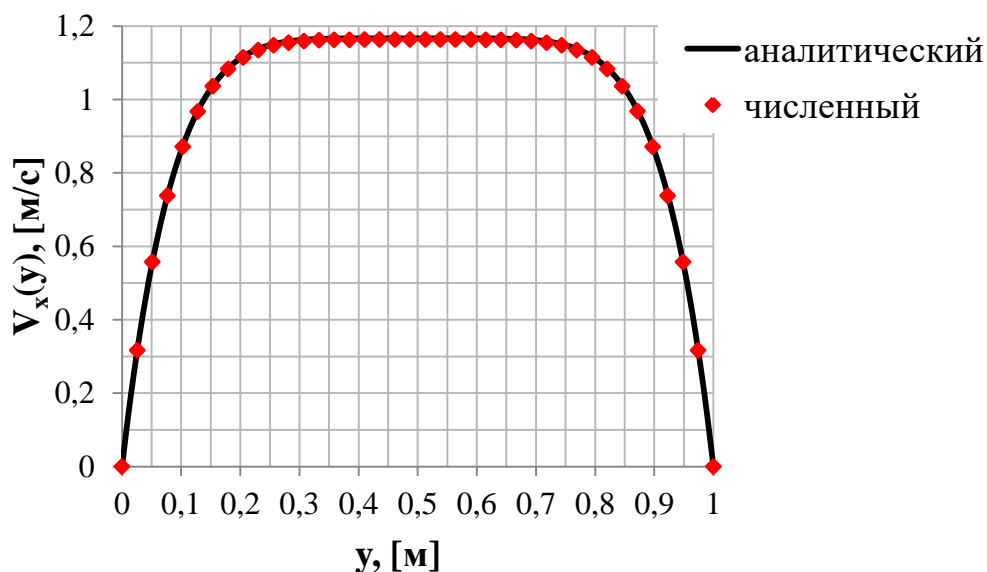


Рис. 18. Профиль скорости на выходе расчетной области,  $n = 0.2$ .

### Заключение и основные результаты работы

Разработана численная модель течения вязкой несжимаемой жидкости в проточной части дискового насоса поддержания кровообращения.

Математическая модель основана на регуляризованных, или квазигидродинамических (КГид), уравнениях. Эти уравнения тесно связаны с системой уравнений Навье-Стокса и содержат дополнительные слагаемые, которые пропорциональны параметру регуляризации  $\tau$ . В отличие от классических схем решения уравнений Навье-Стокса, численные алгоритмы, основанные на этих уравнениях, обладают контролируемой численной диссипацией. Величина диссипации контролируется малым варьируемым параметром  $\tau$ , величина которого определяется характерным гидродинамическим временем задачи. Для задач вынужденной конвекции базовое значение  $\tau$  определяется как отношение коэффициента кинематической вязкости жидкости к квадрату характерной скорости.

Предложенная методика реализована с применением решателя QHDFoam на базе библиотеки с открытым исходным кодом OpenFOAM. В процессе разработки методики алгоритм QHDFoam был верифицирован на задаче течения несжимаемой вязкой жидкости в зазоре между двумя вращающимися дисками.

Для задачи о течении в зазоре проведена серия расчетов при разных расходах перекачиваемой жидкости и скоростях вращения дисков. Было получено качественное и количественное соответствие аналитического решения, представленного в [10], с результатами численного расчета для выходного профиля радиальной скорости, траектории движения частиц и расходно-напорных характеристик.

Для задачи о дисковом насосе поддержания кровообращения в полной постановке была использована разработанная расчетная модель, дополненная входным каналом, рабочей частью, состоящей из девяти дисков, и выходным коллектором в форме «улитки».

Пространственная сетка в расчетной области обеих задач была построена с помощью автоматического генератора сетки пакета OpenFOAM – snappyHexMesh. Доминирующим типом ячеек был выбран гексаэдр правильной формы. Количество ячеек для задачи о течении между дисками составляло  $3.4 \cdot 10^5$ , для полной задачи составило приблизительно  $1.3 \cdot 10^6$ .

В результате численного моделирования полной задачи была получена нестационарная картина течения жидкости с зонами отрыва потока, застоя, что говорит о достаточно сложном характере движения жидкости в насосе.

Для оценки возможности образования тромбов были вычислены значения вязких напряжений на внутренних поверхностях дискового насоса. Допустимые значения вязких напряжений для организма человека должны быть в пределах от 40 до 200 Па (значения взяты из монографии [10]). В проведенных расчетах на внутренних поверхностях дискового насоса значения не превышают 50 Па для скорости вращения дисков  $\Omega = 1500$  об/мин, и 150 Па для  $\Omega = 3000$  об/мин.

На основе рассчитанных гидродинамических полей была построена расходно-напорная характеристика. Установлено качественное соответствие между расходно-напорными характеристиками численного расчета и эксперимента, описанного в монографии [10].

Построенная математическая модель насоса обобщается для оценки влияния реологических свойств крови на его работу.

Таким образом, в результате проведенного вычислительного эксперимента средствами КГид алгоритмов были получены гидродинамические поля скорости и давления в проточной части дискового насоса, исследованы зоны отрывов и зоны застоя, получены расходно-напорные характеристики для разных скоростей вращения дисков. Сделан прогноз значений вязких напряжений на поверхностях дискового насоса, который показал, что вычисленные значения вязких напряжений лежат в допустимом диапазоне, обеспечивающем безопасную работу системы поддержания кровообращения человека.

### Список литературы

[1] Daniil A. Ryazanov, Matvey V. Kraposhin, Tatiana G. Elizarova, Ilias N. Sibgatullin, Michael D. Kalugin, Vasily E. Velikhov, Eugene A. Ryabinkin "OpenFOAM High Performance Computing Solver for Simulation of Internal Wave Attractors in Stratified Flows using Regularized Hydrodynamic Equations". ISPRASOPEN 2018 Procedia, Moscow, 2018.

[2] Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.

[3] Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2000.

[4] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях стационарной системы Навье-Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика, 2017, вып. 2, 5–15

[5] <https://github.com/unicfdlab/QGDSolver>

[6] Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н. и др. Глава 2. Геометрические многосеточные методы. Глава 3. Алгебраические многосеточные методы / Методы ускорения газодинамических расчётов на неструктурированных сетках. М. ФИЗМАТЛИТ, 2014. — С. 75-255.

[7] Vadimas Starikovičius, Raimondas Čiegis, Andrej Bugajev. "On Efficiency Analysis of the OpenFOAM-Based Parallel Solver for Simulation of Heat Transfer in and Around the Electrical Power Cables". INFORMATICA, 2016, Vol. 27, No. 1, 161–178. 2016 Vilnius University. <https://doi.org/10.15388/Informatica.2016.80>

[8] Tim Behrens. "OpenFOAM's basic solvers for linear systems of equations". February 18, 2009.

[9] Истомина М.А., Шильников Е.В. Об аппроксимации потоковых на пространственных сетках нерегулярной структуры// Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, РАН, 2019, № 86, 22с. Doi:10.20948/prepr-2019-86

[10] Чернявский А.М., Медведев А.Е., Приходько Ю.М., Фомин В.М., Фомичев Е.П., Фомичев А.В., Чехов В.П., Рузматов Т.М., Караськов А.М.

Дисковые насосы для поддержки кровообращения в организме человека. Новосибирск, 2016.

[11] Tribotech D, Chang W, et al. Modeling of Blood Flow in Simple Microchannels; Technical Proceedings of the Fourth International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems; Hilton Head Island, NC. 2001. pp. 218–222.

[12] Shewaferaw S. Shibeshi and William E. Collins. The Rheology of Blood Flow in a Branched Arterial System. *ApplRheol.* 2005; 15(6): 398–405. doi: [10.1901/jaba.2005.15-398](https://doi.org/10.1901/jaba.2005.15-398)

[13] Moussa Tembely, Ali M. AlSumaiti, Mohamed S. Jouini, Khurshed Rahimov. The Effect of Heat Transfer and Polymer Concentration on Non-Newtonian Fluid from Pore-Scale Simulation of Rock X-ray Micro-CT. *Polymers* 2017, 9(10), 509; <https://doi.org/10.3390/polym9100509>.